

10

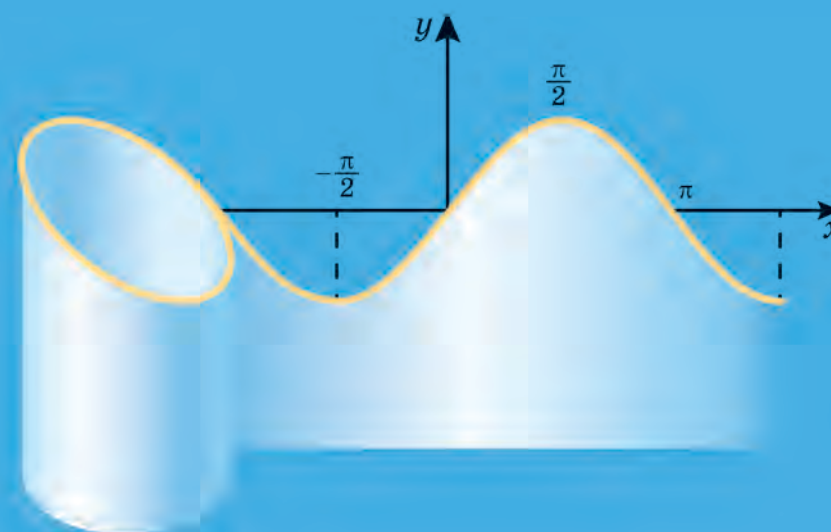
10

MATEMATIKA
ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEL.
TÉRMÉRTAN

MATEMATIKA

ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEL.
TÉRMÉRTAN

STANDARD SZINT



MATEMATIKA

ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI. TÉRMÉRTAN

STANDARD SZINT

Tankönyv

a magyar oktatási nyelvű általános középfokú tanintézetek
10. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Перекладено за виданням:

Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія,
рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої
освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський,
М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.

М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія,
рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. осв. з
навч. угорською мовою / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,
В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої. – Львів :
Світ, 2018. – 256 с. : іл.

ISBN 978-966-914-139-2

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

© Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А.,
Полонський В. Б., Якір М. С., 2018
© ТОВ ТО „Гімназія”, оригінал-
макет, художнє оформлення, 2018
© Поллої Д. Ф., переклад угорською
мовою, 2018

ISBN 978-966-914-139-2 (угор.)
ISBN 978-966-474-310-2 (укр.)

A SZERZŐKTŐL

KEDVES TIZEDIKESEK!

A mai korban nincs olyan tudományág, amelyben ne alkalmazzák a matematika eredményeit. A fizikában és a kémiában, a csillagászatban és a biológiában, a földrajzban és a közgazdaságtanban, de még a nyelvtudomány és a történelem is használ matematikai eszközöket.

Reméljük, ez a tankönyv segítségekre lesz abban, hogy alapos matematikai ismeretekre tegyetek szert. A könyv két fejezetből áll: az első rész az algebra és az analízis elemeivel (1–26. pont), a második pedig a mértannal (27–43. pont) foglalkozik.

Az **algebra és az analízis elemei** nagyon érdekes és hasznos tantárgy. Fejleszti az analitikus és a logikus gondolkozást, a kutatási készségeket, a matematikai kultúrát, csiszolja az elmét. Ebben a tanévben megkezditek a matematikai analízissel való ismerkedést, megismerkedtek majd új függvényekkel, tanulmányozni fogjátok ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, elsajátítjátok a függvények vizsgálatának módszereit.

A mértannak azt a fejezetét, amelyben a térbeli alakzatokkal és ezek tulajdonságaival fogtok foglalkozni, **térmértannak** vagy **sztereometriának** nevezzük. A mértannak ezt a részét fogjátok a 10. és 11. osztályokban megismerni. A sztereometria szó a görög *stereos* – térbeli és *metreos* – mérték szavakból ered. A térmértan ismerete kiemelten fontos. A térbeli látás és alapos mértani ismeretek nélkül lehetetlen elsajátítani a mérnöki szakmákat, építési vagy építészeti feladatokat, számítógépes grafikát, ruha- és lábbelitervezést stb. Ez kézenfekvő, mivel az ember, illetve a természet által létrehozott objektumok nem síkbeli alakzatok (1. ábra).



Kijevi–
Pecszerszki
haranglábi



A *Mrija* ukrán repülőgép
a világ legnagyobb repülője



A Föld képe
a világűrből

1. ábra

A tankönyv pontokra van felosztva. Az elméleti tananyag elsajátítása során fordítsatok különös figyelmet a **félkövérrel**, a *félkövér-dőlttel* és a *dőlttel* szedett szövegrészre; így jelöljük a könyvben a szabályokat és a legfontosabb matematikai állításokat. Az elméleti részt rendszerint gyakorló feladatok követik. Az itt ismertetett módszerek mintául szolgálhatnak a feladatmegoldások során.

Ebben a tankönyvben sok tantételt is találtok, melyek közül több bizonyítást is tartalmaz. Abban az esetben, ha a bizonyítás nem tartozik az iskolai tananyag keretébe, akkor a könyvben csak a tétel megfogalmazása szerepel.

Minden pontban önálló munkára kijelölt feladatok vannak, amelyek megoldásához csak az elméleti rész elsajátítása után fogjatok hozzá. A gyakorlatok között vannak könnyűek, közepesek és nehezek (különösen a *-gal jelöltek).

Sok sikert kívánunk!

EGYEZMÉNYES JELEK

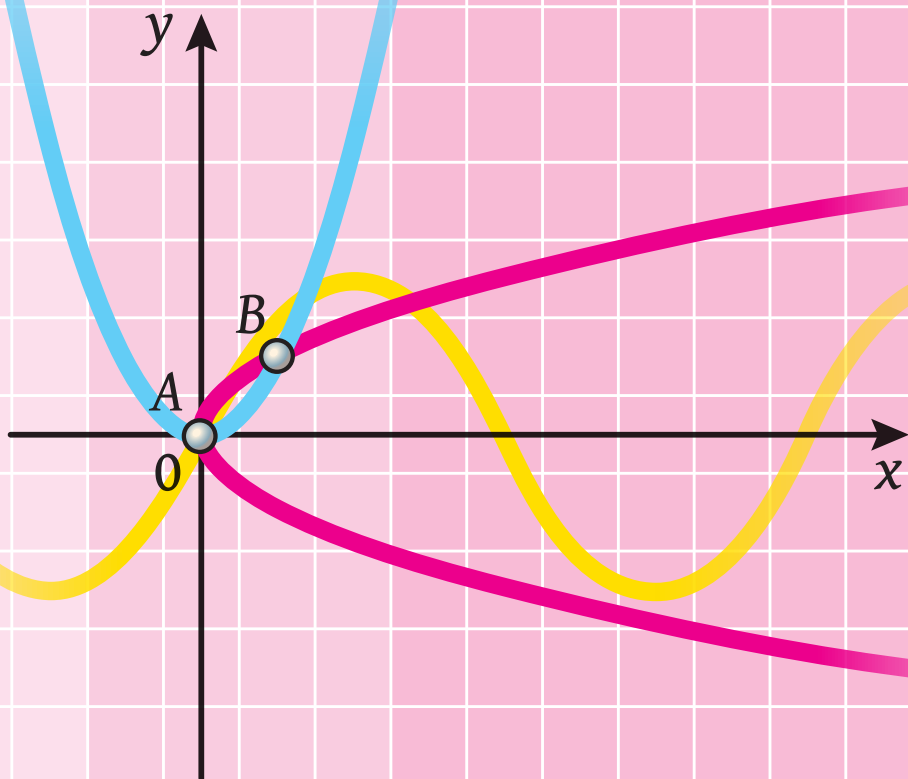
n°	alap- és középszintű tudásnak megfelelő feladatok;
$n^{\bullet}$	jó tudásszintnek, illetve a tantervi követelményeknek megfelelő feladatok;
$n^{\bullet\bullet}$	magas tudásszintnek megfelelő feladatok;
n^*	matematikai szakkörökre és tanórán kívüli foglalkozásokra ajánlott feladatok jelölése;
◀	a tétel bizonyításának és a feladat megoldásának végét jelölő karakter;
	kulcsfeladatok, melyek eredményei felhasználhatók más feladatok megoldása során.

A **zöld** számozású példákat házi feladatra, a **kék** számozásúakat pedig szóbeli feladatként ajánljuk.

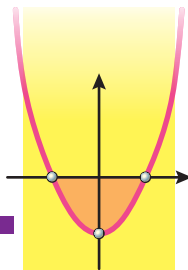
1. fejezet

Algebra és az analízis elemei

1. §. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjaik
2. §. Trigonometrikus függvények
3. §. A derivált és alkalmazása



FÜGGVÉNYEK, EZEK TULAJDONSÁGAI ÉS 1.§. GRAFIKONJAIK



Ebben a fejezetben megisméltitek a függvényekről eddig tanultakat; megtanuljátok, hogy mit nevezünk a függvény legnagyobb és legkisebb értékének az intervallumon, milyen függvények lesznek párosak és melyek páratlanok; megismerkedtek a páros és páratlan függvények grafikonjainak tulajdonságaival.

Megismerkedtek az egész kitevőjű hatványfüggvény meghatározásával, és a tulajdonságaival; mit nevezünk n -edik gyöknek, milyen tulajdonsággal rendelkezik az n -edik gyök; mit nevezünk racionális kitevőjű hatványnak és milyen tulajdonságokkal rendelkeznek ezek; és milyen egyenleteket nevezünk irracionális egyenleteknek.

Megtanultok n -edik gyököt vonni; racionális kitevőjű számok hatványra emelését; racionális kitevőjű hatványok és n -edik gyököt tartalmazó kifejezések átalakítását; irracionális egyenletek megoldását.

1. A függvény legnagyobb és legkisebb értékei. Páros és páratlan függvények

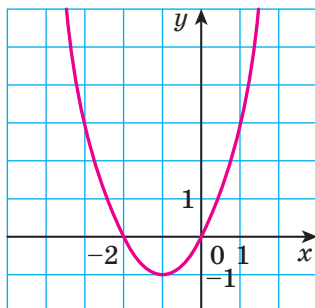
Mielőtt megismerkedtek ezzel a ponttal ajánljuk, végezzétek el az 1.24–1.28. gyakorlatokat.

A 7. osztályban megismerkedtetek a függvény fogalmával és az algebra több fejezetének elsajátítása során többször foglalkoztatok már vele. Nem véletlenül foglal el ilyen fontos helyet ez a fogalom, mivel a függvény számos valós folyamatnak is matematikai modelljeül szolgál.

Már ismeritek a következő fogalmakat: *értelmezési tartomány*, *értékkészlet*, *zérushelyek*, *előjeltartási intervallumok*, *a függvény növekedési és csökkenési intervallumai*.

Például az $y = x^2 + 2x$ függvény grafikonja az 1.1. ábrán látható:

- értelmezési tartománya:
 $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- értékkészlete: $E(y) = [-1; +\infty)$;
- zérushelyei: -2 és 0 ;



1.1. ábra

- előjeltartási intervallumai: a függvény pozitív értékeket vesz fel a $(-\infty; -2)$ és $(0; +\infty)$ intervallumon, negatív értékeket pedig a $(-2; 0)$ intervallumon;
- a függvény növekedési és csökkenési intervallumai: a $(-\infty; -1]$ intervallumon csökkenő, a $[-1; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő.

A fenti lista nem teljesen meríti ki azokat a tulajdonságokat, melyeket a függvény vizsgálata során tanulmányozni kell. Megvizsgáljuk azokat az új fogalmakat, melyek segítenek részletesebben jellemezni a függvényt.

Definíció. Az $f(x_0)$ számot az $M \subset D(f)$ halmazon az f függvény **legnagyobb értékének** nevezzük, ha létezik egy olyan $x_0 \in M$ szám, hogy minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \geq f(x)$ egyenlőtlenség.

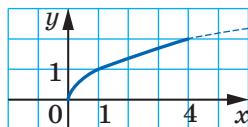
Így jelöljük: $\max_M f(x) = f(x_0)$.

Definíció. Az $f(x_0)$ számot az $M \subset D(f)$ halmazon az f függvény **legkisebb értékének** nevezzük, ha létezik egy olyan $x_0 \in M$ szám, hogy minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \leq f(x)$ egyenlőtlenség.

Így jelöljük: $\min_M f(x) = f(x_0)$.

Lássunk néhány példát.

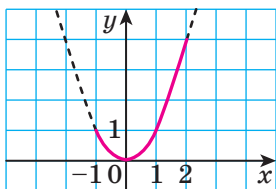
Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvénynek az $M = [0; 4]$ halmazon (1.2. ábrán): $\min_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0$,



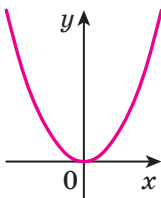
1.2. ábra

$\max_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$.

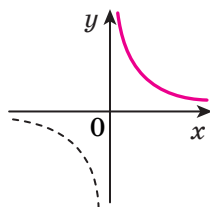
Az $f(x) = x^2$ az $M = [-1; 2]$ halmazon (1.3. ábra): $\min_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 4$.



1.3. ábra



1.4. ábra



1.5. ábra

Nem minden függvénynek lesz az adott intervallumon legkisebb vagy legnagyobb értéke. Például az $f(x) = x^2$ függvénynek: $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Legnagyobb értéke a valós számok halmazán viszont nem lesz (1.4. ábra).

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek a $(0; +\infty)$ halmazon nem lesz se nagyobb, se legkisebb értéke (1.5. ábra).

Definíció. Az f függvényt **párosnak** nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen x értékére teljesül az $f(-x) = f(x)$ egyenlőség.

Definíció. Az f függvényt **páratlannak** nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen x értékére teljesül az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség.

Például az $f(x) = x^2$ páros, a $g(x) = x^3$ pedig páratlan függvény. Valóban, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Bármely x racionális számra teljesülnek az $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ és $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ egyenlőségek.

Az $f(-x) = f(x)$ vagy az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség teljesülése bármilyen $x \in D(f)$ értékre azt jelenti, hogy az f függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjához, vagyis a következő tulajdonsággal rendelkezik: ha $x_0 \in D(f)$, akkor $-x_0 \in D(f)$.

A fenti meghatározásból következik, hogy amikor a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára, akkor ez a függvény nem lehet sem páros, sem páratlan.

Például az $y = \frac{1}{x-1}$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ halmaz, amely nem szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára. Ezért ez a függvény se nem páros, se nem páratlan.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 - x$ függvény páratlan!

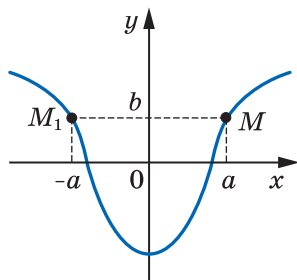
Megoldás. Mivel a $D(f) = \mathbb{R}$, ezért az f függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára.

Bármilyen $x \in D(f)$ értékre teljesül:

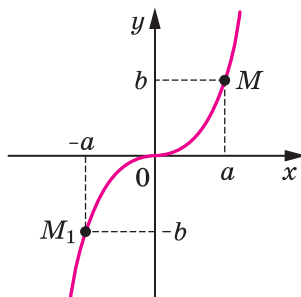
$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Tehát az f függvény páratlan. ◀

1.1. tétel. Az ordinátatengely a páros függvény szimmetriatengelye lesz.



1.6. ábra



1.7. ábra

1.2. tétel. *A koordináta-rendszer kezdőpontja a páratlan függvény szimmetriaközéppontja lesz.*

Az 1.1. és 1.2. tételek állításait az 1.6. és 1.7. ábrán mutatjuk be.



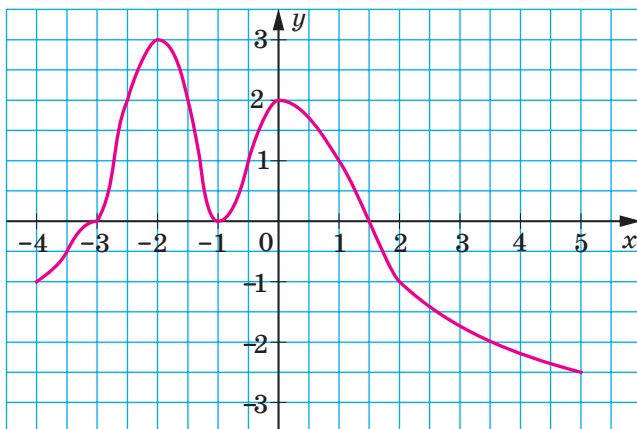
1. Melyik számot nevezzük a függvény legnagyobb (legkisebb) értékének egy adott halmazon?
2. Hogyan jelöljük az f függvény legnagyobb (legkisebb) értékét az M halmazon?
3. Milyen függvényt nevezünk párosnak (páratlannak)?
4. Milyen tulajdonsággal rendelkezik a páros (páratlan) függvény grafikonja?



GYAKORLATOK

1.1.° Az 1.8. ábrán az $y=f(x)$ függvény grafikonja látható, amely a $[-4; 5]$ intervallumon van értelmezve. A grafikon alapján határozd meg a függvény legnagyobb és a legkisebb értékét az adott intervallumon:

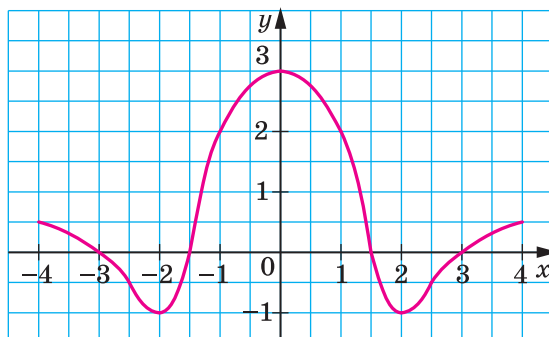
- 1) $[1; 2]$; 2) $[-2,5; 1]$; 3) $[-2,5; 3,5]$!



1.8. ábra

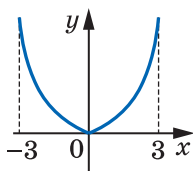
1.2.° Az 1.9. ábrán az $y=g(x)$ függvény grafikonja látható, amely a $[-4; 4]$ intervallumon van értelmezve. A grafikon alapján határozd meg a függvény legnagyobb és a legkisebb értékét az adott intervallumon:

- 1) $[-3; -2]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $[-3; 1]$!

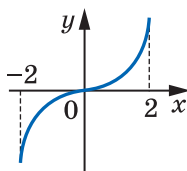


1.9. ábra

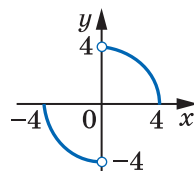
- 1.3.° Adott, hogy az $f(7) = -16$. Határozd meg az $f(-7)$ értékét, ha az f függvény: 1) páros; 2) páratlan!
- 1.4.° Adott, hogy az $f(-3) = 8$. Határozd meg az $f(3)$ értékét, ha az f függvény: 1) páros; 2) páratlan!
- 1.5.° Az f függvény páros. Teljesülhet-e a következő egyenlőség:
 1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5) f(-5) = -2$?
- 1.6.° Az f függvény páratlan. Teljesülhet-e a következő egyenlőség:
 1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2) f(-2) = 3$?
- 1.7.° Páros-e az $y = x^2$ képlettel megadott függvény, ha az értelmezési tartománya a következő halmaz:
 1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6]$; 4) $(-\infty; 4]$?
- 1.8.° Páros vagy páratlan az a függvény, amelynek a grafikonja az 1.10. ábrán látható?



a



b



c

1.10. ábra

- 1.9.° A $[2; 5]$ intervallumon határozd meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét:

1) $f(x) = -\frac{10}{x}$;

2) $f(x) = \frac{20}{x}$!

1.10.* Határozd meg:

1) $\max_{[1;2]} (-x^2 + 6x);$

3) $\max_{[4;5]} (-x^2 + 6x)!$

2) $\min_{[1;4]} (-x^2 + 6x);$

1.11.* Határozd meg az $y = x^2 + 2x - 8$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a következő intervallumon:

1) $[-5; -2];$

2) $[-5; 1];$

3) $[0; 3]!$

1.12.* Bizonyítsd be, hogy a függvény páros:

1) $f(x) = -5x^4;$

2) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}!$

1.13.* Bizonyítsd be, hogy a függvény páros:

1) $f(x) = x^6;$

2) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}!$

1.14.* Bizonyítsd be, hogy a függvény páratlan:

1) $f(x) = 4x^7;$

2) $f(x) = 2x - 3x^5!$

1.15.* Bizonyítsd be, hogy a függvény páratlan:

1) $f(x) = x - \frac{1}{x};$

2) $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)!$

1.16.** Két szám összege 8. Határozd meg:

1) azt a legnagyobb értéket, melyet e két szám szorzata vehet fel;

2) azt a legkisebb értéket, melyet e két szám négyzetének összege vesz fel!

1.17.** A téglalap alakú földrészleget egy 200 m hossza kerítéssel kerítettek körbe. Mekkora lehet ennek a részlegnek a legnagyobb területe?

1.18.** Állapítsd meg a függvény paritását:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1};$

2) $f(x) = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1};$

3) $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x}!$

1.19.** Állapítsd meg a függvény paritását:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4;$

2) $f(x) = \frac{6x^3}{x^2 - 9};$

3) $f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}!$

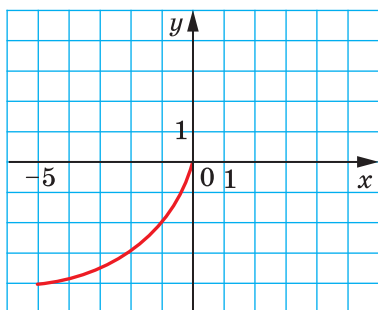
1.20.** Az 1.11. ábrán a $[-5; 5]$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonjának egy része látható. Szerkeszd meg a teljes függvény grafikonját úgy, hogy: 1) páros; 2) páratlan legyen!

1.21.** Az $ABCD$ töröttvonal, ahol $A(0; 0)$, $B(2; -2)$, $C(3; 4)$, $D(6; 1)$, a $[-6; 6]$ intervallumon értelmezett az $y = f(x)$ függvény grafikonjának egy része lesz. Szerkeszd meg a teljes függvény grafikonját úgy, hogy:

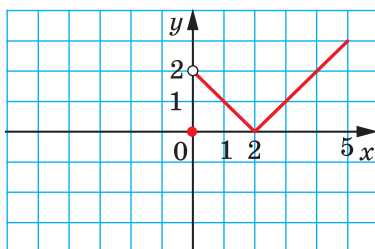
1) páros;

2) páratlan legyen!

1.22.** Az f függvény páros és $\min_{[1;3]} f(x) = 2$, $\max_{[1;3]} f(x) = 5$. Határozd meg a $\min_{[-3;-1]} f(x)$, $\max_{[-3;-1]} f(x)$ értékeket!



a



b

1.11. ábra

1.23.** Az f függvény páratlan és $\min_{[2;5]} f(x) = 1$, $\max_{[2;5]} f(x) = 3$. Határozd meg a $\min_{[-5;-2]} f(x)$, $\max_{[-5;-2]} f(x)$ értékeket!

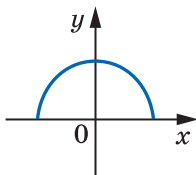


ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

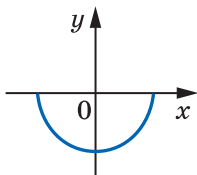
1.24. A függvény az $f(x) = -3x^2 + 2x$ képlettel van megadva.

- 1) Határozd meg az $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$ értékeket!
- 2) Határozd meg az argumentum értékeit, melynél az f függvény értéke egyenlő 0 ; -1 ; -56 !

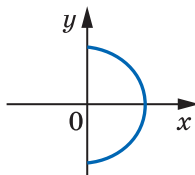
1.25. Nevezd meg azt az alakzatot az 1.12. ábrán, amely nem lehet egy függvény grafikonja!



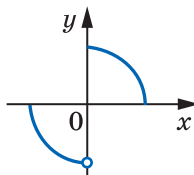
a



b



c



d

1.12. ábra

1.26. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

$$1) f(x) = \frac{9}{x+4};$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 7};$$

$$2) f(x) = \frac{x-6}{4};$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x};$$

$$3) f(x) = \sqrt{x-7};$$

$$7) f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x};$$

$$4) f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x-1}};$$

$$8) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}!$$

1.27. Határozd meg a függvény zérushelyeit:

$$1) f(x) = 0,4x - 8;$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x + 5}!$$

1.28. Határozd meg a függvény értékkészletét:

$$1) f(x) = \sqrt{x} + 2;$$

$$2) f(x) = 7 - x^2;$$

$$3) f(x) = -6!$$

2. A természetes kitevőjű hatványfüggvény

Az $y = x$ és az $y = x^2$ függvényeket már jól ismeritek az előző osztályok tananyagából. Ezek a függvények egyedi esetei lesznek az $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ függvényeknek, melyeket **természetes kitevőjű hatványfüggvényeknek** nevezünk.

Mivel az x^n , $n \in \mathbb{N}$ kifejezés értelmezhető bármilyen x esetén, ezért a természetes kitevőjű hatványfüggvény értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ halmaz lesz.

Természetes, hogy a vizsgált függvénynek *egyetlen zérushelye* lesz: $x = 0$.

Az $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ függvény további tulajdonságait két esetben fogjuk vizsgálni: az n – páros természetes szám és az n – páratlan természetes szám esetében.

• Első eset: $n = 2k$, ahol $k \in \mathbb{N}$.

Ha $k = 1$, akkor az $y = x^2$ függvényt kapjuk, amelynek tulajdonságait és grafikonját a 8. osztályos algebraórán már megvizsgáltuk.

Mivel bármilyen x esetén az x^{2k} kifejezés nem negatív értékeket fog felvenni, ezért az adott függvény értékkészlete nem tartalmaz egyetlen negatív számot sem.

Be lehet bizonyítani, hogy bármilyen $a \geq 0$ esetén létezik olyan értéke az x argumentumnak, hogy $x^{2k} = a$.

☞ A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy az $y = x^n$ függvény értékkészlete, ha n páros természetes szám, a $[0; +\infty)$ halmaz lesz.

Ha $x \neq 0$, akkor $x^{2k} > 0$.

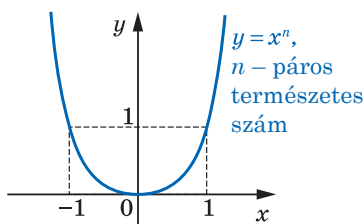
☞ Tehát n páros természetes szám esetén a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumok lesznek az $y = x^n$ függvény előjeltartási intervallumai.

☞ Minden n páros természetes szám esetén az $y = x^n$ függvény páros lesz. Valóban, bármilyen x esetén, amely az értelmezési tartomány eleme, teljesül a következő egyenlőség: $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

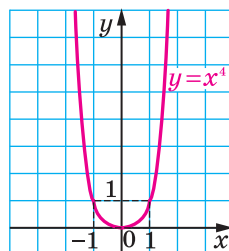
Vizsgáljuk meg a tetszőleges x_1 és x_2 számot, amelyek az $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ és $x_1 < x_2$. Ekkor a $-x_1 > -x_2 \geq 0$. A számegyenlőtlenség tulajdonságait alkalmazva azt kapjuk, hogy: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Innen $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

☞ Tehát n páros természetes szám esetén az $y = x^n$ függvény a $(-\infty; 0]$ intervallumon fogyó lesz. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy a $[0; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő lesz.

A kapott tulajdonságok alapján vázlatosan ábrázolhatjuk az $y = x^n$ függvény grafikonját, ahol n páros természetes szám (2.1. ábra). Az $y = x^4$ függvény grafikonja a 2.2. ábrán látható.



2.1. ábra



2.2. ábra

• **Második eset, ha $n = 2k + 1$, ahol $k \in \mathbb{N}$ vagy $k = 0$**

Ha $k = 0$, akkor az $y = x$ függvényt kapjuk, melynek tulajdonságait és grafikonját a 7. osztályban már vizsgáltuk.

Legyen most $k \in \mathbb{N}$.

Be lehet bizonyítani, hogy bármilyen a értékre létezik az x argumentumnak olyan értéke, melynél $x^{2k+1} = a$.

☞ Ez azt jelenti, hogy az $y = x^n$ függvény értékkészlete, ha n páratlan természetes szám, a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza lesz.

Ha $x < 0$, akkor $x^{2k+1} < 0$, ha pedig $x > 0$, akkor $x^{2k+1} > 0$.

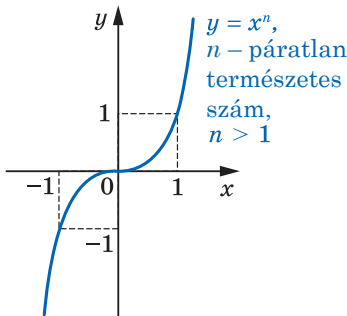
☞ Tehát a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumok az $y = x^n$ függvény előjeltartási intervallumai, ha n páratlan természetes szám.

☞ n páratlan természetes szám esetén az $y = x^n$ függvény páratlan függvény lesz. Valóban az értelmezési tartomány minden x értékre teljesül a következő egyenlőség: $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

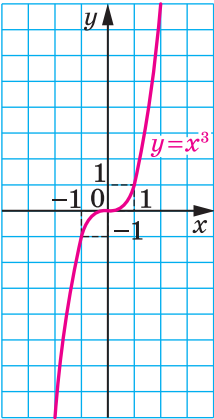
Vizsgáljuk meg az x_1 és x_2 tetszőleges számokat, melyekre teljesül $x_1 < x_2$. Az egyenlőtlenségek tulajdonságai alapján $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

☞ Tehát n páratlan természetes szám esetén az $y = x^n$ függvény növekvő lesz.

A kapott tulajdonságok alapján megrajzolható az $y = x^n$ függvény grafikonja, ahol n páratlan természetes szám és $n > 1$ (2.3. ábra). Az $y = x^3$ függvény grafikonja a 2.4. ábrán látható.



2.3. ábra



2.4. ábra

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk az $y = x^n$ függvény tulajdonságait, ahol $n \in \mathbb{N}$, melyeket ebben a pontban állapítottunk meg.

Tulajdonságok	n páros természetes szám	n páratlan természetes szám
Értelmezési tartomány	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Értékkészlet	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
A függvény zérushelyei	$x = 0$	$x = 0$
Előjeltartási intervallumai	$y > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén	$y < 0$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon, $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon
Paritás	Páros	Páratlan
Növekvő / csökkenő	Csökkenő a $(-\infty; 0]$ intervallumon, növekvő a $[0; +\infty)$ intervallumon	Növekvő



1. Milyen függvényt nevezünk természetes kitevőű hatványfüggvénynek?
2. Fogalmazd meg az $y = x^n$ függvény tulajdonságait!
3. Ábrázold az $y = x^n$ függvény grafikonjait!



GYAKORLATOK

- 2.1.^o Az $y = x^5$ függvény mely pontokhoz illeszkedik:
 - 1) A $(-1; 1)$; 2) B $(2; 32)$; 3) C $(-3; -243)$?
- 2.2.^o Az $y = x^4$ függvény mely pontokhoz illeszkedik:
 - 1) A $(2; 16)$; 2) B $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{81}\right)$; 3) C $(0,5; -0,0625)$?
- 2.3.^o Az $f(x) = x^{19}$ képlettel megadott függvény. Hasonlítsd össze a következő függvényértékeket:
 - 1) $f(1,4)$ és $f(1,8)$; 3) $f(-6,9)$ és $f(6,9)$;
 - 2) $f(-7,6)$ és $f(-8,5)$; 4) $f(0,2)$ és $f(-12)$!
- 2.4.^o Az $f(x) = x^{50}$ képlettel megadott függvény. Hasonlítsd össze a következő függvényértékeket:
 - 1) $f(9,2)$ és $f(8,5)$; 3) $f(19)$ és $f(-19)$;
 - 2) $f(-1,1)$ és $f(-1,2)$; 4) $f(-7)$ és $f(9)$!
- 2.5.^{*} Írd fel csökkenő sorrendbe a kifejezéseket:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5, \left(-2\frac{1}{3}\right)^5, \left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(-2\frac{2}{5}\right)^5!$$
- 2.6.^{*} Írd fel növekvő sorrendbe a kifejezéseket:

$$(1,06)^4, (-0,48)^4, (-2,12)^4, (-3,25)^4!$$
- 2.7.^{*} Határozd meg az $f(x) = x^8$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit a következő intervallumon:
 - 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$!
- 2.8.^{*} Határozd meg az $f(x) = x^5$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit a következő intervallumon:
 - 1) $[-3; 3]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $[1; +\infty)$!
- 2.9.^{**} Határozd meg grafikusán az egyenlet gyökeinek számát:
 - 1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$!
- 2.10.^{**} Határozd meg grafikusán az egyenletrendszer gyökeinek számát:

$$\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0! \end{cases}$$
- 2.11.^{*} Az a paraméter értékétől függően hány megoldása lesz az egyenletnek:
 - 1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

2.12. Számítsd ki a kifejezés értékét:

- 1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$; 5) $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
 2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 4) $9 \cdot 0,1^{-1}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}!$

2.13. Add meg tört alakban a kifejezés értékét:

- 1) $a^{-2} + a^{-3}$; 2) $mn^{-4} + m^{-4}n$; 3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}!$

3. Az egész kitevőjű hatványfüggvény

Az $y = x^n$ függvényt, ahol $n \in \mathbb{Z}$, **egész kitevőjű hatványfüggvénynek** nevezzük.

Ennek a függvénynek a tulajdonságait természetes kitevő esetén az előző pontban vizsgáltuk meg. Itt most azokat az eseteket vizsgáljuk majd, amikor az n negatív egész szám vagy nulla.

Az $y = x^0$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ lesz, a függvény értékkészlete az egyelemű $\{1\}$ halmaz. A függvény grafikonja a 3.1. ábrán látható.

Vizsgáljuk meg az $y = x^{-n}$ függvényt, ha $n \in \mathbb{N}$.

Az $n = 1$ egy külön esete ennek a függvénynek, vagyis az $y = \frac{1}{x}$ függvény, ami már ismert a nyolcadikos algebra anyagból.

Átírjuk az $y = x^{-n}$ függvényt a következő alakba: $y = \frac{1}{x^n}$. Ekkor érthetővé válik, ha

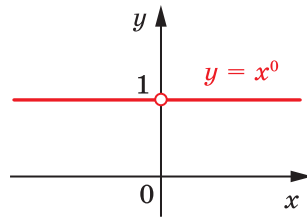
$n \in \mathbb{N}$, akkor az $y = x^{-n}$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ halmaz lesz.

Természetesen ennek a függvénynek nincs zérushelye.

A továbbiakban az $y = x^{-n}$ függvényt, ha $n \in \mathbb{N}$, két esetben fogjuk megvizsgálni: n páros természetes szám és n páratlan természetes szám.

• **Első eset: $n = 2k$, ahol $k \in \mathbb{N}$.**

A következőt kapjuk: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Mivel az $\frac{1}{x^{2k}}$ csak pozitív értékeket vesz fel, ezért a függvény értelmezési tartományához nem tartoznak a negatív számok és a 0 sem.



3.1. ábra

Be lehet bizonyítani, hogy bármilyen $a > 0$ esetén létezik az argumentumnak olyan x értéke, hogy az $x^{-2k} = a$.

☞ A fenti kijelentés azt jelenti, hogy az $y = x^{-n}$ függvény értékkészlete, ha n páros természetes szám, a $(0; +\infty)$ halmaz lesz.

☞ Mivel minden $x \neq 0$ esetén teljesül az $\frac{1}{x^{2k}} > 0$ egyenlőtlenség, ezért az $y = x^{-n}$ függvénynek, ha n páros természetes szám, a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumok előjeltartó intervallumai lesznek.

☞ Az $y = x^{-n}$ függvény páros, ha n páros természetes szám lesz. Valóban, az értelmezési tartományhoz tartozó minden x esetén teljesül a következő egyenlőség: $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Vizsgáljuk meg az x_1 és x_2 tetszőleges számokat, melyekre teljesül, hogy $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ és $x_1 < x_2$. Alkalmazva a számegyenlőtlenségek tulajdonságait, a következőt kapjuk: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0$. Ebből kö-

vetkezik, hogy $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $x_1^{-2k} > x_2^{-2k}$.

☞ Tehát az $y = x^{-n}$ függvény csökkenő a $(0; +\infty)$ intervallumon, ha n páros természetes szám lesz.

☞ Be lehet szintén bizonyítani, hogy az $y = x^{-n}$ függvény növekvő a $(-\infty; 0)$ intervallumon, ha n páros természetes szám lesz.

Megjegyezzük, hogy az x abszolút értékének növelésekor az $\frac{1}{x^{2k}}$,

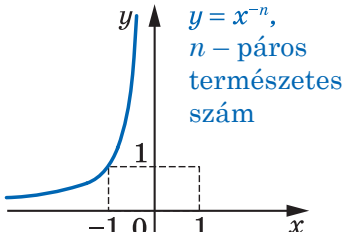
ahol $k \in \mathbb{N}$, kifejezés értéke egyre kisebb lesz. Ezért az $y = \frac{1}{x^{2k}}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ függvény grafikonjának pontja és az abszcisszatengely közötti távolság folyamatosan csökken, ha a pont abszcisszájának abszolút értéke növekszik, és egyre kisebbé válik, de sohasem lesz egyenlő nullával.

Szintén megjegyezhetjük, hogy a pont ordinátája abszolút értékének növelésével az $y = \frac{1}{x^{2k}}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ függvény grafikonjának pontja és az ordinátatengely közötti távolság folyamatosan csökken és egyre kisebbé válik, de sohasem lesz egyenlő nullával.

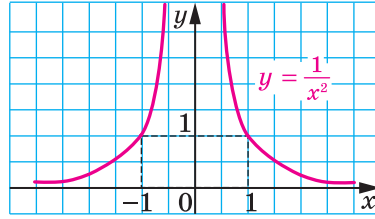
A kapott tulajdonságok alapján vázlatosan megrajzolható az $y = x^{-n}$ függvény grafikonja, ahol n páros természetes szám (3.2. ábra). Az $y = \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja a 3.3. ábrán látható.

• **Második eset: $n = 2k - 1$, ahol $k \in \mathbb{N}$.**

Be lehet bizonyítani, hogy bármely $a \neq 0$ esetén létezik az x argumentumnak olyan értéke, amelynél $x^{-(2k-1)} = a$.



3.2. ábra



3.3. ábra

☞ Az $y = x^{-n}$ függvény értékkészlete, ahol az n páratlan természetes szám, a $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ halmaz lesz.

Ha $x < 0$, akkor $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$, ha $x > 0$, akkor $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

☞ Tehát a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumok az $y = x^{-n}$ függvény, ahol n páratlan természetes szám, előjeletartási intervallumai.

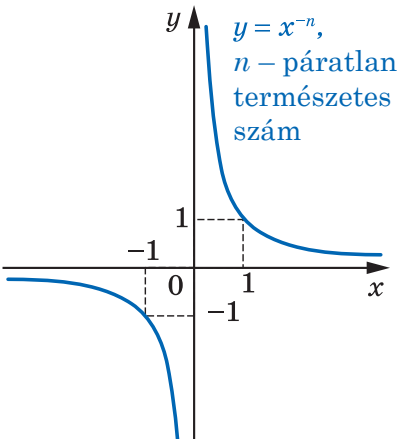
☞ Az $y = x^{-n}$ függvény páratlan, ahol n páratlan természetes szám. Valóban, az értelmezési tartományhoz tartozó minden x esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}.$$

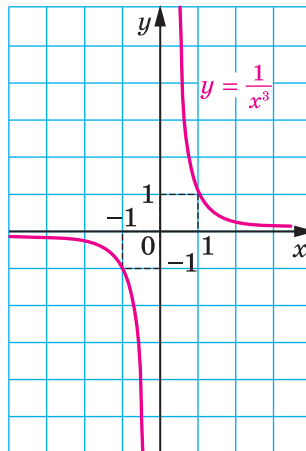
☞ Be lehet bizonyítani, hogy az $y = x^{-n}$ függvény, ahol n páratlan természetes szám, csökkenő a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumon.

A kapott tulajdonságok alapján vázlatosan megrajzolhatjuk az $y = x^{-n}$ függvény grafikonját, ahol n páratlan természetes szám

(3.4. ábra). Az $y = \frac{1}{x^3}$ függvény grafikonja a 3.5. ábrán látható.



3.4. ábra



3.5. ábra

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, függvény tulajdonságait, melyeket ebben a pontban ismertünk meg.

Tulajdonságok	n páros természetes szám	n páratlan természetes szám
Értelmezési tartomány	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Értékkészlet	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
A függvény zérushelyei	—	—
Előjeltartási intervallumai	$y > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén	$y < 0$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon
Paritás	Páros	Páratlan
Növekvő / csökkenő	Növekvő a $(-\infty; 0)$ intervallumon, csökkenő a $(0; +\infty)$ intervallumon	Csökkenő a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén



1. Milyen függvényt nevezünk egész kitevőjű hatványfüggvénynek?
2. Milyen a képe az $y = x^0$ függvény grafikonjának?
3. Fogalmazd meg az $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ függvény tulajdonságait!
4. Ábrázold vázlatosan az $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ függvény grafikonjait!



GYAKORLATOK

3.1.° Illeszkedik-e az $y = x^{-4}$ függvény grafikonjára a következő pont:

- 1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

3.2.° Illeszkedik-e az $y = x^{-5}$ függvény grafikonjára a következő pont:

- 1) $A(0; 0)$; 2) $B(-1; -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

3.3.° Adott az $f(x) = x^{-19}$ függvény. Hasonlítsd össze:

- 1) $f(1,6)$ és $f(2)$; 3) $f(-9,6)$ és $f(9,6)$;
2) $f(-5,6)$ és $f(-6,5)$; 4) $f(0,1)$ és $f(-10)$!

3.4.* Adott az $f(x) = x^{-40}$ függvény. Hasonlítsd össze:

- 1) $f(6,2)$ és $f(5,5)$; 3) $f(24)$ és $f(-24)$;
 2) $f(-1,6)$ és $f(-1,7)$; 4) $f(-8)$ és $f(6)!$

3.5.* Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

- 1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}!$

3.6.* Határozd meg az $f(x) = x^{-6}$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit az adott intervallumban:

- 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1; +\infty)!$

3.7.* Határozd meg az $f(x) = x^{-3}$ függvény legnagyobb és legkisebb értékeit az adott intervallumban:

- 1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]!$

3.8.** Szerkeszd meg a függvény grafikonját:

- 1) $y = (x-2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0!$

3.9.** Szerkeszd meg a függvény grafikonját:

- 1) $(y+2)^0 = x-2$; 2) $(y-2)^0 = (x+1)^0!$



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

3.10. Határozd meg a kifejezés értékét:

- 1) $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2$; 3) $(\sqrt{13})^2 - 3 \cdot (\sqrt{8})^2!$

3.11. Hasonlítsd össze a számokat:

- 1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 2) $\sqrt{33}$ és 6; 3) $\sqrt{30}$ és $2\sqrt{7}!$

4. Az n -edik gyök meghatározása

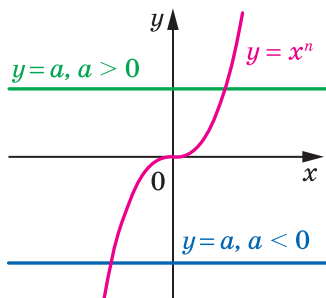
Már tudjátok, hogy az a szám második gyökének (négyzetgyökének) azt a számot nevezzük, melynek második hatványa a -val egyenlő. Hasonlóan adjuk meg az a szám n -edik gyökének meghatározását is, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Definíció. Az a szám n -edik gyökének, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a számot nevezzük, melynek n -edik hatványa a -val egyenlő.

Például a 32 ötödik gyöke 2 lesz, mivel $2^5 = 32$; a -64 -nek a harmadik gyöke -4 lesz, mivel $(-4)^3 = -64$; a 81 negyedik gyöke 3 és -3 lesz, mivel $3^4 = 81$ és $(-3)^4 = 81$.

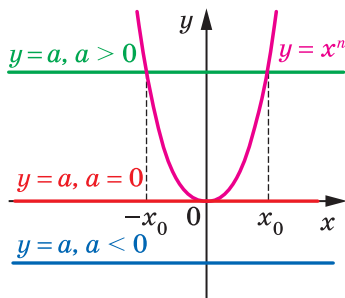
Ha az n páratlan természetes szám, akkor az $y = x^n$ és az $y = a$ függvények grafikonjai egy pontban metszik egymást (4.1. ábra). Ez azt jelenti, hogy az $x^n = a$ egyenletnek minden a értéknél egy gyöke lesz. Ezért levonhatjuk az alábbi következtetést:

ha n páratlan, 1-nél nagyobb természetes szám, akkor bármilyen számból létezik n -edik gyök, amiből csak egy van.



n páratlan természetes szám,
 $n > 1$

4.1. ábra



n páros természetes szám

4.2. ábra

Az a szám n -edik gyökét, ha $n > 1$ és páratlan, így jelöljük: $\sqrt[n]{a}$ (így olvassuk: az a szám n -edik gyöke). Például $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[3]{0} = 0$.

Az $\sqrt[n]{}$ jelet az **n -edik gyök jelének** nevezzük. Az n -edik gyök jele alatti kifejezést **gyök alatti kifejezésnek** nevezzük.

A harmadik gyököt **köbgyöknek** szokás nevezni. Például a $\sqrt[3]{2}$ -t köbgyök 2-nek olvassuk.

Felhívjuk arra a figyelmeteket, hogy a $^{2k+1}\sqrt{a}$ kifejezés, ha $k \in \mathbb{N}$, bármilyen a számra értelmezve van.

Az n -edik gyök meghatározásából következik, hogy **bármilyen a esetén teljesül a következő egyenlőség:**

$$\left(^{2k+1}\sqrt{a} \right)^{2k+1} = a$$

Például $\left(\sqrt[3]{2} \right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0,1} \right)^7 = -0,1$.

Vizsgáljuk meg az $x^n = a$ egyenletet, ha n páratlan természetes szám.

A 4.2. ábrán látható: ha $a < 0$, akkor az $y = x^n$ és az $y = a$ függvények grafikonjainak nincs közös pontja; ha $a = 0$, akkor a grafikonoknak egy közös pontja lesz; ha $a > 0$, akkor két közös pontjuk van, melyeknek az abszcisszái ellentett számok lesznek. Levonhatjuk a következő következtetést:

ha az n páros természetes szám, akkor az $a < 0$ esetén nem létezik n -edik gyöke az a számnak; ha $a = 0$, akkor az a szám n -edik gyöke 0 lesz; ha az $a > 0$, akkor az a számnak két ellenkező előjelű n -edik gyöke lesz.

Már tudjátok, hogy a nemnegatív a számnak a számtani négyzetgyöke az a nemnegatív szám lesz, melynek négyzete a -val egyenlő. Hasonlóan adjuk meg a számtani n -edik gyök meghatározását.

Definíció. A nemnegatív a szám számtani n -edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a nemnegatív számot nevezzük, melynek n -edik hatványa a -val egyenlő.

A nemnegatív a szám számtani n -edik gyökét így jelöljük: $\sqrt[n]{a}$.

Például $\sqrt[4]{81} = 3$, mivel $3 \geq 0$ és $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, mivel $2 \geq 0$ és $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, mivel $0 \geq 0$ és $0^{10} = 0$.

Általánosítva, ha $b \geq 0$ és $b^n = a$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\sqrt[n]{a} = b$.

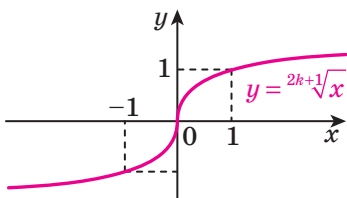
Az n -edik gyök jele segítségével fel lehet írni az $x^n = a$, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, egyenlet gyökeinek képletét.

Például az $x^3 = 7$ egyenletnek egy gyöke lesz a: $\sqrt[3]{7}$; az $x^4 = 5$ egyenletnek két megoldása van: $-\sqrt[4]{5}$ és $\sqrt[4]{5}$.

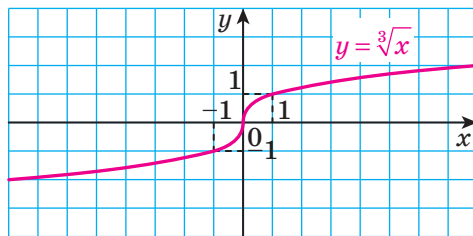
A számtani n -edik gyök meghatározásából következik, hogy:

- 1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$, ha $a \geq 0$ (például $\sqrt[4]{7} \geq 0$);
- 2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, ha $a \geq 0$ (például $(\sqrt[6]{5})^6 = 5$);
- 3) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ (például $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$).

Már megállapítottuk, hogy bármilyen szám páratlan gyökének egyetlen értéke van. Tehát minden valós x számnak egyetlen olyan y szám felel meg, hogy $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Ez a szabály adja meg az $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ függvényt, ahol $k \in \mathbb{N}$, melynek értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ lesz. Ennek a függvénynek a grafikonja a 4.3. ábrán látható. A 4.4. ábrán az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja látható.



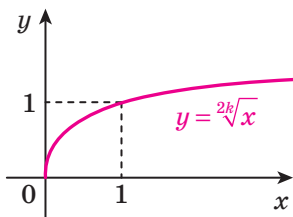
4.3. ábra



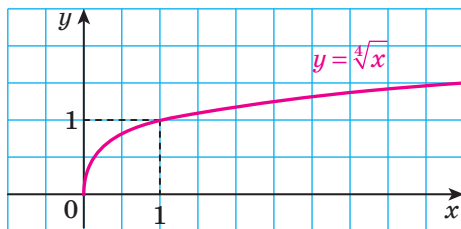
4.4. ábra

Hasonlóan adjuk meg az $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvényt is, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya a $[0; +\infty)$ intervallum lesz.

A 4.5. ábrán az $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvény látható, a 4.6. ábrán pedig az $f(x) = \sqrt[4]{x}$ függvény grafikonja.



4.5. ábra



4.6. ábra

A következő táblázatban összefoglaljuk az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény tulajdonságait.

Tulajdonságok	n – páratlan természetes szám, $n > 1$	n – páros természetes szám
Értelmezési tartomány	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Értékkészlet	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
A függvény zérushelyei	$x = 0$	$x = 0$
Előjeltartási intervallumai	$y < 0$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon, $y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon	$y > 0$ a $(0; +\infty)$ intervallumon
Paritás	Páratlan	Se nem páros, se nem páratlan
Növekvő / csökkenő	Növekvő	Növekvő

Feladat. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$!

Megoldás. 1) Az adott egyenlőtlenséget a következőképpen írjuk át: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Mivel az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény növekvő, ezért le lehet vonni a következtetést, hogy $x < 8$.

Felelet: $(-\infty; 8)$.

2) $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Mivel az $y = \sqrt[4]{t}$ függvény a $[0; +\infty)$ intervallumon növekvő, ezért az adott egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} x-2 < 1, \\ x-2 \geq 0. \end{cases}$$

Innen $2 \leq x < 3$.

Felelet: $[2; 3)$. ◀



1. Mit nevezünk az a szám n -edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Az a mely értékénél van értelme a $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$ kifejezésnek?
3. Mit nevezünk a nemnegatív a szám számtani n -edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
4. Az a mely értékénél van értelme a $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$ kifejezésnek?
5. Fogalmazd meg az $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ függvény tulajdonságait, és készítsd el a vázlatos grafikonját!
6. Fogalmazd meg az $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$ függvény tulajdonságait, és készítsd el a vázlatos grafikonját!



GYAKORLATOK

4.1.° Van-e értelme a kifejezésnek:

- 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

4.2.° Igaz-e az egyenlőség:

- 1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$?

A feleletet magyarázd meg!

4.3.° Bizonyítsd be, hogy:

- 1) a 2 számtani köbgyöke a 8-nak;
- 2) a 3 számtani negyedik gyöke a 81-nek;
- 3) a -3 nem számtani negyedik gyöke a 81-nek!

4.4.° Határozd meg a kifejezés értékét:

$$1) \sqrt[3]{216}; \quad 2) \sqrt[4]{0,0016}; \quad 3) \sqrt[5]{-0,00001}; \quad 4) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \quad 5) \frac{1}{3} \sqrt[5]{-243}!$$

4.5.° Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

$$1) \sqrt[3]{343}; \quad 2) 0,5 \sqrt[3]{-64}; \quad 3) -\sqrt[5]{-1024}?$$

4.6.° Számítsd ki:

$$1) (\sqrt[3]{5})^3; \quad 2) (-\sqrt[4]{7})^4; \quad 3) (-\sqrt[7]{2})^7; \quad 4) (-2\sqrt[7]{-5})^7!$$

4.7.° Határozd meg a kifejezés értékét:

$$1) (\sqrt[8]{18})^8; \quad 2) (-\sqrt[9]{9})^9; \quad 3) (-\sqrt[6]{11})^6; \quad 4) \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{45}\right)^3!$$

4.8.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{array}{lll} 1) x^3 = 27; & 4) x^4 = 16; & 7) 27x^3 - 1 = 0; \\ 2) x^5 = 9; & 5) x^6 = 5; & 8) (x-2)^3 = 125; \\ 3) x^7 = -2; & 6) x^4 = -81; & 9) (x+5)^4 = 10\,000! \end{array}$$

4.9.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{array}{lll} 1) x^9 = 1; & 3) x^{18} = 0; & 5) 64x^5 + 2 = 0; \\ 2) x^{10} = 1; & 4) x^6 = -64; & 6) (x-3)^6 = 729! \end{array}$$

4.10.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}; & 3) \sqrt[3]{x} = -6; & 5) \sqrt[3]{2x} + 7 = 0; \\ 2) \sqrt[4]{x} = 3; & 4) \sqrt[6]{x} = -2; & 6) \sqrt[3]{2x} + 7 = 0! \end{array}$$

4.11.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{x} = -2; & 3) \sqrt[5]{x} = -2; & 5) \sqrt[4]{3x-2} = 0; \\ 2) \sqrt[4]{x} = -2; & 4) \sqrt[4]{3x-2} = 0; & 6) \sqrt[4]{3x-2} = 2! \end{array}$$

4.12.° Számítsd ki: $0,3 \sqrt[3]{1000} - 5 \sqrt[8]{256} + 6 \cdot (-\sqrt[10]{6})^{10}!$

4.13.° Számítsd ki: $200 \sqrt[3]{0,001} - \sqrt[5]{-0,00032} - (-4\sqrt{2})^2!$

4.14.° Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

$$1) y = \sqrt[3]{x-1}; \quad 2) y = \sqrt[6]{x+1}; \quad 3) y = \sqrt[4]{x^2-x-2}!$$

4.15.° Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

$$1) y = \sqrt[4]{2-x}; \quad 2) y = \sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}; \quad 3) y = \sqrt[6]{x^2-4x+3}!$$

4.16.° Melyik két egymást követő egész szám között helyezkedik el a koordinátaegyenesen a következő szám:

$$1) \sqrt[3]{3}; \quad 2) \sqrt[4]{21}; \quad 3) \sqrt[3]{100}; \quad 4) -\sqrt[3]{81}?$$

4.17.* Melyik két egymást követő egész szám között helyezkedik el a koordinátaegyenesen a következő szám:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

4.18.* Oldd meg az egyenlőtlenséget:

1) $\sqrt[5]{x} > 3$; 2) $\sqrt[6]{x-3} < 2$; 3) $\sqrt[4]{x+1} > 1$!

4.19.** Ábrázold a függvény grafikonját:

1) $y = (\sqrt[3]{x})^3$; 2) $y = (\sqrt[4]{x})^4$!

4.20.** Oldd meg az egyenletet:

1) $(x^2 - 4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2 - 2x - 3} = 0$!

4.21.** Oldd meg az egyenletet: $(x+2)\sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} = 0$!

4.22.** Ábrázold a függvény grafikonját: $y = (\sqrt[4]{x-1})^4 + (\sqrt[4]{1-x})^4 + 1$!

4.23.** Ábrázold a függvény grafikonját: $y = (\sqrt[8]{2+x})^8 + (\sqrt[6]{2-x})^6$!



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

4.24. Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\frac{81}{100}}$!

4.25. Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 3) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$!

5. Az n -edik gyök tulajdonságai

Megvizsgáljuk azokat a tételeket, melyek az n -edik gyök tulajdonságait adják meg.

5.1. tétel (a hatvány gyökének első tétele). *Bármilyen $a \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számokra teljesülnek a következő egyenlőségek:*

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt[2k+1]{x} = y$ egyenlőséget, elegendő belátni, hogy $y^{2k+1} = x$. Az első bizonyítandó egyenlőségénél $x = a^{2k+1}$ és $y = a$. Innen az $y^{2k+1} = x$ egyenlőség már szemmel látható.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt[n]{x} = y$ egyenlőséget, elegendő belátni, hogy $y \geq 0$ és $y^{2k} = x$. A második bizonyítandó egyenlőségnél a következőt kapjuk: $|a| \geq 0$ és $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◀

5.2. tétel (a szorzat gyöke). Ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk az $\sqrt[n]{x} = y$ egyenlőséget, ahol $x \geq 0$, elegendő bebizonyítani, hogy $y \geq 0$ és $y^n = x$.

Mivel $\sqrt[n]{a} \geq 0$ és $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Ekkor $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$.

Ezenkívül $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$. ◀

5.3. tétel (a tört gyöke). Ha $a \geq 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

5.4. tétel (a hatvány gyöke). Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Bizonyítás. Ha $k = 1$, akkor a bizonyítandó egyenlőség nyilvánvaló.

Legyen $k > 1$.

Ekkor: $(\sqrt[n]{a})^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ tényező}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ tényező}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◀

5.5. tétel (a gyök gyöke). Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, akkor

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[nk]{a} \geq 0$.

Ezenkívül az $(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = \left((\sqrt[nk]{a})^n \right)^k = (\sqrt[k]{a})^n = a$. ◀

5.6. tétel (a gyök hatványának második tétel). Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Bizonyítás. Ha $k = 1$, akkor a bizonyítandó egyenlőség szemmel látható lesz.

Legyen $k > 1$. Ekkor $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◀

1. feladat. Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$!

Megoldás. 1) Alkalmazva az 5.1. tételt felírhatjuk: $\sqrt[4]{(-7,3)^4} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt[6]{1,2^{12}} = 1,2^2 = 1,44$.

3) Helyettesítve a gyökök szorzatát a szorzat gyökével azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

4) Helyettesítve a gyökök hányadosát a hányados gyökével kapjuk:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}. \quad \blacktriangleleft$$

2. feladat. Egyszerűsítsük a kifejezést:

1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, ha $a \leq 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{a^2}$!

Megoldás. 1) Alkalmazva az 5.1. tételt kapjuk:
 $\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7|$.

2) Mivel $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$. A feltétel szerint $a \leq 0$, ezért $a^3 \leq 0$.
 Ekkor $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$.

3) $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}. \quad \blacktriangleleft$

3. feladat. Vigyük ki a gyökjel alól a tényezőt: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$!

Megoldás. 1) A gyökjel alatti számot felírjuk két szám szorzataként, melyek közül az egyik egy racionális szám köbe, és kivisszük a tényezőt a gyökjel elé:

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

2) A feltételből következik, hogy a $b \geq 0$.

Ekkor $\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5| \sqrt[8]{b^3} = b^5 \sqrt[8]{b^3}. \quad \blacktriangleleft$

4. feladat. Vigyük be a gyökjel alá a tényezőt: 1) $-2\sqrt[6]{3}$;
 2) $c\sqrt[10]{c^7}$!

Megoldás. 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) A feltételből következik, hogy $c \geq 0$.

Ekkor $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}. \quad \blacktriangleleft$

5. feladat. Egyszerűsítsék a törtet: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}$!

Megoldás. Az adott tört számlálóját és nevezőjét tényezőkre bontjuk, majd a következőt kapjuk:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2} = \frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}. \quad \blacktriangleleft$$



1. Fogalmazd meg a gyök hatványáról szóló első tételt!
2. Fogalmazd meg a szorzat gyökeéről szóló tételt!
3. Fogalmazd meg a hányados gyökeéről szóló tételt!
4. Fogalmazd meg a gyök hatványáról szóló tételt!
5. Fogalmazd meg a gyök gyökeéről szóló tételt!
6. Fogalmazd meg a gyök hatványáról szóló második tételt!



GYAKORLATOK

5.1.° Határozd meg a kifejezés értékét:

$$1) \sqrt[3]{64 \cdot 125}; \quad 2) \sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}; \quad 3) \sqrt[4]{\frac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}$$

5.2.° Számítsd ki a kifejezés értékét:

$$1) \sqrt[3]{0,064 \cdot 343}; \quad 2) \sqrt[5]{\frac{7^5}{2^{10}}}; \quad 3) \sqrt[8]{\frac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}$$

5.3.° Határozd meg a kifejezés értékét:

$$1) \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}; \quad 3) \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}; \quad 5) \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10};$$

$$2) \sqrt[3]{0,054} \cdot \sqrt[3]{4}; \quad 4) \frac{\sqrt[8]{2^{30} \cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6 \cdot 7^4}}; \quad 6) \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{-9}!$$

5.4.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}; \quad 3) \sqrt[7]{2^{15} \cdot 5^3} \cdot \sqrt[7]{2^6 \cdot 5^4}; \quad 5) \sqrt[5]{2\sqrt{17}+10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17}-10};$$

$$2) \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}; \quad 4) \frac{\sqrt[6]{3^{10} \cdot 10^2}}{\sqrt[6]{10^8 \cdot 3^4}}; \quad 6) \frac{\sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}!$$

5.5.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \sqrt[5]{a}; \quad 2) \sqrt[4]{3x}; \quad 3) \sqrt[15]{c^6}; \quad 4) \sqrt[18]{a^8 b^{24}}!$$

5.6.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \sqrt[6]{\sqrt{x}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt[4]{y}}; \quad 3) \sqrt[12]{a^3}; \quad 4) \sqrt[21]{a^{14}b^7}!$$

5.7.° Emeld ki a tényezőt a gyökjel alól:

$$1) \sqrt[3]{16}; \quad 2) \sqrt[4]{162}; \quad 3) \sqrt[3]{250}; \quad 4) \sqrt[3]{40a^5}; \quad 5) \sqrt[3]{-a^7}!$$

5.8.° Emeld ki a tényezőt a gyökjel alól:

$$1) \sqrt[4]{80}; \quad 2) \sqrt[3]{432}; \quad 3) \sqrt[3]{54y^8}!$$

5.9.° Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

$$1) 2\sqrt{3}; \quad 2) 4\sqrt[3]{5}; \quad 3) 5\sqrt[3]{0,04x}; \quad 4) b\sqrt[5]{3b^3}; \quad 5) c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}!$$

5.10.° Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

$$1) \frac{1}{4}\sqrt[3]{320}; \quad 2) 2\sqrt[4]{7}; \quad 3) 5\sqrt[4]{4a}; \quad 4) 2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}!$$

5.11.° Helyettesítsd a kifejezést vele azonosan egyenlő kifejezéssel:

$$\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40}!$$

5.12.° Egyszerűsítsd a kifejezést: $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2000}!$

5.13.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \sqrt{2\sqrt{3}}; \quad 2) \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}; \quad 3) \sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

5.14.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \sqrt[3]{3\sqrt{3}}; \quad 2) \sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}; \quad 3) \sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$$

5.15.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) (1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})(1 - \sqrt[3]{a}); \quad 2) (1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 - \sqrt[4]{a})!$$

5.16.° Egyszerűsítsd a kifejezést: $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})!$

5.17.° Az a mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

$$1) \sqrt[4]{a^4} = a; \quad 2) \sqrt[4]{a^4} = -a; \quad 3) \sqrt[3]{a^3} = a; \quad 4) \sqrt[3]{a^3} = -a?$$

5.18.** Az a mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

$$1) \sqrt[6]{a^{30}} = a^5; \quad 2) \sqrt[6]{a^{30}} = -a^5; \quad 3) \sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{a})^4; \quad 4) \sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{-a})^4?$$

5.19.** Az a és b mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

$$1) \sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}; \quad 2) \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}; \\ 2) \sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}; \quad 4) \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}?$$

5.20.** Az x mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség:

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4} = \sqrt[4]{x - 2} \cdot \sqrt[4]{x + 2}; \\ 2) \sqrt[3]{(x - 6)(x - 10)} = \sqrt[3]{x - 6} \cdot \sqrt[3]{x - 10}?$$

5.21.** Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sqrt[6]{m^6}$, ha $m \geq 0$; | 4) $\sqrt[6]{c^{24}}$; |
| 2) $\sqrt[4]{n^4}$, ha $n \leq 0$; | 5) $\sqrt{0,25b^{14}}$, ha $b \leq 0$; |
| 3) $\sqrt[8]{256k^8}$, ha $k \leq 0$; | 6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, ha $y \geq 0$! |

5.22.** Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$; | 3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, ha $p \geq 0$! |
| 2) $-5\sqrt{4x^2}$, ha $x \leq 0$; | |

5.23.** Egyszerűsítsd a törtet:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$; | 3) $\frac{\sqrt[8]{ab^2} - \sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$; | 5) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}}$; |
| 2) $\frac{\sqrt[6]{x} - 9}{\sqrt[12]{x} + 3}$; | 4) $\frac{\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16}{x - 64}$; | 6) $\frac{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a} + \sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}}$! |

5.24.** Egyszerűsítsd a törtet:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1) $\frac{\sqrt[6]{a} + 1}{\sqrt[3]{a} - 1}$; | 2) $\frac{\sqrt{m} - \sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn} - \sqrt{n}}$; | 3) $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$; | 4) $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$! |
|--|--|--|--|

5.25.** Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x + 4$; | 2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8} = (1-3x)^2$! |
|----------------------------------|--------------------------------------|

5.26.** Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--|
| 1) $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^3}$; | 2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; | 3) $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$! |
|---------------------------------|---------------------------------|--|

5.27.** Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | | |
|---------------------------------|---|----------------------------------|
| 1) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$; | 2) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$; | 3) $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}$! |
|---------------------------------|---|----------------------------------|

5.28.** Vidd ki a tényezőt a gyökjel elé:

- | | |
|-----------------------|---|
| 1) $\sqrt[4]{-m^9}$; | 2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, ha $a > 0$! |
|-----------------------|---|

5.29.** Vidd ki a tényezőt a gyökjel elé:

- | | |
|--|--------------------------|
| 1) $\sqrt[4]{32a^6}$, ha $a \leq 0$; | 2) $\sqrt[4]{-625a^5}$! |
|--|--------------------------|

5.30.** Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $c\sqrt[3]{3}$, ha $c \leq 0$; | 2) $b\sqrt[6]{6}$; | 3) $a\sqrt[6]{-a}$! |
|-------------------------------------|---------------------|----------------------|

5.31.** Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 1) $a\sqrt[6]{a}$; | 2) $a\sqrt[4]{-a^3}$! |
|---------------------|------------------------|

5.32.* Oldd meg az egyenletet: $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[6]{(5-x)^6} = 2$!



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

5.33. Add meg a kifejezést az a alapú hatványként:

- 1) $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$; 3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$; 5) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$;
 2) $a^5 \cdot a^{-8}$; 4) $a^{-3} : a^{-15}$; 6) $(a^{-5})^4$

5.34. Határozd meg a kifejezés értékét:

- 1) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 3) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$; 5) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;
 2) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 4) $9^{-4} \cdot 27^2$; 6) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$

6. A racionális kitevőjű hatvány meghatározása és tulajdonságai

A 7. osztályban már megismertétek a természetes kitevőjű hatvány következő tulajdonságait:

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
 4) $(ab)^n = a^n b^n$;
 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Később megtanultátok a nulla kitevőjű hatvány és a negatív kitevőjű hatvány meghatározását is:

$$a^0 = 1, a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Ezek a definíciók nagyon hasznosak: a természetes kitevőjű hatvány mind az öt tulajdonsága érvényes lesz az egész kitevőjű hatványokra is.

Bevezetjük a törtkitevőjű hatvány fogalmát, vagyis az a^r -t, melynek kitevője a következő alakban adható meg: $r = \frac{m}{n}$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ezt úgy kívánjuk megadni, hogy a törtkitevőjű hatvány tulajdonságai megegyezzenek az egész kitevőjű hatvány tulajdonságaival. A meghatározás alapjául a következő példa szolgálhat.

Jelöljük meg x -szel a $2^{\frac{2}{3}}$ hatvány értékét, vagyis $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Alkalmazva az $(a^m)^n = a^{mn}$ tulajdonságot felírhatjuk: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Tehát az x a 2^2 szám köbgyöke lesz, vagyis $x = \sqrt[3]{2^2}$. Következésképpen $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ebből a gondolatmenetből következik, hogy érdemes elfogadni a következő meghatározást.

Definíció. A pozitív a szám r racionális kitevőjű hatványának, ha az r az $\frac{m}{n}$ alakban írható fel, és az $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, az $\sqrt[n]{a^m}$ számot nevezzük, vagyis

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Például $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0,4^{0,3} = 0,4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0,4^3}$.

Megjegyezzük, hogy az a^r hatvány értéke, ahol r racionális szám lesz, nem függ attól, hogy az r törtet milyen alakban adjuk meg. Ez az $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ és $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ egyenlőség alkalmazásával bizonyítható be.

A nulla alapú hatvány csak a pozitív racionális kitevőre értelmezhető.

Definíció. $0^{\frac{m}{n}} = 0$, ha $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

FigyeljeteK arra, hogy például a $0^{-\frac{1}{2}}$ -nek nincs értelme.

Hangsúlyozzuk, hogy az $a^{\frac{m}{n}}$ hatvány meghatározása az $a < 0$ esetén nincs definiálva. Például a $(-2)^{\frac{1}{3}}$ kifejezés nincs értelmezve. Viszont a $\sqrt[3]{-2}$ kifejezés értelmezve van. Felmerül a kérdés, miért nem tekinthetjük igaznak a $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$ egyenlőséget. Bebonyolítjuk, hogy az ilyen megállapítás ellentmondáshoz vezetne:

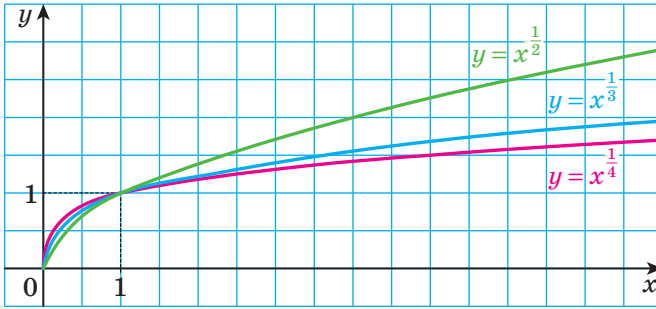
$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Azt kaptuk, hogy a $\sqrt[3]{-2}$ negatív szám „egyenlő” a $\sqrt[6]{4}$ pozitív számmal.

Az $y = x^r$ függvényt, ha $r \in \mathbb{Q}$, **racionális kitevőű hatványfüggvénynek** nevezzük.

Ha az $\frac{m}{n}$ nem egyszerűsíthető tört, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ pozitív szám lesz, akkor az $y = x^{\frac{m}{n}}$ függvény értelmezési tartománya a $[0; +\infty)$ intervallum lesz, ha ez a tört negatív szám, akkor a $(0; +\infty)$ intervallum.

A 6.1. ábrán az $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$ függvények grafikonjai láthatók.



6.1. ábra

Bebizonyítjuk, hogy az egész kitevőű hatvány tulajdonságai érvényesek bármilyen racionális kitevőű hatványra is.

6.1. tétel (a hatványok szorzata). *Bármilyen $a > 0$ és bármilyen racionális p és q számra teljesül a következő egyenlőség*

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

Bizonyítás. A p és q racionális számokat felírjuk egyenlő nevezőjű törtként: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ekkor:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{p+q}. \quad \blacktriangleleft$$

Következmény. *Bármilyen $a > 0$ és bármilyen p racionális számra teljesül a következő egyenlőség:*

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Bizonyítás. A 6.1. tétel alkalmazásával felírjuk: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Innen $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ◀

6.2. tétel (a hatvány hányadosa). Bármilyen $a > 0$ és bármilyen racionális p és q számra teljesül a következő egyenlőség

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

Bizonyítás. A 6.1. tétel alkalmazásával felírjuk: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Innen $a^{p-q} = a^p : a^q$. ◀

6.3. tétel (a hatvány hatványa). Bármilyen $a > 0$ és bármilyen racionális p és q számra teljesül a következő egyenlőség

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Bizonyítás. Legyen $p = \frac{m}{n}$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ és $q = \frac{s}{k}$, ahol $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Ekkor:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. \quad \blacktriangleleft$$

6.4. tétel (a szorzat és a hányados hatványa). Bármilyen $a > 0$ és $b > 0$, valamint bármilyen racionális p esetén teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Bizonyítsátok be önállóan ezt a tételt.

1. feladat. Egyszerűsítsük a kifejezést

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}).$$

Megoldás. Felbontjuk a zárójeleket, alkalmazva a többtagok szorzásának szabályát és a négyzetek különbségének képletét, aztán összevonjuk a hasonló összeadandókat:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) = 3a^{0,6} - 12a^{0,3}b^{0,2} + a^{0,3}b^{0,2} - 4b^{0,4} - a^{0,6} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. \quad \blacktriangleleft$$

2. feladat. Egyszerűsítsük a kifejezést $\frac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 2} - \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - \frac{16}{x^{\frac{2}{3}} - 4}$.

6.7.° Határozd meg a kifejezés értékét:

$$\begin{array}{lll} 1) 3^{1,8} \cdot 3^{-2,6} \cdot 3^{2,8}; & 3) \left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}; & 5) \left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot 1,2^{4,5}; \\ 2) (5^{-0,8})^6 \cdot 5^{4,8}; & 4) \left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}; & 6) \frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}; \end{array}$$

6.8.° Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

$$1) 5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}; \quad 2) (7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}; \quad 3) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}; \quad 4) \frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}};$$

6.9.° Bontsd fel a zárójeleket:

$$\begin{array}{ll} 1) 2a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right) + 8a^{\frac{1}{2}}; & 4) (b^{0,4} + 3)^2 - 6b^{0,4}; \\ 2) \left(3b^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{3}{2}}\right) \left(3b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{2}}\right); & 5) \left(c^{\frac{1}{3}} - 1\right) \left(c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} + 1\right); \\ 3) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2; & 6) \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right)! \end{array}$$

6.10.° Bontsd fel a zárójeleket:

$$\begin{array}{ll} 1) (5a^{0,4} + b^{0,2})(3a^{0,4} - 4b^{0,2}); & 4) \left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right) \left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right); \\ 2) (m^{0,5} + n^{0,5})(m^{0,5} - n^{0,5}); & 5) (y^{1,5} - 4y^{0,5})^2 + 8y^2; \\ 3) \left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)^2; & 6) \left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right) \left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right)! \end{array}$$

6.11.° Számítsd ki a kifejezés értékét:

$$\begin{array}{ll} 1) 12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}; & 3) \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,81)^{-0,5}; \\ 2) 25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}; & 4) 16^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{-\frac{5}{6}} \cdot 4^{1,5}! \end{array}$$

6.12.° Határozd meg a kifejezés értékét:

$$\begin{array}{ll} 1) \left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}; & 3) 0,0016^{\frac{3}{4}} - 0,04^{-\frac{1}{2}} + 0,216^{-\frac{2}{3}}; \\ 2) 10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}; & 4) 625^{-1,25} \cdot 25^{1,5} \cdot 125^{\frac{2}{3}}! \end{array}$$

6.13.° Egyszerűsítsd a törtet:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{a - 5a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^2} - 5}; & 2) \frac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}; & 3) \frac{a - b}{\frac{1}{ab^2} + \frac{1}{a^2b}}; \end{array}$$

$$4) \frac{a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}};$$

$$5) \frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}};$$

$$6) \frac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}!$$

6.14.* Egyszerűsítsd a törtet:

$$1) \frac{a + 2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + 2}$$

$$3) \frac{a - b^2}{a - a^{\frac{1}{2}}b}$$

$$5) \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a - b};$$

$$2) \frac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}} - m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}};$$

$$4) \frac{a - b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}};$$

$$6) \frac{a - 125}{a^{\frac{2}{3}} - 25}!$$

6.15.** Egyszerűsítsd a kifejezést: $\frac{a - b}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a - b}!$

6.16.** Egyszerűsítsd a kifejezést: $\frac{m - n}{m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}} - \frac{m + n}{m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}!$

6.17.** Bizonyítsd be az azonosságot: $\left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1} \right) : \frac{a^{0,5}}{a^{0,5} + 1} = \frac{2}{a - 1}!$

6.18.** Bizonyítsd be az azonosságot: $\left(\frac{m^2 + n^2}{m^{\frac{3}{2}} + mn^{\frac{1}{2}}} - \frac{m + n}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} \right) \cdot \frac{m}{n} = n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}}!$



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

6.19. Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{3x - 7} = 0;$$

$$3) \sqrt{x^2 - 64} = 6;$$

$$5) \sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = 0;$$

$$2) \sqrt{4x - 1} = 6;$$

$$4) \sqrt{1 + \sqrt{3 + x}} = 4;$$

$$6) (x - 2)\sqrt{x + 2} = 0!$$

7. Irracionális egyenletek

Az egyenletek megoldása során néha az egyenlet mindkét oldalát ugyanarra a hatványra kell emelni. Megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja ez az átalakítás az egyenlet gyökeinek halmazát.

7.1. tétel. *Ha az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk.*

1. feladat. Oldjuk meg az $\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$ egyenletet!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát a hetedik hatványra emeljük. Az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:

$$(\sqrt[7]{x^2 - 2})^7 = (\sqrt[7]{x})^7.$$

Innen $x^2 - 2 = x$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Felelet: -1 ; 2 . ◀

Az 1. feladatban a változó a gyökjel alatt van. Az ilyen egyenletet **irracionális** egyenletnek nevezzük.

Nézzünk néhány példát az irracionális egyenletekre:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} &= 2; \\ \sqrt{x-2} \sqrt[4]{x+1} &= 0; \\ \sqrt{3-x} &= \sqrt[3]{2+x}.\end{aligned}$$

Az 1. feladat megoldása során egy olyan egyenletet alakítottunk át, amely páratlan kitevőjű gyököket tartalmazott. Vizsgáljunk meg egy olyan egyenletet, amely páros kitevőjű gyököket tartalmaz.

2. feladat. Oldjuk meg a $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$ egyenletet! (1)

Megoldás. A $(\sqrt{a})^2 = a$ képlet alkalmazásával az adott egyenletet a következő egyenlettel helyettesítjük:

$$3x+4 = x-2. \quad (2)$$

Innen az $x = -3$.

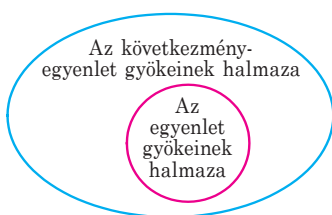
Az ellenőrzés viszont azt mutatja, hogy a -3 szám nem lesz gyöke az eredeti egyenletnek. Azt mondjuk, hogy a -3 az (1) **egyenlet hamis gyöke**.

Tehát az (1) egyenletnek nincs gyöke.

Felelet: az egyenletnek nincs gyöke. ◀

A 2. feladat megoldása során a hamis gyök megjelenésének oka az, hogy az $(\sqrt{a})^2 = a$ képlet alkalmazása során nem vettük figyelembe, hogy az $a \geq 0$ feltételnek teljesülnie kell. Ezért a (2) egyenlet nem egyenértékű az (1) egyenlettel.

Definíció. Ha az $f_2(x) = g_2(x)$ egyenlet gyökeinek halmaza tartalmazza az $f_1(x) = g_1(x)$ egyenlet gyökeinek halmazát, akkor az $f_2(x) = g_2(x)$ egyenletet az $f_1(x) = g_1(x)$ egyenlet **következményének** nevezzük.



7.1. ábra

Például az $x^2 = 25$ egyenlet következménye lesz az $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ egyenletnek. Győződjetek meg erről önállóan.

Azt is mondjuk, hogy az $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ egyenletből **következik** az $x^2 = 25$ egyenlet.

A 7.1. ábrán egy Euler-diagram szemlélteti a következmény-egyenlet halmaza és az eredeti egyenlet halmaza közötti összefüggést.

A hamis gyök megjelenésének másik oka, hogy az $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ egyenlőségből nem feltétlen következik az $x_1 = x_2$ egyenlőség. Például $(-2)^4 = 2^4$, de $-2 \neq 2$. Ugyanakkor az $x_1 = x_2$ egyenlőségből következik az $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ egyenlőség.

Igaz lesz a következő tétel.

7.2. tétel. *Az egyenlet mindkét oldalának páros hatványra emelése során a kapott egyenlet következménye lesz az eredetinek.*

3. feladat. Oldjuk meg a $\sqrt{4+3x} = x$ egyenletet!

Megoldás. Négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát. A kapott egyenlet következménye lesz az eredetinek:

$$4 + 3x = x^2.$$

Innen $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a -1 hamis gyök lesz, Ugyanakkor a 4 kielégíti az eredeti egyenletet.

Felelet: 4. ◀

4. feladat. Oldjuk meg a $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$ egyenletet!

Megoldás. Az adott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Innen $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Áttérve a következmény-egyenletre, a következőt kapjuk:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0; \quad x_1 = 42, \quad x_2 = 2.$$

Az ellenőrzés azt mutatja, hogy a 42 hamis gyöke lesz az egyenletnek, ugyanakkor a 2 kielégíti az adott egyenletet.

Felelet: 2. ◀

5. feladat. Oldjuk meg a $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$ egyenletet!

Megoldás. Legyen az $\sqrt[4]{x^3+1} = t$. Akkor $\sqrt{x^3+1} = t^2$. Ezután az eredeti egyenletet a következőképpen írhatjuk át:

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Innen $t = -3$ vagy $t = 1$.

Amikor $t = -3$, akkor a következő egyenletet kapjuk: $\sqrt{x^3+1} = -3$, aminek nincs megoldása.

Amikor $t = 1$, akkor a következő egyenletet kapjuk: $\sqrt[4]{x^3+1} = 1$.

Fejezzük be az egyenletet önállóan.

Felelet: 0. ◀

Emlékeztetünk benneteket arra, hogy az utóbbi egyenlet megoldásának módszere már ismert a 8–9. osztályos algebra tantárgyból. Ezt a módszert *változócsere*nek nevezzük.



1. Milyen egyenletet nevezünk irracionálisnak?
2. Az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük. A kapott és az eredeti egyenlet egyenértékű-e?
3. Az egyenlet mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emeljük. A kapott és az eredeti egyenlet egyenértékű-e?
4. Hogyan lehet megállapítani a gyökről, hogy hamis-e?



GYAKORLATOK

7.1.° Magyarázd meg, miért nincs gyöke az egyenletnek:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) $\sqrt{x-2} + 1 = 0$; | 3) $\sqrt{x-4} + \sqrt{1-x} = 5$; |
| 2) $\sqrt[6]{x} + \sqrt[8]{x-1} = -2$; | 4) $\sqrt[4]{x-6} + \sqrt{6-x} = 1$! |

7.2.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sqrt[4]{2x-2} = 2$; | 3) $\sqrt[5]{x-6} = -3$; |
| 2) $\sqrt[3]{x-4} = 2$; | 4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3} = x$! |

7.3.° Oldd meg az egyenletet:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{x-3} = 4$; | 2) $\sqrt[3]{8x^3-x-15} = 2x$; | 3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}} = 3$! |
|--------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|

7.4.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sqrt[7]{2x-1} = \sqrt[7]{3-x}$; | 3) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-3}$; |
| 2) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$; | 4) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$! |

7.5.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt[4]{2x-3}$; | 2) $\sqrt{4x-5} = \sqrt{1-x}$! |
|---------------------------------------|---------------------------------|

7.6.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{2-x} = x$; | 4) $\sqrt{2x^2-3x-10} = x$; |
| 2) $\sqrt{x+1} = x-1$; | 5) $2\sqrt{x+5} = x+2$; |
| 3) $\sqrt{3x-2} = x$; | 6) $\sqrt{15-3x}-1 = x$! |

7.7.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sqrt{10-3x} = -x$; | 3) $3\sqrt{x+10}-11 = 2x$; |
| 2) $x = \sqrt{x+5} + 1$; | 4) $x - \sqrt{3x^2-11x-20} = 5$! |

7.8.* Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4; \quad 2) \sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x.$$

7.9.* Oldd meg az egyenletet: $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1!$

7.10.* Oldd meg változócsereével az egyenletet:

$$1) \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0; \quad 4) 2\sqrt{x+1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x+1}};$$

$$2) \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0; \quad 5) \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x+1}} = 2;$$

$$3) 2x - 7\sqrt{x} - 15 = 0; \quad 6) \sqrt{\frac{x+5}{x-1}} + 7\sqrt{\frac{x-1}{x+5}} = 8!$$

7.11.* Oldd meg változócsereével az egyenletet:

$$1) x - \sqrt{x} - 12 = 0; \quad 3) \sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0;$$

$$2) \sqrt[3]{x^2} + 8 = 9\sqrt[3]{x}; \quad 4) \sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} = 2,5!$$

7.12.** Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1; \quad 2) \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1!$$

7.13.** Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2; \quad 3) \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1;$$

$$2) \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1; \quad 4) 2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1!$$

7.14.** Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2; \quad 2) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2!$$

7.15.** Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3; \quad 3) \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1;$$

$$2) \sqrt{x-7} + \sqrt{x-1} = 4; \quad 4) \sqrt{13-4x} + \sqrt{x+3} = 5!$$

7.16.** Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3; \quad 2) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = 3!$$

7.17.** Oldd meg változócsereével az egyenletet:

$$1) x^2 - 5x + 16 - 3\sqrt{x^2 - 5x + 20} = 0;$$

$$2) x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0;$$

$$3) \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7;$$

$$4) \sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2!$$

7.18.* Oldd meg változócserével az egyenletet:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0;$

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2;$

3) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123!$

7.19.* Oldd meg az $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 6$ egyenletet!

7.20.* Oldd meg az $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 6$ egyenletet!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

7.21. Ábrázold az $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{ha } x < 1, \\ x - 1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$ függvény grafikonját! A

grafikon alapján állapítsd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait!

7.22. Add meg a lineáris f függvény képletét, ha $f(-2) = 5$, $f(2) = -3$!



A LEMBERGI MATEMATIKAI ISKOLA

Jelenleg az *Algebra és az analízis elemei* egyik fejezetével ismerkedtek meg. A tantárgy nevében egy új szóösszetétel – az *analízis elemei* jelent meg. Mit takar ez a név? A válasz nagyon egyszerű: a matematikai analízis a függvények tanulmányozásával foglalkozik. Ebben az évben az analízis elemeiről kezdtetek el tanulni: újabb és újabb függvénytípussal kell megismerkednetek, megtanuljátok a tulajdonságaikat, elsajátítjátok a függvények vizsgálatának módszereit.

A XX. század első felében bizonyos függvénytípusok vizsgálata során egy új matematikai tárgy jött létre, a funkcionális analízis. Nagyon fontos és jelentős szerepet játszott ennek a tudománynak a létrejöttében a lembergi matematikai iskola.

A XX. század 20–30-as éveiben Lemberg a világ matematikai fővárosa volt. A tudományos intézetekben olyan neves matematikusok dolgoztak, mint Kazimierz Kuratowski, Stanislaw Mazur, Wladyslaw Orlicz, Wacław Sierpiński, Stanislaw Ulam, Juliusz Schauder, Hugo Steinhaus és még sokan mások. A lembergi tudósok olyan magasan képzettek voltak, hogy a világhírű matematikus, több matematikai logikáról és halmazelméletéről írt könyv szerzője, Alfred Tarski nem kapta meg a lembergi egyetem professzori állását. Lemberg matema-



Stefan Banach
(1892–1945)



**Banach *Funkcionális analízis* című
tankönyve**

tikusai egy erős tudományos csapatot hoztak létre, melyet a lemergi matematikai iskolának neveztek el. Vezetője a zseniális matematikus, Stefan Banach volt.

Ma a világ matematikusainak közössége Banachot tekinti a funkcionális analízis megteremtőjének. Az egyik első tankönyvet ebből a tárgyból Banach írta. Az általa bevezetett fogalmak klasszikusak lettek. Például a tudós által tanulmányozott teret *Banach-tér*nek nevezik és most már azok között a legszükségesebb fogalmak között van, melyet a felsőoktatásban tanuló matematikusnak, fizikusnak, kibernetikusnak ismernie kell.

Azt mesélik, hogy a lemergi matematikusok sok tételt a kávézóban bizonyítottak be. Stefan Banach a tanítványaival nagyon szeretett a *Skót kávéház*ban tartózkodni, ahol a kis márvány burkolatú asztalok nagyon alkalmasak voltak a matematikai képletek és tételek levezetésére. A kávézó tulajdonosát bosszantotta, hogy a tudósok nem hagytak fel ezzel a rossz szokásukkal. A helyzetet Banach felesége azzal mentette meg, hogy egy nagy méretű füzetet vásárolt férjének. Így keletkezett a híres *Skót könyv*, a matematikai problémák gyűjteménye, melyeken Banach és munkatársai dolgoztak. A bonyolult matematikai problémák megoldása fejében a tudósok viccesen sört vagy éttermi vacsorát ajánlottak fel egymásnak. Például az egyik probléma megoldásáért a kitalálója (1936-ban) egy élő libát ajánlott fel, melynek a megoldása csak 1972-ben született meg, amikor át is adták a jutalmat.



A liba átadása

A *Skót könyv*ben lévő problémák olyan fontosak és bonyolultak, hogy akinek sikerül legalább egyet is megoldania közülük, az azonnal világhírűvé válik. A *Skót könyv* a tudomány egyik leghíresebb és legértékesebb relikviája lett.



AZ 1. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

A függvény legnagyobb és legkisebb értékei

Ha minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \leq f(x)$ egyenlőtlenség, ahol az $x_0 \in M$, akkor az $f(x_0)$ számot a függvény legkisebb értékének nevezzük az M halmazon, és így jelöljük: $\min_M f(x) = f(x_0)$.

Ha minden $x \in M$ számra teljesül az $f(x_0) \geq f(x)$ egyenlőtlenség, ahol az $x_0 \in M$, akkor az $f(x_0)$ számot a függvény legnagyobb értékének nevezzük az M halmazon, és így jelöljük: $\max_M f(x) = f(x_0)$.

Páros és páratlan függvények

Az f függvényt párosnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen x értékére teljesül a következő egyenlőség: $f(-x) = f(x)$.

Az f függvényt páratlannak nevezzük, ha az értelmezési tartományának bármilyen x értékére teljesül a következő egyenlőség: $f(-x) = -f(x)$.

Az ordinátatengely a páros függvény szimmetriatengelye.

A koordináta-rendszer kezdőpontja a páratlan függvény szimmetriapontja.

Az n -edik gyök

Az a szám n -edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a számot nevezzük, melynek n -edik hatványa a -val egyenlő.

A nemnegatív a szám a számtani n -edik gyökének, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, azt a nemnegatív számot nevezzük, melynek n -edik hatványa a -val egyenlő.

Bármilyen a és $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^{2k+1} = a, \quad \sqrt[n]{a^{2k+1}} = a, \quad \sqrt[n]{a^{2k}} = |a|.$$

Bármilyen $a \geq 0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^{2k} = a.$$

Ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Ha $a \geq 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, akkor $\left(\sqrt[n]{a} \right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Ha $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, akkor $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

A racionális kitevőjű hatvány

A pozitív a szám $\frac{m}{n}$ hatványkitevőjű hatványának nevezzük, ahol

$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, az $\sqrt[n]{a^m}$, vagyis az $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ számot.

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Az $y = x^r$ képlettel megadott függvényt, ahol $r \in \mathbb{Q}$, racionális kitevőjű hatványfüggvénynek nevezzük.

Bármilyen $a > 0$ és bármilyen p és q racionális számok esetén teljesülnek a következő egyenlőségek: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Bármilyen $a > 0$ és $b > 0$, valamint bármilyen p racionális szám esetén teljesülnek a következő egyenlőségek: $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

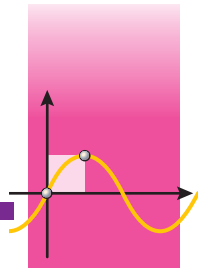
Irracionális egyenletek

Azokat az egyenleteket, melyekben a változó a gyökjel alatt van, irracionális egyenleteknek nevezzük.

Ha az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk.

Ha az egyenlet mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emeljük, akkor a kapott egyenlet következménye az eredetinek.

TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK 2. §.



E paragrafus anyagának elsajátítása során bővíteni fogjátok az eddigi ismereteiteket a trigonometrikus függvényekről és ezek tulajdonságairól, megismerkedtek a szög radiánmértékével, valamint a periodikus függvényekkel.

Megtanuljátok a különböző trigonometrikus függvények közötti összefüggéseket bemutató képleteket, ezek alkalmazását a számítások, a kifejezések egyszerűsítése és az azonosságok bizonyítása során.

Megismerkedtek a legegyszerűbb trigonometrikus egyenletekkel; a legegyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldóképleteivel.

8. A szög radiánmértéke

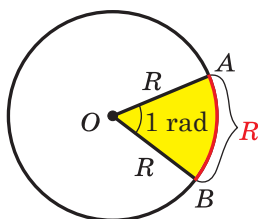
Eddig a szögek mérésére a fokot és ennek a törtrészeit – a percet és másodpercet – alkalmaztuk.

Sok esetben érdemes és hasznos lehet egy másik mértékegységet használni a szög mértékének meghatározásához. Ez a mértékegység a **radián**.

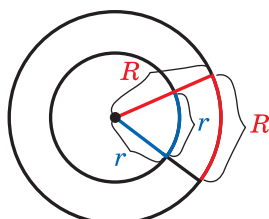
Definíció. 1 radián olyan középponti szög, melynek ívhossza egyenlő a körvonal sugarával.

A 8.1. ábrán az AOB középponti szög látható. Ez egy olyan AB ívre támaszkodik, melynek hossza a kör sugarával egyenlő. Az AOB szög egy radiánnal lesz egyenlő. Így írjuk fel: $AOB\angle = 1 \text{ rad}$. Azt is mondják, hogy az AB ív radiánmértéke egy radiánnal egyenlő. Így írjuk fel: $AB\cup = 1 \text{ rad}$.

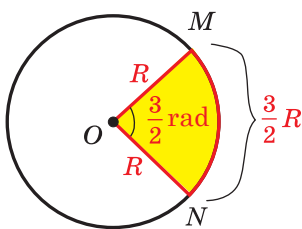
A szög (ív) radiánmértéke független a körvonal sugarától. Ezt az állítást jól szemlélteti a 8.2. ábra.



8.1. ábra



8.2. ábra



8.3. ábra

A 8.3. ábrán az R sugarú kör és az MN ív látható, melynek hossza $\frac{3}{2}R$. Ezért az

MON szög (MN ív) radiánmértéke $\frac{3}{2}$ lesz.

Általánosítva, ha az R sugarú kör középponti szöge az αR hosszúságú ívre támaszkodik, akkor ennek a szögnek a **radiánmértéke (vagy ívmértéke)** α radián lesz.

A félkörvonal hossza πR . Tehát a félkörvonal ívmértéke π radián lesz. A félkörvonal fokmértéke 180° . Ezek alapján felírhatjuk a szög ívmértéke és fokmértéke közötti összefüggést:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ. \quad (1)$$

Innen

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

Elosztva a 180 -at $3,14$ -gyel (emlékeztetőül, $\pi \approx 3,14$) megállapíthatjuk, hogy $1 \text{ rad} \approx 57^\circ$.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad (2)$$

Ebből az egyenlőségből könnyen megkaphatjuk például, hogy

$$15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}, \quad 90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}.$$

Amikor a szög ívmértékét írjuk fel, általában a rad jelölést elhagyjuk. Például: $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

Az alábbi táblázat a leggyakrabban alkalmazott szögek fokmértékét és ívmértékét tartalmazza:

A szög fokmértéke	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
A szög ívmértéke	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

A szög ívmértékének alkalmazásával egy jól használható képletet kapunk a körvonal körívének meghatározására.

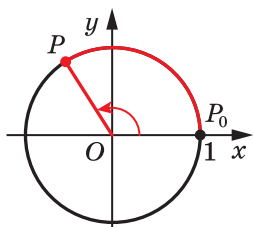
Mivel az 1 radián méretű középponti szög egy olyan ívre támaszkodik, melynek hossza egyenlő az R sugárral, ezért az α rad méretű szög az αR hosszúságú középponti szögre fog támaszkodni. Ha az α rad méretű ív hosszát l -lel jelöljük, akkor felírható:

$$l = \alpha R$$

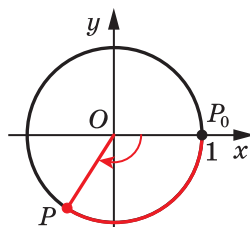
A koordinátasíkon vizsgáljunk meg egy olyan egységsugarú kört, melynek középpontja egybeesik a koordináta-rendszer kezdőpontjával. Az ilyen kört **egységkör**nek nevezzük.

A P pont a $P_0(1; 0)$ ponttól indulva az óramutató járással ellentétes irányban mozog az egységkör mentén. Az adott pillanatban olyan pozícióban lesz, hogy $P_0OP\angle = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (8.4. ábra). Azt is mondhat-

juk, hogy a P pontot a P_0 pontnak az origó körüli $\frac{2\pi}{3}$ (120° fokos) szöggel történő elforgatása során kapjuk.



8.4. ábra



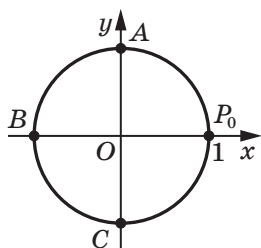
8.5. ábra

Most forgassuk el a P pontot az óramutató járásával megegyező irányba addig a helyzetig, melynél $POP_0\angle = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (8.5. ábra).

Ekkor azt mondjuk, hogy a P pontot a P_0 pontnak az origó körüli $-\frac{2\pi}{3}$ (-120° fokos) szöggel történő elforgatása során kapjuk.

Általánosítva, ha a mozgás a körvonalon az óramutató járásával ellenkező irányban történik (8.4. ábra), akkor az elforgatás szögét pozitívnak tekintjük, ha pedig az óramutató járásával megegyező irányban (8.5. ábra), akkor negatívnak.

Vizsgáljunk meg még néhány esetet. A 8.6. ábra alapján elmondhatjuk, hogy az A pontot a P_0 pontnak az origó körüli



8.6. ábra

$\frac{\pi}{2}$ -os (90° -kal) vagy $-\frac{3\pi}{2}$ -nal (-270° -kal) való elforgatása során kaptuk meg. A B pontot a P_0 pontnak az origó körüli π -nal (180° -kal) vagy $-\pi$ -nal (-180° -kal) való elforgatása során kaptuk meg. A C pontot a P_0 pontnak az origó körüli $\frac{3\pi}{2}$ -nal (270° -kal) vagy $-\frac{\pi}{2}$ -nal (-90° -kal) való elforgatása során kaptuk meg.

Ha a P pont egy teljes kört ír le az egységkörön, akkor azt mondjuk, hogy az elfordulás szöge 2π (360°) vagy -2π (-360°).

Ha a P pont másfél kört tesz meg az óramutató járásával ellenkező irányban, akkor az elfordulási szöge 3π (vagyis 540°) lesz, ha az óramutató járásával megegyező irányban, akkor -3π (vagyis -540°) lesz.

A szög mértéke radiánokban és fokban is bármilyen valós számmal kifejezhető.

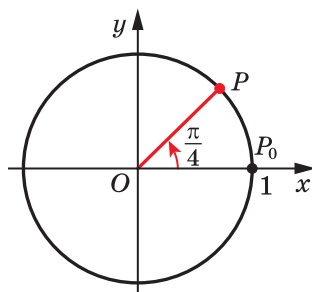
Az elforgatás szöge egyértelműen kifejezi a P pont helyzetét az egységkörön. Ugyanakkor a P pont egy adott helyzetének számtalan elforgatási szög felel meg. Például a P pontnak (8.7. ábra) a következő elforgatási szögek felelnek meg: $\frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} + 4\pi, \quad \frac{\pi}{4} + 6\pi \quad \text{és így tovább, és}$$

$$\text{szintén megfelel a } \frac{\pi}{4} - 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} - 4\pi, \quad \frac{\pi}{4} - 6\pi$$

stb. Megjegyezzük, hogy az összes ilyen szöget megkaphatjuk a következő képlet-

$$\text{ből: } \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



8.7. ábra



1. Mit nevezünk egy radián ívmértékű szögnek?
2. Mennyi az 1° -os szög ívmértéke?
3. Mivel egyenlő annak az R sugarú körívnek a hossza, amelynek ívmértéke α radián?



GYAKORLATOK

8.1.° Határozd meg a szög ívmértékét, ha fokmértéke:

- 1) 25° ; 2) 40° ; 3) 100° ; 4) 160° ; 5) 210° ; 6) 300° !

8.2.° Határozd meg a szög fokmértékét, ha ívmértéke:

- 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1,2\pi$; 5) 3π ; 6) $2,5\pi$!

8.3.° Töltsd ki a táblázatot!

A szög fokmértéke		12°	36°			105°	225°			240°
A szög ívmértéke	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1,8\pi$	

8.4.° Mivel egyenlő a körív hossza, ha a kör sugara 12 cm, az ívmértéke pedig:

- 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π ?

8.5.° Számítsd ki a körív hosszát, ha adott az α szög ívmértéke és a kör R sugara:

- 1) $\alpha = 3$, $R = 5$ cm; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ cm; 3) $\alpha = 0,4\pi$, $R = 2$ cm!

8.6.° Jelöld az egységkörön azt a pontot, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

- 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 150° ; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) -45° ; 5) -120° ; 6) -450° .

8.7.° Jelöld az egységkörön azt a pontot, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

- 1) -60° ; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 320° ; 4) 420° ; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$!

8.8.° Melyik koordinátanegyedhez tartozik az egységkör azon pontja, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

- 1) 127° ; 4) 400° ; 7) -470° ; 10) $2,4\pi$;
 2) 89° ; 5) 600° ; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3;
 3) 276° ; 6) -400° ; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) -2 ?

8.9.° Melyik koordinátanegyedhez tartozik az egységkör azon pontja, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

- 1) 94° ; 2) 176° ; 3) 200° ; 4) -100° ;

- 5) -380° ; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 9) $-\frac{7\pi}{3}$; 11) 1;
 6) 700° ; 8) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{11\pi}{6}$; 12) -3°

8.10.° Határozd meg annak a pontnak a koordinátáit, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

- 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π ; 3) -90° ; 4) -180° ; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) -2π !

8.11.° Határozd meg annak a pontnak a koordinátáit, amelyet a $P_0(1; 0)$ pontnak a következő szöggel történő elforgatásával kapunk:

- 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π ; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 180° !

8.12.* Nevezd meg azt a legkisebb pozitív és a legnagyobb negatív szöget, amellyel ha elforgatjuk a $P_0(1; 0)$ pontot, akkor a:

- 1) (0; 1); 2) $(-1; 0)$ pontba jutunk!

8.13.* Nevezd meg azt a legkisebb pozitív és legnagyobb negatív szöget, amellyel ha elforgatjuk a $P_0(1; 0)$ pontot, akkor a:

- 1) (0; -1); 2) (1; 0) pontba jutunk!

8.14.** Határozd meg az összes olyan szöget, amellyel el kell fordítani a $P_0(1; 0)$ pontot, hogy a következő pontba jussunk:

- 1) $P_1(0; 1)$; 2) $P_2(-1; 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$!

8.15.** Határozd meg az összes szöget, amellyel el kell fordítani a $P_0(1; 0)$ pontot, hogy a következő pontba jussunk:

- 1) $P_1(0; -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$!

8.16.** Határozd meg az egységkör azon pontjának a koordinátáit, melyet a $P_0(1; 0)$ pontnak:

- 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

- 2) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) πk , $k \in \mathbb{Z}$

szöggel való elfordításával kapunk!

8.17.** Határozd meg az egységkör azon pontjának a koordinátáit, melyet a $P_0(1; 0)$ pontnak:

- 1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

szöggel való elfordításával kapunk!

- 8.18.** Bizonyítsd be, hogy az α radián nagyságú ívhez tartozó körívek területét az $S = \frac{\alpha R^2}{2}$ képlettel lehet kiszámítani, ahol R a körvonal sugara!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

8.19. Oldd meg az egyenletet:

$$1) \frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3};$$

$$2) \frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}!$$

8.20. Egy városban 88 200 lakos él. Hány lakosa volt a városnak két évvel ezelőtt, ha évente 5%-kal nő a lakosság létszáma?

9. A számargumentumú trigonometrikus függvények

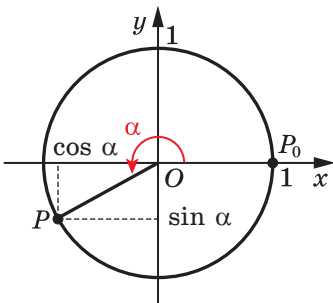
A 9. osztályban a trigonometrikus függvények meghatározásakor a 0° és 180° közötti szögeket az egységfélkörön határoztuk meg. Általánosítjuk ezt a meghatározást bármilyen α szögre.

Vizsgáljuk meg a 9.1. ábrán lévő egységkört.

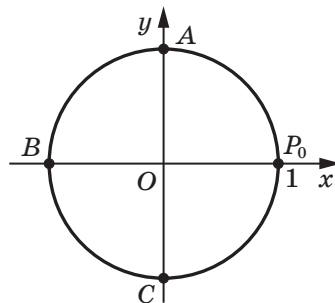
Definíció. Az α szög koszinuszának (szinusznak) az egységkör azon $P(x; y)$ pontjának x abszcisszáját (y ordinátáját) nevezzük, melyet a $P_0(1; 0)$ pontnak az origó körüli α szöggel történő elforgatása után kapunk (9.1. ábra).

A matematika nyelvén így írjuk fel: $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$.

A P_0 , A , B és C pontok (9.2. ábra) megfelelő koordinátái: $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Ezeket a pontokat a $P_0(1; 0)$ pont 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$



9.1. ábra



9.2. ábra

szöggel történő elforgatása során kapjuk. Tehát az adott definíció alapján össze lehet állítani a következő táblázatot¹:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

1. feladat. Határozzuk meg az α szög összes értékét, melyeknél:
1) $\sin \alpha = 0$; 2) $\cos \alpha = 0$!

Megoldás. 1) Csak az egységkör két pontjának ordinátája egyenlő nullával: P_0 és B (9.2. ábra). Ezeket a pontokat a P_0 pont

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots \text{ és } -\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi, \dots$$

szöggel történő elforgatásakor kapjuk meg.

Ezeket a szögeket az $\alpha = \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ képlettel írhatjuk fel. Tehát $\sin \alpha = 0$, ha $\alpha = \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

2) Az A és C pontoknak lesz az abszcisszája egyenlő nullával. Ezeket a pontokat a P_0 pont

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots \text{ és } \frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 3\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \dots$$

szöggel történő elforgatásakor kapjuk meg.

Az összes szöget felírhatjuk az $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ képlettel.

Tehát $\cos \alpha = 0$, ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. ◀

Definíció. Az α szög **tangensének** a szög szinuszának és koszinuszának arányát nevezzük:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{Például: } \operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1.$$

¹ A 3. előzőeken megtalálhatók néhány szög trigonometrikus függvényének értékei.

A tangens meghatározásából következik, hogy csak arra az elfordulási szögre van értelmezve, amikor $\cos \alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Már tudjátok, hogy az egységgörön minden α elfordulási szögnek egy pont felel meg. Tehát az α minden értékének egyetlen egy szám felel meg, amelyet az α szög szinuszának (koszinuszának, tangensének, ahol $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) nevezünk. Ezért a szög szinusza (koszinusza, tangense) és az elfordulási szög között függvénykapcsolat áll fenn.

Az $f(\alpha) = \sin \alpha$, $g(\alpha) = \cos \alpha$ és $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ függvényeket az α szög **trigonometrikus függvényeinek** nevezük.

Minden valós α számnak megfeleltetjük az α radián nagyságú szöget. Ez lehetőséget ad arra, hogy a trigonometrikus függvényekre számargumentumú függvényekként tekintsünk.

Például a $\sin 2$ alatt a 2 radián nagyságú szög szinuszt értjük. A szinusz és koszinusz meghatározásából következik, hogy az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ halmaz lesz.

Mivel az egységgör pontjainak abszcisszái és ordinátái a -1 és az 1 között az összes értéket felveszi, ezért az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvények értékkészletei a $[-1; 1]$ intervallum lesz.

Mivel az α és az $\alpha + 2\pi n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$, szögeknek ugyanaz a pont felel meg az egységgörön, ezért

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin (\alpha + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \cos \alpha &= \cos (\alpha + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza lesz, kivéve a $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ számokat. Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értékkészlete az $\mathbb{R}$ halmaz.

Be lehet bizonyítani, hogy igaz a következő képlet:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. feladat. Határozd meg az $1 - 4 \cos \alpha$ legnagyobb és legkisebb értékét!

Megoldás. Mivel $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, ezért $-4 \leq -4 \cos \alpha \leq 4$, $-3 \leq 1 - 4 \cos \alpha \leq 5$. Tehát az adott kifejezés legkisebb értéke a -3 , melyet a kifejezés akkor vesz fel, ha $\cos \alpha = 1$. Az adott kifejezés legnagyobb értéke az 5 , melyet a kifejezés akkor vesz fel, ha $\cos \alpha = -1$. ◀



1. Mit nevezünk az elforgatási szög koszinuszának? Az elforgatási szög szinuszának? Az elforgatási szög tangensének?
2. Mi az értelmezési tartománya az $y = \sin x$ függvénynek? Az $y = \cos x$ függvénynek?
3. Mi az értékkészlete az $y = \sin x$ függvénynek? Az $y = \cos x$ függvénynek?
4. Mivel egyenlő $\sin(\alpha + 2\pi n)$, ha $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, ha $n \in \mathbb{Z}$?
5. Mi az értelmezési tartománya az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek?
6. Mi az értékkészlete az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek?
7. Mivel egyenlő $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, ha $n \in \mathbb{Z}$?



GYAKORLATOK

9.1.° Számítsd ki a kifejezés értékét:

- 1) $2 \cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ$;
- 2) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$;
- 3) $\sin 0^\circ + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}$;
- 4) $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$!

9.2.° Mivel egyenlő a kifejezés értéke:

- 1) $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$;
- 2) $7 \operatorname{tg}^2 45^\circ - 3 \sin 45^\circ$;
- 3) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;
- 4) $\cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}$?

9.3.° Igaz-e az egyenlőség:

- 1) $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$;
- 2) $\sin \alpha = \frac{9}{8}$?

9.4.° Egyenlő lehet e $\frac{\sqrt{5}}{2}$ -vel a kifejezés:

- 1) $\sin \alpha$;
- 2) $\cos \alpha$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha$?

9.5.° Nevezd meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét:

- 1) $3 \sin \alpha$;
- 2) $4 + 2 \cos \alpha$;
- 3) $2 - \sin \alpha$;
- 4) $\sin^2 \alpha$!

9.6.° Nevezd meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét:

- 1) $-5 \cos \alpha$;
- 2) $3 \cos \alpha - 2$;
- 3) $5 + \sin^2 \alpha$!

9.7.° Nevezd meg az x három olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

- 1) $\sin x = 1$;
- 2) $\sin x = -1$!

9.8.° Nevezd meg az x három olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

- 1) $\cos x = 1$;
- 2) $\cos x = -1$!

9.9.** Határozd meg az x összes olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

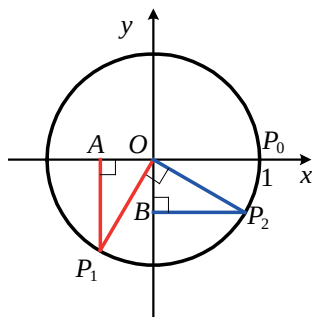
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$!

9.10.** Határozd meg az x összes olyan értékét, melyekre teljesül a következő egyenlőség:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$!

9.11.** Bizonyítsd be a 9.3. ábra alapján, hogy $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$!

9.12.** Bizonyítsd be a 9.3. ábra alapján, hogy $\sin \alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$!



9.3. ábra



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

9.13. Hasonlítsd össze a 0-val az $A(x; y)$ pont koordinátáit, ha a pont a következő koordináтанegyedben található:

- 1) az I. koordináтанegyed;
- 2) a II. koordináтанegyed;
- 3) a III. koordináтанegyed;
- 4) a IV. koordináтанegyed!

9.14. Páros vagy páratlan-e a függvény:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$?

10. A trigonometrikus függvények előjelei. Páros és páratlan trigonometrikus függvények

Már tudjátok, hogy a P pontot úgy kapjuk, hogy az egységsugarú körvonal $P_0(1; 0)$ pontját elforgatjuk az origó körül α szöggel. Ha a P pont az I. koordináтанegyedben helyezkedik el, akkor az α szög **első negyedbeli szög** (az I. koordináтанegyedben helyezkedik el).

Például $\frac{\pi}{7}$ és a -300° szögek az I. negyed szögei, $\frac{2\pi}{3}$ és a -185°

szögek a II. negyed szögei, $\frac{5\pi}{4}$ és a -96° szögek a III. negyed szögei,

355° és $-\frac{\pi}{8}$ szögek a IV. negyed szögei lesznek.

A $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ alakú szögek nem tartoznak egyik negyedhez sem.

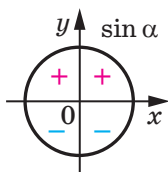
Az I. negyed pontjainak az abszcisszájuk és az ordinátájuk is pozitívak. Tehát, ha α az I. negyedben helyezkedik el, akkor $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

Ha a II. negyedben, akkor $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

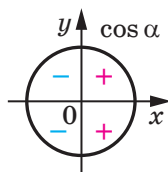
Ha a III. negyedben, akkor $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Ha a IV. negyedben, akkor $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

A szinusz és a koszinusz előjeleit a 10.1. ábra szemlélteti.



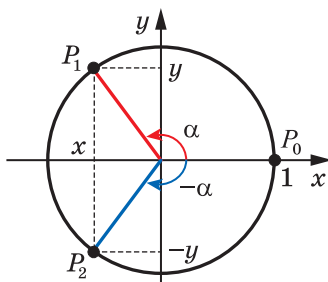
10.1. ábra



10.2. ábra

Mivel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, ezért az I. és a III. negyedben lévő szög tangense pozitív, a II. és a IV. negyedben lévő szög tangense pedig negatív (10.2. ábra).

Legyenek a P_1 és a P_2 pontok a $P_0(1; 0)$ pontnak az origó körüli α és $-\alpha$ szöggel történő elforgatásával kapott képei (10.3. ábra).



10.3. ábra

Bármilyen α szög esetén a P_1 és a P_2 pontoknak egyenlő abszcisszái és ellentétes ordinátái lesznek. Ezért a szinusz és a koszinusz meghatározásából következik, hogy bármilyen α szög esetén teljesül:

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ***a koszinusz páros, a szinusz pedig páratlan függvény.***

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény szimmetrikus az origóra (ellenőrizték le önállóan). Ezenkívül:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Tehát ***a tangens függvény páratlan.***

1. feladat. Milyen előjele van: 1) $\sin 280^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(-140^\circ)$?

Megoldás.

1) Mivel a 280° -os szög a IV. negyedben van, ezért $\sin 280^\circ < 0$.

2) Mivel a -140° -os szög a III. negyedben van, ezért $\operatorname{tg}(-140^\circ) > 0$. ◀

2. feladat. Hasonlítsuk össze a $\sin 200^\circ$ és a $\sin(-200^\circ)$ értékeit!

Megoldás. Mivel a 200 fokos szög a III. negyedben van, a -200 fokos szög pedig a II. negyedben, ezért $\sin 200^\circ < 0$, $\sin(-200^\circ) > 0$.

Tehát $\sin 200^\circ < \sin(-200^\circ)$. ◀

3. feladat. Vizsgáljuk meg a függvény paritását:

1) $f(x) = \frac{1 + \cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$!

Megoldás.

1) Az adott függvény értelmezési tartománya: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, szimmetrikus az origóra. Tehát:

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 + \cos x}{x^2} = f(x).$$

Tehát az adott függvény páros lesz.

2) Az adott függvény értelmezési tartománya: $D(f) = (-\infty; +\infty)$, szimmetrikus az origóra. Felírjuk:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Mivel az $f(-x) = f(x)$ és az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőségek közül egyik sem teljesül az értelmezési tartomány minden x értékére, ezért az adott függvény se nem páros, se nem páratlan. ◀



1. Mikor mondjuk azt, hogy az α szög az I. koordinátanegyedben van? A II. negyedben van? A III. negyedben van? A IV. negyedben van?
2. Milyen előjelű a szinusz, a koszinusz és a tangens az egyes negyedekben?
3. Mely trigonometrikus függvények párosak, és melyek páratlanok? Írjátok fel a megfelelő egyenlőségeket!



GYAKORLATOK

10.1.° Melyik koordináтанegyedben van a következő szög:

- 1) 38° ; 2) 196° ; 3) -74° ; 4) $\frac{3\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{2\pi}{3}$?

10.2.° Pozitív vagy negatív lesz-e a trigonometrikus függvény értéke:

- 1) $\sin 110^\circ$; 2) $\cos 200^\circ$; 3) $\sin (-280^\circ)$; 4) $\operatorname{tg} (-75^\circ)$; 5) $\cos 2$; 6) $\operatorname{tg} 1$?

10.3.° Hasonlítsd össze a nullával:

- 1) $\operatorname{tg} 104^\circ$; 3) $\sin (-36^\circ)$; 5) $\operatorname{tg} (-291^\circ)$;
2) $\cos 220^\circ$; 4) $\cos (-78^\circ)$; 6) $\sin \frac{3\pi}{7}$!

10.4.° Határozd meg a kifejezés értékét:

- 1) $\sin (-30^\circ)$; 2) $\operatorname{tg} (-60^\circ)$; 3) $\cos (-45^\circ)$!

10.5.° Mivel egyenlő a $\cos (-60^\circ) + \operatorname{tg} (-45^\circ)$ kifejezés értéke?

10.6.° Határozd meg a $\sin (-30^\circ) - 2\operatorname{tg} (-45^\circ) + \cos (-45^\circ)$ kifejezés értékét!

10.7.° Határozd meg a $\sin^2 (-60^\circ) + \cos^2 (-30^\circ)$ kifejezés értékét!

10.8.* Melyik koordináтанegyedben van az α szög, ha:

- 1) $\sin \alpha > 0$ és $\cos \alpha < 0$; 2) $\sin \alpha < 0$ és $\operatorname{tg} \alpha > 0$?

10.9.* Ismert, hogy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Hasonlítsd össze a kifejezés értékét a nullával:

- 1) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$!

10.10.* Ismert, hogy $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Hasonlítsd össze a kifejezés értékét a nullával:

- 1) $\sin \beta \cos \beta$; 2) $\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta}$!

10.11.* Hasonlítsd össze:

- 1) $\operatorname{tg} 130^\circ$ és $\operatorname{tg} (-130^\circ)$; 2) $\cos 80^\circ$ és $\sin 330^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 6$ és $\operatorname{tg} 6^\circ$!

10.12.** Ismert, hogy az α a III. negyedben van. Egyszerűsítsd a kifejezést:

- 1) $\sin \alpha - |\sin \alpha|$; 2) $|\cos \alpha| - \cos \alpha$; 3) $|\operatorname{tg} \alpha| - \operatorname{tg} \alpha$!

10.13.** Ismert, hogy a β a IV. negyedben van. Egyszerűsítsd a kifejezést:

- 1) $|\sin \beta| + \sin \beta$; 2) $\cos \beta - |\cos \beta|$; 3) $|\operatorname{tg} \beta| + \operatorname{tg} \beta$!

10.14.** Vizsgáld meg a függvény paritását:

- 1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $f(x) = x^3 + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$!

10.15.** Vizsgáld meg a függvény paritását:

$$1) f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x; \quad 2) f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}; \quad 3) f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}!$$



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

10.16. Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{x^2 - 18} = \sqrt{2x - 3}; \quad 2) \sqrt{10 - 3x} + 8 = 5x!$$

11. A trigonometrikus függvények tulajdonságai és grafikonjai

Már tudjátok, hogy minden egyes x értékre teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$

$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Ez azt jelenti, hogy a szinusz és a koszinusz függvények értékei periodikusan ismétlődnek, ha az argumentumaikat 2π -vel változtatjuk. Az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ a **periodikus függvények** példái.

Definíció. Az f függvényt **periodikusnak** nevezzük, ha létezik egy olyan $T \neq 0$ szám, hogy az f függvény értelmezési tartományának bármely x értékére teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

A T számot a függvény **periódusának** nevezzük.

Már tudjátok, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értelmezési tartományának bármilyen x értékére igaz a következő egyenlőség:

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

A periodikus függvény meghatározásából az következik, hogy a tangens egy olyan periodikus függvény, melynek a periódusa π .

Be lehet bizonyítani, hogyha a függvénynek a periódusa T , akkor $a 2T, 3T, \dots$, valamint $a -T, -2T, -3T, \dots$ számok mindegyike periódusa lesz az adott függvénynek.

Ebből az következik, hogy a periodikus függvénynek számtalan periódusa lesz.

Például minden $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ alakban megadott szám periódusa az $y = \sin x$, $y = \cos x$ függvényeknek, és minden πn , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ alakú szám periódusa az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek.

Ha az f függvénynek az összes periódusa között létezik legkisebb pozitív periódus, akkor ezt az f függvény **fő periódusának** nevezzük.

11.1. tétel. Az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvények fő periódusa $a\ 2\pi$, az $y = \operatorname{tg} x$ függvény fő periódusa $a\ \pi$ lesz.

1. feladat. Határozzuk meg a kifejezés értékét: 1) $\sin 660^\circ$;

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135^\circ$!

Megoldás.

1) $\sin 660^\circ = \sin (720^\circ - 60^\circ) = \sin (-60^\circ + 360^\circ \cdot 2) =$

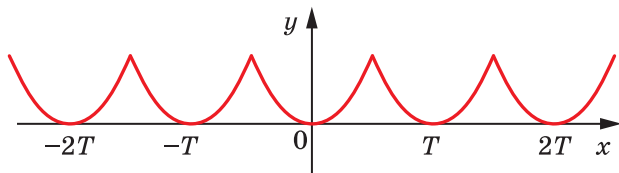
$$= \sin (-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin \frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg} (-45^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg} (-45^\circ) = -1.$ ◀

A 11.1. ábrán egy olyan f periodikus függvényt ábrázoltunk, melynek periódusa T , $D(f) = \mathbb{R}$.

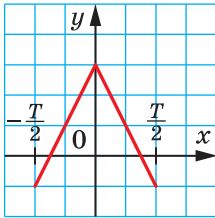


11.1. ábra

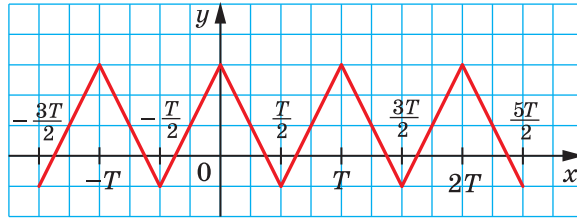
E függvény grafikonjának részletei a $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ és így tovább, valamint a $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ és így tovább intervallumokon egybevágó alakzatok lesznek, és ezek közül bármelyiket megkaphatjuk bármelyikből az $(nT; 0)$ vektorral való párhuzamos eltolással, ahol n valamilyen egész szám lesz.

2. feladat. A 11.2. ábrán egy T periódusú periodikus függvény részlete látható. Ábrázoljuk ezt a függvényt a $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$ intervallumon.

Megoldás. Megrajzoljuk az ábrázolt alakzat képét a $(T; 0)$, $(2T; 0)$ és $(-T; 0)$ koordinátájú vektorokkal történő párhuzamos eltolással. Az így kapott alakzatoknak az egyesítése lesz a keresett grafikon (11.3. ábra). ◀



11.2. ábra

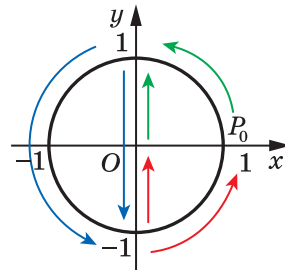


11.3. ábra

↪ Vizsgáljuk meg az $y = \sin x$ függvényt a $[0; 2\pi]$ intervallumon, vagyis e függvény egy teljes periódusán.

A $P_0(1; 0)$ pontnak az origó körüli 0 -tól $\frac{\pi}{2}$ -ig történő elforgatása során a nagyobb szögnek az egységkörön nagyobb ordinátájú pont felel meg (11.4. ábra). Ez azt jelenti, hogy az $y = \sin x$ függvény a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon növekvő lesz.

A $P_0(1; 0)$ pontnak az origó körüli $\frac{\pi}{2}$ -től $\frac{3\pi}{2}$ -ig történő elforgatása során az egységkörön a nagyobb szögnek kisebb ordinátájú pont felel meg (11.4. ábra). Tehát az $y = \sin x$ függvény a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon csökkenő.



11.4. ábra

A $P_0(1; 0)$ pontnak a $\frac{3\pi}{2}$ -től a 2π -ig történő elforgatása során a nagyobb szögnek nagyobb ordinátájú pont felel meg (11.4. ábra). Tehát az $y = \sin x$ függvény a $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ intervallumon növekvő lesz.

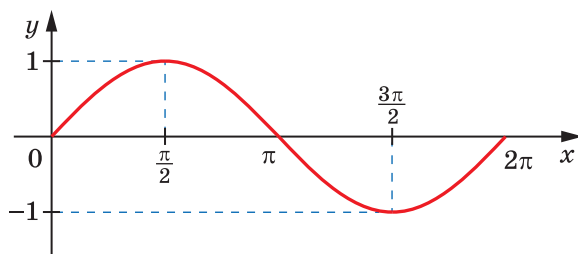
Az $y = \sin x$ függvénynek a $[0; 2\pi]$ intervallumon három zérushelye van: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Ha $x \in (0; \pi)$, akkor a $\sin x > 0$; ha $x \in (\pi; 2\pi)$, akkor a $\sin x < 0$.

A $[0; 2\pi]$ intervallumon az $y = \sin x$ függvény legnagyobb értéke 1, ahol $x = \frac{\pi}{2}$, a legkisebb értéke pedig -1 , ahol $x = \frac{3\pi}{2}$.

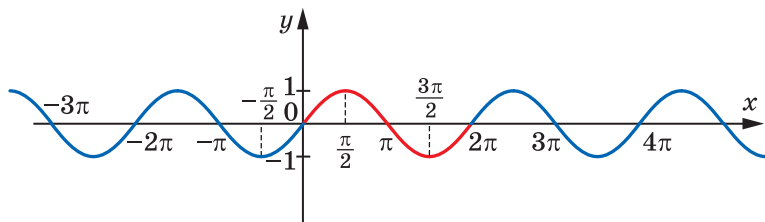
Az $y = \sin x$ függvény a $[0; 2\pi]$ intervallumon felveszi az összes értékét a $[-1; 1]$ intervallumnak.

A kapott eredmények lehetőséget adnak arra, hogy ábrázoljuk az $y = \sin x$ függvény grafikonját a $[0; 2\pi]$ intervallumon (11.5. ábra). A grafikont pontosabban is megrajzolhatjuk, ha alkalmazzuk a 3. előzéken lévő trigonometrikus függvények táblázatát.



11.5. ábra

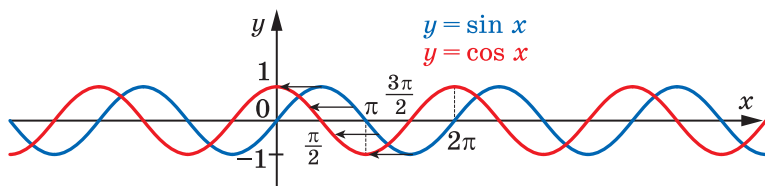
Az $y = \sin x$ függvény grafikonját az egész értelmezési tartományán megkaphatjuk, ha alkalmazzuk a $(2\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ koordinátájú vektorral történő párhuzamos eltolást (11.6. ábra).



11.6. ábra

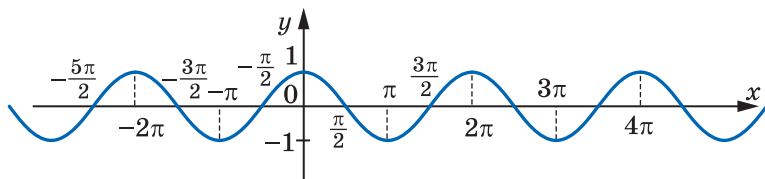
Az $y = \sin x$ függvény grafikonját **szinuszoidnak** vagy **szinuszvo-nalnak** nevezzük.

👉 Vizsgáljuk meg az $y = \cos x$ függvényt. Ha alkalmazzuk a $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ képletet (lásd a 9.11. gyakorlatot), ekkor érthetővé válik, hogy az $y = \cos x$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = \sin x$ függvény grafikonjának $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ koordinátájú vektorral történő párhuzamos eltolásával (11.7. ábra). Ez azt jelenti, hogy az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ függvény grafikonjai egybevágó alakzatok lesznek.



11.7. ábra

Az $y = \cos x$ függvény grafikonját szintén **szinuszoid**nak nevezzük (11.8. ábra).



11.8. ábra

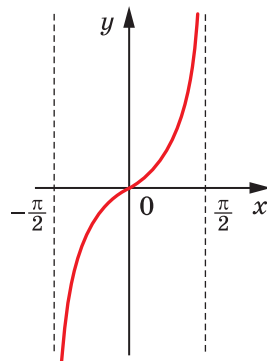
🔍 Vizsgáljuk meg az $y = \operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, vagyis e függvény egy teljes periódusán (emlékeztetőül: az $y = \operatorname{tg} x$ függvény a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ pontokban nincs értelmezve).

Be lehet bizonyítani, hogy a tangens $-\frac{\pi}{2}$ -től $\frac{\pi}{2}$ -ig növekszik. Ez azt jelenti, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon növekvő.

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon egyetlen zérushelye van: $x = 0$.

Ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, akkor a $\operatorname{tg} x < 0$; ha $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, akkor a $\operatorname{tg} x > 0$.

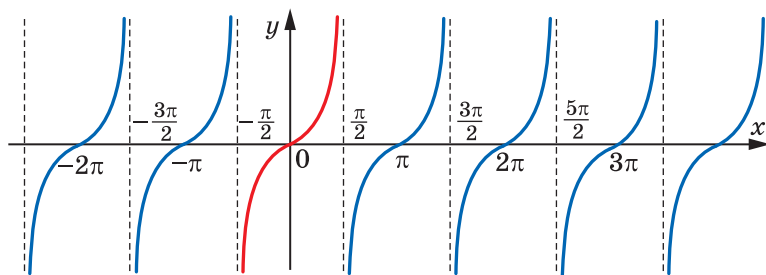
A kapott tulajdonságai alapján megrajzolható az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



11.9. ábra

intervallumon (11.9. ábra). A grafkont pontosabban is ábrázolni lehet, ha alkalmazzuk a 3. előzéken lévő trigonometrikus függvények táblázatát.

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonját az egész értelmezési tartományán megkaphatjuk, ha alkalmazzuk a $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ koordinátájú vektorral történő párhuzamos eltolást (11.10. ábra).



11.10. ábra

A 69. oldalon lévő táblázat tartalmazza a trigonometrikus függvények legfontosabb tulajdonságait.

3. feladat. Hasonlítsuk össze: 1) $\sin 0,7\pi$ és $\sin 0,71\pi$; 2) $\cos 324^\circ$ és $\cos 340^\circ$ értékeit!

Megoldás. 1) Mivel a $0,7\pi$ és a $0,71\pi$ számok a $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartoznak, amelyen az $y = \sin x$ függvény csökkenő, és $0,7\pi < 0,71\pi$, ezért $\sin 0,7\pi > \sin 0,71\pi$.

2) Mivel a 324° és a 340° szögek a $[180^\circ; 360^\circ]$ intervallumhoz tartoznak, amelyen az $y = \cos x$ függvény növekvő, és $324^\circ < 340^\circ$, ezért $\cos 324^\circ < \cos 340^\circ$. ◀



1. Milyen függvényt nevezünk periodikusnak?
2. Mit nevezünk a függvény fő periódusának?
3. Ábrázold az $y = \sin x$ függvény vázlatos grafikonját, majd foglalmazd meg a tulajdonságait!
4. Ábrázold az $y = \cos x$ függvény vázlatos grafikonját, majd foglalmazd meg a tulajdonságait!
5. Ábrázold az $y = \operatorname{tg} x$ függvény vázlatos grafikonját, majd foglalmazd meg a tulajdonságait!

Tulajdonságok	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
Értelmezési tartomány	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
Értékkészlet	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Fő periódus	2π	2π	π
Zérushelyek	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn
Pozitív előjeletartási intervallum	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Negatív előjeletartási intervallum	$(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
Paritás	Páratlan	Páros	Páratlan
Növekedési intervallum	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Csökkenési intervallum	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	—
Legnagyobb értéke	1	1	—
Legkisebb értéke	-1	-1	—



GYAKORLATOK

11.1.° Határozd meg a kifejezés értékét:

- 1) $\sin 390^\circ$; 3) $\sin(-390^\circ)$; 5) $\cos 300^\circ$;
 2) $\operatorname{tg} 780^\circ$; 4) $\operatorname{tg}(-210^\circ)$; 6) $\sin \frac{5\pi}{3}$!

11.2.° Határozd meg a kifejezés értékét:

- 1) $\sin 420^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$; 3) $\sin 1110^\circ$; 4) $\cos \frac{7\pi}{3}$!

11.3.° Hozzátartozik-e az $y = \cos x$ függvény grafikonjához a következő pont:

- 1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C(-4\pi; -1)$?

11.4.° Átmegy-e az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonján a következő pont:

- 1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C(\pi; 0)$?

11.5.° Átmegy-e az $y = \sin x$ függvény grafikonján a következő pont:

- 1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B(\pi; -1)$; 3) $C\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$?

11.6.° A -2π , $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π , $\frac{9\pi}{2}$, 6π , 7π számok közül nevezd meg azokat, amelyek:

- 1) az $y = \sin x$ függvény zérushelyei;
 2) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \sin x$ függvény a legnagyobb értékét veszi fel;
 3) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \sin x$ függvény a legkisebb értékét veszi fel!

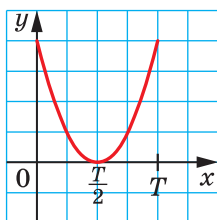
11.7.° A $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π , 8π számok közül nevezd meg azokat, amelyek:

- 1) $y = \cos x$ függvény zérushelyei;
 2) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \cos x$ függvény a legnagyobb értékét veszi fel;
 3) azokat az argumentumértékeket, amelyeknél az $y = \cos x$ függvény a legkisebb értékét veszi fel!

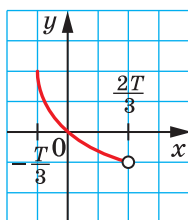
11.8.° A $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π számok közül nevezd meg azokat, amelyek:

- 1) az $y = \operatorname{tg} x$ függvény zérushelyei;
 2) azokat az értékeket, amelyeknél nincs értelmezve az $y = \operatorname{tg} x$ függvény!

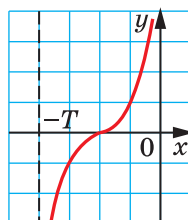
11.9.* A 11.11. ábrán egy periodikus függvény látható, melynek periódusa T . Ábrázold ezt a függvényt a $[-2T; 3T]$ intervallumon!



a



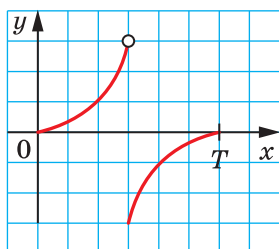
b



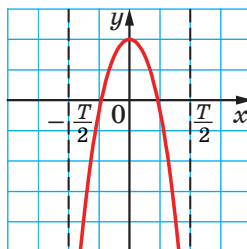
c

11.11. ábra

11.10.* A 11.12. ábrán egy periodikus függvény látható, melynek periódusa T . Ábrázold ezt a függvényt a $[-2T; 2T]$ intervallumon!



a



b

11.12. ábra

11.11.* A következő intervallumok közül melyiken lesz növekvő az $y = \sin x$ függvény:

- 1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

11.12.* A következő intervallumok közül melyiken lesz csökkenő az $y = \sin x$ függvény:

- 1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

11.13.* A következő intervallumok közül melyik lesz az $y = \cos x$ függvény fogyási intervalluma:

- 1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$?

11.14.* A következő intervallumok közül melyik lesz az $y = \cos x$ függvény növekedési intervalluma:

- 1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$?

11.15.* Hasonlítsd össze a következő értékeket:

- 1) $\sin 20^\circ$ és $\sin 21^\circ$; 3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ és $\sin \frac{25\pi}{18}$;
2) $\cos 20^\circ$ és $\cos 21^\circ$; 4) $\operatorname{tg}(-38^\circ)$ és $\operatorname{tg}(-42^\circ)$!

11.16.* Hasonlítsd össze a következő értékeket:

- 1) $\cos \frac{\pi}{9}$ és $\cos \frac{4\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ és $\sin \frac{17\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg} 100^\circ$ és $\operatorname{tg} 92^\circ$!

11.17.** Bizonyítsd be, hogy a T szám az f függvény periódusa:

- 1) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, $T = 8\pi$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $T = -\frac{2\pi}{3}$!

11.18.** Bizonyítsd be, hogy a $\frac{2\pi}{3}$ és -4π az $f(x) = \cos 3x$ függvény periódusai!

11.19.* Hasonlítsd össze az értékeket:

- 1) $\sin 58^\circ$ és $\cos 58^\circ$; 2) $\sin 18^\circ$ és $\cos 18^\circ$; 3) $\cos 80^\circ$ és $\sin 70^\circ$!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

11.20. Határozd meg a függvény zérushelyeit:

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; 3) $f(x) = x\sqrt{x - 1}$!

11.21. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

- 1) $f(x) = x^2 + 2$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$!

12. Az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggések

Ebben a pontban az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggésekkel fogunk megismerkedni.

Az egységkör bármilyen $P(x; y)$ pontjának koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Mivel az $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, ahol az α annak az elforgatásának a szöge, amely során a $P_0(1; 0)$ pontból megkapjuk a P pontot, ezért

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(1)

Felhívjuk arra a figyelmeteket, hogy az egységkör P pontját szabadon választhatjuk meg, ezért az (1) azonosság bármely α szögre igaz. Ezt az összefüggést a **trigonometria alapazonosságának** nevezzük.

A trigonometrikus alapazonosság alkalmazásával meghatározzuk a tangens és a koszinusz közötti összefüggést.

Legyen $\cos \alpha \neq 0$. Ha az (1) egyenlőség mindkét oldalát elosztjuk $\cos^2 \alpha$ -val, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Innen

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

1. feladat. Egyszerűsítsük a kifejezést:

$$1) \sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x; \quad 2) \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi!$$

$$\text{Megoldás. } 1) \sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$2) \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi =$$

$$= \cos^2 \varphi. \quad \blacktriangleleft$$

2. feladat. Adott, hogy $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Számítsuk ki a $\sin \alpha$ értékét!

$$\text{Megoldás. } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Innen } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ vagy } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

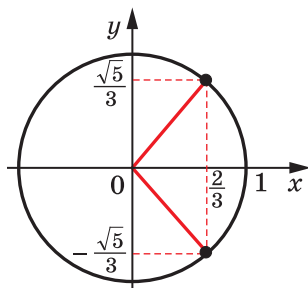
A feladat megoldását a 12.1. ábra szemlélteti. $\blacktriangleleft$

3. feladat. Határozzuk meg a $\cos \alpha$ és $\operatorname{tg} \alpha$ értékeit, ha $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ és

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}!$$

Megoldás. Mivel:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$



12.1. ábra

Mivel $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, ezért $\cos \alpha < 0$, tehát: $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}. \quad \blacktriangleleft$$



1. Melyik egyenlőséget nevezzük trigonometrikus alapazonosságnak?
2. Milyen azonosság köti össze az azonos argumentumú tangens és koszinusz értékeit?



GYAKORLATOK

12.1.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | |
|--|---|
| 1) $1 - \cos^2 \alpha$; | 4) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$; |
| 2) $\sin^2 \beta - 1$; | 5) $1 - \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$; |
| 3) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 1$; | 6) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$! |

12.2.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$; | 3) $(\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2$; |
| 2) $\left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin \frac{x}{2}\right)$; | 4) $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}$! |

12.3.° Létezik-e olyan α szám, melyre egyidejűleg igaz, hogy: $\sin \alpha = \frac{1}{4}$

és $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$?

12.4.° Létezik-e olyan α szám, melyre egyidejűleg igaz, hogy: $\sin \alpha = \frac{2}{5}$

és $\cos \alpha = \frac{3}{5}$?

12.5.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- | | |
|--|--|
| 1) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$; | 3) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$; |
| 2) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$; | 4) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$! |

12.6.* Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;

3) $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} + \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}$;

2) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$;

4) $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

12.7.* Határozd meg az α argumentumú trigonometrikus függvények értékeit, ha:

1) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha = 0,6$ és $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ és $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$!

12.8.* Határozd meg az α argumentumú trigonometrikus függvények értékeit, ha:

1) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ és $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$ és $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$!

2) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ és $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

12.9.** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$!

12.10.** Bizonyítsd be az azonosságot:

1) $\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; 2) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$!

12.11.** Határozd meg a $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ értékét, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$!

12.12.** Határozd meg az $\frac{5 \cos \alpha + 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}$ értékét, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$!

12.13.** Határozd meg a $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$ legnagyobb és legkisebb értékét!

12.14.** Határozd meg a $3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha$ legnagyobb és legkisebb értékét!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

12.15. Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\left(\frac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$, ha $a = 0,008$; 2) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{4}}$, ha $a = 0,0625$!

13. Addíciós (összegzési) képletek

Addíciós (összegzési) képleteknek nevezzük azokat a képleteket, amelyek a $\cos(\alpha \pm \beta)$, a $\sin(\alpha \pm \beta)$ és a $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ értékeit az α és a β trigonometrikus függvényeinek keresztül fejezik ki.

Bebizonyítjuk, hogy $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Legyenek a P_1 és P_2 pontok olyanok, amelyeket a $P_0(1; 0)$ pontnak az α , illetve a β szöggel való elforgatásával kapunk.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$. Ekkor az $\overrightarrow{OP_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}$ vektorok közötti szög $\alpha - \beta$ lesz (13.1. ábra). A P_1 és P_2 pontok koordinátái megfelelően $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ és $(\cos \beta; \sin \beta)$. Ekkor az $\overrightarrow{OP_1}$ vektor koordinátái $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, az $\overrightarrow{OP_2}$ vektor koordinátái pedig $(\cos \beta; \sin \beta)$ lesznek.

Kifejezzük az $\overrightarrow{OP_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}$ vektorok skaláris szorzatát a koordinátáik alapján:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

A vektorok skaláris szorzatának definíciója alapján fel lehet írni, hogy:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = |\overrightarrow{OP_1}| \cdot |\overrightarrow{OP_2}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Innen megkapjuk a **különbség koszinuszának** képletet:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

Az (1) képlet abban az esetben is igaz lesz, ha az $(\alpha - \beta) \notin [0; \pi]$ intervallumhoz.

Bebizonyítjuk az **összeg koszinuszának** képletét:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

A $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

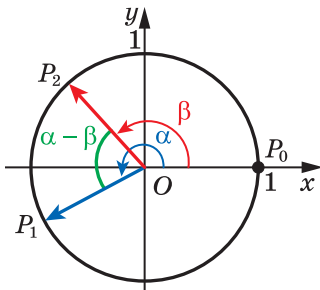
Az **összeg szinusznak** és a **különbség szinusznak** képletei a következők:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Az **összeg tangensének** és a **különbség tangensének** képletei a következők:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (2)$$



13.1. ábra

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (3)$$

A (2) azonosság az α és a β minden értékére igaz, melyeknél $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$.

A (3) azonosság az α és a β minden értékére igaz, melyeknél $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$, $\cos \beta \neq 0$.

Azokat a képleteket, amelyek a 2α argumentumú trigonometrikus függvényeket az α argumentumú trigonometrikus függvényeken keresztül fejezi ki, a **kétszeres szög szögfüggvényeinek** nevezzük.

Az összegzési képletekben:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

alkalmazzuk a $\beta = \alpha$ helyettesítést. A következőket kapjuk:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Ezek a **kétszeres szög szinuszának, koszinuszának és tangensének képletei**.

Mivel $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ és $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ képletbe helyettesítve ezeket, még két képletet kapunk:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Néha érdemes ezeket a képleteket a következő alakban alkalmazni:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha,$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

vagy ilyen alakban:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

A két utolsó képletet szokták még **hatványcsökkentő képleteknek** is nevezni.

1. feladat. Egyszerűsítsük a kifejezést:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$$

$$2) \sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ) \sin(\alpha - 45^\circ)!$$

Megoldás. 1) Az összeg és a különbség szinuszának képleteit alkalmazva a következőt kapjuk: $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) - \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha. \end{aligned}$$

2) Az adott kifejezést helyettesítsük az $\alpha + 45^\circ$ és a $\alpha - 45^\circ$ argumentumok különbségének szinuszával. A következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ) \sin(\alpha - 45^\circ) = \\ &= \sin((\alpha + 45^\circ) - (\alpha - 45^\circ)) = \sin(\alpha + 45^\circ - \alpha + 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. feladat. Bizonyítsuk be az azonosságot:

$$\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}!$$

$$\begin{aligned} \text{Megoldás. } \sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3. feladat. Határozzuk meg a kifejezés értékét: $\frac{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}!$

Megoldás. Alkalmazzuk a 20° és 25° összeg tangensének képletét, a következőt kapjuk:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg}(20^\circ + 25^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

4. feladat. Egyszerűsítsük a kifejezést: 1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$;
2) $1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta$!

Megoldás.

$$1) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha.$$

$$2) 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1 - 2 \cdot 4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1 - 2 \sin^2 2\beta = \cos 4\beta. \quad \blacktriangleleft$$



1. Írd fel a képletét:
 - 1) a különbség koszinuszának;
 - 2) az összeg koszinuszának;
 - 3) az összeg szinuszának;
 - 4) a különbség szinuszának;
 - 5) az összeg tangensének;
 - 6) a különbség tangensének!
2. Írd fel a kétszeres szög koszinuszának, szinuszának és tangensének képletét!
3. Írd fel a hatványcsökkentő képleteket!



GYAKORLATOK

13.1.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- 1) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$;
- 2) $\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)$;
- 3) $\sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ) - \sin \alpha + \cos \alpha$;
- 4) $2 \cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha$!

13.2.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- 1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$;
- 2) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \alpha - \sin \alpha$!

13.3.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- 1) $\sin \alpha \cos 4\alpha + \cos \alpha \sin 4\alpha$;
- 2) $\cos 17^\circ \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \sin 43^\circ$;
- 3) $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$;
- 4) $\sin 53^\circ \cos 7^\circ - \cos 53^\circ \sin(-7^\circ)$;
- 5) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$;
- 6) $\frac{\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \cos 20^\circ \sin 5^\circ}{\cos 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 10^\circ \sin 5^\circ}$!

13.4.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

- 1) $\cos 6\alpha \cos 2\alpha - \sin 6\alpha \sin 2\alpha$;
- 2) $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ$;
- 3) $\sin(-15^\circ) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ$;
- 4) $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$!

13.5.° Ismert, hogy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ értékét!

13.6.° Ismert, hogy $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg} \beta = 5$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ értékét!

13.7.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}; \quad 2) \frac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}!$$

13.8.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 36^\circ}{1 - \operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 36^\circ}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}!$$

13.9.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}; & 5) & \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}; \\ 2) & \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}; & 6) & 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}; \\ 3) & \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha; & 7) & \left(\sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \right); \\ 4) & \frac{\sin 50^\circ}{2 \cos 25^\circ}; & 8) & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}! \end{aligned}$$

13.10.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}; & 5) & \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha); \\ 2) & \cos 4\beta + \sin^2 2\beta; & 6) & \frac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}; \\ 3) & \cos 6\alpha + 2 \sin^2 3\alpha; & 7) & \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right); \\ 4) & \frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}; & 8) & \frac{2 \operatorname{tg} 1,5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1,5\alpha}! \end{aligned}$$

13.11.° Számítsd ki a kifejezés értékét:

$$\begin{aligned} 1) & 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ; & 3) & 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}; \\ 2) & \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ; & 4) & \frac{2 \operatorname{tg} 165^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 165^\circ}! \end{aligned}$$

13.12.° Számítsd ki a kifejezés értékét:

$$1) \frac{2 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}; \quad 2) 2 \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}; \quad 3) 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{12}!$$

13.13.° Bizonyítsd be az azonosságot:

$$1) \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1; \quad 2) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha!$$

13.14.° Bizonyítsd be az azonosságot:

$$1) \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha} = 1; \quad 2) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{2}!$$

13.15.° Határozd meg a $\cos(\alpha + \beta)$ értékét, ha $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ és

$$\cos \beta = -\frac{4}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi!$$

13.16.° Határozd meg a $\sin(\alpha - \beta)$ értékét, ha $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\text{és } \cos \beta = \frac{7}{25}, \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi!$$

13.17.° Ismert, hogy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ értékét!

13.18.° Ismert, hogy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Határozd meg a $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$ értékét!

13.19.° Határozd meg a $\sin 2\alpha$ értékét, ha $\sin \alpha = -0,6$ és $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$!

13.20.° Határozd meg a $\operatorname{tg} 2\alpha$ értékét, ha $\operatorname{tg} \alpha = 4$!

13.21.° Határozd meg a $\cos 2\alpha$ értékét, ha $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$!

13.22.° Határozd meg a $\sin 15^\circ$ értékét!

13.23.° Határozd meg a $\cos 75^\circ$ értékét!

13.24.° Bizonyítsd be az azonosságot: $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$!

13.25.° Egyszerűsítsd a $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$ kifejezést!

13.26.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$2) \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}; \quad 4) \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}!$$

13.27.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

$$1) \frac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}!$$

13.28.° Határozd meg a $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$ kifejezés legnagyobb értékét!

13.29.° Határozd meg a $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha$ kifejezés legnagyobb értékét!

13.30.* Határozd meg a $\sin 2\alpha$ értékét, ha $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$!

13.31.* Határozd meg a $\sin \alpha$ értékét, ha $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

- 13.32.** Az x mely értékeinél lesznek a $4x+5$, a $7x-1$ és az x^2+2 kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg a sorozatnak ezeket a tagjait!
- 13.33.** Az x mely értékeinél lesznek az $x-1$, az $1-2x$ és az $x+7$ kifejezések értékei egy mértani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg a sorozatnak ezeket a tagjait!

14. Visszavezetési képletek

A trigonometrikus függvények periodikussága lehetőséget ad arra is, hogy visszavezessük azok értékeit arra az esetre, amikor az argumentum a $[0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozik. Ebben a pontban csak azokat a képleteket vizsgáljuk, amelyek a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartozó szögek értékei alapján történő számításokra korlátozódnak.

A $[0; 2\pi]$ intervallumhoz tartozó valamennyi szög megadható a $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ vagy a $\pi \pm \alpha$ vagy a $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ alakban, ahol $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Például:

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

A $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ alakban megadott szögek szinusza, illetve koszinusza értékeinek kiszámítását, az α szög szinuszának, illetve koszinuszának kiszámítására vezethetjük vissza. Például:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2} \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Az addíciós képletek alkalmazásával hasonlóan kapjuk meg az alábbi képleteket:

$$\begin{array}{lll} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha & \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha & \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \end{array}$$

Ezek a képletek a **szinuszra vonatkozó visszavezetés képletei** lesznek.

A következő képletek a **koszinuszra** vonatkozó visszavezetés képletei:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

A képletek alaposabb vizsgálata során olyan törvényszerűségeket vehetünk észre, amelyek megkönnyítik e képletek megjegyzését.

Ahhoz, hogy bármelyiket felírjuk, a következő szabályokat kell alkalmazni.

1. Az egyenlőség jobb oldalának előjele megegyezik a bal oldal előjelével, ha $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Ha a bal oldalon az argumentum $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ vagy $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ alakú, akkor a szinusz nevét koszinuszra, a koszinuszt pedig szinuszra kell cserélni. Ha az argumentum $\pi \pm \alpha$ alakú, akkor a függvény neve nem változik.

A $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ kifejezés példáján bemutatjuk, hogyan kell alkalmazni ezeket a szabályokat.

Feltételezve, hogy a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, arra a következtetésre jutunk, hogy $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ a III. koordinátanegyedbe esik. Ezért $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. Az első szabály szerint a jobb oldal előjele – lesz.

Mivel az argumentum $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ alakú, ezért a második szabály szerint a szinuszt koszinuszra kell cserélni.

$$\text{Tehát } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

1. feladat. Egyszerűsítsük a $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ kifejezést!

Megoldás.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 = (-\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha. \quad \blacktriangleleft$$

2. feladat. Vezessük vissza a hegyesszög szögfüggvényeire az alábbi szögfüggvényeket: 1) $\cos \frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos \frac{8\pi}{7}$.

Megoldás. 1) $\cos \frac{9\pi}{10} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{10} \right) = -\cos \frac{\pi}{10}$.

2) $\cos \frac{8\pi}{7} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = -\cos \frac{\pi}{7}$. 



Fogalmazd meg azokat a szabályokat, amelyek segítenek a visszavezetési képletek alkalmazásakor!



GYAKORLATOK

14.1.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$; 3) $\cos (-\alpha + 270^\circ)$; 5) $\cos^2 (3\pi - \alpha)$;

2) $\sin (\pi - \alpha)$; 4) $\cos (\alpha - 180^\circ)$; 6) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$!

14.2.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$; 3) $\sin (180^\circ + \alpha)$;

2) $\cos (\pi - \alpha)$; 4) $\sin^2 \left(\frac{5\pi}{2} + \alpha \right)$!

14.3.° Helyettesítsd a trigonometrikus függvényeket hegyesszögű függvények értékével:

1) $\cos 123^\circ$; 2) $\sin 216^\circ$; 3) $\cos (-218^\circ)$; 4) $\cos \frac{5\pi}{9}$!

14.4.° Helyettesítsd a trigonometrikus függvényeket hegyesszögű függvények értékével:

1) $\sin (-305^\circ)$; 2) $\sin \frac{14\pi}{15}$; 3) $\cos (-0,7\pi)$; 4) $\cos \frac{6\pi}{5}$!

14.5.° Számítsd ki a trigonometrikus függvény értékét:

1) $\cos 225^\circ$; 2) $\sin 240^\circ$; 3) $\cos \frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right)$!

14.6.° Számítsd ki a trigonometrikus függvény értékét:

1) $\cos(-150^\circ)$; 2) $\cos 210^\circ$; 3) $\sin 315^\circ$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)!$

14.7.° Számítsd ki a kifejezés értékét:

1) $\frac{\sin^2 315^\circ \cos 300^\circ + \operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ) \cos 150^\circ}$; 2) $\frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ}!$

14.8.° Számítsd ki a kifejezés értékét: $\frac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ}!$

14.9.° Egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha)}$;

2) $\sin(\pi - \beta) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos(\pi - \beta)!$

14.10.° Bizonyítsd be az azonosságot: $\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos \alpha!$

14.11.* Számítsd ki: $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ!$



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

14.12. Határozd meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}!$

14.13. A változó mely értékeinél értelmezhető a kifejezés:

1) $\frac{x+4}{x^2-4}$;

4) $\sqrt{7x-42} + \frac{1}{x^2-8x}$;

2) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

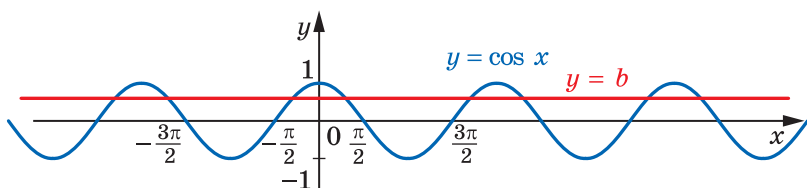
3) $\frac{9}{\sqrt{3x+6}}$;

6) $\frac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8-4x}}?$

15. A $\cos x = b$ alakú egyenlet

Mivel az $y = \cos x$ függvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum, ezért $|b| > 1$ esetén a $\cos x = b$ egyenletnek nincs megoldása. Viszont bármilyen b esetére, ha $|b| \leq 1$, ennek az egyenletnek számtalan megoldása van.

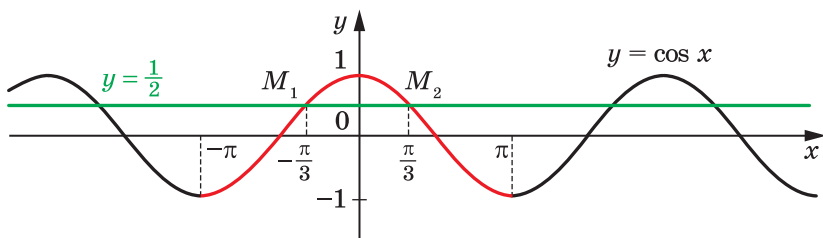
A fenti kijelentést könnyen meg lehet érteni, ha a grafikus megoldást vizsgáljuk: az $y = \cos x$ és az $y = b$, ha $|b| \leq 1$ függvények grafikonjainak számtalan közös pontja lesz (15.1. ábra).



15.1. ábra

A $\cos x = b$ egyenlet megoldásának megértését elősegíti egy konkrét eset vizsgálata. Oldjuk meg például a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet.

A 15.2. ábrán az $y = \cos x$ és az $y = \frac{1}{2}$ függvények grafikonjai láthatók.



15.2. ábra

Vizsgáljuk meg az $y = \cos x$ függvényt a $[-\pi; \pi]$ intervallumon (a 15.2. ábrán lévő görbe piros része), vagyis egy olyan intervallumon, melynek hossza egyenlő az adott függvény periódusával. Az $y = \frac{1}{2}$ egyenes az $y = \cos x$ függvény grafikonját a $[-\pi; \pi]$ intervallumon az M_1 és M_2 pontokban metszi, melyek abszcisszái ellentett számok lesznek. Tehát a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletnek a $[-\pi; \pi]$ intervallumon két gyöke lesz. Mivel $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, ezért az egyenlet gyökei a $-\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\pi}{3}$ számok lesznek.

Az $y = \cos x$ periodikus függvény, melynek periódusa 2π . Ezért minden más gyöke a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletnek a $-\frac{\pi}{3}$ és $\frac{\pi}{3}$ számoktól $2\pi n$ -nel fog különbözni, ha $n \in \mathbb{Z}$.

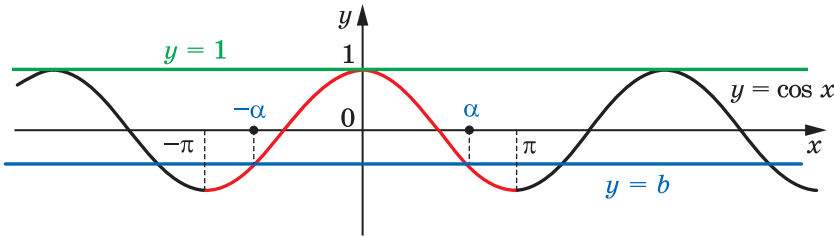
Tehát az adott egyenlet gyökeit a következőképpen írhatjuk fel:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ és } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ ha } n \in \mathbb{Z}.$$

A fenti képletek összevont képlet alakjában így írhatók fel:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Térjünk vissza az eredeti $\cos x = b$ egyenlethez, ahol $|b| \leq 1$. A 15.3. ábrán látható, hogy ennek az egyenletnek a $[-\pi; \pi]$ intervallumon két megoldása lesz, az α és a $-\alpha$, ahol $\alpha \in [0; \pi]$ (ha $b = 1$, akkor ezek egybeesnek és nullával lesznek egyenlők).



15.3. ábra

Ekkor a $\cos x = b$ egyenletnek minden gyöke a következő alakú lesz:

$$x = \pm \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ez a képlet azt mutatja, hogy az α gyököknek különleges szerepe van: ezt ismerve, fel lehet írni a $\cos x = b$ egyenlet összes gyökét. Az α gyököknek egy speciális neve van, az arkusz koszinusz.

Definíció. A b szám **arkusz koszinuszának**, ahol $|b| \leq 1$, azt a $[0; \pi]$ intervallum vett α számot nevezzük, melynek koszinuszértéke b -vel egyenlő.

A b szám arkusz koszinuszát $\arccos b$ -vel jelöljük. Például

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ mivel } \frac{\pi}{3} \in [0; \pi] \text{ és } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ mivel } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ és } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Általánosítva, **$\arccos b = \alpha$, ha $\alpha \in [0; \pi]$ és $\cos \alpha = b$.**

Most már $\cos \alpha = b$, $|b| \leq 1$ egyenlet gyökeit a következő alakban írhatjuk fel:

$$x = \pm \arccos b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Megjegyezzük, hogy a $\cos \alpha = b$ egyenlet egyedi eseteit (ha $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) már korábban vizsgáltuk (lásd 9. pontot). Idézzük fel a kapott eredményt:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ugyanezeket az eredményeket megkaphatjuk, ha alkalmazzuk az (1) képletet.

A következő egyenlőség is teljesül:

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b.$$

Feladat. Oldjuk meg az egyenletet:

$$1) \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad 3) \cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0!$$

Megoldás. 1) Alkalmazzuk az (1) képletet, majd felírjuk:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ezekből megkapjuk: } 4x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}.$$

$$\text{Felelet: } \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad \frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

$$\text{Felelet: } \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \text{ Átírjuk az adott egyenletet a következő alakba: } \cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.$$

Innen:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ekkor } 7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n; \quad 7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}.$$

$$\text{Felelet: } \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$



1. A b mely értékeinél lesz megoldása a $\cos x = b$ egyenletnek?
2. Hány megoldása lesz a $\cos x = b$ egyenletnek, ha $|b| \leq 1$?
3. Mit nevezünk a b szám arkusz koszinuszának?
4. Milyen alakban írható fel a $\cos x = b$ egyenlet gyökeinek képlete, ha $|b| \leq 1$?
5. Milyen alakban írhatók fel a $\cos x = 1$, $\cos x = 0$, és $\cos x = -1$ egyenletek gyökeinek képlete?



GYAKORLATOK

15.1.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \cos x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) \cos x = \frac{1}{3}!$$

15.2.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \cos x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad 4) \cos x = \frac{4}{7}!$$

15.3.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{aligned} 1) \cos 3x &= -\frac{1}{2}; & 3) \cos 6x &= 1; & 5) \cos 9x &= -\frac{1}{5}; \\ 2) \cos \frac{5}{6}x &= \frac{\sqrt{3}}{2}; & 4) \cos \frac{2\pi x}{3} &= 0; & 6) \cos\left(-\frac{x}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{3}! \end{aligned}$$

15.4.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos \frac{3x}{4} = -1!$$

15.5.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{aligned} 1) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}; & 3) \cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) &= -1; \\ 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; & 4) 2 \cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 &= 0! \end{aligned}$$

15.6.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1; \quad 2) \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0!$$

15.7.° Határozd meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}!$$

15.8.* Határozd meg az egyenlet valamilyen negatív gyökét:

$$\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}!$$

15.9.** A $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletnek hány gyöke tartozik a $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ intervallumhoz?

15.10.** Határozd meg a $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$ egyenlet összes olyan gyökét, melyek kielégítik a $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$ egyenlőtlenséget!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

15.11. Egyszerűsítsd a kifejezést: $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}!$

15.12. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}};$

2) $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}!$

16. A $\sin x = b$ és $\operatorname{tg} x = b$ egyenletek

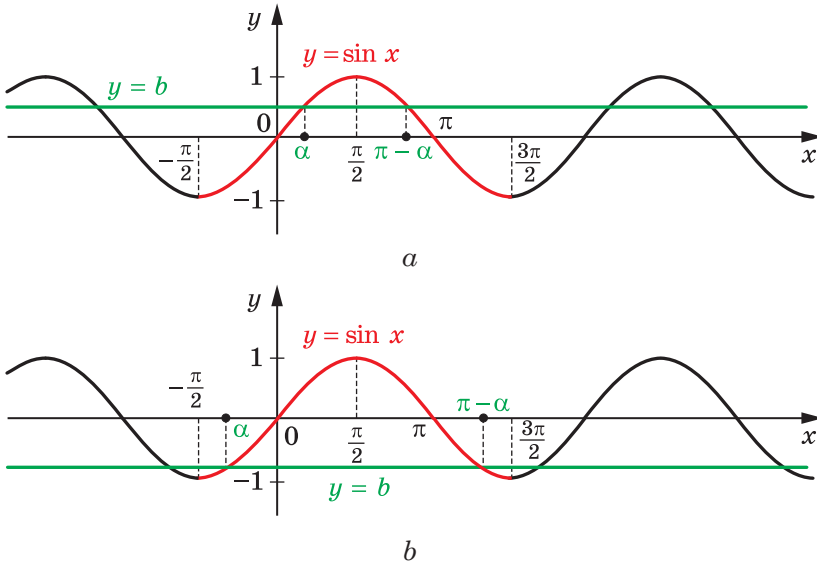
☞ Mivel az $y = \sin x$ függvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum, ezért $|b| > 1$ esetén a $\sin x = b$ egyenletnek nincs megoldása. Ezzel együtt bármilyen b estén, ha $|b| \leq 1$, ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Megjegyezzük, hogy a $\sin x = b$ egyenlet egyedi eseteit (ha $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) már vizsgáltuk (lásd a 9. pontot). Idézzük fel a kapott eredményeket!

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ahhoz, hogy megkapjuk a $\sin x = b$, ha $|b| \leq 1$ egyenlet általános megoldásának képletét, nézzük a függvény grafikus értelmezését.

A 16.1. ábrán az $y = \sin x$ és az $y = b$, ha $|b| \leq 1$ függvények grafikonjai láthatók.



16.1. ábra

Vizsgáljuk meg az $y = \sin x$ függvény grafikonját a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon (a 16.1. ábrán lévő görbe piros színnel jelölt része), vagyis egy olyan intervallumon, amely ennek a függvénynek a periódusa. Ezen az intervallumon a $\sin x = b$ egyenletnek két gyöke van, az α és a $\pi - \alpha$, ahol $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (a $b = 1$ esetén ezek a gyökök egybeesnek és $\frac{\pi}{2}$ -vel lesznek egyenlők).

Mivel az $y = \sin x$ függvény periodikus és 2π a periódusa, ezért a $\sin x = b$ egyenlet minden gyöke $2\pi n$ -nel különbözik egymástól, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

Így a $\sin x = b$ egyenlet gyökeit a következőképpen lehet megadni:

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ és } x = \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A fenti képletek összevont képlet alakjában így írhatók fel:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Valóban, ha k páros szám, vagyis $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor az $x = \alpha + 2\pi n$ képletet kapjuk, ha k páratlan, vagyis $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor az $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$ képletet kapjuk.

Az (1) képlet azt mutatja, hogy az α gyöknek fontos szerepe van: ennek ismeretében meg lehet határozni a $\sin x = b$ egyenlet többi gyökét is. Az α gyöknek speciális neve van, az arkusz szinusz.

Definíció. A b szám **arkusz szinuszának**, ahol $|b| \leq 1$, azt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vett α számot nevezzük, amelynek szinuszáértéke b -vel egyenlő.

A b szám arkusz szinuszát $\arcsin b$ -vel jelöljük.

Például $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mivel $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, mivel $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Általánosítva, **$\arcsin b = \alpha$, ha $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin \alpha = b$.**

Most már a $\sin x = b$, ha $|b| \leq 1$ egyenlet gyökeinek képletét a következő alakban írhatjuk fel:

$$x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Igaz a következő egyenlőség:

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b.$$

1. feladat. Oldjuk meg az egyenletet:

$$1) \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Megoldás. Alkalmazzuk a (2) képletet, majd felírjuk:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; & \frac{x}{2} &= -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \\ \frac{x}{2} &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; & x &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \end{aligned}$$

Felelet: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2) Átírjuk az adott egyenletet a következőképpen:

$$\begin{aligned} -\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Ekkor} \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ 3x - \frac{\pi}{3} &= (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

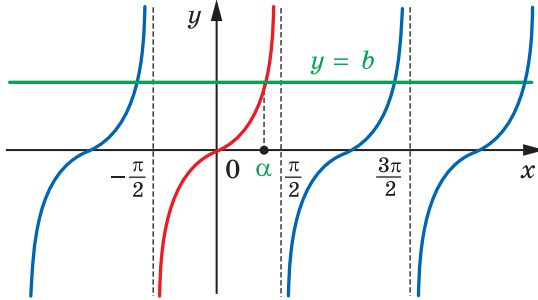
$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Felelet: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ ◀

↪ Mivel az $y = \operatorname{tg} x$ függvény értékkészlete az $\mathbb{R}$ halmaz, ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek bármilyen b esetén lesz megoldása.

Ahhoz, hogy megkapjuk a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képletét, nézzük a függvény grafikus értelmezését.

A 16.2. ábrán az $y = \operatorname{tg} x$ és az $y = b$ függvények grafikonjai láthatók.



16.2. ábra

Vizsgáljuk meg az $y = \operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon (a 16.2. ábrán lévő görbe piros színnel jelölt része), vagyis a függvény periódusával egyenlő szakaszon. Ezen az intervallumon a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletnek bármilyen b esetében csak egy α megoldása lesz.

Mivel az $y = \operatorname{tg} x$ függvénynek a periódusa π , ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet minden gyöke πn -nel, ahol $n \in \mathbb{Z}$ különbözik az adott gyöktől.

Ezért a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet gyökeinek képlete a következő képlettel adható meg:

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A kapott képlet alapján megállapíthatjuk, hogy az α gyöknek különleges szerepe van: ennek ismeretében meg lehet határozni a $\operatorname{tg} x = b$ egyenlet többi gyökét is. Az α gyöknek speciális neve van, az arkusz tangens.

Definíció. A b szám **arkusz tangensének** azt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon vett α számot nevezzük, melynek tangense b -vel egyenlő.

A b szám arkusz tangensét az $\arctg b$ -vel jelöljük.

Például $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

$\arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$, mivel $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Általánosítva, **$\arctg b = \alpha$, ha $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\tg \alpha = b$.**

Most már felírhatjuk a $\tg x = b$ egyenlet gyökeinek képletét:

$$x = \arctg b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

A következő egyenlőség is igaz:

$$\arctg(-b) = -\arctg b.$$

2. feladat. Oldjuk meg az egyenletet: $\tg \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$!

Megoldás. $\frac{2x}{3} = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Felelet: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}$. ◀



1. A b mely értékénél lesznek gyökei a $\sin x = b$ egyenletnek?
2. Mit nevezünk arcsin b -nek?
3. Írd fel a $\sin x = b$, ahol $|b| \leq 1$ egyenlet gyökeinek képletét!
4. Írd fel a $\sin x = 1$; $\sin x = 0$; $\sin x = -1$ egyenletek gyökeinek képleteit!
5. A b mely értékénél lesznek gyökei a $\tg x = b$ egyenletnek?
6. Mit nevezünk $\arctg b$ -nek?
7. Írd fel a $\tg x = b$ egyenlet gyökeinek képletét!



GYAKORLATOK

16.1.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin x = \frac{1}{4}; \quad 4) \sin x = \sqrt{2}!$$

16.2.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sin x = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad 4) \sin x = 1,5!$$

16.3.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin 5x = 1; \quad 3) \sin(-8x) = \frac{2}{9}!$$

16.4.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{7} = 0; \quad 3) \sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}!$$

16.5.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \quad 2) \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} x = -1; \quad 4) \operatorname{tg} x = 5!$$

16.6.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \operatorname{tg} x = 1; \quad 2) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}; \quad 4) \operatorname{tg} x = -2!$$

16.7.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \operatorname{tg} 2x = 1; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}; \quad 3) \operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}!$$

16.8.° Oldd meg az egyenletet: $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0!$

16.9.° Oldd meg az egyenletet:

$$\begin{aligned} 1) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}; & 3) \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) &= -1; \\ 2) \sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}; & 4) \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 &= 0! \end{aligned}$$

16.10.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1; \quad 2) 2 \sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0!$$

16.11.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 2) \operatorname{tg}(3 - 2x) = 2!$$

16.12.° Oldd meg az egyenletet:

$$1) \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad 2) 3 \operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0!$$

16.13.° Határozd meg az egyenlet legkisebb pozitív gyökét:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}!$$

16.14.° Határozd meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1!$$

16.15.** Határozd meg a $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ egyenletnek azokat a gyökeit,

amelyek a $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartoznak!

16.16.** A $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlet gyökei közül, hány lesz eleme a

$\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumnak?

16.17.** A $\operatorname{tg} 4x = 1$ egyenlet gyökei közül hány lesz eleme a $[0; \pi]$ intervallumnak?

16.18.** Határozd meg a $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ egyenlet gyökeinek összegét, ame-

lyek a $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartoznak!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

16.19. Oldd meg az egyenletet:

1) $x - \sqrt{x-1} = 3;$

3) $\sqrt{3x+4} \cdot \sqrt{2x-5} = 2x+1;$

2) $\sqrt{1+4x-x^2} + 1 = x;$

4) $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{5+x}} = \sqrt{5+x}!$

17. Algebrai egyenletekké alakítható trigonometrikus egyenletek

A 15. és 16. pontokban olyan képleteket kaptunk, melyek segítségével megoldhatók a $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ alakú egyenletek. Ezeket **egyszerű trigonometrikus egyenleteknek** nevezzük. Különböző módszerek alkalmazásával sok összetett trigonometrikus egyenlet átalakítható egyszerű trigonometrikus egyenletekké.

1. feladat. Oldjuk meg a $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$ egyenletet!

Megoldás. Hajtsuk végre a $\cos x = t$ helyettesítést. Ekkor az adott egyenlet átalakul $2t^2 - 5t + 2 = 0$ alakú egyenletté. Innen $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Mivel $|\cos x| \leq 1$, ezért a $\cos x = 2$ egyenletnek nincsenek gyö-

kei. Tehát az eredeti egyenlet egyenértékű a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenlettel.

Végül a következőt kapjuk: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Felelet: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

2. feladat. Oldjuk meg a $\sin x - 3 \cos 2x = 2$ egyenletet!

Megoldás. A $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ képlet alkalmazásával átalakítjuk az eredeti egyenletet:

$$\begin{aligned}\sin x - 3(1 - 2 \sin^2 x) - 2 &= 0; \\ 6 \sin^2 x + \sin x - 5 &= 0.\end{aligned}$$

Legyen $\sin x = t$. A következő másodfokú egyenletet kapjuk:
 $6t^2 + t - 5 = 0$. Innen $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Tehát az adott egyenlet a következő egyenletekkel lesz egyenértékű:

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Ebből:
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Felelet: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◀

3. feladat. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$ egyenletet!

Megoldás. Mivel az $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, ezért az adott egyenletet át lehet alakítani ilyen alakúvá:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Innen $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Legyen $\operatorname{tg} x = t$. Ebből: $t^2 + t - 2 = 0$. Akkor $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Tehát az adott egyenlet a következő egyenletekkel lesz egyenértékű:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2. \end{cases}$$

Ebből:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Felelet: $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$



GYAKORLATOK

17.1.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0;$ | 3) $\sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0;$ |
| 2) $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0;$ | 4) $\lg^2 x - 2 \lg x - 3 = 0!$ |

17.2.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0;$ | 3) $4 \lg^2 x - \lg x - 3 = 0;$ |
| 2) $2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0;$ | 4) $3 \cos^2 \frac{x}{4} + 5 \cos \frac{x}{4} - 2 = 0!$ |

17.3.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sin x - \cos x = 0;$ | 3) $4 \cos 2x - \sin 2x = 0!$ |
| 2) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0;$ | |

17.4.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sin x + \cos x = 0;$ | 3) $\cos 4x - 3 \sin 4x = 0!$ |
| 2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0;$ | |

17.5.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|---|--|
| 1) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0;$ | 5) $\cos 2x + \sin x = 0;$ |
| 2) $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0;$ | 6) $\cos \frac{2x}{3} - 5 \cos \frac{x}{3} - 2 = 0;$ |
| 3) $\cos 2x = 1 + 4 \cos x;$ | 7) $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 0;$ |
| 4) $2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0;$ | 8) $\cos 2x - 4 \sqrt{2} \cos x + 4 = 0!$ |

17.6.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $4 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = 0;$ | 4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x;$ |
| 2) $2 \cos^2 x = 1 + \sin x;$ | 5) $5 \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{3} + 3 = 0;$ |
| 3) $\cos 2x + 8 \sin x = 3;$ | 6) $\cos x + \sin \frac{x}{2} = 0!$ |

17.7.° Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $8 \sin^2 3x + 4 \sin^2 6x = 5;$ | 2) $2 \lg^2 x + 4 \cos^2 x = 7!$ |
|-------------------------------------|----------------------------------|

17.8.* Oldd meg az egyenletet:

$$1) 2 \cos^2 4x - 6 \cos^2 2x + 1 = 0; \quad 2) \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}!$$



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

17.9. Hasonlítsd össze a számokat:

$$1) \sqrt[5]{7} \text{ és } \sqrt[10]{47}; \quad 2) \sqrt{2} \text{ és } \sqrt[5]{\sqrt{33}}; \quad 3) \sqrt[3]{15} \text{ és } \sqrt{5}; \quad 4) \sqrt[5]{25} \text{ és } \sqrt[3]{5}!$$

17.10. Oldd meg az egyenletet:

$$1) 6x^3 - 24x = 0; \quad 3) x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0; \\ 2) x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0; \quad 4) x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0!$$



LÉGY TE IS OSZTROHRADSKIJ!

Az ismert ukrán matematikus, Mihajlo Vasziljovics Osztrohradszkij Pasenyivka faluban született Poltava megyében. 1816–1820 között a harkivi egyetemen tanult, aztán Franciaországban folytatta matematikai tanulmányait. A francia fővárosban a matematika olyan korifeusainak az előadásaira járt, mint Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Siméon Denis Poisson (1781–1840), Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

Hatalmas tudományos örökséget hagyott maga után Mihajlo Osztrohradszkij. Ezek között nagy jelentősége van a trigonometrikus sorok és hullámok vizsgálatának. Sok fontos tétel ma is Osztrohradszkij nevét viseli.

A tudományos munkák mellett a kiváló tudós sok tankönyvet is írt az ifjúság számára. Ezek között a legismertebb a *Trigonometria program és jegyzet* című műve. A trigonometria oktatásának módszertanát annyira fontosnak vélte, hogy erről tartotta akadémiai székfoglalóját is.

Osztrohradszkij tudományos teljesítménye olyan jelentős volt, hogy azokban az időkben a fiatalokat *Légy te is Osztrohradszkij!* útravalóval küldték tanulni. Ez a jókívánság ma is nagyon aktuális, ezért:

Légy te is Osztrohradszkij!



**Mihajlo Vasziljovics
Osztrohradszkij**
(1801–1862)



A 2. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

A szög ívmértéke

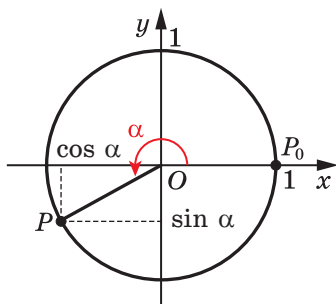
Az egy radián mértékű szögnek azt a középponti szöget nevezzük, amely egy olyan ívre támaszkodik, melynek hossza a kör sugarával egyenlő.

A szög ívmértéke (radián) és fokmértéke (fok) közötti összefüggés:

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ, \quad 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ rad}.$$

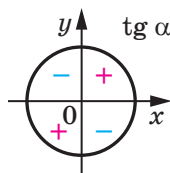
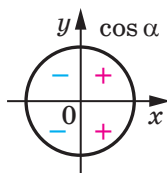
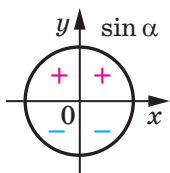
Az elforgatási szög koszinusza, szinusza és tangense

Az α elforgatási szög koszinuszának (szinuszának) az egységgör azon $P(x; y)$ pontjának x abszcisszáját (y ordinátáját) nevezzük, melyet a $P_0(1; 0)$ pontnak az origó körüli α szöggel történő elforgatása után kapunk.



Az α elforgatási szög tangensének a szög szinuszának és koszinuszának arányát nevezzük: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

A trigonometrikus függvények előjelei



Periodikus függvények

Az f függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik egy olyan $T \neq 0$ szám, hogy az f függvény értelmezési tartományának bármely x értéke teljesülnek a következő egyenlőségek: $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. A T számot az f függvény periódusának nevezzük.

Ha az f függvénynek az összes periódusa között létezik legkisebb pozitív periódus, akkor ezt az f függvény fő periódusának nevezzük.

Az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggések

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Addíciós (összegzési) képletek

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Visszavezetési képletek

Ahhoz, hogy felírjuk bármelyik visszavezetési képletet, a következő szabályokat kell alkalmazni:

- 1) az egyenlőség jobb oldalának előjele megegyezik a bal oldal előjelével, ha $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
- 2) ha a bal oldalon az argumentum $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ vagy $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ alakú, akkor a szinusz nevét koszinuszra, a koszinuszt pedig szinuszra kell cserélni. Ha a jobb oldalon az argumentum $\pi \pm \alpha$ alakú, akkor a függvény nevét nem kell változtatni.

A kétszeres argumentumú trigonometrikus függvények képletei

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Az arkusz koszinusz, arkusz szinusz és arkusz tangens

A b szám arkusz koszinuszának, ahol $|b| \leq 1$, azt a $[0; \pi]$ intervallumon vett α számot nevezzük, melynek koszinuszértéke b -vel egyenlő.

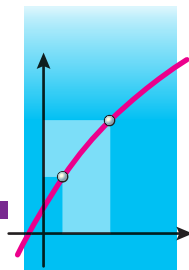
A b szám arkusz szinuszának, ahol $|b| \leq 1$, azt a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon vett α számot nevezzük, amelynek szinuszértéke b -vel egyenlő.

A b szám arkusz tangensének azt a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon vett α számot nevezzük, melynek tangense b -vel egyenlő.

Az egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása

Egyenlet	Az egyenlet gyökeinek képlete
$\cos x = b, \quad b \leq 1$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b, \quad b \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

A DERIVÁLT ÉS ALKALMAZÁSA 3. §.



Ebben a paragrafusban megismerkedtek a függvény deriváltjának fogalmával; megtanuljátok alkalmazni a deriváltat a függvények vizsgálata, illetve a függvénygrafikon megrajzolása során.

18. A pillanatnyi sebességről és a függvénygrafikon érintőjéről szóló feladatok

Ha a függvény egy reális folyamat matematikai modellje, akkor gyakran válik szükségessé az adott függvény két értéke közötti különbségének a meghatározása. Jelöljük például $f(t)$ -vel, illetve $f(t_0)$ -val a t_0 időponttól t -ig felhalmozódott bankbetét¹ összegét. Akkor az $f(t) - f(t_0)$ különbség, ha $t > t_0$, azt a hasznót mutatja, melyre a betét tulajdonosa tesz szert $t - t_0$ idő alatt.

Vizsgáljuk meg az $y = f(x)$ függvényt. Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának egy rögzített pontja.

Ha az x az f függvény értelmezési tartományának egy olyan pontja, hogy $x \neq x_0$, akkor az $x - x_0$ különbséget az **argumentum x_0 pontbeli növekményének** nevezzük, és Δx -szel jelöljük (így olvassuk: *delta iksz*)². Adott, hogy

$$\Delta x = x - x_0.$$

Innen

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Azt mondjuk, hogy az argumentum **kapott egy Δx növekményt az x_0 pontban.**

Megjegyezzük, hogy az argumentum növekménye lehet pozitív és negatív is: ha $x > x_0$, akkor $\Delta x > 0$; ha $x < x_0$, akkor $\Delta x < 0$.

Ha az argumentum az x_0 pontban kap egy Δx növekményt, akkor az f függvény értéke a következő mennyiséggel fog megváltozni:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Ezt a különbséget az **f függvény x_0 pontbeli növekményének** nevezzük és Δf -fel jelöljük (így olvassuk: *delta ef*).

Ezt kaptuk:

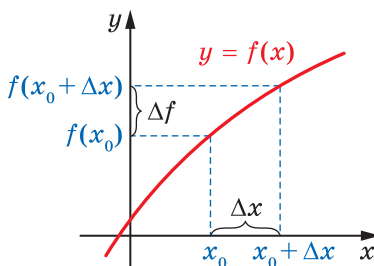
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ vagy } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

¹ Bankbetét – az a pénzösszeg, amelyet a betétes átad a banknak megőrzésre, és a bank erre bizonyos kamatot fizet a betétesnek.

² Az f függvény x_0 pontbeli növekményéről itt és a későbbiekben is feltételezzük, hogy bármilyen $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ alakú intervallumon az f függvény értelmezési tartományában az x_0 ponton kívül más pontok is lesznek.

Az $y = f(x)$ függvény növekményét Δy -nak is szokás jelölni, ekkor $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ vagy $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Az argumentum x_0 pontjának Δx növekményét, valamint az ennek megfelelő függvény Δf növekményét a 18.1. ábra szemlélteti.



18.1. ábra

Megjegyezzük, hogy egy rögzített x_0 pont esetén az f függvény x_0 pontbeli növekménye a Δx argumentumú függvény lesz.

Feladat. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény x_0 pontbeli növekményét, ha az argumentum Δx -szel változik.

Megoldás.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Felelet: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◀

A pillanatnyi sebességről szóló feladat

Egy gépkocsi az egyenes vonalú útszakaszon egy adott irányban 2 óra alatt 120 km-t tett meg. Ekkor a gépkocsi átlagsebessége

$$v_{\text{atl.}} = \frac{120}{2} = 60 \text{ (km/ó)}.$$

Az adott mennyiség nem ad teljes képet a gépkocsi mozgásáról: az egyik szakaszon lehet, hogy gyorsabban ment, egy másikon pedig lehet, hogy állt.

Ezzel egyidejűleg a gépkocsi sebeségmérője minden pillanatban mutat valamilyen értéket: ez a jármű sebessége az adott pillanatban. A pillanatnyi sebesség jobban jellemezi a gépkocsi mozgását, mint az átlagsebesség.

Megvizsgálunk egy olyan feladatot, amely az adott pillanatban határozza meg az egyenletesen gyorsuló test sebességét.

A feladat feltétele szerint egy anyagi pont a számegyenesen mozog, és az elindulásától számított t idő múlva a koordinátája $s(t)$ lesz. Az így megadott $y = s(t)$ függvény segítségével meghatározhatjuk az anya-

gi pont pillanatnyi helyzetét. Ezt a függvényt a pont **mozgástörvényének** nevezzük.

Fizikából már jól ismeritek, hogy az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás képlete: $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, ahol az s_0 a pont koordinátája a mozgás kezdetén (ha $t = 0$), v_0 a kezdősebesség, a pedig a gyorsulás.

Például legyen $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ m/mp, $a = 2$ m/mp². Ekkor $s(t) = t^2 + t$.

Rögzítünk egy adott t_0 időpontot és a t_0 argumentumnak adunk egy Δt növekményt, vagyis megvizsgáljuk a t_0 és a $t_0 + \Delta t$ közötti időintervallumot. Ez alatt az idő alatt az anyagi pont Δs elmozdulást végez. Ekkor:

$$\begin{aligned}\Delta s &= s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} = \\ &= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.\end{aligned}$$

A mozgás átlagsebessége $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ a t_0 és a $t_0 + \Delta t$ közötti időintervallumban egyenlő a $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ hányadossal. A következőt kapjuk:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ vagy } v_{\text{átl.}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Az átlagsebesség $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ jelölése azt jelenti, hogy az adott $y = s(t)$ mozgásnál a rögzített t_0 -nál az átlagsebesség csak a Δt értékétől függ.

Ha elég kis időintervallumot vizsgálunk a t_0 -tól a $t_0 + \Delta t$ -ig, akkor a gyakorlati okoskodásból adódik, hogy a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ értékei nagyon kicsit különböznek majd egymástól, vagyis a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ lényegében nem változik. Minél kisebb a Δt értéke, annál közelebb áll az átlagsebesség értéke egy bizonyos számhoz, ami a t_0 pillanatban lévő sebességet adja meg. Más szóval, ha a Δt értéke a nullához közelít (így jelölük $\Delta t \rightarrow 0$), akkor a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ értéke a $v(t_0)$ számhoz tart. A $v(t_0)$ számot a test t_0 időpontbeli **pillanatnyi sebességének** nevezzük. Ezt így írjuk át: $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{átl.}}(\Delta t)$. Azt mondjuk, hogy a $v(t_0)$ lesz a $v_{\text{átl.}}(\Delta t)$ függvény

határértéke, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

Ha az adott példában a $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a $2t_0 + 1 + \Delta t$ közelíteni fog a $2t_0 + 1$ számhoz, amely a $v(t_0)$ pillanatnyi sebesség értéke lesz, vagyis

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Ez a példa azt mutatja, hogy amikor az anyagi pont mozgását az $y = s(t)$ képlet írja le, akkor a t_0 időpontban a sebességét a következő képlet alapján határozzuk meg:

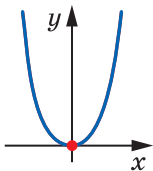
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{atl.}}(\Delta t), \text{ vagyis}$$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

A függvénygrafikon érintőjéről szóló feladat

Már ismert, hogy azt az egyenest, amelynek a körvonallal csak egy közös pontja van, érintőnek nevezzük. Ugyanakkor ez a meghatározás tetszőleges görbére már nem alkalmazható.

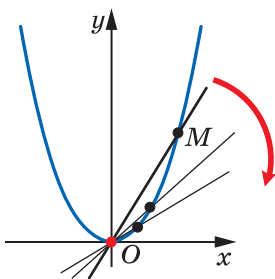
Például az $y = x^2$ parabolának és az ordinátatengelynek is csak egy közös pontja lesz (18.2. ábra), de ezt mégsem tekinthetjük az adott görbe érintőjének. Ezzel együtt, az algebraiban már gyakran találkozhattunk azzal, hogy az $y = x^2$ parabolát az abszcisszatengely az $x_0 = 0$ pontban érinti.



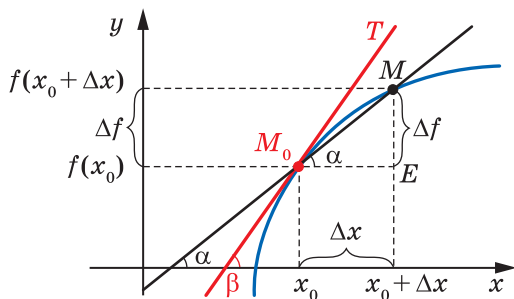
18.2. ábra

Pontosítjuk a függvénygrafikonhoz húzott érintőről alkotott elképzelésünket.

Legyen M az $y = x^2$ parabola egy tetszőleges pontja. Meghúzzuk az OM szelőt (18.3. ábra). Elképzeljük, hogy az M pont a parabolán mozogva az O pont felé tart. Ekkor az OM szelő az O pont körül elfordul. Az OM egyenes és az abszcisszatengely közötti szög egyre kisebb lesz és az OM szelő közelít az abszcisszatengelyhez. Ezért az abszcisszatengelyt az $y = x^2$ parabola O pontba húzott érintőjének tekintjük.



18.3. ábra



18.4. ábra

Vizsgáljuk meg egy tetszőleges f függvény grafikonját és az $M_0(x_0; f(x_0))$ pontot. Az x_0 pontban az argumentumnak egy Δx növekményt adunk, és megvizsgáljuk a grafikon $M(x; f(x))$ pontját, ahol $x = x_0 + \Delta x$ (18.4. ábra).

Az ábráról leolvasható, hogy egyre kisebb Δx esetén az M pont a grafikonon mozogva közelít az M_0 ponthoz. Ha a $\Delta x \rightarrow 0$, az M_0M szelő közelít egy adott egyeneshez (a 18.4. ábrán ez az M_0T egyenes), akkor ezt az egyenest **az f függvény M_0 pontbeli érintőjének** nevezzük.

Legyen $y = kx + b$ az M_0M szelő egyenlete, amely az abszcisszatengellyel pozitív α szöget zár be. Mint ismert, az M_0M egyenes k irányítányezője egyenlő $\operatorname{tg} \alpha$ -val, vagyis $k = \operatorname{tg} \alpha$. Látható, hogy $\angle MME = \alpha$ (18.4. ábra). Ekkor az MM_0E háromszög alapján felírhatjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Bevezetjük a következő jelölést: a $k_{\text{szelő}}(\Delta x)$ az M_0M szelő irányítányezője lesz, ezzel is aláhúзва, hogy az adott f függvényre és az adott x_0 pontra az M_0M szelő irányítányezője csak a Δx növekménytől függ.

$$\text{Ezt kaptuk: } k_{\text{szelő}}(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Legyen az M_0T érintő és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög β ($\beta \neq 90^\circ$). Ekkor a $k(x_0)$ irányítányezője $\operatorname{tg} \beta$ -val lesz egyenlő.

Természetesnek vehetjük, hogy minél kisebb a Δx , annál kisebb a metsző egyenes irányítányezője és az érintő irányítányezője közötti eltérés. Másképpen fogalmazva, ha $\Delta x \rightarrow 0$, akkor a $k_{\text{szelő}}(\Delta x) \rightarrow k(x_0)$. Általában, az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzott érintő irányítányezőjét a következő képlettel határozzuk meg

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{szelő}}(\Delta x), \text{ vagyis}$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



1. Mit nevezünk a függvény növekményének?
2. Milyen képlettel határozzuk meg a pillanatnyi sebességet?
3. Milyen képlettel határozzuk meg a függvény görbéjéhez húzott érintő irányítányezőjét?



GYAKORLATOK

18.1.° Határozd meg az f függvény növekményét az x_0 pontban, ha:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$!

18.2.° Határozd meg az f függvény növekményét az x_0 pontban, ha:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$;

2) $f(x) = 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,8$!

18.3.° Határozd meg az $f(x) = x^2 - 3x$ függvény Δf növekményét az x_0 pontban, az x_0 és az x által, ha:

1) $x_0 = 3$, $x = 2,5$;

2) $x_0 = -2$, $x = -1$!

18.4.° Határozd meg az $f(x) = x^3$ függvény Δf növekményét az x_0 pontban, az x_0 és az x által, ha $x_0 = 0,5$, $x = 0,4$!

18.5.* Az adott $f(x) = x^2 - x$ függvénynek és az x_0 pontnak határozd meg a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ és $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ értékeit!

18.6.* Az adott $f(x) = 5x + 1$ függvénynek és az x_0 pontnak határozd meg a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ és $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ értékeit!

18.7.* Az anyagi pont mozgását a számegyenesen az $s(t) = 2t^2 + 3$ képlet írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük). Határozd meg a pont pillanatnyi sebességét, ha a $t_0 = 2$ mp!

18.8.* A test mozgását a számegyenesen az $s(t) = 5t^2$ képlet írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük). Határozd meg:

1) a test átlagsebességét a $t_0 = 1$ mp és a $t_1 = 3$ mp közötti időintervallumban;

2) határozd meg a test pillanatnyi sebességét a $t_0 = 1$ mp időpontban!



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

18.9. Adott, hogy $\operatorname{tg} \alpha = 1$ és $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Határozd meg az α értékét!

18.10. Adott, hogy $\operatorname{tg} \alpha = -1$ és $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Határozd meg az α értékét!

19. A derivált fogalma

Az előző pontban a pont pillanatnyi sebességének és az érintő iránytényezőjének meghatározásakor ugyanahhoz a matematikai modellhez jutottunk: a függvény növekménye és az argumentum növekménye.

ménye arányának határértékéhez, amikor az argumentum növekménye a nullához tart:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (1)$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (2)$$

Hasonló képleteket kapunk több fizikai, kémiai, biológiai, gazdasági feladatok megoldása során is. Ez arról tanúskodik, hogy a vizsgált modell különleges figyelmet érdemel. Érdemes nevet adni neki, jelölést bevezetni rá, tanulmányozni a tulajdonságait és megtanulni az alkalmazását.

Definíció. Az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának azt a számot nevezzük, amely egyenlő az f függvény x_0 pontbeli növekménye és az argumentum növekménye arányának határértékével, amikor az argumentum növekménye a nullához tart.

Az $y = f(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltját $f'(x_0)$ -val jelöljük (így olvassuk: ef vessző az iksz nulla) vagy $y'(x_0)$. Ezt így lehet felírni:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

vagy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

A pillanatnyi sebesség meghatározása alapján (1) az alábbi következtetést vonhatjuk le: ha az $y = s(t)$ a számegyenesen mozgó anyagi pont mozgásának szabálya, akkor a pillanatnyi sebessége az adott t_0 időpontban egyenlő az $y = s(t)$ függvény t_0 pontbeli deriváltjával, vagyis

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Ez az egyenlőség fejezi ki a **derivált mechanikai értelmezését**.

Az érintő irányítványozójának meghatározása alapján (2) az alábbi következtetésre jutunk: az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzott érintő irányítványozója egyenlő lesz az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának az értékével, vagyis

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

Ez az egyenlőség fejezi ki a **derivált geometriai értelmezését**.

Ha az f függvénynek az x_0 pontban van deriváltja, akkor az ilyen függvényt az x_0 pontban **differenciálhatónak** mondjuk.

Ha az f függvény differenciálható az értelmezési tartomány minden pontjában, akkor azt **differenciálható** függvénynek nevezzük.

Az f függvény deriváltjának meghatározását az f függvény **differenciálásának** nevezzük.

1. feladat. Differenciáljuk az $f(x) = kx + b$ függvényt!

Megoldás. Meghatározzuk az f függvény x_0 pontbeli deriváltját, ahol az x_0 az f függvény értelmezési tartományának egy tetszőleges pontja.

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k;$$

$$3) \text{ az } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k.$$

Tehát $f'(x_0) = k$.

Mivel az x_0 az f függvény értelmezési tartományának bármilyen pontja, ezért az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy bármilyen $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül az $f'(x) = k$ egyenlőség. ◀

Az utóbbi képletből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az $f(x) = kx + b$ függvény deriváltja egyenlő k -val, amit az alábbi képlettel írhatunk le:

$$(kx + b)' = k \quad (3)$$

Ha a (3) képletbe behelyettesítjük a $k = 1$ és $b = 0$ értékeket, akkor a következőt kapjuk:

$$(x)' = 1$$

Ha a (3) képletbe behelyettesítjük a $k = 0$ értéket, akkor a következőt kapjuk:

$$(b)' = 0$$

Az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy a konstans függvény deriváltja minden pontban nullával lesz egyenlő.

2. feladat. Differenciáljuk az $f(x) = x^2$ függvényt!

Megoldás. Meghatározzuk az f függvény x_0 pontbeli deriváltját, ahol az x_0 az f függvény értelmezési tartományának egy tetszőleges pontja.

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$$

3) ha a $\Delta x \rightarrow 0$, akkor bármely $x_0 \in \mathbb{R}$ értékre a $2x_0 + \Delta x$ értéke a $2x_0$ -hoz tart. Tehát $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Mivel az x_0 az $f(x) = x^2$ függvény értelmezési tartományának tetszőleges pontja, ezért az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül az

$$f'(x) = 2x \text{ egyenlőség. } \blacktriangleleft$$

Az utóbbi egyenlőséget a következőképpen írhatjuk át:

$$(x^2)' = 2x \quad (4)$$

A (4) képlet a következő általános képletnek egy külön esete:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1 \quad (5)$$

Például $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Az (5) képlet igaz lesz bármely $n \in \mathbb{Z}$ és $x \neq 0$ esetén, vagyis

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Például a (6) képlet alkalmazásával az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény deriváltjának meghatározására a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Tehát bármely $x \neq 0$ esetében alkalmazható a következő egyenlőség: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ vagy

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

A (6) képlet általánosítható tetszőleges $r \in \mathbb{Q}$ és $x > 0$ esetére is:

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{Q} \quad (7)$$

Például az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltját is meghatározhatjuk a (7) képlettel. Ekkor: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tehát, ha $x > 0$, akkor felírhatjuk: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ vagy

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Általánosítva, az $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ függvény deriváltját a következő képlettel lehet meghatározni:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (8)$$

Ha az n páratlan természetes szám, akkor a (8) képlettel meghatározhatjuk az f függvény deriváltját minden x értékre, ha $x \neq 0$.

Ha az n páros természetes szám, akkor a (8) képlettel meghatározhatjuk az f függvény deriváltját minden pozitív x értékre.

Visszatérünk az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ trigonometrikus függvényekhez. Ezek a függvények differenciálhatók, és a deriváltjaikat a következő képletekkel lehet kiszámítani:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

A derivált kiszámítása során érdemes használni a 2. előzőeken lévő deriváltak táblázatát.



GYAKORLATOK

19.1.° Határozd meg a függvény deriváltját:

- 1) $y = 5x - 6$; 2) $y = 9$; 3) $y = 8 - 3x$!

19.2.° Határozd meg a függvény deriváltját:

- 1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$!

19.3.° Határozd meg a függvény deriváltját:

- 1) $y = x^{10}$; 2) $y = \frac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$!

19.4.° Számítsd ki a függvény deriváltját az x_0 pontban:

- 1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -2$!

19.5.° Számítsd ki a függvény deriváltját az x_0 pontban:

- 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$!

19.6.° Differenciáld a függvényt:

- 1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$!

19.7.° Differenciáld a függvényt:

- 1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$!

19.8.° Határozd meg annak az érintőnek az irányítányezőjét, amely az f függvényt x_0 abszcisszájú pontjában érinti:

- 1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$!

19.9.† Határozd meg annak az érintőnek az iránytényezőjét, amely az f függvényt x_0 abszcisszájú pontjában érinti:

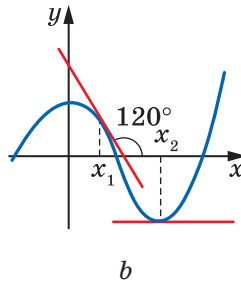
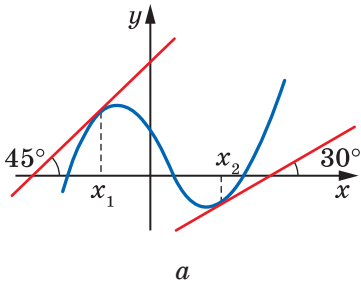
1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;

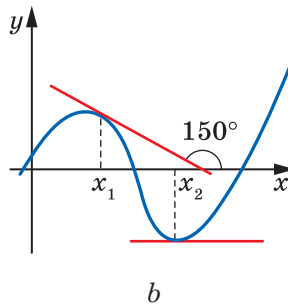
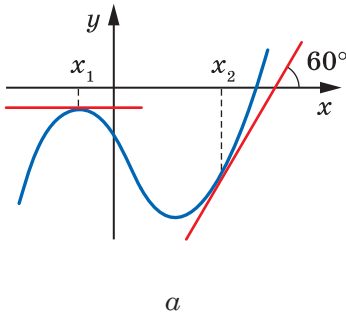
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$!

19.10.† Az f függvény grafikonja alapján (19.1. ábra) határozd meg az $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ értékét!



19.1. ábra

19.11.† Az f függvény grafikonja alapján (19.2. ábra) határozd meg az $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ értékét!



19.2. ábra

19.12.†† Számítsd ki a függvény deriváltját az x_0 pontban:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$;

3) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}$, $x_0 = 16$;

2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$, $x_0 = 64$!

19.13.†† Számítsd ki a függvény deriváltját az x_0 pontban:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 256$;

2) $f(x) = \sqrt[8]{x}\sqrt{x}$, $x_0 = 1$!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

19.14. Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$\left(\frac{a+5}{a^2-81} + \frac{a+7}{(a-9)^2} \right) \left(\frac{a-9}{a+3} \right)^2 + \frac{7+a}{9+a}!$$

19.15. Oldd meg az egyenletet: $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0!$

20. A derivált kiszámításának szabályai

A deriváltszámításkor érdemes alkalmazni a következő tételeket¹.

20.1. tétel (az összeg deriváltja). *Ha az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények differenciálhatók valamely pontban, akkor ebben a pontban az $y = f(x) + g(x)$ függvény szintén differenciálható, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség is:*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Röviden: az összeg deriváltja egyenlő az összeadandók deriváltjainak összegével.

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$(f + g)' = f' + g'$$

A 20.1. tétel tetszőleges véges számú összeadandóra kiterjeszthető:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

20.2. tétel (a szorzat deriváltja). *Ha az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények differenciálhatók valamely pontban, akkor ebben a pontban az $y = f(x) g(x)$ függvény szintén differenciálható, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség is:*

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + g'(x) f(x).$$

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

¹ A 20.1–20.3. tételek előírányozzák, hogy az f és g függvények differenciálhatók az x_0 pontban, és megfelelően az $y = f(x) + g(x)$, az $y = f(x) g(x)$ és az

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ függvényekértelmezve vannak az x_0 pontnak valamely környezetében.

1. következmény. Ha bizonyos pontokban differenciálható az $y = f(x)$ függvény, akkor az $y = kf(x)$ függvény is differenciálható lesz, ahol a k valamely szám, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség:

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Röviden mondva: a konstans tényezőt ki lehet vinni a deriválás jele elé.

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$(kf)' = kf'$$

Bizonyítás. Mivel az $y = k$ függvény bármely pontban differenciálható, ezért alkalmazva a szorzat deriváltja tételt, felírhatjuk:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

2. következmény. Ha bizonyos pontokban az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények differenciálhatók, akkor az $y = f(x) - g(x)$ függvény szintén differenciálható, és minden ilyen pontban teljesül a következő egyenlőség is:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Bizonyítás. A következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} (f(x) - g(x))' &= (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' = \\ &= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

20.3. tétel (a hányados deriváltja). Ha az x pontban az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények differenciálhatók és ebben a pontban a g függvény nem egyenlő nullával, akkor az $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ függvény szintén differenciálható, és teljesül a következő egyenlőség:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Ezt rövidebben is fel lehet írni:

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Feladat. Határozzuk meg a következő függvény deriváltját:

- 1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$; 3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$!

Megoldás. 1) Alkalmazzuk az összegre vonatkozó deriválási tétel és a szorzatra vonatkozó deriválási tétel következményeit, és a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2 \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = \\ &= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x. \end{aligned}$$

2) A szorzatra vonatkozó deriválási szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{-\frac{1}{2}} (5x-3) \right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' \cdot (5x-3) + (5x-3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x-3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = \\ &= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x. \end{aligned}$$

4) A hányadosra vonatkozó deriválási szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2x^2+1}{3x-2} \right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \\ &= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2-8x-6x^2-3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2-8x-3}{(3x-2)^2}. \end{aligned}$$

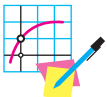
Alkalmazva a hányadosra vonatkozó deriválási szabályt könnyen igazolható, hogy

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} \text{Valóban, } (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$



Fogalmazd meg: az 1) összegre; 2) szorzatra; 3) hányadosra vonatkozó deriválási tételt!



GYAKORLATOK

20.1.° Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;

2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$;

3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;

5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;

4) $y = 4 \sin x - 5 \cos x$;

6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$!

20.2.° Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = 2x^5 - x$;

3) $y = -3 \sin x + 2 \cos x$;

2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;

4) $y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}$!

20.3.° Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;

3) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;

2) $y = x^2 \sin x$;

4) $y = \sqrt{x} \cos x$!

20.4.° Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;

3) $y = x^4 \cos x$;

2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;

4) $y = x \operatorname{tg} x$!

20.5.° Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

3) $y = \frac{x}{x^2-1}$;

5) $y = \frac{3-x^2}{4+2x}$;

2) $y = \frac{5}{3x-2}$;

4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;

6) $y = \frac{x^2-5x}{x-7}$!

20.6.° Határozd meg a függvény deriváltját:

1) $y = \frac{3x+5}{x-8}$;

3) $y = \frac{2x^2}{1-6x}$;

5) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

2) $y = \frac{7}{10x-3}$;

4) $y = \frac{\sin x}{x}$;

6) $y = \frac{x^2+6x}{x+2}$!

20.7.° Mivel egyenlő az f függvény deriváltjának az értéke az x_0 pontban, ha:

1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = (1+3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

2) $f(x) = \frac{2-3x}{x+2}$, $x_0 = -3$;

5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} - 2 \sin x$, $x_0 = 0$;

6) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

20.8.° Számítsd ki az f függvény deriváltjának az értékét az x_0 pontban:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$!

20.9.° A 4 kg tömegű anyagi pont mozgását a számegyenesen az $s(t) = t^2 + 4$ törvény írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercben mérik). Határozd meg az anyagi pont $P(t) = mv(t)$ impulzusát a $t_0 = 2$ mp időpontban!

20.10.** A 2 kg tömegű test mozgását a számegyenesen az $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ törvény írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercben mérik). Határozd meg az $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ képlettel megadott kinetikus energiát a $t_0 = 4$ mp időpontban!



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

20.11. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $M(-2; -3)$ pontra illeszkedik és párhuzamos az abszcisszatengellyel!

20.12. Állítsd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $M(1; -4)$ pontra illeszkedik, ha az egyenes irányítányezője: 1) 4; 2) 0; 3) -1 !

21. Az érintő egyenlete

Legyen az f függvény differenciálható az x_0 pontban. Akkor az f függvény grafikonjához az x_0 abszcisszájú pontba húzható egy nem függőleges érintő (21.1. ábra).

A 9. osztályos mértan tananyagból már tudjátok, hogy a nem függőleges egyenes egyenlete $y = kx + b$ alakú lesz, ahol k az egyenes irányítányezője.

A derivált geometriai értelmezéséből következik:

$$k = f'(x_0).$$

Ekkor az érintő egyenletét átírhatjuk a következő alakba:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \quad (1)$$

Ez az egyenes illeszkedik az $M(x_0; f(x_0))$ pontra. Tehát ennek a pontnak a koordinátái kielégítik az (1) egyenletet. A következőt kapjuk:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

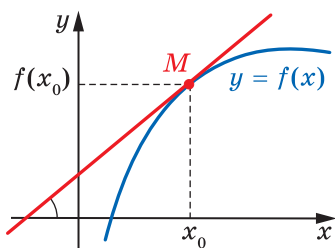
$$\text{Innen } b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Ekkor az (1) egyenlet így írható át:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Tehát, ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor **az érintő egyenlete, amely az f függvény x_0 abszcisszájú pontjára illeszkedik**, a következő képlettel adható meg:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



21.1. ábra

Feladat. Állítsuk fel az $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ egyenlettel megadott alakzat $x_0 = -2$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

$$\text{Megoldás. } f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2;$$

$$f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Behelyettesítjük a meghatározott számot az érintő egyenletébe, és a következőt kapjuk: $y = 8(x + 2) - 2$, vagyis $y = 8x + 14$.

$$\text{Felelet: } y = 8x + 14. \quad \blacktriangleleft$$



Írjuk fel az f függvény x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!



GYAKORLATOK

21.1.° Állítsd fel annak a függvénynek az egyenletét, melyet az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzunk, ha:

$$1) f(x) = x^2 + 3x, \quad x_0 = -1;$$

$$4) f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0;$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = \frac{1}{2};$$

$$5) f(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi;$$

$$3) f(x) = 4\sqrt{x} - 3, \quad x_0 = 9;$$

$$6) f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = -2!$$

21.2.° Állítsd fel annak a függvénynek az egyenletét, melyet az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzunk, ha:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x, \quad x_0 = 1;$$

$$3) f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$2) f(x) = 0,5x^2 - 2x + 2, \quad x_0 = 0;$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}, \quad x_0 = 3!$$

21.3.° Írd fel az $f(x) = x^2 - 3x - 3$ függvény érintőjének az egyenletét az ordinátatengelyt metsző pontjában!

21.4.° Írd fel az $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ függvény érintőjének az egyenletét az ordinátatengelyt metsző pontjában!

21.5.° Írd fel az f függvény érintőjének az egyenletét az abszcissza-tengelyt metsző pontjában:

$$1) f(x) = 8x^3 - 1;$$

$$2) f(x) = x - \frac{1}{x}!$$

21.6.* Írd fel az f függvény érintőjének az egyenletét az abszcissza-tengelyt metsző pontjában:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$;

2) $f(x) = 3x - x^2$!



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

21.7. Oldd meg az egyenlőtlenséget:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;

3) $6x - x^2 \geq 0$;

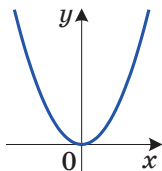
2) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$;

4) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$!

22. A függvény növekedésének és csökkenésének (fogyásának) ismertetőjelei

Már tudjátok, hogyha egy függvény konstans, akkor annak deriváltja nullával egyenlő. Felmerül a kérdés: ha az f függvény olyan, hogy az I intervallum minden x értékére teljesül az $f'(x) = 0$, akkor az f függvény konstans-e az I intervallumon?

22.1. tétel (a függvény állandóságának ismertetőjele). *Ha az I intervallum minden x értékére teljesül az $f'(x) = 0$ egyenlőség, akkor az f függvény ezen az intervallumon konstans lesz.*



22.1. ábra

A 22.1. ábrán az $f(x) = x^2$ grafikonja látható. Ennek a függvénynek a következő tulajdonságai lesznek: a $(-\infty; 0)$ intervallumon a függvény csökkenő, a $(0; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő. Ebben az esetben a $(-\infty; 0)$ intervallumon az $f'(x) = 2x$ deriváltja negatív értéket vesz fel, és a $(0; +\infty)$ intervallumon a függvény pozitív értéket vesz fel.

Ez a példa azt mutatja, hogy a függvény deriváltjának az előjele egy adott I intervallumon azzal kapcsolatos, hogy növekvő (csökkenő)-e az adott I intervallumon ez a függvény.

A derivált előjele és növekedése (csökkenése) közötti kapcsolatot a következő két tétel határozza meg.

22.2. tétel (a függvény növekedésének ismertetőjele). *Ha az I intervallum minden egyes x elemére teljesül az $f'(x) > 0$ egyenlőtlenség, akkor az f függvény ezen az intervallumon növekvő.*

22.3. tétel (a függvény csökkenésének ismertetőjele). *Ha az I intervallum minden egyes x elemére teljesül az $f'(x) < 0$ egyenlőtlenség, akkor az f függvény ezen az intervallumon csökkenő.*

1. feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény növekedési (csökkenési) intervallumát!

Megoldás. Az $f'(x) = 2x - 2$. Megoldva a $2x - 2 > 0$ és a $2x - 2 < 0$ egyenlőtlenségeket, arra a következtetésre jutunk, hogy $f'(x) > 0$ az $(1; +\infty)$ intervallumon, és $f'(x) < 0$ a $(-\infty; 1)$ intervallumon. Tehát az f függvény növekvő az $(1; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $(-\infty; 1)$ intervallumon.

A 22.2. ábra az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény grafikonját szemlélteti. A rajzon látható, hogy az f függvény valóban növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $(-\infty; 1]$ intervallumon, az $x = 1$ pontot is beleértve.

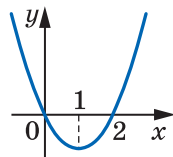
A felelet felírásakor a következő szabályt fogjuk alkalmazni: ha a függvény differenciálható növekedési (csökkenési) intervallumának valamely végpontjában, akkor ezt a pontot is ezekhez az intervallumokhoz soroljuk. A fenti példában az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény differenciálható az $x = 1$ pontban, ezért ezt a pontot is hozzákapcsoljuk az $(1; +\infty)$ és a $(-\infty; 1)$ intervallumokhoz.

Felelet: növekvő az $[1; +\infty)$ és csökkenő a $(-\infty; 1]$ intervallumon. ◀

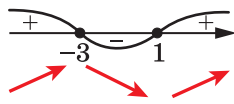
2. feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ függvény növekedési és fogyási intervallumait!

Megoldás. Az $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Megvizsgáljuk a derivált előjeleit (22.3. ábra) és figyelembe vesszük, hogy a függvény differenciálható az $x = -3$ és az $x = 1$ pontokban. Azt kaptuk, hogy az f függvény növekvő a $(-\infty; -3]$ és az $[1; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $[-3; 1]$ intervallumon. ◀



22.2. ábra



22.3. ábra



1. Fogalmazd meg a függvény állandóságának ismertetőjelét!
2. Fogalmazd meg a függvény növekedésének ismertetőjelét!
3. Fogalmazd meg a függvény csökkenésének ismertetőjelét!



GYAKORLATOK

22.1.° Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$; | 3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$; |
| 2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$; | 4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$! |

22.2.° Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;

3) $f(x) = x^4 + 4x - 20$;

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;

4) $f(x) = 8 - 4x - x^3$!

22.3.° Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;

3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;

2) $f(x) = \frac{3x + 5}{2 - x}$;

4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;

6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$!

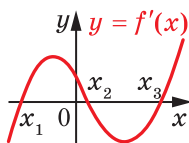
22.4.° Határozd meg a függvény növekedésének és fogyásának intervallumait:

1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;

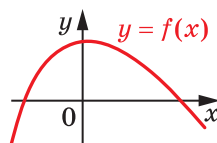
2) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$!

22.5.° A 22.4. ábrán az f függvény deriváltjának grafikonja látható, amely differenciálható a valós számok halmazán. Nevezd meg az f függvény fogyási intervallumait!

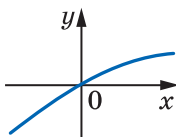


22.4. ábra

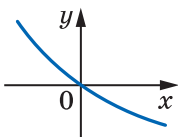


22.5. ábra

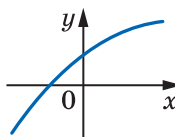
22.6.° A 22.5. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható, amely a valós számok halmazán van értelmezve. A 22.6. ábrán látható függvények közül melyik lehet az $y = f'(x)$ függvény grafikonja!



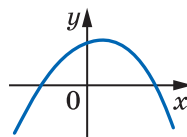
a



b



c



d

22.6. ábra

22.7.° Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ függvény csökkenő!

22.8.° Bizonyítsd be, hogy az $(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$ függvény növekvő!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

22.9. Old meg az egyenletet $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1}$!

22.10. Old meg az egyenlőtlenséget $x\sqrt{7-x} > 0$!

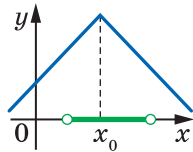
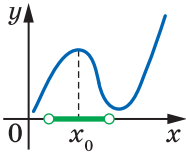
23. A függvény extrémumpontjai

Megismerkedve a függvény pontbeli differenciáljának fogalmával, ennek a pontnak a környékén vagy **környezetében** megvizsgáltuk a függvény viselkedését.

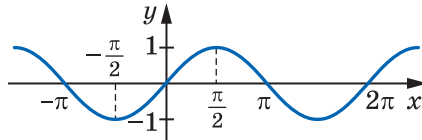
Definíció. Az $(a; b)$ intervallumot, amely tartalmazza az x_0 pontot, az x_0 pont **környezetének** nevezzük.

Például a $(-1; 3)$ intervallum a 2,5 pont egyik környezete lesz. Ezzel együtt, viszont ez az intervallum nem környezete a 3-as pontnak.

A 23.1. ábrán két függvény grafikonja látható. A függvényeknek van egy közös sajátosságuk: létezik az x_0 pontnak egy olyan környezete, amelyben minden x -re ebből a környezetből teljesül az $f(x_0) \geq f(x)$ egyenlőtlenség.



23.1. ábra



23.2. ábra

Definíció. Az x_0 pontot az f függvény **maximumpontjának** nevezzük, ha az x_0 pont valamely környezetének minden x elemére teljesül az $f(x_0) \geq f(x)$ egyenlőtlenség.

Például az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ az $y = \sin x$ függvény maximumpontja lesz

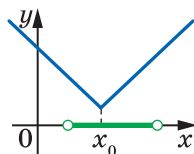
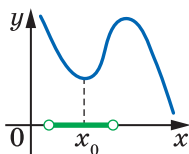
(23.2. ábra). Ezt így jelöljük: $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

A 23.1. ábrán $x_{\max} = x_0$.

Definíció. Az x_0 pontot az f függvény **minimumpontjának** nevezzük, ha az x_0 pont valamely környezetének minden x elemére teljesül az $f(x_0) \leq f(x)$ egyenlőtlenség.

Például az $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ az $y = \sin x$ függvény minimumpontja lesz (23.2. ábra). Ezt így jelöljük: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

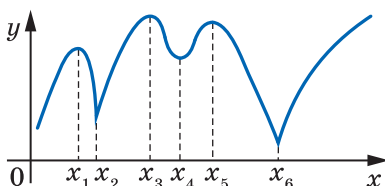
A 23.3. ábrán egy olyan függvény grafikonja látható, amelynek az x_0 pont a minimumpontja lesz, vagyis $x_{\min} = x_0$.



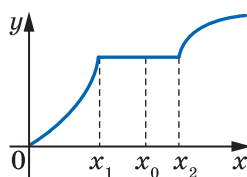
23.3. ábra

A függvény minimum- és maximumpontjait a függvény **extrémumpontjainak** (szélsőértékhelyeinek) nevezzük (a latin *extremum* szóból, amely valaminek a szélét, végét jelent).

A 23.4. ábrán az $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ pontok extrémumpontok lesznek.

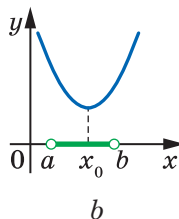
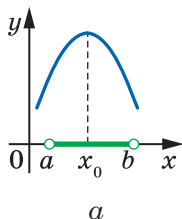


23.4. ábra



23.5. ábra

A 23.5. ábrán lévő f függvény grafikonja az $[x_1; x_2]$ intervallumon állandó. Az x_1 pont a maximumpontja, az x_2 pont pedig a minimumpontja lesz, és az $(x_1; x_2)$ intervallumhoz tartozó bármely pont egyszerre lesz az f függvény maximum- és minimumpontja.



23.6. ábra

Az extrémumpont létezése az x_0 pontban a függvény viselkedésétől függ a pont környezetében. Ennek megfelelően a 23.6. ábrán látható függvények grafikonjai: a 23.6 a ábrán az $(a; x_0]$ intervallumon a

függvény növekvő lesz, az $[x_0; b)$ intervallumon pedig csökkenő; a 13.6. *b* ábrán az $(a; x_0]$ intervallumon a függvény csökkenő, a $[x_0; b)$ intervallumon pedig növekvő lesz.

Már tudjátok, hogy a derivált segítségével meg lehet határozni a differenciálható függvény növekedési (csökkenési) intervallumait. A két következő tételből azt tudjuk meg, hogy a derivált segítségével hogyan lehet meghatározni a differenciálható függvény extrémumait.

23.1. tétel (a függvény maximumpontjának ismertetőjele). Legyen az f függvény differenciálható az $(a; b)$ intervallumon, és legyen az x_0 az intervallum egy pontja. Ha minden x -re, ahol $x \in (a; x_0]$, teljesül az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenség, és minden x -re, ahol $x \in [x_0; b)$ teljesül az $f'(x) \leq 0$ egyenlőtlenség, akkor az x_0 pontot az f függvény maximumpontjának nevezzük (23.6. *a* ábra).

23.1. tétel (a függvény minimumpontjának ismertetőjele). Legyen az f függvény differenciálható az $(a; b)$ intervallumon, és legyen az x_0 az intervallum egy pontja. Ha minden x -re, ahol $x \in (a; x_0]$ teljesül az $f'(x) \leq 0$ egyenlőtlenség, és minden x -re, ahol $x \in [x_0; b)$ teljesül az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenség, akkor az x_0 pontot az f függvény minimumpontjának nevezzük (23.6. *b* ábra).

Néha érdekesebb az egyszerűbb megfogalmazásait alkalmazni ezeknek a tételeknek: ha az x_0 ponton történő átmenetkor a függvény deriváltja az előjelet pluszról mínuszra változtatja, akkor az x_0 -t a maximumpontnak; ha a derivált mínuszról pluszra vált, akkor az x_0 -t a minimumpontnak nevezzük.

Tehát az f függvény extrémumpontjait a következő pontok szerint határozhatjuk meg:

- 1) Kiszámítjuk az $f'(x)$ -et.
- 2) Megvizsgáljuk a derivált előjeleit.
- 3) A megfelelő tételek alkalmazásával meghatározzuk az extrémumpontokat.

Feladat. Határozzuk meg a függvény extrémumait:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}!$$

Megoldás. 1) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$.

Megvizsgáljuk a derivált előjeleit az $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ pontok környezeteiben (23.7. ábra). A következőt kapjuk: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.



23.7. ábra



23.8. ábra

$$\begin{aligned}
 2) \quad f'(x) &= \frac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \\
 &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Megoldva az $x^2 - 2x - 3 > 0$ egyenlőtlenséget, majd figyelembe véve, hogy $(x - 1)^2 > 0$, ha $x \neq 1$, azt kapjuk, hogy az $f'(x) > 0$ a $(-\infty; -1)$ és a $(3; +\infty)$ intervallumon. Hasonlóképpen gondolkodva azt is meg lehet állapítani, hogy $f'(x) < 0$ a $(-1; 1)$ és az $(1; 3)$ intervallumon. A 23.8. ábra illusztrálja ezeket az eredményeket.

Most már levonhatjuk az alábbi következtetést: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$. ◀



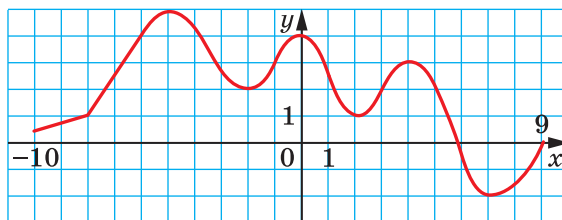
1. Milyen intervallumot nevezünk az x_0 pont környezetének?
2. Mit nevezünk a függvény maximumpontjának? A függvény minimumpontjának?
3. Fogalmazd meg a maximumpont, illetve minimumpont ismertetőjelét!



GYAKORLATOK

23.1.° A 23.9. ábrán a $[-10; 9]$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Nevezd meg a:

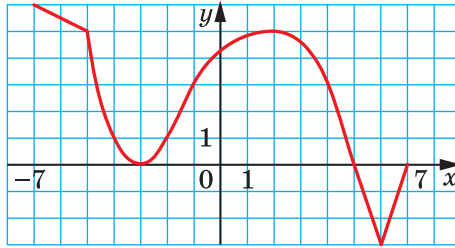
- 1) minimumpontját;
- 2) maximumpontját!



23.9. ábra

23.2.° A 23.10. ábrán a $[-7; 7]$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Nevezd meg a:

- 1) minimumpontját;
- 2) maximumpontját!



23.10. ábra

23.3.° Határozd meg a függvény minimum- és maximumpontjait:

1) $f(x) = 0,5x^4$;

3) $f(x) = 12x - x^3$;

2) $f(x) = x^2 - 6x$;

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$!

23.4.° Határozd meg a függvény minimum- és maximumpontjait:

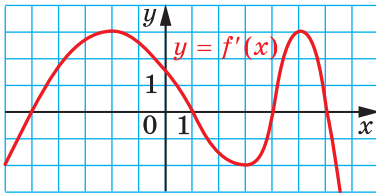
1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;

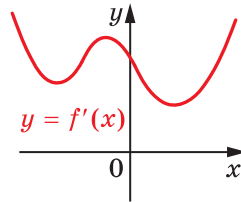
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;

4) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$!

23.5.* Az $y = f(x)$ függvény differenciálható a valós számok halmazán. A 23.11. ábrán a függvény deriváltjának grafikonja látható. Nevezd meg az $y = f(x)$ függvény maximum- és minimumpontjait!



23.11. ábra



23.12. ábra

23.6.* Az $y = f(x)$ a valós számok halmazán értelmezett függvény, és az értelmezési tartományának minden pontjában van deriváltja. A 23.12. ábrán az $y = f'(x)$ függvény grafikonja látható. Hány extrémumpontja van az $y = f(x)$ függvénynek?

23.7.** Határozd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$!

23.8.** Határozd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$!



FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

23.9. Határozd meg az $y = 3x^2 - 18x + 2$ függvény legkisebb értékét a következő intervallumon:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$!

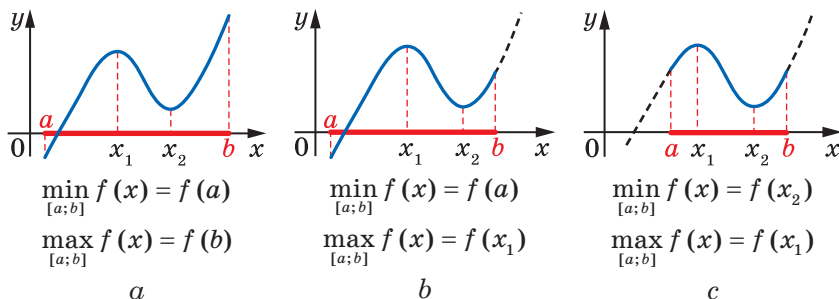
23.10. Határozd meg az $y = -x^2 - 8x + 10$ függvény legnagyobb értékét a következő intervallumon:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$!

24. A függvény legnagyobb és legkisebb értéke

Mennyi terméket kell előállítani a vállalatnak ahhoz, hogy a maximális profitra tegyen szert? Hogyan lehet a lehető legkevesebb idő alatt végrehajtani a termelési feladatot, ha az alapanyagokhoz való hozzáférés korlátozott? Hogyan lehet megszervezni az áru kiszállítását úgy, hogy a lehető legkevesebb legyen az üzemanyag fogyasztása? Ilyen és ehhez hasonló feladatokat kell az embereknek a gyakorlatban megoldaniuk az optimális megoldás keresése során.

Ebben a pontban megtanuljuk, hogyan kell meghatározni a függvény legnagyobb és legkisebb értékét az $[a; b]$ intervallumon. Csak a differenciálható függvények vizsgálatával foglalkozunk majd.



24.1. ábra

Be lehet bizonyítani, hogy az $[a; b]$ intervallumon differenciálható függvény a legnagyobb és a legkisebb értékét vagy az intervallum végein, vagy az extrémumpontban veszi fel (24.1. ábra).

Ezt figyelembe véve, az $[a; b]$ intervallumon differenciálható függvény legnagyobb és legkisebb értékének meghatározása során a következőképpen kell eljárunk.

1. Meghatározzuk az f függvény azon pontjait, melyekben a függvény deriváltja nullával egyenlő.

2. Az így meghatározott pontokban kiszámítjuk a függvény értékeit az adott intervallumban, majd az intervallum végein is meghatározzuk a függvényértékeket.

3. Az összes meghatározott értékek közül kiválasszuk a legkisebbet, illetve a legnagyobbat.

1. feladat. Határozzuk meg az $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a $[-2; 0]$ intervallumon!

Megoldás. Meghatározzuk az adott függvény deriváltját. A következőt kapjuk:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Most megoldjuk a $12x^2 - 18x - 12 = 0$ egyenletet. Innen:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ vagy } x = -\frac{1}{2}.$$

A $[-2; 0]$ intervallumhoz csak az $x = -\frac{1}{2}$ pont tartozik.

$$\text{Ebből megkapjuk: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, f(-2) = -38, f(0) = 6.$$

$$\text{Tehát } \max_{[-2; 0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = -38.$$

$$\text{Felelet: } \frac{37}{4}; -38. \quad \blacktriangleleft$$

2. feladat. Adjuk meg a 8-as számot két nemnegatív szám összegeként úgy, hogy az egyik szám köbének és a másik négyzetének összege a legkisebb legyen!

Megoldás. Legyen az első szám x , akkor a második szám $8 - x$ lesz. A feladat feltételéből következik, hogy $0 \leq x \leq 8$.

Megvizsgáljuk a $[0; 8]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$ függvényt, majd meghatározzuk, hogy az x mely értékénél veszi fel a legkisebb értékét.

Az $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$. Megoldjuk a $3x^2 + 2x - 16 = 0$ egyenletet.

$$\text{Megkapjuk a gyökeket: } x = 2 \text{ vagy } x = -\frac{8}{3}.$$

A kapott gyökök közül csak a 2 tartozik a $[0; 8]$ intervallumhoz. Ezért:

$$f(2) = 44, f(0) = 64, f(8) = 512.$$

Tehát a függvény legnagyobb értékét az $x = 2$ pontban veszi fel.

$$\text{Felelet: } 8 = 2 + 6. \quad \blacktriangleleft$$



Ismertesd, hogyan kell meghatározni az $[a; b]$ intervallumon differenciálható függvény legnagyobb és legkisebb értékét!



GYAKORLATOK

24.1.* Határozd meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$; 3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$; 4) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3; 0]$!

24.2.* Határozd meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$; 3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;

2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$; 4) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$!

24.3.** Add meg a 8-as számot két nemnegatív szám összegeként úgy, hogy az egyik számnak és a másik szám köbének szorzata a legnagyobb legyen!

24.4.** Add meg a 12-es számot két nemnegatív szám összegeként úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám kétszeres szorzatának szorzata a legnagyobb legyen!

24.5.** Add meg a 180-as számot három nemnegatív szám összegeként úgy, hogy kettőnek az aránya $1 : 2$ -höz legyen, és a három szám szorzata a lehető legnagyobb legyen!

24.6.** Add meg a 18-as számot három nemnegatív szám összegeként úgy, hogy kettőnek az aránya $8 : 3$ -hoz legyen, és a három szám köbeinek összege a legkisebb legyen!



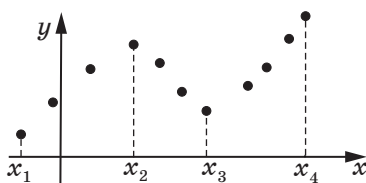
FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁRA

24.7. Rajzolj meg egy olyan függvényt, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik: az értelmezési tartomány $[-3; 4]$ intervallum; értékkészlete a $[-2; 3]$ intervallum; zérushelyei -1 és 2 ; az $f'(x) > 0$ bármilyen x értékre a $[-3; 0)$ és $(2; 4]$ intervallumokon; $f'(x) < 0$ bármilyen x értékre a $(0; 2)$ intervallumon!

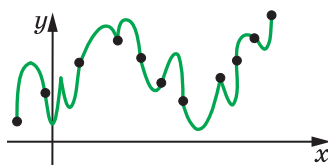
25. A függvény grafikonjának ábrázolása

Az előző osztályokban a függvények grafikonjainak megrajzolása-kor a következőképpen jártunk el: a koordinátiáson megjelöltünk néhány olyan pontot, amelyek az adott függvény grafikonjához tartoznak, majd összekötöttük ezeket a pontokat. A szerkesztés pontossága attól függött, hogy hány ilyen pontot jelöltetek meg.

A 25.1. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonjához tartozó pontokat látunk. A 25.2. és a 25.3. ábrák mutatják, hogy a pontok különbözőképpen köthetők össze.

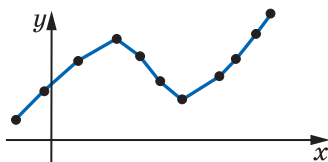


25.1. ábra

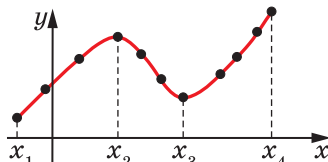


25.2. ábra

Azonban, ha tudjuk azt, hogy az f függvény növekvő az $[x_1; x_2]$, illetve az $[x_3; x_4]$ intervallumokon, és csökkenő az $[x_2; x_3]$ intervallumon, valamint differenciálható, akkor legvalószínűbb, hogy a függvény grafikonja olyan lesz, mint a 25.4. ábrán látható.



25.3. ábra



25.4. ábra

Már ismeritek a páros, páratlan és a periodikus függvények grafikonjainak sajátosságait. Általában, minél több függvénytulajdonságot ismerünk, annál pontosabban tudjuk ábrázolni a függvény grafikonját.

A függvényvizsgálatot az alábbi séma szerint végezzük:

1. Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát.
2. Megvizsgáljuk a függvény paritását.
3. Meghatározzuk a zéruspontjait.
4. Meghatározzuk a függvény növekedési és csökkenési intervallumait.
5. Meghatározzuk extrémumpontjait és a függvény értékeit ezekben a pontokban.

6. Megállapítjuk a függvény más különleges tulajdonságait (periodicitását, a függvény viselkedését a különleges pontok környezetében stb.).

Megjegyezzük, hogy a függvényvizsgálat fentebb leírt módja nem teljes, csupán ajánló jellegű. A vizsgálat során a függvénynek olyan tulajdonságait kell kideríteni, amelyek segítségével aránylag pontosan le tudjuk rajzolni a függvény grafikonját.

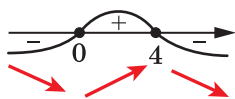
Feladat. Vizsgáljuk meg az $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ függvényt, és ábrázoljuk grafikonját!

Megoldás. 1. A függvény az egész számegyenesen értelmezhető, vagyis $D(f) = \mathbb{R}$.

2. $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Ebből az következik, hogy $f(-x) \neq f(x)$ és $f(-x) \neq -f(x)$, vagyis az $y = f(-x)$ nem esik egybe sem az $y = f(x)$ sem az $y = -f(x)$ függvénnyel. Ezért az adott függvény se nem páros se nem páratlan.

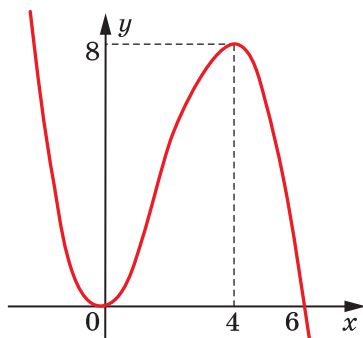
3. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6-x)$. A 0 és a 6 lesz az f függvény zérushelyei.

4–5. $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4-x)$. Megvizsgálva a derivált előjelét (25.5. ábra), arra a következtetésre jutunk, hogy az f függvény növekvő a $[0; 4]$ intervallumon, és csökkenő a $(-\infty; 0]$ és a $[4; +\infty)$ intervallumokon. Tehát $x_{\max} = 4$; $x_{\min} = 0$. A következőt kapjuk: $f(4) = 8$; $f(0) = 0$.



25.5. ábra

A kapott eredmények alapján megrajzoljuk a keresett függvény grafikonját (25.6. ábra). ◀



25.6. ábra



Sorold fel a függvényvizsgálat lépéseit!



GYAKORLATOK

25.1. Végezd el a függvényvizsgálatot, majd ábrázold grafikonját:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;

4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;

5) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$!

3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;

25.2. Végezd el a függvényvizsgálatot, majd ábrázold grafikonját:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

3) $f(x) = x - x^3$!

2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;



A 3. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

Az x argumentum növekménye az x_0 pontban

$$\Delta x = x - x_0$$

Az f függvény növekménye az x_0 pontban

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ vagy } \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

A függvény deriváltja

Az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának azt a számot nevezzük, amely egyenlő az f függvény x_0 pontbeli növekménye és az argumentum növekménye arányának határértékével, amikor az argumentum növekménye a nullához tart.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ vagy } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

A derivált geometriai értelmezése

Az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzott érintő iránytényezője egyenlő lesz az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának az értékével.

A derivált mechanikai értelmezése

Ha az $y = s(t)$ a számegyenesen mozgó anyagi pont mozgásának képlete, akkor a pillanatnyi sebessége az adott t_0 időpontban egyenlő az $y = s(t)$ függvény t_0 pontbeli deriváltjával.

A függvény differenciálhatósága

Ha a függvénynek létezik deriváltja az adott pontban, akkor ebben a pontban a függvény differenciálható.

Ha az f függvény differenciálható az értelmezési tartomány minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható.

Az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzott érintőjének egyenlete

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

A derivált kiszámításának szabályai

Az összeg deriváltja	$(f + g)' = f' + g'$
A szorzat deriváltja	$(fg)' = f'g + g'f$
A hányados deriváltja	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

A függvény állandóságának ismertetőjele

Ha az I intervallum minden egyes x pontjában teljesül az $f'(x) = 0$ egyenlőség, akkor az f függvény állandó lesz ezen az intervallumon.

A függvény növekedésének ismertetőjele

Ha az I intervallum minden egyes x pontjában teljesül az $f'(x) > 0$ egyenlőség, akkor az f függvény növekvő ezen az intervallumon.

A függvény csökkenésének ismertetőjele

Ha az I intervallum minden egyes x pontjában teljesül az $f'(x) < 0$ egyenlőség, akkor az f függvény csökkenő ezen az intervallumon.

A pont környezete

Az $(a; b)$ intervallumot, amely tartalmazza az x_0 pontot, az x_0 pont környezetének nevezzük.

A függvény extrémumpontjai

Az x_0 pontot az f függvény maximumpontjának nevezzük, ha létezik az x_0 pontnak olyan környezete, amelyben minden x pontra ebből az intervallumból teljesül a következő egyenlőtlenség: $f(x_0) \geq f(x)$.

Az x_0 pontot az f függvény minimumpontjának nevezzük, ha létezik az x_0 pontnak olyan környezete, amelyben minden x pontra ebből az intervallumból teljesül a következő egyenlőtlenség: $f(x_0) \leq f(x)$.

A maximum és minimum pontokat extrémumpontoknak nevezzük.

A maximum és minimum pontok ismertetőjelei

Legyen az f függvény differenciálható az $(a; b)$ intervallumon, és legyen az x_0 az intervallum egy pontja.

Ha minden x -re, ahol $x \in (a; x_0]$, teljesül az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenség, és minden x -re, ahol $x \in [x_0; b)$ teljesül az $f'(x) \leq 0$ egyenlőtlenség, akkor az x_0 pontot az f függvény maximumpontjának nevezzük.

Ha minden x -re, ahol $x \in (a; x_0]$ teljesül az $f'(x) \leq 0$ egyenlőtlenség, és minden x -re, ahol $x \in [x_0; b)$ teljesül az $f'(x) \geq 0$ egyenlőtlenség, akkor az x_0 pontot az f függvény minimumpontjának nevezzük.

A függvény tulajdonságainak vizsgálata:

1. Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát.
2. Megvizsgáljuk a függvény paritását.
3. Meghatározzuk a zéruspontjait.
4. Meghatározzuk a függvény növekedési és csökkenési intervallumait.
5. Meghatározzuk extrémumpontjait és a függvény értékeit ezekben az extrémumpontokban.
6. Megállapítjuk a függvény más különleges tulajdonságait (periodicitását, a függvény viselkedését a különleges pontok környezetében stb.).

26. A 10. osztályos algebra és analízis elemei tananyagának ismétlő gyakorlatai

1. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjaik

26.1. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

$$1) f(x) = \sqrt{x-5};$$

$$4) f(x) = \frac{14}{x^2+4};$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}};$$

$$5) f(x) = \frac{7x+13}{x^2-7x};$$

$$3) f(x) = \frac{9}{x^2-5};$$

$$6) f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}!$$

26.2. Határozd meg a függvény értékészletét:

$$1) f(x) = \sqrt{x}+1;$$

$$3) g(x) = 3-x^2;$$

$$2) f(x) = \sqrt{x}-2;$$

$$4) f(x) = x^2+2!$$

26.3. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát, majd rajzold meg a függvény grafikonját:

$$1) f(x) = \frac{x^2-4}{x+2};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2-6x+9}{3-x}!$$

26.4. Határozd meg a függvény zérushelyeit:

$$1) f(x) = \sqrt{x+7};$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2-6};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x-1};$$

$$4) f(x) = (x-3)\sqrt{x-4}!$$

26.5. Vizsgáld meg a függvény paritását:

$$1) f(x) = 7x^6;$$

$$4) f(x) = x^2-x+1;$$

$$2) f(x) = 3x^5-2x^7;$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x^3-x}!$$

$$3) f(x) = \sqrt{9-x^2};$$

26.6. Határozd meg a kifejezés értékét:

$$1) \sqrt[4]{5\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[5]{-\frac{32}{243}} + (-3\sqrt[3]{6})^3; \quad 2) \sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}}!$$

26.7. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát:

$$1) y = \sqrt[4]{3x-5}; \quad 2) y = \sqrt[6]{-x}; \quad 3) y = \sqrt[5]{x-4}; \quad 4) y = \sqrt[8]{6x-x^2}!$$

26.8. Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \sqrt[6]{a^6}, \text{ ha } a \geq 0; \quad 2) \sqrt[4]{b^4}, \text{ ha } b \leq 0; \quad 3) \sqrt[7]{c^7}!$$

26.9. Ábrázold a függvény grafikonját:

$$1) y = (\sqrt[7]{x-2})^7; \quad 2) y = \sqrt[7]{(x-2)^7}; \quad 3) y = (\sqrt[8]{x-2})^8; \quad 4) y = \sqrt[8]{(x-2)^8}!$$

26.10. Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4} - \sqrt{7}; \quad 2) \sqrt[5]{(7-\sqrt{35})^5} - \sqrt[6]{(\sqrt{35}-6)^6}!$$

26.11. Vidd ki a tényezőt a gyökjel elé:

$$1) \sqrt[4]{a^{11}}; \quad 2) \sqrt[4]{162m^{10}n^7}; \quad 3) \sqrt[4]{-243y^5}!$$

26.12. Hasonlítsd össze a számokat:

$$1) \sqrt[6]{80} \text{ és } \sqrt[3]{9}; \quad 2) \sqrt[3]{6} \text{ és } \sqrt{5}; \quad 3) \sqrt[4]{15} \text{ és } \sqrt{3}; \quad 4) \sqrt[4]{27} \text{ és } \sqrt[3]{9}!$$

26.13. Egyszerűsítsd a törtet:

$$1) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}; \quad 2) \frac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}; \quad 3) \frac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}!$$

26.14. Számítsd ki a kifejezés értékét:

$$1) 3^{1,2} \cdot 3^{-0,7} \cdot 3^{1,5}; \quad 4) \frac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}};$$

$$2) 11^{\frac{4}{3}} \cdot 11^{\frac{3}{4}} \cdot 11^{\frac{1}{12}}; \quad 5) 0,125^{-\frac{1}{3}} + 0,81^{-\frac{1}{2}} - 0,216^{-\frac{2}{3}}!$$

$$3) 36^{0,7} \cdot 6^{-0,4};$$

26.15. Bizonyítsd be az azonosságot:

$$1) \left(\frac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}} - \frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}};$$

$$2) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}} = b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}!$$

26.16. Oldd meg az egyenletet:

$$1) \sqrt{4x+20} = x+2; \quad 5) \sqrt{x+11} - \sqrt{3x+7} = 2;$$

$$2) \sqrt{6-x} = 3x-4; \quad 6) \sqrt{2x+5} + \sqrt{3-x} = 4;$$

$$3) \sqrt{4+2x-x^2} = x-2; \quad 7) \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 5 = 0;$$

$$4) \sqrt{2x^2-14x+13} = 5-x; \quad 8) \sqrt[3]{x^2-4x+4} + 2\sqrt[3]{x-2} - 3 = 0!$$

2. Trigonometrikus függvények

26.17. Hasonlítsd össze nullával a kifejezés értékét:

$$1) \sin 168^\circ \cos 126^\circ; \quad 2) \operatorname{tg} 206^\circ \cos(-223^\circ)!$$

26.18. Határozd meg a kifejezés értékét:

$$1) \sin 780^\circ; \quad 2) \cos 1200^\circ; \quad 3) \cos \frac{11\pi}{6}!$$

26.19. Számítsd ki a $\sin \alpha$ értékét, ha $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$!

26.20. Határozd meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét:
 $2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha$!

26.21. Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi - \alpha)!$$

26.22. Adott: $\sin \alpha = -0,8$, $\cos \beta = 0,6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Határozd meg a $\cos(\alpha + \beta)$ értékét!

26.23. Bizonyítsd be az azonosságot:

$$1) \frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta);$$

$$2) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha!$$

26.24. Hozd egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$1) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha};$$

$$2) \sin 6\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2 \cos^2 3\alpha;$$

$$3) \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$4) \frac{2 \cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}!$$

26.25. Old meg az egyenletet:

$$1) 2 \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0; \quad 3) 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$2) 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0; \quad 4) \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = -1!$$

26.26. Határozd meg az egyenlet legkisebb pozitív gyökét:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}!$$

26.27. Határozd meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}!$$

26.28. Hány gyöke van a $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$ egyenletnek a $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ intervallumon?

26.29. Oldd meg az egyenletet:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2;$ | 4) $3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0;$ |
| 2) $\cos 2x + \sin x = 0;$ | 5) $\sin x + 2 \cos x = 0;$ |
| 3) $2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0;$ | 6) $\sin x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}!$ |

3. A derivált és alkalmazása

26.30. Határozd meg a függvény deriváltját:

- | | |
|------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $y = 3x^4 - 2x^2 + 5;$ | 3) $y = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + 7;$ |
| 2) $y = 4x^3 - \frac{2}{x};$ | 4) $y = 5 \sin x - 7 \cos x!$ |

26.31. Határozd meg a függvény deriváltját:

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = (x^2 - 1)(x^5 + 2);$ | 3) $y = \sqrt[3]{x} \cos x;$ | 5) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2};$ |
| 2) $y = x^3 \sin x;$ | 4) $y = \frac{2x+3}{3x-2};$ | 6) $y = \frac{x^2 - 3x}{\cos x}!$ |

26.32. Határozd meg az $f(x) = x^2 - 5x$ függvény azon pontjának abszcisszáját, melyben a függvény érintője az abszcisszatengely pozitív irányával 45° -os szöget alkot!

26.33. Határozd meg az $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ függvény érintőjének iránytényezőjét, amely a függvényt az ordinátatengely metszéspontjában érinti!

26.34. Állítsd fel az f függvény x_0 abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét, ha:

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = x^3 + x, \quad x_0 = -1;$ | 3) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}, \quad x_0 = 3;$ |
| 2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}, \quad x_0 = 4;$ | 4) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{3}!$ |

26.35. Állítsd fel annak az érintőnek az egyenletét, amelyet az $f(x) = x^2 - 4x$ függvény görbéje és az abszcisszatengely metszéspontjába húztak!

26.36. A test mozgását a számegyenesen az $s(t) = t^2 + 3t - 2$ képlet írja le (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük). Mely t időpontjában lesz a test sebessége 10 m/mp?

26.37. Bizonyítsd be, hogy az $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ függvény növekvő!

26.38. Határozd meg a függvény növekedési és csökkenési intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $y = 3x - x^3$; 3) $y = x + \frac{16}{x}$; 5) $y = x^2(x - 3)$;

2) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 - 3$; 4) $y = x + \frac{4}{x^2}$; 6) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$!

26.39. Határozd meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékeit az adott intervallumon:

1) $f(x) = x^3 - 3x$, $[-2; 0]$; 2) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2; 4]$!

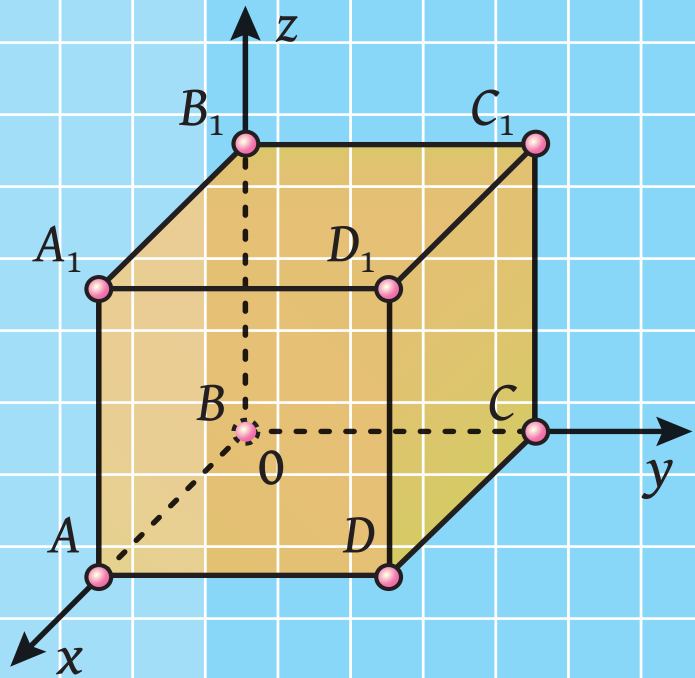
26.40. Add meg a 64-et két pozitív szám összegeként úgy, hogy a négyzeteik összege a legkisebb legyen!

26.41. Határozd meg azt a pozitív számot, amelyre igaz, hogy háromszoros négyzetének és köbének a különbsége a legnagyobb!

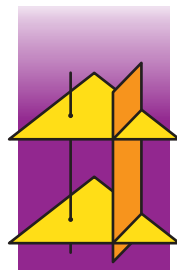
2. fejezet

Térmértan

- 4. §. Párhuzamosság a térben
- 5. §. Merőlegesség a térben
- 6. §. Koordináták és vektorok a térben



PÁRHUZAMOSSÁG A TÉRBEN 4.§.

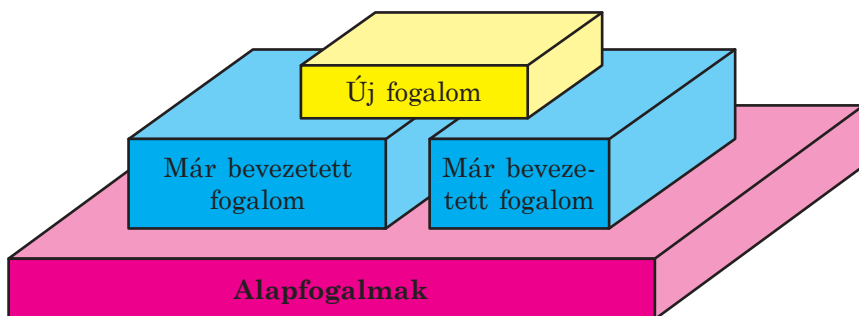


Ebben a paragrafusban a térmértan fogalmával, axiómáival és azok következményeivel fogtok megismerkedni. Alapismeretekre tesztek szert a soklapokról. Megismeritek két egyenes, az egyenes és a sík, valamint két sík kölcsönös helyzetét a térben. Elsajátítjátok a térbeli alakzatok síkbeli ábrázolásának szabályait.

27. A térmértan alapfogalmai. A térmértan axiómái

A matematika elsajátítása során már eddig is számtalan fogalommal ismerkedtetek meg. A síkmértanból például már jól ismeritek a négyszög, a trapéz, a kör stb. meghatározásait.

Bármilyen új fogalom meghatározása olyan ismert fogalmakra épül, amelyek tartalmával már tisztában vagyunk. Például vizsgáljuk meg a trapéz meghatározását: *Trapéznak nevezzük azt a négyszöget, melynek két oldala párhuzamos, a másik két oldala pedig nem párhuzamos.* Látjuk, hogy a trapéz definíciója olyan fogalmakra épül, mint a négyszög, a négyszög oldala, párhuzamos és nem párhuzamos oldalak stb. A meghatározás struktúrája a következő: *egy korábbira épülő új fogalom.* Nyilvánvaló, hogy létezniük kell olyan elsődleges fogalmaknak, melyet nem kell definiálni. Ezeket a fogalmakat **alapfogalmak**nak nevezzük (27.1. ábra).



27.1. ábra

A síkmértanban nem adtuk meg a pont és az egyenes meghatározását. A már eddig megismert alapfogalmak mellett a **sík** a térmértan alapfogalmai közé tartozik.

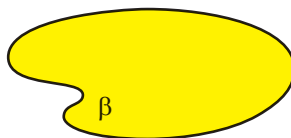
A víztározó sima vízfelszínének segítségével szemléletes képet alkothatunk a síkról. De a tükörfelület, a csiszolt asztal lapja stb. is segíti a síkról alkotott elképzeléseink kialakítását.

A sík fogalmára a síkmértanban úgy tekintettünk, hogy csak egy sík van, és minden alakzatot ebben a síkban vizsgáltunk. A térmértanban számtalan, a **térben** elhelyezkedő síkot vizsgálunk.

A síkokat a görög ábécé betűivel jelöljük: α , β , γ , A rajzokon a síkokat paralelogrammáknak (27.2. ábra) vagy egyéb síkrészeknek (27.3. ábra) ábrázoljuk.



27.2. ábra



27.3. ábra

A sík az egyeneshez hasonlóan pontokból áll, vagyis a sík a pontok halmaza.

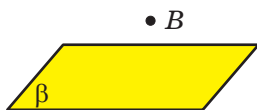
A pontok, az egyenesek és a síkok egymáshoz képest különbözőképpen helyezkedhetnek el a térben. Nézzünk néhány példát.

A 27.4. ábrán az A pont az α síkhoz illeszkedik. Vagy másképpen fogalmazva: *az A pont az α síkra illeszkedik*, vagy *az α sík átmegy az A ponton*. Ezt röviden így jelöljük: $A \in \alpha$.

A 27.5. ábrán a B pont nem illeszkedik a β síkra. Ezt így írjuk fel: $B \notin \beta$.



27.4. ábra



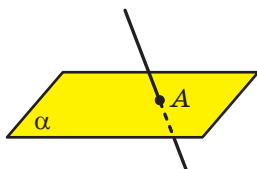
27.5. ábra



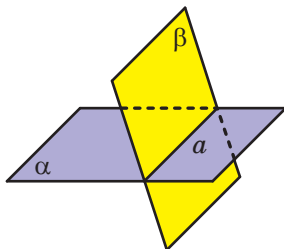
27.6. ábra

A 27.6. ábrán az a egyenes az α síkhoz illeszkedik. Azt is mondjuk, hogy *az a egyenes az α síkra illeszkedik* vagy *az α sík az a egyenesen megy át*. Ezt röviden így írjuk le: $a \subset \alpha$.

Ha az egyenesnek és a síknak csak egy közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy az **egyenes metszi a síkot**. A 27.7. ábrán lévő a egyenes az A pontban metszi az α síkot. Ezt így írjuk fel: $a \cap \alpha = A$.



27.7. ábra



27.8. ábra

A továbbiakban, amikor két pontról, három egyenesről, két síkról stb. beszélünk, akkor ezeken különböző pontokat, különböző egyeneseket és különböző síkokat értünk.

Ha két síknak közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy **metszik egymást**.

A 27.8. ábrán az α és β sík láthatók, melyek az a egyenesben metszik egymást. Ezt így írjuk le: $\alpha \cap \beta = a$.

A térmértan tanulmányozásának kezdetén még nem lehet más állításokra alapozva tételeket bizonyítani, amikor még nincsenek ilyen állítások. Ezért a térbeli pontokra, egyenesekre és síkokra vonatkozó első tulajdonságokat bizonyítás nélkül fogadjunk el, amit **axiómának** nevezzük.

Azt is megjegyezzük, hogy a térmértan több axiómája megegyezik a síkmértanból már ismert axiómákkal. Például:

- bármilyen is legyen az egyenes, léteznek olyan pontok, melyek illeszkednek az egyenesre, és léteznek olyan pontok, melyek nem;
- bármely két ponton keresztül csak egy egyenes húzható.

Nem fogjuk bemutatni a térmértan szigorú axiomatikus felépítését. Csak néhány olyan állítást vizsgálunk meg, amelyek a síkok tulajdonságait mutatják be a térben, és ezekre alapozva építjük fel az iskolai térmértant.

A1. axióma. A tér bármely síkján teljesülnek a síkmértan axiómái.

Ha bármely síkon teljesülnek a síkmértan axiómái, akkor teljesülnek ezeknek az axiómáknak a következményei is, vagyis a síkmértan tételei is. Tehát a térmértanban alkalmazni lehet a síkbéli alakzatok összes ismert tulajdonságát.

A2. axióma. A tér bármely nem egy egyenesre illeszkedő három pontjára egy és csakis egy sík illeszkedik.

Ezt a tulajdonságot a 27.9–27.11. ábrák szemléltetik.



27.9. ábra



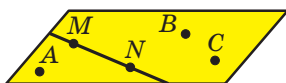
27.10. ábra



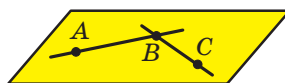
27.11. ábra

A fenti axiómákból következik, hogy a tér nem egy egyenesen fekvő három pontja egy síkot határoz meg, amelyre ezek a pontok illeszkedni fognak. Tehát a síkot bármely három pontjával meg lehet adni, ha ezek nem egy egyenesre illeszkednek. Például a 27.12. ábrán az ABC sík látható.

Az $M \in ABC$ azt jelenti, hogy az M pont illeszkedik az ABC síkra. Az $MN \subset ABC$ azt jelenti, hogy az MN egyenes az ABC síkra illeszkedik (27.12. ábra).



27.12. ábra



27.13. ábra

A3. axióma. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.

Például a 27.13. ábrán az A , B és C pontok az ABC síkra illeszkednek. Ezt így is felírhatjuk: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Ebből az axiómából következik, hogyha az egyenes nem illeszkedik a síkra, akkor ezzel a síkkal nem lehet egynél több közös pontja.

Az **A3.** axiómában megfogalmazott állítást gyakran alkalmazzuk a gyakorlatban is annak ellenőrzésére, hogy az adott felület sima-e

(síkot alkot). Ehhez elegendő egy egyenes lécet különböző helyen ráhelyezni a felületre, és azt leellenőrizni, hogy a felület és a lécek között van-e hézag (27.14. ábra).

A4. axióma. Ha két síknak van közös pontja, akkor egy egyenesben metszik egymást.

Ezt az axiómát illusztrálhatja egy kettéhajtott papírlap vagy a nyitott könyv (27.15. ábra).



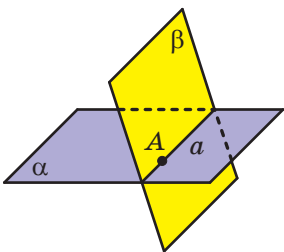
27.14. ábra



27.15. ábra

🔑 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy amikor két síknak van közös pontja, akkor egy olyan egyenesben metszik egymást, amelyre ez a pont illeszkedni fog.

Megoldás. Legyen az A pont az α és a β síkok közös pontja, vagyis $A \in \alpha$ és $A \in \beta$ (27.16. ábra). Az A4. axióma szerint az α és a β síkok metszik egymást. Legyen $\alpha \cap \beta = a$. Ekkor az α és a β síkok összes közös pontja az a egyenesre illeszkedik. Az A pont az α és a β síkok közös pontja, tehát $A \in a$. ◀

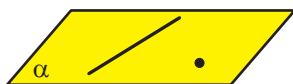


27.16. ábra

Az axiómán kívül más tulajdonságok is vannak, amelyek a pontok, az egyenesek és a síkok helyzetét írják le a térben. Az axiómákra támaszkodva be lehet bizonyítani a következő állításokat (a térmértan axiómáinak következményeit).

27.1. tétel. Egy egyeneshez egy rajta kívül elhelyezkedő ponton át egy és csakis egy sík fektethető (27.17. ábra).

27.2. tétel. Két egymást metsző egyenesre egy és csakis egy sík illeszkedik (27.18. ábra).



27.17. ábra



27.18. ábra

Az **A2.** axiómából és a 27.1., a 27.2. tételekből következik, hogy a síkot egyértelműen meghatározza:

- 1) *három nem egy egyenesre illeszkedő pont;*
- 2) *az egyenes és egy rajta kívül elhelyezkedő pont;*
- 3) *két egymást metsző egyenes.*

Tehát a sík meghatározásának három módját ismerjük.



1. Hogyan nevezzük a matematikában azokat az elsődleges fogalmakat, melyeknek nem adjuk meg a meghatározását?
2. Milyen alakzatok tartoznak a sztereometria alapfogalmai közé?
3. Milyen esetben mondjuk azt, hogy az egyenes metszi a síkot?
4. Milyen esetben mondjuk azt, hogy a síkok metszik egymást?
5. Fogalmazd meg az **A1.**, **A2.**, **A3.**, **A4** axiómákat!
6. A térmértan axiómáinak milyen következményeit ismered?
7. Nevezd meg a sík megadásának módjait!



GYAKORLATOK

27.1.° Ábrázolj egy α síkot, egy M pontot, amely illeszkedik rá, és egy K pontot, amely nem illeszkedik a síkra. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával!

27.2.° Ábrázolj egy γ síkot és egy a egyenest, amelyen a sík átmegy. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával!

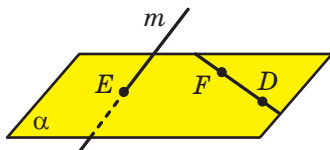
27.3.° Ábrázolj egy α síkot, egy b egyenest, amely az A pontban metszi az adott síkot. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával! A b egyenesnek hány pontja illeszkedik az α síkra?

27.4.° Ábrázolj egy β és γ síkot, amelyek a c egyenesben metszik egymást. Írd ezt fel a megfelelő jelölések alkalmazásával!

27.5.° Írd fel a 27.19. ábrán látható pontok, egyenesek és síkok közötti összefüggéseket!

27.6.° Hány sík fektethető egy adott egyenesen és ponton át?

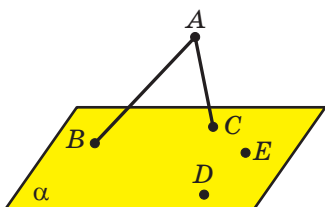
27.7.° Adottak az A , B és C pontok, melyek olyanok, hogy $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 7$ cm. Hány síkot fektethetünk az A , B és C pontokon át?



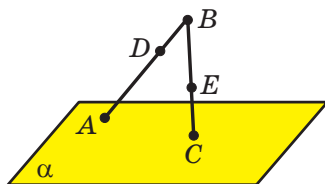
27.19. ábra

27.8.* Adottak a D , E és F pontok, melyek olyanok, hogy $DE = 2$ cm, $EF = 4$ cm, $DF = 6$ cm. Hány síkot fektethetünk a D , E és F pontokon át?

27.9.** Az AB és AC egyenesek az α síkot a B és C pontokban metszik, a D és E pontok erre a síkra illeszkednek (27.20. ábra). Szerkeszd meg a DE egyenes és az ABC sík metszéspontját!



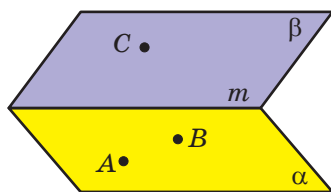
27.20. ábra



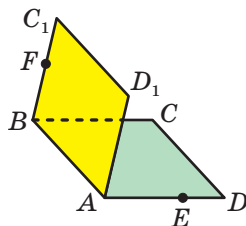
27.21. ábra

27.10.** A BA egyenes az A pontban metszi az α síkot, a BC egyenes pedig a C pontban (27.21. ábra). Az AB szakaszon jelöltünk egy D pontot, a BC szakaszon pedig egy E pontot. Szerkeszd meg a DE egyenes és az α sík metszéspontját!

27.11.** Az m egyenes az α és β síkok metszévonalára (27.22. ábra). Az A és B pontok az α síkra illeszkednek, a C pont pedig a β síkra. Szerkeszd meg az ABC sík metszévonalát az α , illetve a β síkkal!



27.22. ábra



27.23. ábra

27.12.** Az $ABCD$ és az ABC_1D_1 négyzetek nem egy síkban fekszenek (27.23. ábra). Az AD szakaszon jelöltünk egy E pontot, a BC_1 szakaszon pedig egy F -et. Szerkeszd meg a metszéspontjukat:

- 1) a CE egyenesnek és az ABC_1 síknak;
- 2) az FD_1 egyenesnek és az ABC síknak!

27.13.** Hogyan tudja az asztalos két cérnaszállal ellenőrizni, hogy a négy asztalláb végpontjai egy síkhoz illeszkednek?

27.14.** Az M pont az ABC és BCD síkok közös pontja. Határozd meg a BC szakasz hosszát, ha $BM = 4$ cm, $MC = 7$ cm!

27.15.” A K pont az MNF és MNE síkok közös pontja. Határozd meg az MN szakasz hosszát, ha $MK = KN = 5$ cm!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

27.16. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB = BC$) BD magasságán felvettek egy M pontot. Határozd meg az AMC háromszög és az ABC háromszög területeinek arányát, ha $BD = 12$ cm, $BM = 8$ cm!

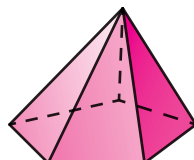
28. Térbeli testek.

A soklapokra vonatkozó alapismeretek

A térmértan tanulmányozása során a pontokon, egyeneseken és síkokon kívül a térbeli testekkel is foglalkozunk, vagyis olyan alakzatokkal, melynek nem minden pontja illeszkedik egy síkra. Már néhány térbeli testet megismertetek. Például a 28.1. ábrán a henger, a kúp és a gömb látható. Ezekkel a testekkel részletesebben a 11. osztályban fogtok megismerkedni.



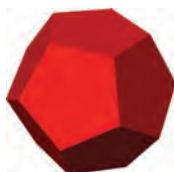
28.1. ábra



28.2. ábra

A 28.2. ábrán szintén egy már ismert térbeli test, a gúla látható. Ez a test a **soklapok** egyik fajtája.

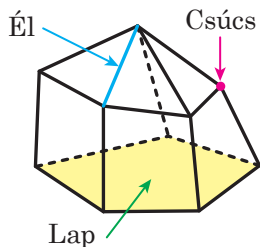
A 28.3. ábrán különböző soklapot láthattok.



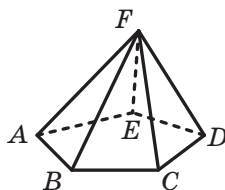
28.3. ábra

A **soklap felszíne** sokszögekből áll. Ezeket a **sokszög lapjainak** nevezzük. A sokszögek oldalait a **soklap éleinek**, a csúcsait pedig a **soklap csúcsainak** nevezzük (28.4. ábra).

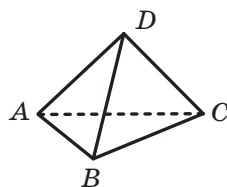
A 28.5. ábrán egy $FABCDE$ ötoldalú gúla látható. A soklap felszíne öt db háromszögből áll, melyeket a **gúla oldallapjainak** nevezünk, és egy ötszögből, melyet a **gúla alapjának** nevezünk. Az F csúcsot, amely minden oldallap közös csúcsa a **gúla csúcsának** nevezünk. Az FA , FB , FC , FD és FE éleket a **gúla oldaléleinek**, az AB , BC , CD , DE és EA éleket a **gúla alapéleinek** nevezünk.



28.4. ábra



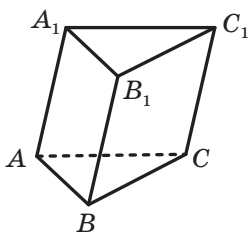
28.5. ábra



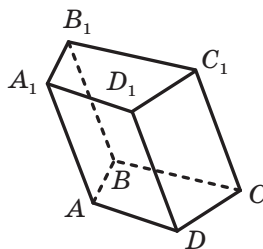
28.6. ábra

A 28.6. ábrán egy $ABCD$ háromoldalú gúla látható. A háromoldalú gúlát **tetraédernek** nevezünk.

A soklapoknak egy másik fajtája a **hasáb**. A 28.7. ábrán egy $ABCA_1B_1C_1$ hasáb látható. Ennek a soklapnak öt lapja van, melyek közül kettő egymással egybevágó háromszögek, ezek az ABC és $A_1B_1C_1$. Ezeket a **hasáb alapjainak** nevezük. A hasáb többi lapja paralelogramma, amit a **hasáb oldallapjainak** nevezünk. Az AA_1 , BB_1 , CC_1 éleket a **hasáb oldaléleinek** nevezük.



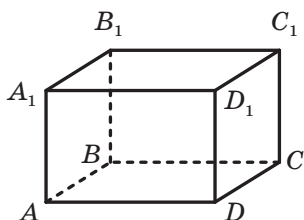
28.7. ábra



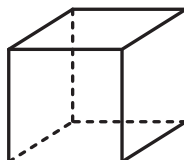
28.8. ábra

A 28.8. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ hasáb látható. A felszíne két egybevágó $ABCD$ és $A_1 B_1 C_1 D_1$ négyszögből (a hasáb alapjai) és négy paralelogrammából (a hasáb oldallapjai) áll.

Már megismerkedtünk a négyoldalú hasáb egy külön esetével, a **téglatesttel**. A 28.9. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest látható. A téglatest minden lapja téglalap.



28.9. ábra



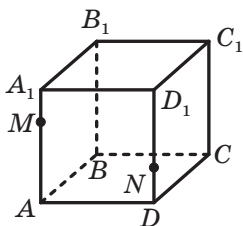
28.10. ábra

A **kocka** a téglatest egyik fajtája. A kocka minden lapja egybevágó négyzet (28.10. ábra).

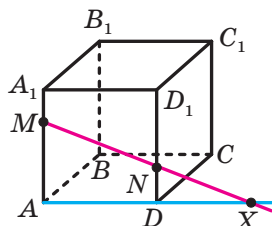
Azt a négyoldalú hasáb, melynek alapja paralelogramma, **parallelepipedon**nak nevezzük.

A 11. osztályban majd részletesebben megismerkedtek a soklapokkal és azok tulajdonságaival is.

Feladat. Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka AA_1 és DD_1 élein megfelelően M és N pontokat jelöltünk úgy, hogy $AM \neq DN$ (28.11. ábra). Szerkesszük meg az MN egyenes és az ABC sík metszéspontját!



28.11. ábra



28.12. ábra

Megoldás. Az M és N pontok az $AA_1 D_1$ síkra illeszkednek. Ekor az **A3.** axióma alapján az MN egyenes is illeszkedik erre a síkra. Hasonlóan az AD egyenes is az $AA_1 D_1$ síkra illeszkedik. A síkmértanból tudjuk, hogyha az egyenesek egy síkra illeszkednek, akkor vagy párhuzamosak, vagy metszik egymást. Mivel az $AM \neq DN$, ezért az AD és MN egyenesek metszik egymást. Legyen X a metszéspontjuk (28.12. ábra).

Az A és D pontok az ABC síkra illeszkednek. Ekkor az **A3.** axióma alapján az AD egyenes is illeszkedik erre a síkra. Az X pont az AD egyenesre illeszkedik. Tehát az X pont az ABC síkra is illeszkedik. Mivel az X pont az MN egyenesre is illeszkedik, ezért az MN egyenes az ABC síkot az X pontban metszi. ◀



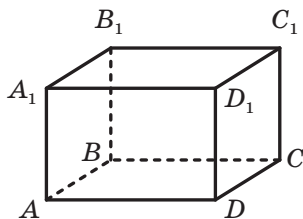
1. Sorolj fel néhány térbeli testet!
2. Milyen alakzatokból áll a soklap felszíne? Hogyan nevezzük ezeket?
3. Mit nevezünk a soklap éleinek? A soklap csúcsainak?
4. Milyen soklap típusokat ismersz? Ismertest őket!



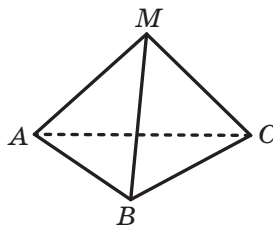
GYAKORLATOK

28.1.° A 28.13. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest látható. Nevezd meg:

- 1) a téglatest alapját;
- 2) a téglatest oldallapjait;
- 3) a téglatest oldaléleit;
- 4) a téglatest alsó alapéleit!



28.13. ábra



28.14. ábra

28.2.° A 28.14. ábrán az $MABC$ gúla látható. Nevezd meg:

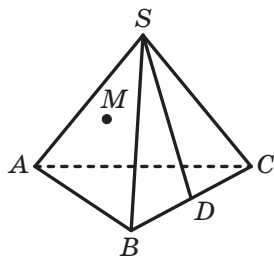
- 1) a gúla alapját;
- 2) a gúla csúcsát;
- 3) a gúla oldallapjait;
- 4) a gúla oldaléleit;
- 5) a gúla alapéleit!

28.3.° Az $ABCS$ tetraéder BC élén jelöltünk egy D pontot. Melyik egyenes lesz az: 1) ASD és ABC ; 2) ASD és BSC ; 3) ASD és ASC síkok metszésvonala?

28.4.* Az M pont az $ABCS$ tetraéder ASC lapjára illeszkedik, a D pont pedig a BC élre (28.15. ábra). Szerkeszd meg az ABC sík valamint az SD egyenesre és az M pontra illeszkedő sík metszésvonalát!

28.5.* Az $ABCD$ gúla SA és SB oldalélein megfelelően jelöltük az M és K pontokat. Szerkeszd meg az MK egyenes és az ABC sík metszéspontját, ha az MK és az AB egyenesek nem párhuzamosak!

28.6.* Az $ABCD$ gúla SA és SC oldalélein megfelelően jelöltük az M és K pontokat. Szerkeszd meg az MK egyenes és az ABC sík metszéspontját, ha az MK és az AC egyenesek nem párhuzamosak!

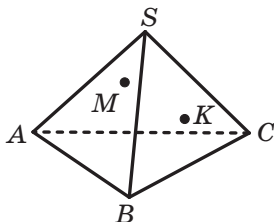


28.15. ábra

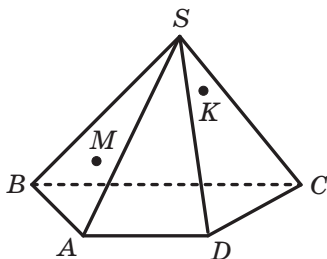
28.7.* Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka. Szerkeszd meg azokat az egyeneseket, amelyek mentén az A , C és B_1 pontokra illeszkedő sík metszi a kocka lapjait!

28.8.* Adott az $ABCA_1 B_1 C_1$ hasáb és egy sík, amely az AC_1 és az AB egyenesekre illeszkedik. Szerkeszd meg azokat az egyeneseket, amelyek mentén a sík metszi a hasáb lapjait!

28.9.** Az M pont az $ABCS$ tetraéder ASB lapjára illeszkedik, a K pedig a BSC lapra (28.16. ábra). Szerkeszd meg az MK egyenes és az ABC sík metszéspontját!



28.16. ábra



28.17. ábra

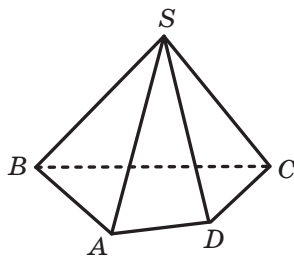
28.10.** Az M pont az $ABCD$ gúla ASB lapjára illeszkedik, a K pedig a CSD lapra (28.17. ábra). Szerkeszd meg az MK egyenes és az ABC sík metszéspontját!

28.11.” Adott az $ABCD$ S gúla (28.18. ábra). Szerkeszd meg az ASB és a CSD síkok metszésvonalát!

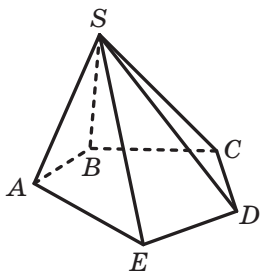
28.12.” Adott az $ABCDE$ S gúla (28.19. ábra). Szerkeszd meg az ASE és a BSC síkok metszésvonalát!

28.13.” Az $ABCD$ tetraéder AB és CD élein megfelelően jelölték az E és F pontokat. Szerkeszd meg az AFB és CED síkok metszésvonalát!

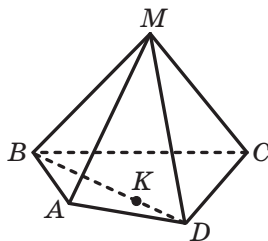
28.14.” Adott az $ABCD$ M gúla, ahol a K pont a BD szakaszra illeszkedik (28.20. ábra). Szerkeszd meg az MCK és MAB síkok metszésvonalát!



28.18. ábra



28.19. ábra



28.20. ábra



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

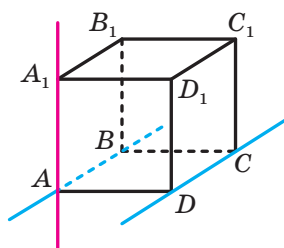
28.15. Az egyenlő szárú trapéz átlója a trapézt két egyenlő szárú háromszögre osztja. Határozd meg a trapéz szögeit!

29. Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

A síkmértanból már tudjátok, hogy két egyenest egymás metszőnek nevezünk, ha csak egy közös pontjuk van. Ugyanez a meghatározás vonatkozik a térmértanban az egymást metsző egyenesekre is.

Azt is tudjátok, hogy az egyeneseket akkor nevezzük párhuzamosnak, amikor nem metszik egymást. Vajon igaz lesz-e ez a definíció a térmértanban?

Vizsgáljuk meg a 29.1. ábrán lévő $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kockát. Az AB és az AA_1 egyenesek közül egyiknek sincs közös pontja a DC egyenessel. Az AB és DC egyenesek viszont egy síkra illeszkednek, ez az ABC sík, az AA_1 és DC egyenesek viszont nem illeszkednek egy síkra, vagyis nem létezik olyan sík, amely ezeket az egyeneseket tartalmazná.



29.1. ábra

A fenti példa azt mutatja, hogy a térben két, közös ponttal nem rendelkező egyenes elhelyezkedésének két esete lehetséges: az egyenesek egy síkban vannak, vagy nem fekszenek egy síkban. Mindkét esetre megadjuk a megfelelő meghatározást.

Definíció. Két egyenest a térben **párhuzamosnak** nevezük, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk.

Az a és b egyenesek párhuzamosságát így jelöljük: $a \parallel b$.

Definíció. Két egyenest **kitérőnek** nevezük, ha nem egy síkra illeszkednek.

Például a 29.1. ábrán az AB és DC egyenesek párhuzamosak, az AA_1 és DC egyenesek pedig kitérők lesznek.



Nemzetközi Kulturális
és Művészeti központ,
Kijev



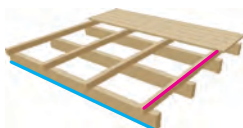
Szálfaerdő



Faház

29.2. ábra

Az épület oszlopai, az erdő fái, az egymásra helyezett farönkök (29.2. ábra) olyan párhuzamos egyenesek, amelyekkel a mindennapokban találkozunk.

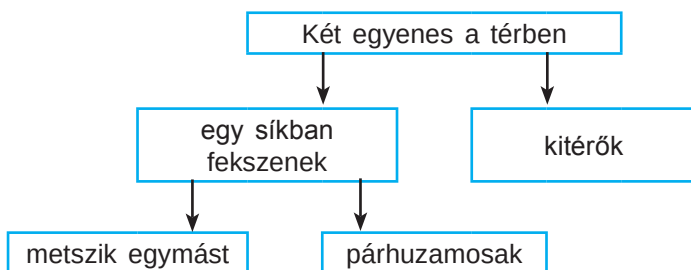


29.3. ábra

Az elektromos vezetékek, az épület szerkezeti elemei (29.3. ábra) olyan kitérő egyenesek, amelyekkel a mindennapokban találkozunk.

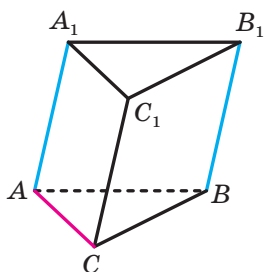
Tehát az egyenesek térbeli elhelyezkedésére három eset lehetséges (29.4. ábra):

- 1) az egyenesek metszik egymást;
- 2) az egyenesek párhuzamosak;
- 3) az egyenesek kitérők.



29.4. ábra

Két szakaszt **párhuzamosnak (kitérőnek)** nevezzük, ha párhuzamos (kitérő) egyeneseken fekszenek.



29.5. ábra

Például az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb AA_1 és BB_1 élei (29.5. ábra) párhuzamosak, az AC és BB_1 élei pedig kitérők lesznek.

29.1. tétel. *Két párhuzamos egyenesen keresztül egy és csakis egy sík fektethető.*

Bizonyítás. Legyen adva az a és a b párhuzamos egyenes. Bebizonyítjuk, hogy létezik egy olyan α sík, hogy $a \subset \alpha$ és $b \subset \alpha$.

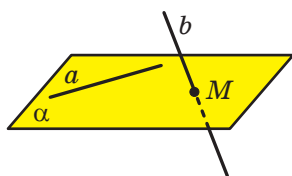
Az a és b egyeneseket tartalmazó α sík létezése a párhuzamos egyenesek definíciójából következik.

Ha feltételezzük, hogy még egy olyan sík létezik, amely az a és b egyeneseket tartalmazza, akkor az a egyenesen és a b egyenes valamelyik pontján át két különböző sík fektethető, ami ellentmond a 27.1. tételnek. ◀

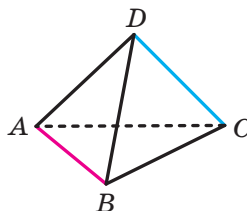
A 27. pontban három módszert ismertettünk a sík megadására. A 29.1. tételre úgy is tekinthetünk, mint a sík megadásának egy újabb esetére, amit két párhuzamos egyenes segítségével adunk meg.

Két egyenes párhuzamosságának megállapítását a síkon, a síkmértanból ismert két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei alapján tudjuk meghatározni. De hogyan állapítjuk azt meg, hogy a két egyenes kitérő? Erre a kérdésre a választ a következő tétel adja meg.

29.2. tétel (a kitérő egyenesek ismertetőjele). *Ha két egyenes közül az egyik egyenes egy síkban fekszik, a másik pedig egy olyan pontban metszi ezt a síkot, amely nem illeszkedik az első egyenesre, akkor az adott egyenesek kitérők lesznek* (29.6. ábra).



29.6. ábra



29.7. ábra

A 29.7. ábrán az $ABCD$ tetraéder AB és DC élei kitérők. Valóban, a DC egyenes az ABC síkot egy olyan C pontban metszi, amely nem illeszkedik az AB egyenesre. Tehát a kitérő egyenesek definíciója alapján az AB és a DC egyenesek kitérők lesznek.



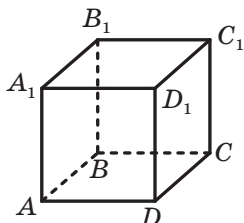
1. A tér mely két egyenesét nevezzük párhuzamosaknak? Kitérőknek?
2. Milyen esetei vannak két egyenes kölcsönös helyzetének a térben?
3. Milyen két szakaszt nevezünk párhuzamosaknak? Kitérőknek?
4. Fogalmazd meg a két párhuzamos egyenes által megadott síkról szóló tételt!
5. Fogalmazd meg a kitérő egyenesek ismertetőjelét!



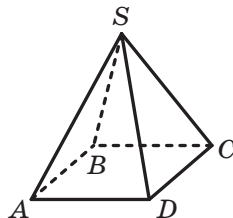
GYAKORLATOK

29.1.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (29.8. ábra). Nevezd meg azokat az éleket, amelyek:

- 1) párhuzamosak a CD éllel; 2) kitérők a CD éllel!



29.8. ábra



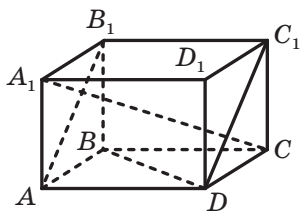
29.9. ábra

29.2.° Az osztályterem berendezési tárgyai segítségével nevez meg kitérő egyeneseket!

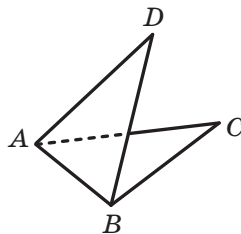
29.3.° Adott az $ABCD S$ gúla (29.9. ábra). Nevezd meg az SA élével kitérő éleket!

29.4.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest (29.10. ábra). Nevezd meg a következő egyenesek kölcsönös helyzetét:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) BC és $A_1 C_1$; | 3) BD és CC_1 ; | 5) DC_1 és BB_1 ; |
| 2) AB és $C_1 D_1$; | 4) AB_1 és DC_1 ; | 6) AA_1 és CC_1 ! |



29.10. ábra



29.11. ábra

29.5.° Igaz-e a következő állítás:

- 1) két, egymással nem párhuzamos egyenesnek van közös pontja;
- 2) két, nem kitérő egyenes egy síkban fekszik;
- 3) két egyenes kitérő lesz, ha nem metszik egymást és nem párhuzamosak?

29.6.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (29.8. ábra). Bizonyítsd be, hogy AA_1 és BC egyenesek kitérők!

29.7.° Az ABC és ADB háromszögek különböző síkokban fekszenek (29.11. ábra). Milyen az AD és BC egyenesek kölcsönös helyzete? Magyarázd meg a válaszodat!

29.8.* Milyen lehet a b és c egyenesek kölcsönös helyzete, ha:

- 1) az a és b egyenesek metszik egymást, az a és c egyenesek pedig párhuzamosak;
- 2) az a és b egyenesek párhuzamosak, az a és c egyenesek pedig metszik egymást?

29.9.* Hány síkot fog megadni három, páronként párhuzamos egyenes? Készíts rajzot is!

29.10.* Az AB szakasz A végpontja az α síkhoz illeszkedik. A B és az AB szakaszra illeszkedő C ponton át párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az α síkot megfelelően a B_1 és C_1 pontokban metszik.

- 1) Határozd meg a BB_1 szakaszt, ha a C pont az AB szakasz felezőpontja és $CC_1 = 5$ cm!
- 2) Határozd meg a CC_1 szakasz hosszát, ha az $AC : BC = 3 : 4$ és $BB_1 = 28$ cm!

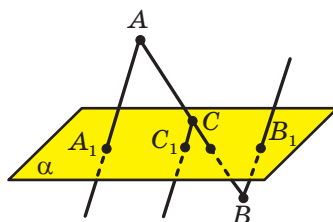
29.11.* A CD szakasz C végpontja a β síkra illeszkedik. A CD szakaszon egy E pontot jelöltünk úgy, hogy $CE = 6$ cm, $DE = 9$ cm. A D és E pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket fektettek, amelyek a β síkot megfelelően a D_1 és E_1 pontokban metszik. Határozd meg a DD_1 szakasz hosszát, ha $EE_1 = 12$ cm!

29.12.** Az α síkot nem metsző AB szakaszon egy C pontot jelöltünk úgy, hogy az $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm. Az A , B és C pontokon át párhuzamos egyeneseket fektettek, melyek az α síkot megfelelően az A_1 , B_1 és C_1 pontokban metszik. Határozd meg az A_1C_1 szakasz hosszát, ha $B_1C_1 = 10$ cm!

29.13.** A C pont az AB szakasz felezőpontja, amely nem metszi a β síkot. Az A , B és C pontokon át párhuzamos egyeneseket fektettek, melyek a β síkot megfelelően az A_1 , B_1 és C_1 pontokban metszik. Határozd meg az AA_1 szakasz hosszát, ha $BB_1 = 18$ cm, $CC_1 = 15$ cm!

29.14.* Az α síkot metsző AB szakasz végpontjain és a C felezőpontján keresztül párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az α síkot megfelelően az A_1 , B_1 és C_1 pontokban metszik (29.12. ábra). Határozd meg a CC_1 szakasz hosszát, ha $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 8$ cm!

29.15.* Az ABC háromszögnek és az α síknak nincsenek közös pontjaik. A BM szakasz az ABC háromszög súlyvonala, az O pont pedig a BM szakasz felezőpontja lesz. Az A , B , C , M és O pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az α síkot megfelelően az A_1 , B_1 , C_1 , M_1 és O_1 pontokban metszik. Határozd meg a BB_1 szakasz hosszát, ha $AA_1 = 17$ cm, $CC_1 = 13$ cm, $OO_1 = 12$ cm!



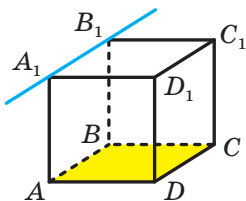
29.12. ábra



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

29.16. Az E pont az ABC háromszög BM súlyvonalának felezőpontja. Az AE egyenes a BC oldalt egy K pontban metszi. Milyen arányban osztja a K pont a BC szakaszt, ha a felosztás arányát a B csúctól kezdjük számolni?

30. Az egyenes és a sík párhuzamossága



30.1. ábra

Már ismeritek az egyenes és a sík kölcsönös helyzetének két lehetséges módját:

- 1) az egyenes illeszkedik a síkra, vagyis az egyenes minden pontja illeszkedik erre a síkra;
- 2) az egyenes metszi a síkot, vagyis az egyenesnek és a síknak csak egy közös pontja van.

Érthető, hogy egy harmadik eset is fennáll, amikor az egyenesnek és a síknak nincsenek közös pontjaik. Például az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $A_1 B_1$ élének az ABC síkkal nincs közös pontja (30.1. ábra).

Definíció. Az egyenest és a síkot **párhuzamosnak** nevezzük, ha nincs közös pontjuk.

Az a egyenes és az α sík párhuzamosságát így jelöljük: $a \parallel \alpha$. Azt is mondhatjuk, hogy az a egyenes párhuzamos az α síkkal, vagy azt, hogy az α sík párhuzamos az a egyenessel.

Az egyenest, amely párhuzamos a síkkal, szemléltetni lehet néhány sportszerrel, például a párhuzamos korláttal, melynek rúdjai párhuzamosak a padló síkjával (30.2. ábra). Másik példa az épület falával párhuzamos lefolyócső, amely az ereszcatornában összegyűlő vizet vezeti le (30.3. ábra).



30.2. ábra



30.3. ábra

A meghatározás alapján elég nehéz megállapítani, hogy az egyenes és a sík párhuzamos-e. Sokkal célravezetőbb alkalmazni a következő tételt.

30.1. tétel (az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele). *Ha a síkhoz nem illeszkedő egyenes párhuzamos egy síkhoz illeszkedő egyeneshez, akkor magával a síkkal is párhuzamos lesz.*

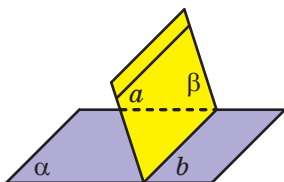
Például a 30.1. ábrán az A_1B_1 és az AB egyenesek az ABB_1A_1 négyzet szemközti oldalát tartalmazzák. Ezért ezek az egyenesek párhuzamosak. Mivel $AB \subset ABC$, ezért az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele alapján $A_1B_1 \parallel ABC$.

A szakasz akkor **párhuzamos a síkkal**, ha egy olyan egyeneshez illeszkedik, amely párhuzamos az adott síkkal. Például a kocka AB éle párhuzamos a CDD_1 síkkal (30.1. ábra).

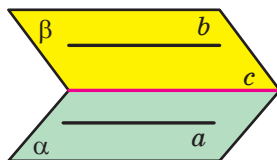
A síkmértanból ismert ismertetőjel alapján már meg tudjátok alapítani két egyenes párhuzamosságát. Vizsgáljunk meg egy tételt, amely két egyenes párhuzamosságának elégséges feltételét adja meg a térben.

30.2. tétel. *Ha a sík illeszkedik egy adott egyeneshez, amely párhuzamos egy másik síkkal és metszi ezt a síkot, akkor a síkok metszésvonala párhuzamos az adott egyenessel.*

A 30.4. ábrán az a egyenes párhuzamos az α síkkal. A β sík illeszkedik az a egyeneshez és az α síkot egy b egyenesben metszi. Ekkor $b \parallel a$.



30.4. ábra



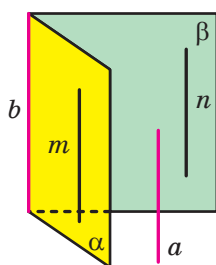
30.5. ábra

30.3. tétel. *Ha két párhuzamos egyenesre síkokat fektetünk, és ezek a síkok az eredeti egyenesektől különböző egyenesben metszik egymást, akkor a metszésvonal párhuzamos lesz a két adott egyenessel.*

A 30.5. ábrán az a és b egyenesek párhuzamosak, az α sík az a egyenesre illeszkedik, a β sík pedig a b egyenesre, az $\alpha \cap \beta = c$. Ekkor $c \parallel a$ és $c \parallel b$.

30.4. tétel. *Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor az első kettő is párhuzamos egymással.*

Feladat. Bizonyítsuk be, hogyha az egyenes párhuzamos két egymást metsző síkkal, akkor metszőegyeneseükkel is párhuzamos.



30.6. ábra

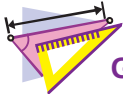
Megoldás. Legyen az a egyenes és az α és β síkok olyanok, hogy $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (30.6. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $a \parallel b$.

Az α és β síkokban találunk olyan m és n egyeneseket, hogy $m \parallel a$ és $n \parallel a$. Ha az m és n egyenesek közül legalább az egyik egybeesik a b egyenessel, akkor az állítás bizonyított lesz. Ha az m és n egyenesek mindegyike különbözik a b egyenestől, akkor a 30.4. tétel alapján azt kapjuk, hogy $m \parallel n$.

Alkalmazzuk a 30.3. tételt, és arra a következtetésre jutunk, hogy $b \parallel n$. Viszont $n \parallel a$, tehát $a \parallel b$. ◀



1. Milyen esetben nevezzük az egyenest és a síkot párhuzamosnak?
2. Fogalmazd meg az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjelét!
3. Milyen szakasz lesz párhuzamos a síkkal?
4. Fogalmazd meg azokat a tételeket, amelyek az elégséges feltételét adják meg az egyenesek párhuzamosságának a térben!

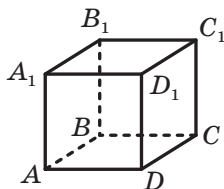


GYAKORLATOK

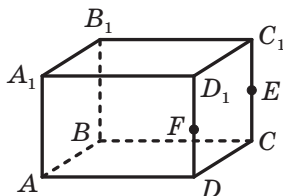
30.1.° Nevezd meg a környezetben lévő tárgyak közül azokat, melyek az egyenes és a sík párhuzamosságát illusztrálják!

30.2.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (30.7. ábra). Melyik lap síkja lesz párhuzamos a következő éllel: 1) AD ; 2) $C_1 D_1$; 3) BB_1 ?

30.3.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest (30.8. ábra), ahol az E és F pontok megfelelően a CC_1 és DD_1 élek felezőpontjai. Írd fel a téglatest azon lapjait, melyekkel a következő egyenes párhuzamos: 1) AB ; 2) CC_1 ; 3) AC ; 4) EF !



30.7. ábra



30.8. ábra

30.4.° Az a egyenes párhuzamos az α síkkal. Igaz-e az állítás, hogy az a egyenes párhuzamos az α síkra illeszkedő bármely egyenessel?

30.5.° Adott az a és b egyenes, valamint az α sík. Igaz-e a következő állítás:

- 1) ha $a \parallel \alpha$ és $b \parallel \alpha$, akkor $a \parallel b$;
- 2) ha $a \parallel b$ és $b \subset \alpha$, akkor $a \parallel \alpha$?

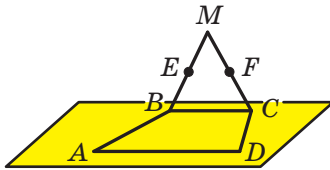
30.6.° Az a egyenes és az α sík párhuzamosak a b egyenessel. Milyen lehet az a egyenes és a α sík kölcsönös helyzete?

30.7.° Az a és b egyenesek metszik egymást, és az α sík párhuzamos az a egyenessel. Milyen lehet az b egyenes és az α sík kölcsönös helyzete?

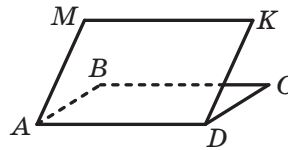
30.8.° Az M és K pontok az ABC háromszög AB és BC megfelelő oldalainak a felezőpontjai. A D pont nem illeszkedik az ABC síkra. Bizonyítsd be, hogy az $MK \parallel ADC$!

30.9.° Az E és F pontok az $ABCD$ trapéz AB és CD megfelelő szárainak a felezőpontjai. Az EF egyenes az α síkra illeszkedik, amely nem a trapéz síkja. Bizonyítsd be, hogy az AD és BC egyenesek párhuzamosak az α síkkal!

30.10.° A BC és AD szakaszok az $ABCD$ trapéz alapjai. A BMC háromszög és az $ABCD$ trapéz nem egy síkra illeszkednek (30.9. ábra). Az E pont a BM szakasz felezőpontja, az F pont pedig a CM szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy $EF \parallel AD$!



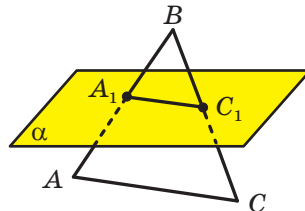
30.9. ábra



30.10. ábra

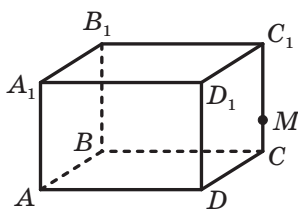
30.11.° Az $ABCD$ és $AMKD$ paralelogrammák nem egy síkra illeszkednek (30.10. ábra). Bizonyítsd be, hogy a $BMKC$ négyszög paralelogramma lesz!

30.12.° Az α sík az ABC háromszög AC oldalával párhuzamos, és az AB és BC oldalakat megfelelően az A_1 és C_1 pontokban metszi (30.11. ábra). Határozd meg az A_1C_1 szakasz hosszát, ha $AC = 18$ cm és $AA_1 : A_1B = 7 : 5$!

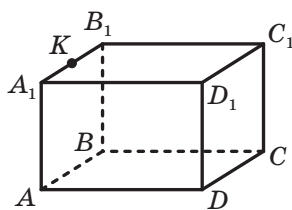


30.11. ábra

- 30.13.*** Az α sík az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos, és az AC , illetve BC oldalakat megfelelően az E és F pontokban metszi. Határozd meg az $AE : EC$ arányt, ha $CF : CB = 3 : 11$!
- 30.14.**** Az ABC háromszög A és C csúcsa az α síkra illeszkedik, a B csúcs pedig nem illeszkedik ehhez a síkhoz. Az AB és BC oldalakon megfelelően jelölték az E és F pontokat úgy, hogy $BA : BE = BC : BF$. Bizonyítsd be, hogy az EF egyenes párhuzamos az α síkkal!
- 30.15.**** Az M pont az ABC háromszög AB oldalának a felezőpontja. Az α sík illeszkedik az M pontra és párhuzamos az AC egyenessel, a BC oldalt pedig a K pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a K pont a BC oldal felezőpontja! Határozd meg az $AMKC$ négyszög területét, ha az ABC háromszög területe 28 cm^2 !
- 30.16.**** Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest CC_1 élén jelöltünk egy M pontot (30.12. ábra). Szerkeszd meg a következő síkok metszésvonalait: 1) ADM és $BB_1 C_1$; $AA_1 M$ és DCC_1 !



30.12. ábra



30.13. ábra

- 30.17.**** Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest $A_1 B_1$ élén jelöltünk egy K pontot (30.13. ábra). Szerkeszd meg a következő síkok metszésvonalait: 1) $CC_1 K$ és ABB_1 ; 2) CDK és ABB_1 !



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

- 30.18.** A derékszögű trapéz szárai úgy aránylanak egymáshoz, mint $3 : 5$, az alapjaik hosszainak különbsége pedig 16 cm . Határozd meg a trapéz területét, ha a kisebbik átlója 13 cm !

31. A síkok párhuzamossága

Vizsgáljuk meg két sík kölcsönös helyzetének eseteit.

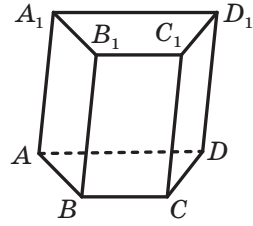
Már tudjátok, hogy két síknak lehet közös pontjuk, vagyis metszhetik egymást. Olyan eset is lehet, hogy a két síknak nincsenek közös

pontjaik. Például az ABC és az $A_1B_1C_1$ síkoknak, melyek egy hasáb alapjai, nincsenek közös pontjaik (31.1. ábra).

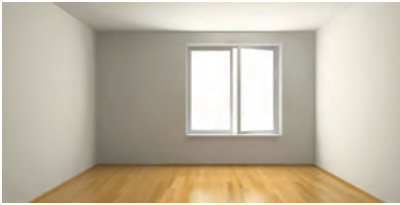
Definíció. Két sík **párhuzamos**, ha nincs közös pontjuk.

Ha az α és a β síkok párhuzamosak, akkor azt így jelöljük: $\alpha \parallel \beta$. Azt is mondhatjuk, hogy az α sík párhuzamos a β síkkal, vagy a β sík párhuzamos az α síkkal.

A szoba mennyezete és a padlója, vagy az akvárium vízfelülete és az alja (31.2. ábra) a párhuzamos síkok szemléletes példái.



31.1. ábra



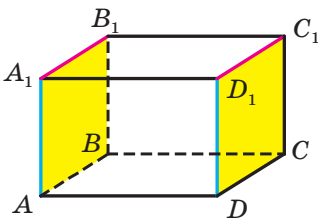
31.2. ábra

A párhuzamos síkok definíciójából következik, hogy *bármilyen egyenes, amely a párhuzamos síkok közül az egyikre illeszkedik, párhuzamos lesz a másik síkkal.*

Azokban az esetekben, amikor meg kell állapítani, hogy két sík párhuzamos-e, érdemes a következő tételt alkalmazni.

31.1. tétel (a párhuzamos síkok ismertetőjele).

Ha egy sík két egymást metsző egyenese megfelelően párhuzamos egy másik sík két egyenesével, akkor ezek a síkok is párhuzamosak lesznek.



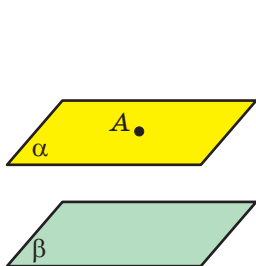
31.3. ábra

Például a 31.3. ábrán az $ABCD$ és az $A_1B_1C_1D_1$ téglalapról látható. Adott, hogy $AA_1 \parallel DD_1$ és $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Ekkor a síkok párhuzamosságának ismertetőjele alapján az $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

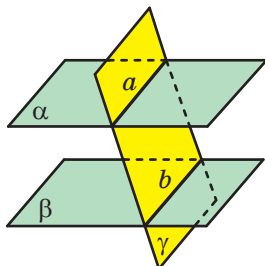
Azt mondhatjuk, hogy **két sokszög akkor párhuzamos**, ha párhuzamos síkokhoz illeszkednek. Például az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglalest $AA_1 B_1 B$ és a $DD_1 C_1 C$ lapjai párhuzamosak (31.3. ábra).

Megvizsgáljuk a síkok párhuzamosságának néhány tulajdonságát.

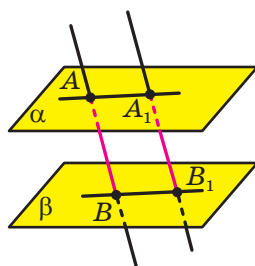
31.2. tétel. *Egy síkhoz egy rajta kívül elhelyezkedő ponton át egy és csakis egy párhuzamos sík fektethető* (31.4. ábra).



31.4. ábra



31.5. ábra



31.6. ábra

31.3. tétel. *Két párhuzamos síknak egy harmadik síkkal való metszésük által keletkező metszésvonalak párhuzamos egyenesek lesznek* (31.5. ábra).

🔑 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy párhuzamos síkok párhuzamos egyenesekből egyenlő szakaszokat metszenek ki.

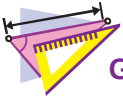
Megoldás. Legyenek az α és a β párhuzamos síkok és az AB , valamint az $A_1 B_1$ párhuzamos egyenesek olyanok, melyeknél $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (31.6. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $AB = A_1 B_1$.

Az AB és $A_1 B_1$ párhuzamos egyenesek egy olyan γ síkot képeznek, amelyekre igaz, hogy $\alpha \cap \gamma = AA_1$ és $\beta \cap \gamma = BB_1$.

A 31.3. tétel alapján azt kapjuk, hogy $AA_1 \parallel BB_1$. Tehát az $AA_1 B_1 B$ négyszög paralelogramma lesz. Ebből következik, hogy $AB = A_1 B_1$. ◀



1. Milyen síkokat nevezünk párhuzamosoknak?
2. Fogalmazd meg két sík párhuzamosságának ismertetőjelét!
3. Milyen esetben mondjuk azt, hogy két sokszög párhuzamos?
4. Fogalmazd meg a párhuzamos síkok tulajdonságait!

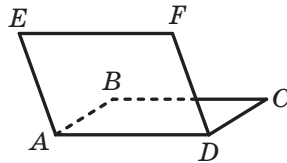


GYAKORLATOK

31.1.° Igazak-e a következő állítások:

- 1) ha két sík párhuzamos, akkor az egyik sík bármely egyenese párhuzamos lesz a másik sík bármely egyenesével;
- 2) ha az egyenes, amely az egyik síkra illeszkedik, párhuzamos a másik síkra illeszkedő egyenessel, akkor az adott síkok párhuzamosak?

31.2.° Az $ABCD$ és az $AEFD$ paralelogrammák nem egy síkra illeszkednek (31.7. ábra). Bizonyítsd be, hogy az ABE és a DCF síkok párhuzamosak lesznek!



31.7. ábra

31.3.° Ki lehet-e jelenteni, hogy az α sík párhuzamos a trapéz síkjával, ha az α sík párhuzamos:

- 1) a trapéz alapjaival;
- 2) a trapéz száraival?

31.4.° Igaz-e az állítás: ha két síkot egy harmadikkal metszünk, és a keletkezett metszésvonalak párhuzamosak, akkor az adott síkok is párhuzamosak lesznek?

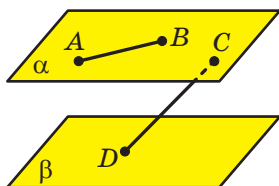
31.5.° Az α és β síkok párhuzamosak. Az α síkban kiválasztottunk egy C és D pontot, a β síkban pedig a C_1 és D_1 pontokat úgy, hogy a CC_1 és DD_1 egyenesek párhuzamosak. Határozd meg a DD_1 és C_1D_1 szakaszok hosszát, ha $CD = 12$ cm, a $CC_1 = 4$ cm!

31.6.° Az ABC háromszög az α síkban fekszik. A csúcsain keresztül párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az α síkkal párhuzamos β síkot A_1 , B_1 és C_1 pontokban fogják metszeni. Határozd meg az $A_1B_1C_1$ háromszög területét, ha az ABC háromszög területe 20 cm!

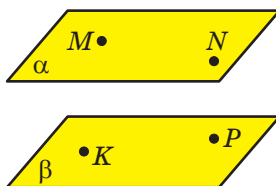
31.7.* Az M , N és K pontok az $ABCD$ tetraéder AB , AC és AD éleinek felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy az MNK és BCD síkok párhuzamosak!

31.8.* Az $ABCD$ tetraéder DA , DB és DC élein megfelelően jelölték az E , F és K pontokat úgy, hogy $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$. Bizonyítsd be, hogy az EFK és az ABC síkok párhuzamosak!

- 31.9.*** Az α és β síkok párhuzamosak. Az AB szakasz és a C pont az α síkra illeszkedik, a D pont pedig a β síkra (31.8. ábra). Szerkeszd meg: 1) a β és az ABD síkok; 2) a β és a BCD síkok metszésvonalát!



31.8. ábra



31.9. ábra

- 31.10.*** Az α és β síkok párhuzamosak. Az M és N pontok az α síkra illeszkednek, a K és P pontok pedig a β síkra (31.9. ábra). Szerkeszd meg:

- 1) az α és az MKP síkok;
- 2) a β és az MNK síkok metszésvonalát!

- 31.11.**** Az α és β párhuzamos síkok az ABC szög BA oldalát megfelelően az A_1 és A_2 pontokban metszi, a BC oldalt pedig a C_1 és C_2 pontokban. Határozd meg:

- 1) az A_1C_1 szakaszt, ha az $A_2C_2 = 36$ cm, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
- 2) a C_1C_2 szakaszt, ha az $A_1C_1 = 14$ cm, $A_2C_2 = 21$ cm, $BC_1 = 12$ cm!

- 31.12.**** Az α és β síkok párhuzamosak. Az A és B pontok az α síkra illeszkednek, a C és D pontok pedig a β síkra. Az AC és BD szakaszok az O pontban metszik egymást.

- 1) Bizonyítsd be, hogy $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$!
- 2) Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha $CD = 32$ cm, $AC : AO = 7 : 3$!

- 31.13.**** Az M pont az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $A_1 D_1$ élére illeszkedik. Szerkeszd meg a BDD_1 és $CC_1 M$ síkok metszésvonalát!

- 31.14.**** Az E pont az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $B_1 C_1$ élére illeszkedik. Szerkeszd meg az ACC_1 és BED síkok metszésvonalát!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

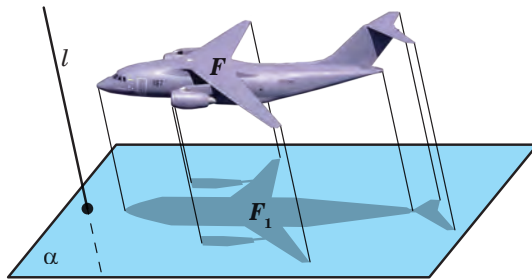
- 31.15.** Az $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja az O pont. Az OC szakaszon jelöltünk egy M pontot úgy, hogy $CM : MO = 1 : 2$. Határozd meg a $\angle BMO$ -et!

32. Párhuzamos vetítés

Nagyon sok olyan jelenséggel és folyamattal találkozunk a mindennapi életben, amelyekben a térbeli testek olyan transzformációit alkalmazzuk, melynek a képe síkbeli alakzat lesz. A 32.1. ábrán egy madár síkra vetett árnyékát figyelhetjük meg. Ekkor a testeknek olyan **transzformációjáról** beszélünk, amelyet **párhuzamos vetítésnek** nevezünk. Ennek a transzformációnak a segítségével a síkon megkapjuk a térbeli testek képét.



32.1. ábra



32.2. ábra

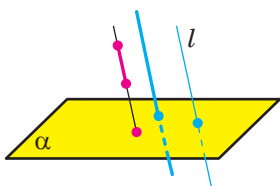
A tankönyvben előforduló rajzok többsége térbeli testek ábrázolását tartalmazza. Ezeket olyan árnyékoknak tekinthetjük, melyeket a test párhuzamos fénysugarakkal való megvilágítása során kapunk.

Ismerkedjünk meg a párhuzamos vetítéssel részletesebben.

Legyen adva az α sík, az l egyenes, amely metszi ezt a síkot, és az F alakzat (32.2. ábra). Az F alakzat minden pontján át egyenest fektetünk, melyek párhuzamosak lesznek az l egyenessel (ha az F alakzat az l egyenesre illeszkedne, akkor csak az l egyenest kell vizsgálni). Az egyenesek α síkkal való metszéspontjai egy F_1 alakzatot adnak meg. Az F alakzat ilyen transzformációját párhuzamos vetítésnek nevezük. Az F_1 alakzatot **az F alakzat az l egyenes menti α síkra vetített képének** nevezük, vagy **az F alakzat az l egyenes menti vetületének** nevezük.

Az α sík és az l egyenes megfelelő kiválasztásával az adott F alakzat szemléletes képét kapjuk meg. Ez azzal magyarázható, hogy a párhuzamos leképezésnek csodálatos tulajdonságai vannak (lásd a 32.1–32.3. tételeket). Ezeknek a tulajdonságoknak köszönhetően az eredeti alakzattal hasonló alakzatot kapunk.

Tekintsük az α síkot és az l egyenest, amely metszi ezt a síkot.



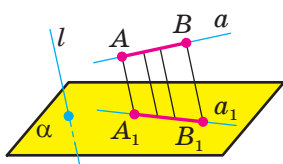
32.3. ábra

Ha az l egyenessel párhuzamos egyenesnek a vetülete az α síkra egy pont (32.3. ábra), akkor az l egyenes vetülete is egy pont.

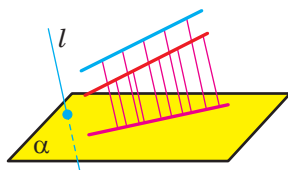
Ha a szakasz az l egyenessel párhuzamos vagy rá illeszkedik, akkor ennek a vetülete az α síkra szintén egy pont (32.3. ábra).

A következő tételek olyan szakaszokra és egyenesekre vonatkoznak, melyek nem párhuzamosak az l egyenessel, és nem is illeszkednek rá.

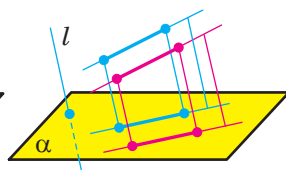
32.1. tétel. *Az egyenes párhuzamos vetülete egyenes, a szakasz párhuzamos vetülete pedig szakasz* (32.4. ábra).



32.4. ábra



32.5. ábra



32.6. ábra

32.2. tétel. *Két párhuzamos egyenes párhuzamos vetülete vagy egy egyenes lesz* (32.5. ábra), *vagy két párhuzamos egyenes* (32.6. ábra). *Két párhuzamos szakasznak a párhuzamos vetületei vagy egy egyenesre, vagy párhuzamos egyenesekre illeszkednek* (32.6. ábra).

32.3. tétel. *Az egy egyenesre vagy párhuzamos egyenesekre illeszkedő szakaszok, illetve vetületeik aránya egyenlő* (32.7. ábra).

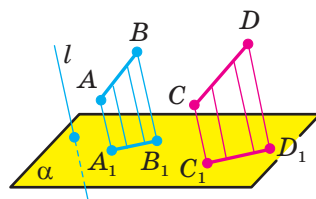
Vizsgáljuk meg valamely sokszög vetületét az α síkra, ha a vetítés iránya az l egyenes.

Ha az l egyenes párhuzamos a sokszög síkjával, vagy ehhez a síkhoz illeszkedik, akkor a sokszög vetülete egy szakasz.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az l egyenes metszi a sokszög síkját.

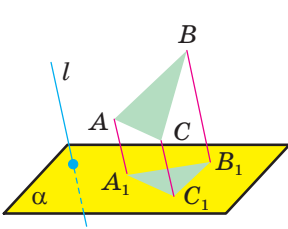
A párhuzamos vetítés tulajdonságaiból következik, hogy a háromszög párhuzamos vetülete háromszög lesz (32.8. ábra).

Mivel a párhuzamos vetítés során a szakaszok párhuzamossága megmarad, ezért a paralelogramma (a téglalap, a rombusz és a négyzet is) vetülete paralelogramma lesz (32.9. ábra).

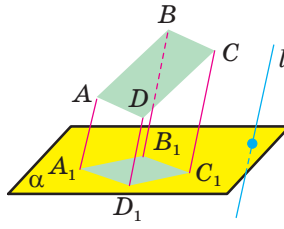


$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

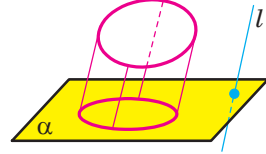
32.7. ábra



32.8. ábra



32.9. ábra

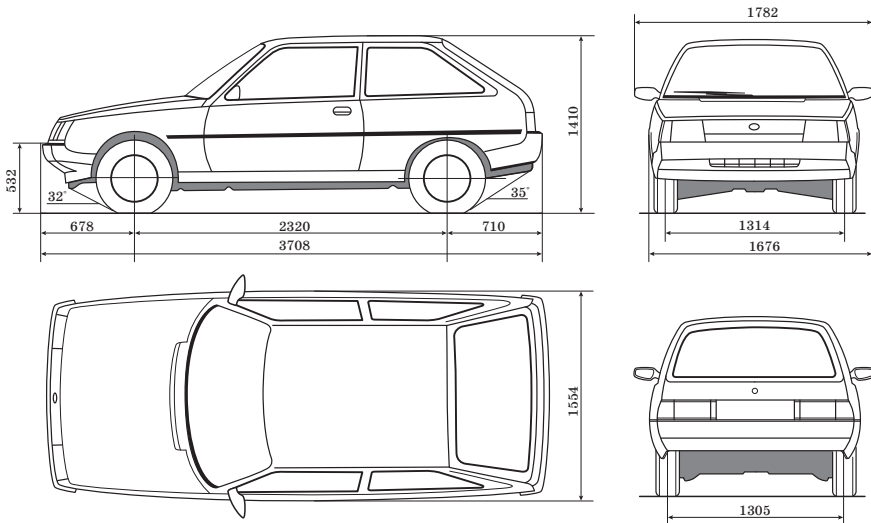


32.10. ábra

A párhuzamos vetítés tulajdonságaiból következik, hogy a trapéz vetülete trapéz.

A kör vetülete egy olyan alakzat, amelyet **ellipszis**nek nevezünk (32.10. ábra).

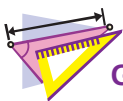
A testek párhuzamos vetítés során kapott képét széleskörűen alkalmazzák a különböző iparágakban, például a gépkocsigyártásban (32.11. ábra).



32.11. ábra



1. Írd le azt a transzformációt, melyet párhuzamos vetítésnek nevezünk!
2. Fogalmazd meg a párhuzamos vetítés tulajdonságait!



GYAKORLATOK

32.1.° Egy alakzat három pontból áll. Hány pontból állhat ennek az alakzatnak a párhuzamos vetülete?

32.2.° Lehet-e két egymást metsző egyenesnek a párhuzamos vetülete:

- 1) két egymást metsző egyenes;
- 2) két párhuzamos egyenes;
- 3) egyenes;
- 4) egyenes és egy rajta kívüli pont?

32.3.° Lehet-e két kitérő egyenes párhuzamos vetülete:

- 1) két párhuzamos egyenes;
- 2) két egymást metsző egyenes;
- 3) egyenes;
- 4) egyenes és egy rajta kívüli pont?

32.4.° 1) A nem egyenlő szakaszok párhuzamos vetületei lehetnek-e egyenlő szakaszok?

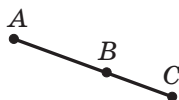
- 2) Az egyenlő szakaszok párhuzamos vetületei lehetnek-e nem egyenlő szakaszok?
- 3) Lehet-e a szakasznak olyan szakasz a párhuzamos vetülete, melynek a hossza nagyobb az eredeti szakasz hosszánál?
- 4) Lehet-e az egyenesnek a párhuzamos vetülete az eredeti egyenessel párhuzamos egyenes?

32.5.° Lehet-e a 32.12. ábrán látható alakzat a háromszög párhuzamos eltolásának a vetülete?

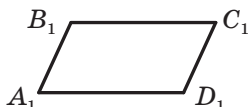
32.6.° Lehet-e a trapéz párhuzamos vetülete az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög, melynek az A_1 , B_1 , C_1 és D_1 szögei megfelelően egyenlők:

- 1) 10° , 40° , 140° , 170° ;
- 2) 50° , 130° , 50° , 130° ?

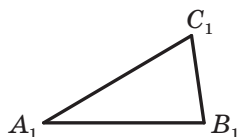
32.7.° Lehet-e a paralelogramma párhuzamos vetülete olyan négyszög, melynek oldalai 6 cm, 8 cm, 6 cm, 9 cm?



32.12. ábra



32.13. ábra



32.14. ábra

- 32.8.*** Az A_1 , B_1 és C_1 pontok megfelelően párhuzamos vetületei az A , B és C pontoknak, melyek egy egyenesre illeszkednek (a B pont az A és C pontok között van). Határozd meg a B_1C_1 szakasz hosszát, ha $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $A_1B_1 = 12$ cm!
- 32.9.*** Az A_1 , B_1 és C_1 pontok megfelelően párhuzamos vetületei az A , B és C pontoknak, melyek egy egyenesre illeszkednek (a B_1 pont az A_1 és C_1 pontok között van). Határozd meg az A_1C_1 szakasz hosszát, ha $AB = 10$ cm, $AC = 16$ cm, $B_1C_1 = 3$ cm!
- 32.10.**** Az $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma az $ABCD$ téglalap képe (32.13. ábra). Szerkeszd meg a téglalap átlóinak metszéspontjából a BC oldalra bocsátott merőleges vetületét!
- 32.11.**** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC derékszögű háromszög képe (32.14. ábra). Szerkeszd meg a háromszög átfogójának felezőpontjából az AC befogóra bocsátott merőleges vetületét!
- 32.12.**** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszög képe. Szerkeszd meg az ABC háromszög B csúcsából bocsátott szögfelező vetületét, ha $AB : BC = 1 : 2$!
- 32.13.**** Az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC egyenlő szárú háromszög képe, melynek alapja az AC oldal. Szerkeszd meg az ABC háromszögbe írt körvonal középpontjának vetületét, ha $AB : AC = 5 : 4$!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

- 32.14.** Az $ABCD$ téglalapban adott: $AB = 6$ cm, $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Határozd meg az AC és BD egyenesek közötti szöget!

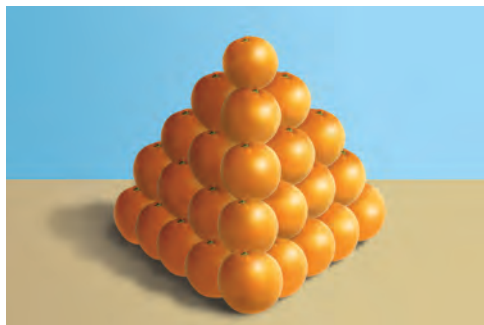


UKRAJNÁNAK VANNAK TEHETSÉGEI!

Hogyan helyezhetünk el minél több narancsot egy ládában? Ez a kérdés első látásra nagyon egyszerűnek és komolytalannak tűnik, viszont régi története van. 1611-ben Johann Kepler német csillagász, matematikus és filozófus, aki a Naprendszer bolygóinak mozgástörvényét alkotta meg, fogalmazta meg a gömbök optimális elrendezésének feladatát a térben. Kepler azt a hipotézist állította fel, hogy a gömböket optimálisan úgy kell elhelyezni, mint ahogy az üzletekben vagy a piacon rakják ki a narancsgúliakat az eladók (32.15. ábra)

400 éven keresztül próbálták a világ legelismertebb matematikusai megmagyarázni ezt a feltevést. Ennek a kérdésnek a végső megoldá-

sa 2017-ben készült el. Kepler hipotézisének bizonyítása rengeteg eset számítógépes feldolgozása után sikerült csak, melyet 19 évig ellenőriztek le, és ezután lett elfogadva a megoldás.



32.15. ábra

Nagyon fontos szerepet játszottak a több évszázados probléma megoldásában a következő fiatal ukrán matematikusok: A. Bondarenko, M. Vjazovszka és D. Radcsenko, akik a Tarasz Sevcsenko Kijevi Nemzeti Egyetem diákjai voltak. 2016-ban jelent meg Marina Vjazovszka tudományos cikke a Kepler-sejtés megoldásáról, amely a 8- és a 24-dimenziós terekre vonatkozott. A szerző ezért Salem-díjat kapott, melyet tehetséges fiatal matematikusoknak ítélnek oda. Ennél csak a Fields-érem nívósabb, amit gyakorta neveznek matematikai Nobel-díjnak.

Ez az ukrán tudósok ragyogó eredménye!

 A 4. §. ÖSSZEFOGLALÁSA**A térmértan legfontosabb axiómái**

- A1. A tér bármely síkján teljesülnek a síkmértan axiómái.
- A2. A tér bármely nem egy egyenesre illeszkedő három pontjára egy és csakis egy sík illeszkedik.
- A3. Ha az egyenes két pontja illeszkedik a síkra, akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.
- A4. Ha két síknak van közös pontja, akkor egy egyenesben metszik egymást.

A sík egyértelműen meghatározható:

- 1) nem egy egyenesre illeszkedő három pont által;
- 2) egyenessel és rá nem illeszkedő pont által;
- 3) két egymást metsző egyenes által;
- 4) két párhuzamos egyenes által.

Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

Két egyenest egymást metsző egyenesnek nevezünk, ha csak egy közös pontjuk van.

Két egyenest a térben párhuzamosnak nevezünk, ha egy síkra illeszkednek, és nem metszik egymást.

Két egyenest a térben kitérőnek nevezünk, ha nem illeszkednek egy síkhoz.

Párhuzamos egyenesek tulajdonságai

Két párhuzamos egyenesre egy és csakis egy sík illeszkedik.

Kitérő egyenesek ismertetőjele

Ha két egyenes közül az egyik egy síkra illeszkedik, a másik pedig olyan pontban metszi ezt a síkot, amely nem illeszkedik az első egyenesre, akkor az adott egyenesek kitérők lesznek.

Párhuzamosság a térben

Az egyenes és a sík akkor párhuzamos, ha nincsenek közös pontjaik.

Két síkot párhuzamosnak mondunk, ha nincsenek közös pontjaik.

Az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele

Ha az egyenes, amely nem illeszkedik az adott síkra, párhuzamos a síkra illeszkedő valamely egyenessel, akkor az adott egyenes magával a síkkal is párhuzamos lesz.

Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei

Ha a sík illeszkedik az adott egyenesre, amely párhuzamos egy másik síkkal, és metszi ezt a síkot, akkor a síkok metszésvonala párhuzamos az adott egyenessel.

Ha két párhuzamos egyenesre síkokat fektetünk, és ezek a síkok az eredeti egyenesektől különböző egyenesben metszik egymást, akkor a metszésvonal párhuzamos lesz a két adott egyenessel.

Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor az első kettő is párhuzamos egymással.

Két sík párhuzamosságának ismertetőjele

Ha az egyik sík két egymást metsző egyenese megfelelően párhuzamos egy másik sík két egyenesével, akkor ezek a síkok párhuzamosak lesznek.

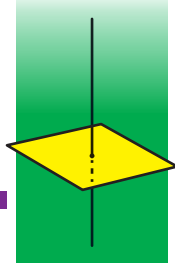
Párhuzamos síkok tulajdonságai

Az adott síkra nem illeszkedő ponton át egy és csakis egy az adott síkkal párhuzamos sík fektethető.

Két párhuzamos síknak egy harmadik síkkal való metszésük által keletkező metszésvonalak párhuzamos egyenesek lesznek.

Párhuzamos egyenesek szakaszai, melyek párhuzamos síkok között helyezkednek el, egyenlők lesznek.

MERŐLEGESSÉG 5. §. A TÉRBEN



Ebben a paragrafusban megismerkedtek az egyenesek közötti szöggel a térben, az egyenes és a sík közötti szöggel, két sík közötti szöggel; megtudjátok, hogy mit jelent az ortogonális vetítés, elsajátítjátok a sokszög ortogonális vetületének tulajdonságait.

33. Az egyenesek közötti szög a térben

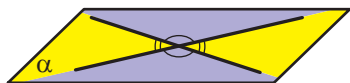
Mivel a tér bármely két egymást metsző egyenese egy síkra illeszkedik, ezért a köztük lévő szöget ugyanúgy határozzuk meg, mint a síkmértanban.

Definíció. Két egymást metsző egyenes hajlásszögén, annak a metszéspontnál keletkező szögnek a mértékét értjük, amely nem nagyobb, mint 90° (33.1. ábra).

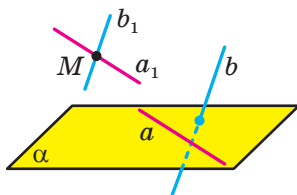
Úgy tekintjük, hogy a párhuzamos egyenesek hajlásszöge 0° -os. Tehát, ha a φ két egy síkra illeszkedő egyenes hajlásszöge, akkor $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Bevezetjük a kitérő egyenes közötti szög fogalmát.

Definíció. Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet olyan egymást metsző egyenesek alkotnak, melynek szárai párhuzamosak az adott kitérő egyenesekkel.



33.1. ábra



33.2. ábra

Legyen az a és b kitérő egyenesek. A tér M pontján át a_1 és b_1 egyeneseket fektetünk úgy, hogy $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (33.2. ábra). Az a és b kitérő egyenesek hajlásszögének meghatározásából következik, hogy az egyenlő lesz az a_1 és b_1 egymást metsző egyenesek közötti szöggel.

Felmerül a kérdés: az a és b kitérő egyenesek hajlásszöge függ-e az M pont kiválasztásától? Erre a kérdésre a következő tétel adja meg a választ.

33.1. tétel. *Két egymást metsző egyenes hajlásszöge egyenlő lesz két olyan egymást metsző egyenes hajlásszögével, melynek szárai párhuzamosak az adott egyenesekkel.*

Alkalmazva a 33.1. tételt, be lehet bizonyítani, hogy az a és b kitérő egyenesek közötti szög egyenlő az a és a b_1 egymást metsző egyenesek közötti szöggel, ha $b_1 \parallel b$.

Például a 33.3. ábrán az $ABCA_1B_1C_1$ háromoldalú hasáb látható. Az AA_1 és a BC kitérő egyenesek közötti szög egyenlő a BB_1 és a BC egymást metsző egyenesek közötti szöggel.

Definíció. Két egyenest a térben **merőlegesnek** nevezünk, ha a köztük lévő szög 90° -os lesz.

Azt is megjegyezzük, hogy a merőleges egyenesek lehetnek egymást metsző, és kitérő egyenesek is.

Ha az a és b egyenesek merőlegesek, akkor ezt így jelöljük: $a \perp b$.

Két szakaszt a térben **merőlegesnek** nevezzük, ha merőleges egyenesekre illeszkednek.

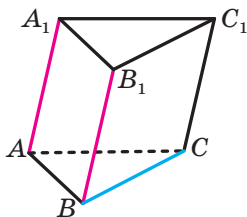
Például az $ABCA_1B_1C_1D_1$ kockának az AD és CC_1 élei merőlegesek egymásra (33.4. ábra). Valóban, mivel a $DD_1 \parallel CC_1$, ezért az AD és CC_1 egyenesek közötti szög egyenlő az AD és DD_1 közötti szöggel. Mivel $\angle ADD_1 = 90^\circ$, ezért $AD \perp CC_1$.

Feladat. A 33.5. ábrán az $ABCA_1B_1C_1D_1$ kocka látható. Határozzuk meg az A_1D és a D_1C egyenesek közötti szöget!

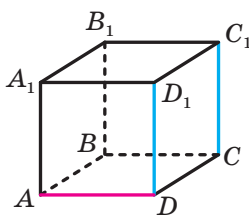
Megoldás. Kössük össze az A_1 és a B pontokat. Mivel $A_1D_1 \parallel BC$, ezért az A_1 , D_1 , C és B pontok egy síkra illeszkednek. Ez a sík az A_1B és D_1C párhuzamos egyenesekben metszi az AA_1B és DD_1C párhuzamos síkokat. Tehát az A_1D és a D_1C egyenesek közötti szög egyenlő a DA_1B szöggel.

Összekötjük a B és D pontokat. Az A_1D , A_1B és BD szakaszok egyenlők lesznek, mint az egyenlő négyzetek átlói. Tehát az A_1BD háromszög egyenlő oldalú. Ezért a $\angle DA_1B = 60^\circ$.

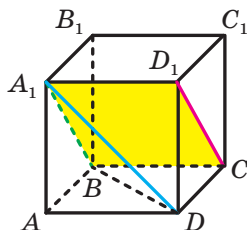
Felelet: 60° . ◀



33.3. ábra



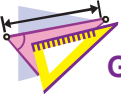
33.4. ábra



33.5. ábra



1. Mit nevezünk két egymást metsző egyenes közötti szögnek?
2. Mivel egyenlő két párhuzamos egyenes közötti szög?
3. Mit nevezünk két kitérő egyenes hajlásszögének?
4. Mikor lesz merőleges egymásra a tér két egyenese?
5. Mikor lesz merőleges egymásra a tér két szakasza?

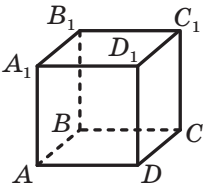


GYAKORLATOK

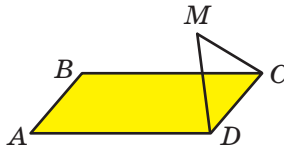
33.1.° Hány az adott egyenesre merőleges egyenest lehet húzni egy ponton keresztül, amely: 1) az adott egyenesre illeszkedik; 2) amely nem illeszkedik az adott egyenesre?

33.2.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (33.6. ábra). Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) CD és BC ; 2) AA_1 és $C_1 D_1$; 3) AA_1 és $D_1 C$; 4) AC és $B_1 D_1$; 5) $A_1 C_1$ és AC !

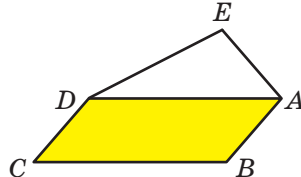
33.3.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (33.6. ábra). Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) AB és BB_1 ; 2) AB és $B_1 D_1$; 3) $A_1 D$ és $B_1 C$; 4) $B_1 D_1$ és $C_1 C$!



33.6. ábra



33.7. ábra



33.8. ábra

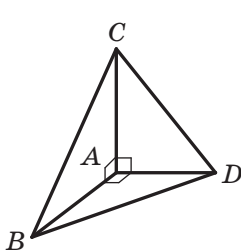
33.4.° Az M pont nem illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjához, a CMD háromszög viszont egyenlő oldalú (33.7. ábra). Határozd meg az AB és MC egyenesek közötti szöget!

33.5.° Az M pont nem illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjához, az $MBA\angle = 40^\circ$, $MBC\angle = 90^\circ$. Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) MB és AD ; 2) MB és CD !

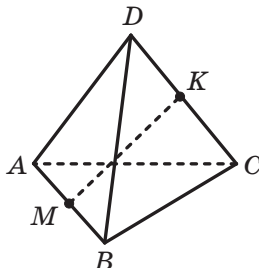
33.6.* Az $ABCD$ trapéz, melynek alapjai AD és BC , és az MEF háromszög nem illeszkedik egy síkra. Az E pont az AB szakasz felezőpontja, az F pont pedig a CD szakaszé, $ME = FE$, $MEF\angle = 110^\circ$. Határozd meg a következő egyenesek közötti szöget: 1) AD és EF ; 2) AD és ME ; 3) BC és MF !

33.7.* Az $ABCD$ paralelogramma és az AED háromszög nem illeszkedik egy síkra (33.8. ábra). Határozd meg a BC és AE egyenesek közötti szöget, ha $AED\angle = 70^\circ$, $ADE\angle = 30^\circ$!

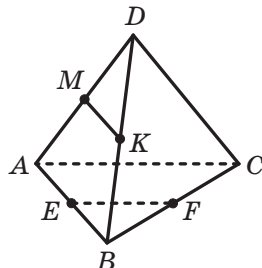
33.8.* Adott, hogy $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (33.9. ábra). Határozd meg a CD szakasz hosszát, ha $BC = 17$ cm, $AB = 15$ cm, $BD = 3\sqrt{29}$ cm!



33.9. ábra



33.10. ábra



33.11. ábra

33.9.* Adott, hogy $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (33.9. ábra). Határozd meg a BC szakasz hosszát, ha $CD = 2\sqrt{43}$ cm, $BD = 12$ cm, $\angle ABD = 60^\circ$!

33.10.** Az $ABCD$ tetraéder minden éle a , az M és K pontok az AB és CD éleinek megfelelő felezőpontjai (33.10. ábra). Határozd meg az MK szakasz hosszát!

33.11.** Az E , F , M és K pontok az $ABCD$ tetraéder AB , BC , AD és BD éleinek a megfelelő felezőpontjai (33.11. ábra). Határozd meg az EF és MK egyenesek közötti szöget, ha a $\angle BAC = \alpha$!

33.12.** Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $ABCD$ lapjának átlói az O pontban metszik egymást. Határozd meg az OB_1 és az $A_1 C_1$ egyenesek közötti szöget!

33.13.** Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest alapja egy olyan négyzet, melynek oldala a . Határozd meg az AD_1 és a $B_1 C$ egyenesek közötti szöget, ha a téglatest oldalélének hossza $a\sqrt{3}$!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

33.14. Az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlói megfelelően 24 cm és 10 cm, $AD = 13$ cm. Határozd meg a paralelogramma területét!

34. Az egyenes és a sík merőlegessége

A mindennapi életben azt mondjuk: a zászlórúd merőleges a föld felszínére (34.1. ábra), az árbóc merőleges a fedélzet felszínére (34.2. ábra), a csavart a deszka felületére merőlegesen kell becsavarni (34.3. ábra) stb.



34.1. ábra



34.2. ábra



34.3. ábra

A fenti példáknek segítségével elképzelést nyerhetünk a síkra merőleges egyenesről.

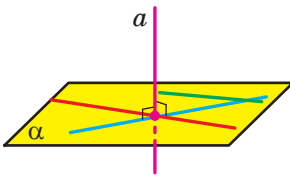
Definíció. Az egyenest a síkra merőlegesnek mondjuk, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére (34.4. ábra).

Az a egyenes és az α sík merőlegességét így írjuk fel: $a \perp \alpha$. Azt is szokás mondani, hogy az α sík merőleges az a egyenesre, vagy az a egyenes és az α sík merőlegesek egymásra.

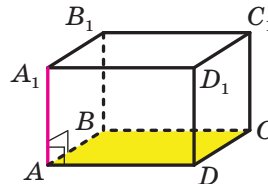
A meghatározásból következik, hogyha az a egyenes merőleges az α síkra, akkor az egyenes metszi a síkot.

A szakaszt a **síkra merőlegesnek** nevezzük, ha a szakasz illeszkedik az egyenesre, amely merőleges az adott síkra.

Például nyilvánvaló, hogy az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest AA_1 éle merőleges az ABC síkra (34.5. ábra). Ezt az állítást egyszerű bizonyítani a következő tétel alapján.



34.4. ábra



34.5. ábra

34.1. tétel (az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele). Ha az egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges az adott síkra is.



34.6. ábra

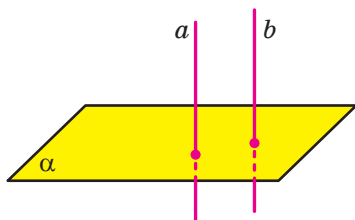
A 34.5. ábrán az AA_1 egyenes merőleges az ABC sík AB és AD egyenesére, amelyek metszik egymást. Ezért az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele alapján $AA_1 \perp ABC$, vagyis az AA_1 él merőleges az ABC síkra.

A 34.1. tételt gyakran alkalmazzák a gyakorlatban is. Például a karácsonyfátartó kereszt alakú. Ha a karácsonyfát úgy állítjuk be, hogy a törzse merőleges a kereszt ágaira, akkor a karácsonyfa merőleges lesz a padló síkjára is (34.6. ábra).

A következő tételt is alkalmazhatjuk az egyenes és a sík merőlegességének másik ismertetőjeleként.

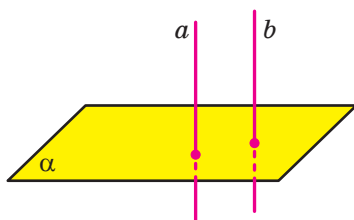
34.2. tétel. *Ha két párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges egy síkra, akkor a másik is merőleges a síkra* (34.7. ábra).

Például a 34.5. ábrán az AA_1 egyenes merőleges az ABC síkra, a CC_1 egyenes párhuzamos az AA_1 egyenessel. Tehát a 34.2. tétel alapján a CC_1 egyenes szintén merőleges lesz az ABC síkra.



Ha $a \parallel b$ és $a \perp \alpha$, akkor
 $b \perp \alpha$

34.7. ábra



Ha $a \perp \alpha$ és $b \perp \alpha$, akkor
 $a \parallel b$

34.8. ábra

Megfogalmazzuk két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelét.

34.3. tétel. *Ha két egyenes egy és ugyanarra a síkra merőleges, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak* (34.8. ábra).

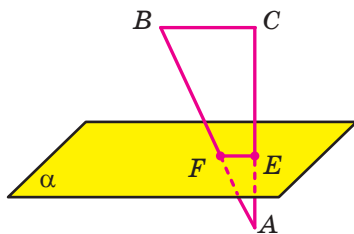
Igaz a következő tétel is.

34.4. tétel. *Adott síkra egy ponton keresztül egy és csakis egy merőleges egyenes bocsátható.*

Feladat. Az α sík merőleges az ABC háromszög AC befogójára, az AC befogót az E pontban, az AB átfogót pedig az F pontban metszi (34.9. ábra). Határozzuk meg az EF szakasz hosszát, ha $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ cm!

Megoldás. Mivel az AC egyenes merőleges az α síkra, ezért az AC egyenes merőleges ennek a síknak bármely egyenesére, tehát az EF egyenesre is. Az EF és a BC egyenesek egy síkra illeszkednek, és merőlegesek az AC egyenesre, ezért az $EF \parallel BC$. Ebből következik, hogy az AEF és ACB háromszögek hasonlóak. Tehát fel lehet írni, hogy: $EF : CB = AE : AC$. Innen az $EF : 21 = 3 : 7$, $EF = 9$ cm.

Felelet: 9 cm. ◀



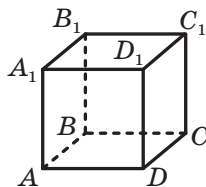
34.9. ábra

1. Milyen egyenest nevezünk a síkra merőlegesnek?
2. Milyen szakaszt nevezünk a síkra merőlegesnek?
3. Fogalmazd meg az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét?
4. Fogalmazd meg a két párhuzamos egyenesről szóló tételt, melyek közül az egyik merőleges a síkra!
5. Fogalmazd meg a két egyenesről szóló tételt, melyek merőlegesek ugyanarra a síkra!



GYAKORLATOK

- 34.1.°** Az a egyenes merőleges az α síkra. Létezik-e az α síkban olyan egyenes, amely nem lesz merőleges az a egyenesre?
- 34.2.°** Az m egyenes merőleges az α síkra illeszkedő a és b egyenesekre. Következik-e ebből, hogy az m egyenes merőleges az α síkra?
- 34.3.°** Igaz-e az állítás, hogyha az egyenes nem merőleges a síkra, akkor nem merőleges egyetlen egyenesre sem, amely a síkra illeszkedik?
- 34.4.°** Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (34.10. ábra). Nevezd meg azokat a lapjait a kockának, melyekre a következő egyenes merőleges lesz: 1) AA_1 ; 2) AD !
- 34.5.°** Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (34.10. ábra). Nevezd meg azokat az éleit a kockának, melyek merőlegesek a következő lapjára: 1) $AA_1 B_1 B$; 2) $A_1 B_1 C_1 D_1$!

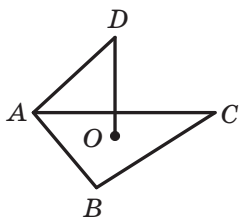


34.10. ábra

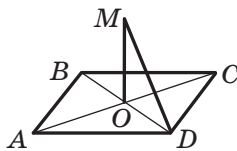
34.6.° Igaz-e az állítás, hogy az egyenes merőleges a síkra, ha merőleges:

- 1) az erre a síkra illeszkedő háromszög oldalaira és oldalfelezőire;
- 2) az erre a síkra illeszkedő háromszög oldalaira és középvonalaira;
- 3) az erre a síkra illeszkedő trapéz két oldalára;
- 4) az erre a síkra illeszkedő körvonal két átmérőjére?

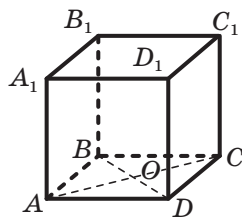
34.7.° Az ABC szabályos háromszög O középpontjából annak síkjára DO merőlegest állítottak (34.11. ábra). Határozd meg a DO szakasz hosszát, ha $AB = 6$ cm, $DA = 4$ cm!



34.11. ábra



34.12. ábra



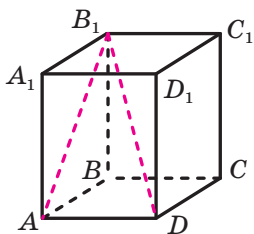
34.13. ábra

34.8.° Az $ABCD$ négyzet O középpontjából a négyzet síkjára MO merőlegest bocsátottak (34.12. ábra). Határozd meg az M pont és a D csúcs közötti távolságot, ha $AD = 4\sqrt{2}$ cm, $MO = 2$ cm!

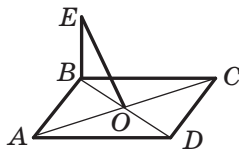
34.9.° Az O pont az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $ABCD$ lapjának a középpontja, a kocka éle pedig a (34.13. ábra). Határozd meg:

- 1) az O pont és a B_1 csúcs közötti távolságot;
- 2) a B_1O és a DD_1 egyenesek közötti szög tangensét!

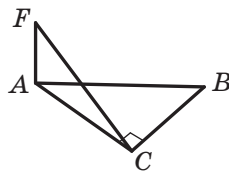
34.10.° Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest B_1D átlója 17 cm, az $AA_1 B_1 B$ lapnak az AB_1 átlója pedig 15 cm (34.14. ábra). Határozd meg a téglatest AD élének hosszát!



34.14. ábra



34.15. ábra



34.16. ábra

34.11.* Az $ABCD$ rombusz B csúcsán át BE merőleget állítottak a rombusz síkjára (34.15. ábra). Bizonyítsd be, hogy az AC egyenes merőleges a BEO síkra!

34.12.* Az ABC derékszögű háromszög ($\angle ACB = 90^\circ$) A csúcsában az ABC háromszög síkjára AF merőleges egyenest állítottak (34.16. ábra). Bizonyítsd be, hogy a BC egyenes merőleges az AFC síkra!

34.13.** Az AB szakasz nem metszi az α síkot. Az A és B pontokból merőleges egyeneseket bocsátottak az α síkra, melyek azt megfelelően a C és D pontokban metszik. Határozd meg a CD szakasz hosszát, ha $AC = 34$ cm, $BD = 18$ cm, $AB = 20$ cm!

34.14.** Az AB szakasz nem metszi az α síkot. Az A és B pontokból merőleges egyeneseket bocsátottak az α síkra, melyek azt megfelelően az A_1 és B_1 pontokban metszik. Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 12$ cm, $AB_1 = 10$ cm!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

34.15. Egy pontból az egyenesre két ferdét húztak, melyeknek a vetületei 5 cm és 9 cm. Határozd meg az adott pont és az adott egyenes közötti távolságot, ha az egyik ferde 2 cm-rel nagyobb a másiknál!

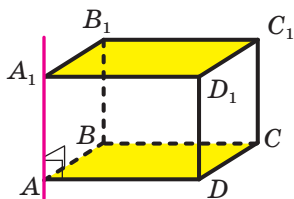
35. A merőleges és a ferde

Legyen az F_1 alakzat, az F alakzat az l egyenes irányú párhuzamos vetülete az α síkra. Ha $l \perp \alpha$, akkor az F_1 alakzat az F alakzat **ortogonális vetülete** lesz az α síkra.

Például az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest $ABCD$ alapja az $A_1 B_1 C_1 D_1$ alapnak az AA_1 irányú ortogonális vetülete lesz az ABC síkra (35.1. ábra).

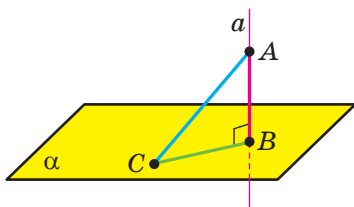
A későbbiekben, ha az alakzat vetületéről beszélünk, és nem adnak meg mást, akkor az ortogonális vetületről lesz szó.

Legyen adott az α sík és az A pont, mely nem illeszkedik erre a síkra. Az A ponton keresztül egy a egyenest fektetünk, amely merőleges az α síkra. Legyen $a \cap \alpha = B$

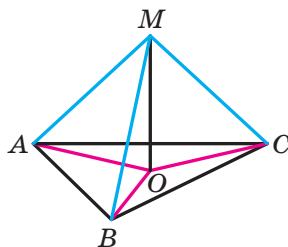


35.1. ábra

(35.2. ábra). Az AB szakaszt az A pontból az α síkra bocsátott **merőlegesnek** nevezzük, a B pontot pedig a **merőleges talppontjának**. A merőleges B talppontja az A pont vetülete lesz az α síkra.



35.2. ábra



35.3. ábra

Jelöljünk az α síkon egy B -től különböző tetszőleges C pontot. Meghúzzuk az AC szakaszt (35.2. ábra). Az AC szakaszt az A pontból az α síkra bocsátott **ferdének** nevezzük. A C pont a **ferde talppontja** lesz. A BC szakasz az AC **ferde vetülete** lesz.

35.1. tétel. *Ha egy pontból a síkra egy merőlegest és egy ferdét bocsátunk, akkor a ferde hossza nagyobb lesz, mint a merőlegesé.*

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy annak a pontnak a vetülete, amely nem illeszkedik a sokszög síkjára és egyenlő távolságra van a csúcsaitól, a sokszög köré írt körvonal középpontja lesz!

Megoldás. A bizonyítást a háromszög esetére végezzük el. A bizonyítás a többi sokszögre is hasonlóan történik.

Legyen az M pont, amely nem illeszkedik az ABC háromszög síkjához, és $MA = MB = MC$. Az M pontból MO merőlegest bocsátunk az ABC síkra (35.3. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az O pont az ABC háromszög köré írt körvonal középpontja.

Mivel $MO \perp ABC$, ezért az $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90^\circ$. Az $\triangle MOA$, $\triangle MOB$, $\triangle MOC$ derékszögű háromszögeknek az MO befogója közös, az átfogói egyenlők, tehát ezek a háromszögek egybevágók az átfogójuk és a befogójuk alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy az $OA = OB = OC$, vagyis az O pont lesz az ABC háromszög köré írt körvonal sugara. ◀

Megjegyezzük, hogy amikor meg kell határozni két mértani alakzat közötti távolságot, akkor a két legközelebbi pontjuk közötti távolságot határozzuk meg. Például a síkmértanból már ismert, hogy az

egyeneshez nem illeszkedő pont és az egyenes távolsága egyenlő az adott ponttól az egyenes legközelebbi pontjához mért távolsággal, vagyis a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hosszával.

A 35.1. tételből következik, hogy érdemes elfogadni a következő meghatározást.

Definíció. Ha az adott pont nem illeszkedik a síkra, akkor a sík és a pont közötti távolságon az adott pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük. Ha a pont illeszkedik a síkra, akkor a pont és a sík közötti távolságot nullának tekintjük.

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogyha az egyenes párhuzamos a síkkal, akkor az egyenes minden pontja egyenlő távolságra lesz a síktól!

Megoldás. Legyenek az A és B pontok az a egyenes két tetszőleges pontja. Az A_1 és B_1 pontok az A és B pontokból az α síkra bocsátott merőlegesek talppontjai (35.4. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $AA_1 = BB_1$.

A 34.3. tétel alapján az $AA_1 \parallel BB_1$. Tehát az A, A_1, B_1, B pontok egy síkra illeszkednek.

Az ABB_1 sík az α síkkal párhuzamos a egyenesre illeszkedik, és az α síkot az A_1B_1 egyenesben metszi. Ekkor a 30.2. tétel alapján: $AB \parallel A_1B_1$. Ezért az AA_1B_1B négyszög mindkét szemközti oldalpárja párhuzamos egymással. Ebből következik, hogy $AA_1 = BB_1$.

Mivel az A és B pontok az a egyenes tetszőleges pontjai, ezért a feladat állítását bebizonyítottuk. ◀

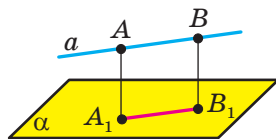
A fentebb bizonyított tulajdonság alapján elfogadhatjuk a következő meghatározást.

Definíció. Az egyenes távolsága a vele párhuzamos síktól egyenlő lesz az egyenes tetszőleges pontjának távolságával a síktól.

A 2. kulcsos feladat eredményére támaszkodva könnyen megoldhatjuk az alábbi feladatot.

3. feladat. Bizonyítsd be, hogyha két sík párhuzamos, akkor az egyik sík minden pontja ugyanolyan távolságra lesz a másik síktól.

Definíció. Két párhuzamos sík közötti távolságnak nevezzük az egyik sík bármely pontjának a másik síktól való távolságát.

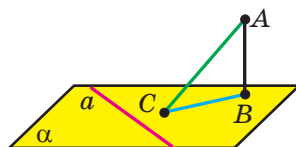


35.4. ábra

A 2. és 3. kulcsos feladat eredményeit gyakran alkalmazzák a gyakorlati feladatok megoldása során, például az építkezéseknél (35.5. ábra).



35.5. ábra



35.6. ábra

35.2. tétel (három merőleges tétele). *Ha az egyenes, amely egy síkra illeszkedik, merőleges a ferde vetületére, akkor merőleges magára a ferdére is. És fordítva, ha a síkban fekvő egyenes merőleges a síkhoz húzott ferdére, akkor merőleges a ferde vetületére is.*

Bizonyítás. Bebizonyítjuk a tétel első részét.

Legyen az a az α síkra illeszkedő egyenes, amely merőleges az AC ferde BC vetületére (35.6 ábra). Bebizonyítjuk, hogy $a \perp AC$.

Adott: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, tehát $AB \perp a$. Azt kaptuk, hogy az a egyenes merőleges az ABC síkot alkotó egymásra merőleges AB és BC egyenesekre; tehát $a \perp ABC$. Mivel $AC \subset ABC$, akkor $a \perp AC$.

A második rész bizonyítása hasonló az első rész bizonyításához. ◀

4. feladat. Az M pont nem illeszkedik a domború sokszög síkjára és egyenlő távolságra van az oldalegyeneseitől. Az M pont vetülete a sokszög síkjára az O pont lesz, amely a sokszögre illeszkedik. Bizonyítsuk be, hogy az O pont a beírt körvonal középpontja!

Megoldás. Bebizonyítjuk a háromszög esetére a feladatot. Más sokszög esetén a bizonyítás hasonló lesz.

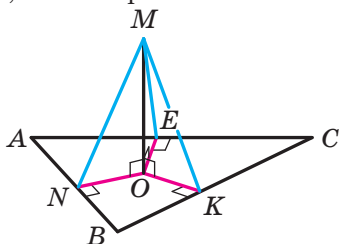
Az O pontból merőlegeseket bocsátunk az AB , BC és CA egyenesekre, amelyek megfelelően az ON , OK és OE szakaszok lesznek (35.7. ábra). Az M pontot összekötjük az E , K és N pontokkal.

Az ON szakasz az MN ferde vetülete lesz az ABC síkra. A szerkesztés szerint $ON \perp AB$. Ekkor a három merőleges tétele alapján az $MN \perp AB$.

Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $MK \perp BC$ és $ME \perp CA$. Tehát az MN , MK és ME szakaszok hosszai az M pont megfelelő távolságai lesznek az AB , BC és CA egyenesektől. A feltétel alapján $MN = MK = ME$.

Az MON , MOK , MOE derékszögű háromszögekben az MO befogó közös és az átfogók egyenlők, tehát ezek a háromszögek egybevágók a befogójuk és az átfogójuk alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy $ON = OK = OE$.

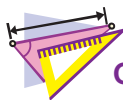
Az ON , OK és OE szakaszok hosszai megegyeznek az O pont és az ABC háromszög oldalegyenesei közötti távolsággal. Bebizonyítottuk, hogy ezek a távolságok egyenlők. Mivel az O pont az ABC háromszögre illeszkedik, ezért az O pont az ABC háromszögbe írt körvonal középpontja lesz. ◀



35.7. ábra



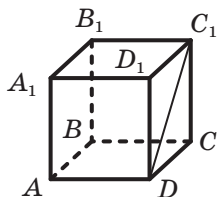
1. Milyen esetben mondjuk azt, hogy az F_1 alakzat az F alakzat ortogónális vetülete?
2. Milyen szakaszt nevezünk: 1) a pontból a síkra bocsátott merőlegesnek; a pontból a síkra bocsátott ferdének?
3. Fogalmazd meg a pontból a síkra bocsátott ferdéről, illetve merőlegesről szóló tételt!
4. Mit nevezünk a pont és a sík közötti távolságnak? Az egyenes és a vele párhuzamos sík közötti távolságnak? Két párhuzamos sík közötti távolságnak?
5. Fogalmazd meg a három merőleges tételét!



GYAKORLATOK

35.1.° A 35.8. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka látható. Nevezd meg a $C_1 D$ szakasz vetületét a következő síkra:

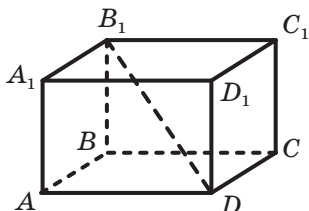
- 1) ABC ;
- 2) $BB_1 C$;
- 3) $AA_1 B_1$!



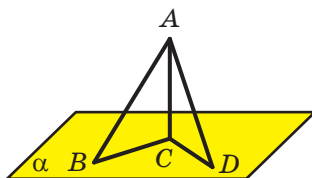
35.8. ábra

35.2.° A 35.9. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest látható. Nevezd meg a DB_1 szakasz vetületét a következő síkra:

- 1) $A_1 B_1 C_1$; 2) CDD_1 ; 3) $AA_1 D_1$!



35.9. ábra



35.10. ábra

35.3.° A pontból a síkra egy 12 cm-es merőleget és egy 13 cm-es ferdét bocsátottak. Határozd meg ennek a ferdének a vetületét az adott síkra!

35.4.° Az A pontból az α síkra egy merőleget és egy $\sqrt{7}$ cm-es ferdét húztak. Az adott ferde vetülete $\sqrt{3}$ cm. Határozd meg az A pont és az α sík közötti távolságot!

35.5.° Az A pontból az α síkra egy AC merőleget, valamint az AB és AD ferdeket húztak (35.10. ábra). Határozd meg az AD ferde vetületét az α síkra, ha $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 8$ cm, $AD = 9$ cm!

35.6.° Az M pontból az α síkra egy MH merőleget, valamint az MA és MB ferdeket húztak (35.11. ábra). Határozd meg az MA ferdét, ha $BH = 6\sqrt{6}$ cm, $MB = 18$ cm, $\angle MAH = 60^\circ$!

35.7.° Bizonyítsd be, hogy az egy adott pontból a síkra bocsátott egyenlő hosszúságú ferdeknek egyenlők a vetületei is!

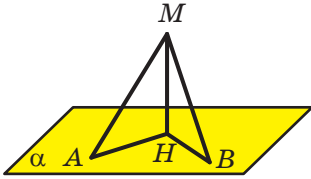
35.8.° Bizonyítsd be, hogy amikor az egy pontból a síkra bocsátott két ferde vetülete egyenlő, akkor a ferde is egyenlő!

35.9.° Az α és a β síkokra megfelelően illeszkedő a és b párhuzamos egyenesek közötti távolság 7 cm. Igaz-e az az állítás, hogy az α és a β síkok közötti távolság is 7 cm?

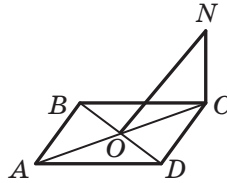
35.10.° Az M pontból az α síkra MA , MB , MC és MD egyenlő hosszúságú ferdeket húztak. Lehetnek-e az A , B , C és D pontok:

- 1) egy téglalapnak; 3) egy derékszögű trapéznek;
2) egy rombusznak; 4) egy egyenlő szárú trapéznek a csúcsai?

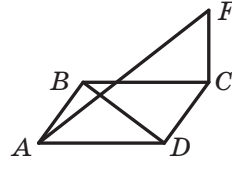
35.11.° A 35.12. ábrán az $ABCD$ négyzet látható, ahol az NC egyenes merőleges a négyzet síkjára. Bizonyítsd be, hogy a BD és NO egyenesek merőlegesek egymásra!



35.11. ábra



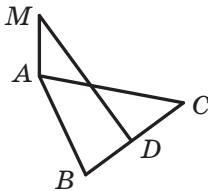
35.12. ábra



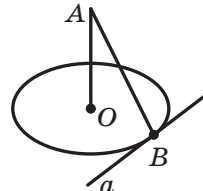
35.13. ábra

35.12.* A 35.13. ábrán az $ABCD$ rombusz látható. Az FC egyenes merőleges a rombusz síkjára. Bizonyítsd be, hogy az AF és BD egyenesek merőlegesek egymásra!

35.13.* A 35.14. ábrán az ABC egyenlő oldalú háromszög látható, ahol a D pont a BC oldal felezőpontja. Az AM egyenes merőleges az ABC síkra. Bizonyítsd be, hogy az $MD \perp BC$!



35.14. ábra



35.15. ábra

35.14.* Az AO egyenes merőleges az O középpontú körlap síkjára (35.15. ábra). Az a egyenes a körlap síkjára illeszkedik, és az adott kört a B pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AB \perp a$!

35.15.* Bizonyítsd be, hogyha a pont illeszkedik egy egyeneshez, amely merőleges a sokszög síkjára és illeszkedik a sokszög köré írt körvonal középpontjára, akkor ez a pont egyenlő távolságra lesz a sokszög csúcsaitól!

35.16.* Az A pontból az α síkra $AB = 25$ cm és $AC = 17$ cm ferdeket húztak. Határozd meg az A pont távolságát az α síktól, ha a síkra való vetületeik úgy aránylanak egymáshoz, mint $5 : 2$!

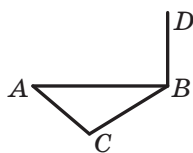
35.17.* A D pontból az α síkra DA és DB ferdeket húztak, melyek összege 28 cm lesz. Határozd meg ezeknek a ferdeknek a hosszát, ha az α síkra való vetületeik megfelelően 9 cm és 5 cm!

35.18.* Az M pont 6 cm-re van az ABC szabályos háromszög minden csúcsától, melynek oldala 9 cm. Határozd meg az M pont távolságát az ABC háromszög síkjától!

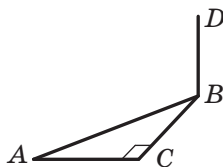
35.19.* Az ABC derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90^\circ$) befogói 6 cm és 18 cm. A D pont a háromszög minden csúcsától 13 cm-re van. Határozd meg a D pont és az ABC sík közötti távolságot!

35.20.* A BD szakasz merőleges az AC alapú ABC egyenlő szárú háromszög síkjára (35.16. ábra). Szerkessz merőleget a D pontból az AC egyenesre!

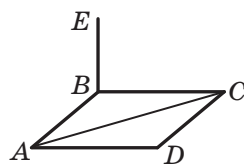
35.21.* A BD szakasz merőleges az ABC derékszögű háromszög síkjára, melynek C a derékszöge (35.17. ábra). Szerkessz merőleget a D pontból az AC egyenesre!



35.16. ábra



35.17. ábra



35.18. ábra

35.22.* A BE szakasz merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára (35.18. ábra). Szerkessz merőleget az E pontból az AC egyenesre!

35.23.* Az M pont egyenlő távolságra van az ABC egyenlő oldalú háromszög oldalaira illeszkedő egyenesektől. Az M pont vetülete az ABC háromszög síkjára az O pont lesz, amely a háromszögre illeszkedik. Határozd meg az M pont távolságát az AB oldaltól, ha az adott pont távolsága az ABC síktól $3\sqrt{2}$ cm és az $AB = 18$ cm lesz!

35.24.* A rombusz oldala 10 cm, az egyik átlója 16 cm. Az M pont 5,2 cm-re lesz a rombusz oldalegyeneseitől. Határozd meg az M pont távolságát a rombusz síkjától!

35.25.** Az M pontból az α síkhoz MN és MK ferdeket húztunk, melyek a síkbeli vetületeikkel 60° -os szögeket alkotnak. Határozd meg az adott ferdek talppontjai közötti távolságot, ha a ferdek közötti szög 90° , az M pont és az α sík közötti távolság pedig $\sqrt{3}$ cm!

35.26.** Az A pontból az α síkhoz AB és AC ferdeket húztunk, melyek a síkbeli vetületeikkel 30° -os szögeket alkotnak. Határozd meg az adott ferdek hosszait, valamint az A pont és az α sík távolságát, ha a ferdek vetületei közötti szög 90° , a ferdek talppontjai közötti távolság pedig 6 cm!

35.27." A DA szakasz merőleges az ABC háromszög síkjára, ahol $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 21$ cm. Határozd meg a D pont és a BC egyenes távolságát, ha a D pont távolsága az ABC síktól 15 cm!

35.28." Az AB szakasz az O középpontú körvonal átmérője, a BC pedig a kör húrja, ahol $AB = 12$ cm, $\angle ABC = 30^\circ$. Az AE szakasz merőleges a körvonal síkjára. Határozd meg az E pont és a körvonal síkja közötti távolságot, ha az E pont a BC egyenestől 10 cm-re van!

35.29." Az MA szakasz merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára. Határozd meg az M pont és a CD egyenes közötti távolságot, ha $\angle BAD = 30^\circ$, $AD = 10$ cm, $MA = 5\sqrt{3}$ cm!

35.30." A DA szakasz merőleges az ABC háromszög síkjára, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = 14$ cm. Határozd meg a D pont távolságát az ABC síktól, ha ez a pont a BC egyenestől $2\sqrt{43}$ cm-re van!

35.31." Az M pont nem illeszkedik az ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) háromszög síkjára és $2\sqrt{5}$ cm-re van mindegyik oldalegyenesétől. Az M pont vetülete az ABC síkra az O pont, amely az adott háromszögben fekszik. Az ABC háromszögbe írt körvonal érintési pontja az AB átfogót 3 cm és 10 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg az M pont távolságát az ABC síktól!

 **35.32."** Az M pont nem illeszkedik a sokszög síkjára, az adott síkra való vetülete pedig a sokszögbe írt körvonal középpontja. Bizonyítsd be, hogy az M pont egyenlő távolságra lesz a sokszög oldalaitól!

35.33." Az egyenlő szárú trapéz alapjai 16 cm és 36 cm. Ebbe a trapézba írt körvonal középpontja az O pont, amelyből a trapéz síkjára MO merőlegest állítottak. Az M pont a trapéz síkjától 16 cm távolságra van. Határozd meg az M pont távolságát a trapéz oldalaitól!

35.34." Az O pont az $ABCD$ trapézba írt körvonal középpontja, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ cm, $\angle ADC = 45^\circ$. Az MO szakasz merőleges a trapéz síkjára. Az M pont a trapéz síkjától $6\sqrt{2}$ cm távolságra van. Határozd meg az M pont távolságait a trapéz oldalaitól!

35.35.* Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka. Bizonyítsd be, hogy $CD_1 \perp AB_1 C_1$!



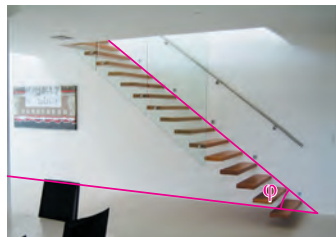
ISMÉTLŐ GYAKORLAT

35.36. A kör köré írt szabályos háromszög oldala 12 cm. Határozd meg e kör köré írt négyzet oldalát!

36. Az egyenes és a sík hajlásszöge

Már tudjátok, hogy a régmúltban az utazók a csillagok szerint tájékozódtak. Ilyenkor azt a szöget határozták meg, amelyet a látóhatár síkja és az adott pontot az égtesttel összekötő félegyenes zár be.

A mai kor emberének a tevékenysége során tudnia kell meghatározni egy adott sík és egy objektum között fekvő szögek nagyságát (36.1. ábra).



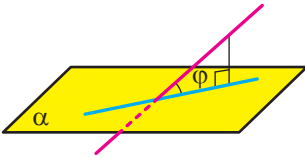
36.1. ábra

Ezek a példák azt mutatják, hogy célszerű meghatározni az egyenes és a sík hajlásszögét.

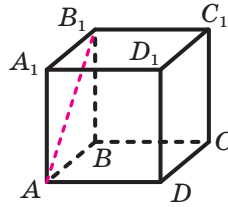
Definíció. Ha az egyenes párhuzamos a síkkal, vagy rá illeszkedik, akkor az **egyenes és a sík hajlásszöge 0°** .

Ha az egyenes merőleges a síkra, akkor úgy tekintjük, hogy az **egyenes és a sík hajlásszöge 90°** .

Ha az egyenes metszi a síkot és nem merőleges rá, akkor az **egyenes és a sík hajlásszöge** az a szög, amelyet az egyenes a síkon lévő merőleges vetületével bezár (36.2. ábra).



36.2. ábra



36.3. ábra

A meghatározásból következik, hogyha a φ az egyenes és a sík hajlásszöge, akkor $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Úgy is szokták mondani, hogy az egyenes a síkkal φ szöget alkot.

A **szakasz és a sík hajlásszögének** a szakaszt tartalmazó egyenes és a sík hajlásszögét tekintjük.

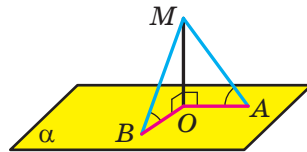
Vizsgáljuk meg például az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kockát (36.3. ábra). Az $AA_1 B_1 B$ lap AB_1 átlója az ABC síkkal 45° -os szöget zár be. Valóban az AB egyenes az AB_1 egyenesnek a vetülete lesz az ABC síkon. Ezért az AB_1 egyenes és az ABC sík hajlásszöge egyenlő a $B_1 AB$ szöggel. Mivel az $AA_1 B_1 B$ négyszög négyzet lesz, ezért a $B_1 AB \angle = 45^\circ$.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy amikor egy pontból a síkra olyan ferdeket húzunk, melyek egyenlő szögeket zárnak be a síkkal, akkor az adott pont vetülete egyenlő távolságra lesz a ferdek talppontjaitól!

Megoldás. Legyen az MA és MB olyan ferdek, melyek egyenlő szögeket zárnak be az α síkkal, az OA és OB pedig ezeknek a ferdeknek a vetületei (36.4. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $OA = OB$.

Az OA egyenes az MA egyenesnek az α síkra való vetülete. Mivel az MAO szög hegyesszög, ezért egyenlő az OA és MA egyenesek közti szöggel. Tehát az MAO szög egyenlő az MA ferde és az α sík hajlásszögével. Hasonlóan bizonyítható, hogy az MBO szög egyenlő az MB ferde és az α sík hajlásszögével. A feladat feltétele alapján $MAO \angle = MBO \angle$.

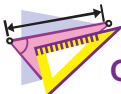
Mivel az $MO \perp \alpha$, ezért $MOA \angle = MOB \angle = 90^\circ$. Azt kaptuk, hogy az MOA és az MOB derékszögű háromszögek egybevágók a befogójuk és a szemközti hegyesszögük alapján. Ebből következik, hogy $OA = OB$. ◀



36.4. ábra



1. Mivel egyenlő az egyenes és a sík hajlásszöge, ha az egyenes párhuzamos a síkkal? Ha az egyenes a síkra illeszkedik? Ha az egyenes merőleges a síkra?
2. Mit nevezünk az egyenes és a sík hajlásszögének, ha az egyenes metszi a síkot és nem merőleges rá?



GYAKORLATOK

36.1.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka, ahol az O pont az $ABCD$ oldal lap középpontja (36.5. ábra). Nevezd meg:

- 1) az AB egyenes és az $A_1 B_1 C_1$ sík közötti;
- 2) az AC_1 egyenes és az ABC sík közötti;
- 3) az AC_1 egyenes és a CDD_1 sík közötti;
- 4) az OA_1 egyenes és az ABC sík közötti;
- 5) az AC egyenes és az ADD_1 sík közötti szöget!

36.2.° Egy pontból a síkra egy merőleget és egy ferdét húztak, amely az adott síkkal 50° -os szöget alkot. Mivel lesz egyenlő az adott ferde és az adott pontból bocsátott merőleges közötti szög?

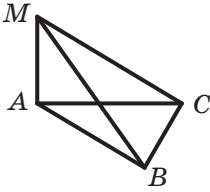
36.3.° Az M pontból az α síkra egy MA merőleget és egy MB ferdét állítottak, amely az α síkkal φ szöget alkot. Határozd meg: 1) az MB ferde vetületét az α síkra, ha az M pont és a sík közötti távolság d -vel egyenlő; 2) az MB ferdét, ha az α síkra való vetülete a !

36.4.° Az A pontból az α síkra egy ferdét állítottak. Mivel egyenlő a ferde és az α sík hajlásszöge, ha az A pont és az α sík közötti távolság: 1) egyenlő a ferde vetületével az α síkra; 2) kétszer rövidebb, mint maga a ferde?

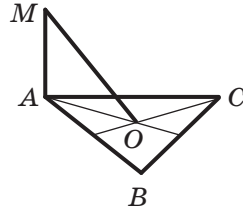
36.5.° Hány olyan ferde húzható a síkra nem illeszkedő A pontból, amely az α síkkal 40° -os szöget alkot?

36.6.° Az MA egyenes merőleges az ABC síkra (36.6. ábra), $AB = AM = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm. Határozd meg azt a szöget, amelyet az ABC sík: 1) az MB ; 2) az MC egyenessel alkot!

36.7.° Az O pont az ABC szabályos háromszög középpontja (36.7. ábra), melynek oldala 6 cm. Az MA egyenes merőleges az ABC síkra. Határozd meg az MO egyenes és az ABC sík közötti szöget, ha $MA = 2$ cm!



36.6. ábra



36.7. ábra

36.8. Bizonyítsd be, hogy a síkhoz ugyanabból a pontból húzott egyenlő hosszúságú ferdek az adott síkkal azonos szöget alkotnak!

36.9. Bizonyítsd be, hogyha a síkhoz ugyanabból a pontból húzott ferdek ugyanolyan szög alatt hajlanak a síkhoz, akkor a ferdek hosszai is egyenlők lesznek!

36.10. Az M pontból az α síkra MB merőlegest, valamint MA és MC ferdeket bocsátottak. Határozd meg az MC egyenes és az α sík közötti szöget, ha $MA = 5\sqrt{2}$ cm, $MC = 10$ cm, az MA és az α sík közötti szög pedig 45° !

36.11. Az A pontból az α síkra AH merőlegest, valamint AB és AC ferdeket bocsátottak, melyek az α síkkal 45° és 60° -os szögeket alkotnak. Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha $AC = 4\sqrt{3}$ cm!

36.12. A D pontból az α síkra DA és DB ferdeket húztak, amelyek az adott síkkal 30° -os szöget zárnak be. Az adott ferdek α síkra való vetületei közötti szög 120° -os. Határozd meg a ferdek talppontjai közötti távolságot, ha $DA = 2$ cm!

36.13. A B pontból az α síkra BA és BC ferdeket húztak, amelyek az adott síkkal 45° -os szöget zárnak be. A ferdek talppontjai közötti távolság 16 cm. Határozd meg a B pont távolságát az α síktól, ha a ferdek közötti szög 60° -os!

36.14. Az A pont az α síktól $3\sqrt{3}$ cm távolságra van. Az AB és AC ferdek a síkkal megfelelően 60° és 45° -os szögeket alkotnak, a ferdek közötti szög pedig 90° -os. Határozd meg a ferdek talppontjai közötti távolságot!

36.15. Az M pontból az α síkra MA és MB ferdeket húztak. Az MA ferde az α síkkal 45° -os szöget alkot, az MB ferde pedig 30° -os szöget. Határozd meg a ferdek talppontjai közötti távolságot, ha $MA = 6$ cm, a ferdek közötti szög pedig 45° -os!

36.16. Az M pont az $ABCD$ négyzet minden csúcsától 12 cm távolságra van, az MA egyenes a négyzet síkjával 60° -os szöget alkot. Határozd meg az M pont és a négyzet oldala közötti távolságot!

36.17.** Az M pont az $ABCD$ négyzet minden oldalától egyenlő távolságra van. A négyzet oldala $9\sqrt{6}$ cm, és 9 cm távolságra van a négyzet síkjától. Határozd meg az MA egyenes és a négyzet síkja közötti szöget!

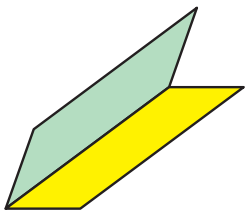


ISMÉTLŐ GYAKORLAT

36.18. A háromszög oldalai 2 cm, $2\sqrt{7}$ cm és $4\sqrt{3}$ cm. Határozd meg a háromszög középső oldalával szemközti szögét!

37. Lapszögek. A síkok hajlásszöge

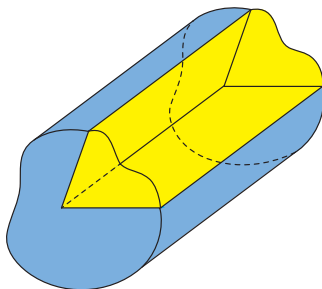
A 37.1. ábrán egy olyan alakzat látható, amely két félsíkból áll, melyeknek közös a határuk. Ez az alakzat a teret két részre osztja, amit a 37.2. ábrán két szín jelöl. Mindkét részt a félsíkokkal együtt **lapszög**nek nevezzük. A határoló félsíkok a **lapszög lapjai**, közös határ-egyenesük a **lapszög éle**.



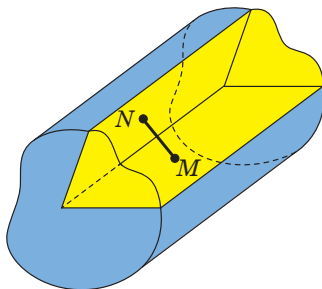
37.1. ábra

A 37.2. ábrán látható sárga és kék lapszögek lényegesen különböznek egymástól. Ezt a különbséget a következő tulajdonság adja meg. A lapszög lapjain kijelölünk tetszőleges M és N pontokat (37.3. ábra. Az MN szakasz a **sárga** lapszögben helyezkedik el, a **kékben** csak a szakasz végpontjai lesznek.

A továbbiakban, ha lapszögről beszélünk, akkor ezen azokat a lapszögeket értjük, melyek olyan tetszőleges szakaszt tartalmaznak, melyeknek végpontjai a lapszög lapjaira illeszkednek (a sárga lesz a lapszög).



37.2. ábra



37.3. ábra



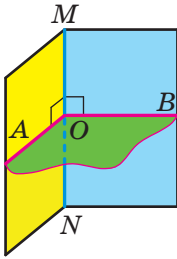
37.4. ábra

A félig nyitott osztálytábla, a nyeregtető, a nyitott laptop (37.4. ábra) némi elképzelést nyújt számunkra a lapszögről.

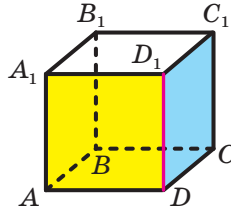
A lapszöget a síkon lévő szög térbeli analógiájának tekintjük.

Már tudjátok, hogyan határozzuk meg a szög mértékét a síkon. Megismerkedünk a lapszög mértékének meghatározásával.

A lapszög MN élén megjelölünk egy tetszőleges O pontot. Az O pontból a lapszög lapjaira illeszkedő OA és OB félegyeneseket húzunk, merőlegesen az MN élre (37.5. ábra). A félegyenések által keletkezett AOB szöget **a lapszög élszögének** nevezzük. Mivel az $MN \perp OA$ és $MN \perp OB$, ezért az $MN \perp AOB$. Így, ha a lapszög élének bármilyen pontjából merőleges síkot fektetünk a lapszög élére, akkor ez a sík a lapszöget az élszögében metszi.



37.5. ábra



37.6. ábra

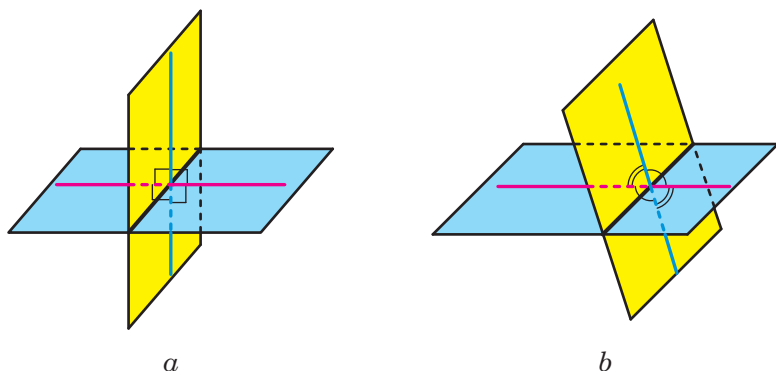
Definíció. A **lapszög mértéke** az élszögének mértékével lesz egyenlő.

A lapszöget hegyes-, derék-, tompa- vagy egyenesszögűnek nevezzük, ha az élszöge megfelelően hegyes-, derék-, tompa- vagy egyenes-szög lesz.

Például vizsgáljuk meg az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kockát (37.6. ábra). A DD_1 élű lapszög, melynek lapjai az AAD_1 és CDD_1 síkra illeszkednek, derékszögű lesz. Valóban, mivel $AD \perp DD_1$ és $CD \perp DD_1$, ezért az ADC szög lesz a DD_1 élű lapszög élszöge. Az ADC szög derékszög.

Két sík metszéseinél négy lapszög keletkezik, melyek nem lesznek egyenesszögűek (37.7. ábra). Itt két eset lehetséges:

- 1) mind a négy lapszög derékszögű (37.7. *a* ábra);
- 2) a négy lapszög közül két egyenlő hegyesszögű és két egyenlő tompaszögű lapszög keletkezik (37.7. *b* ábra).



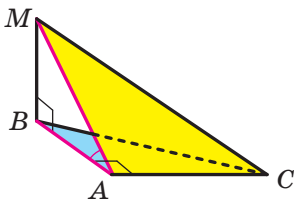
37.7. ábra

Mindkét esetben a négy lapszög között mindig lesz olyan, melynek mértéke nem nagyobb 90° -nál.

Definíció. Két egymást metsző sík hajlásszögének azt a lapszöget nevezzük, amely nem nagyobb 90° -nál. Két párhuzamos sík hajlásszöge 0° -os.

A sokszög és a sík hajlásszögének, amelyre az adott sokszög nem illeszkedik, a sokszög síkja és az adott sík hajlásszögét nevezzük.

Két különböző síkra illeszkedő sokszög hajlásszögének, azoknak a síkoknak a hajlásszögét nevezzük, amelyre az adott sokszögek illeszkednek.



37.8. ábra

Feladat. Az ABC ($A\angle = 90^\circ$) és ABM ($B\angle = 90^\circ$) derékszögű háromszögek AB befogója közös (37.8. ábra). Az MB szakasz merőleges az ABC síkra. Adott, hogy $MB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $MC = 10$ cm. Határozd meg az ABC és AMC síkok közötti szöveget!

Megoldás. A BA szakasz az MA ferde merőleges vetülete az ABC síkon. Mivel $BA \perp AC$, ezért a három merőleges tétele alapján az $MA \perp AC$. Tehát az MAB szög az AC élű lapszög élszöge lesz, melyeknek lapjai az ABC és AMC síkok lesznek. Mivel az MAB szög hegyesszög, ezért az ABC és AMC síkok közötti szög egyenlő az MAB szöggel.

Az AMC derékszögű háromszög AM oldalának hosszát a következő képlettel számíthatjuk ki: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. Innen $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (cm).

Az MAB derékszögű háromszög MAB szöge pedig a $\sin MAB\angle = \frac{MB}{MA}$ képlettel számítható ki. Innen $\sin MAB\angle = \frac{1}{2}$ és $MAB\angle = 30^\circ$.

Felelet: 30° . ◀

Igaz a következő tétel, amely az adott sokszög területét és a vetületének a területét kapcsolja össze.

37.1. tétel (a sokszög ortogonális vetületének területe). *A domború sokszög vetületének területe egyenlő a sokszög területének, valamint a sokszög és a vetülete közötti α szög koszinuszának szorzatával, ahol $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.*

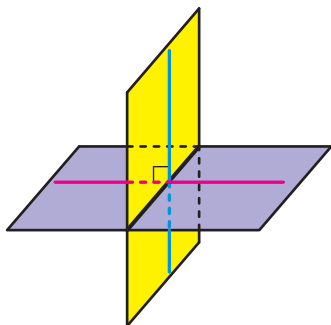
Definíció. Két síkot **merőlegesnek** mondunk, ha a köztük lévő szög 90° -os.

Ha az α és β síkok merőlegesek, akkor azt így jelöljük: $\alpha \perp \beta$. Úgy is szokás mondani, hogy az α sík merőleges a β síkra, vagy a β sík merőleges az α síkra.

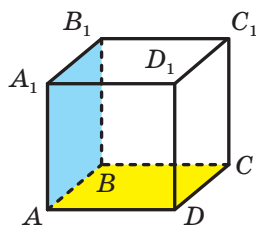
A merőleges síkok szemléletes példái lehetnek: a szoba fala és a mennyezete, az ajtó síkja és a padló, a tenispálya és a hálójának a síkja (37.9. ábra).



37.9. ábra



37.10. ábra



37.11. ábra

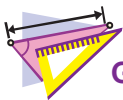
Természetesen az egymásra merőleges síkok négy egyenlő lapszö-
get alkotnak (37.10. ábra).

37.2. tétel (a merőleges síkok ismertetőjele).
*Ha két sík közül az egyik olyan egyenesre illeszkedik, amely
merőleges a másik síkra, akkor ezek a síkok merőlegesek egy-
másra.*

Például az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest $AA_1 B_1 B$ lapjának a síkja
(37.11. ábra) merőleges az $ABCD$ lap síkjára. Valóban, az $AA_1 B_1$ sík
az AA_1 egyenesre illeszkedik, amely merőleges az ABC síkra.



1. Milyen alakzatot nevezünk a lapszög élszögének?
2. Mit nevezünk a lapszög mértékének?
3. Mit nevezünk a két egymást metsző sík közötti szögnek?
4. Mivel egyenlő két párhuzamos sík közötti szög?
5. Fogalmazd meg a sokszög ortogonális vetületéről szóló tételt!
6. Milyen síkokat nevezünk merőlegeseknek?
7. Fogalmazd meg a merőleges síkok ismertetőjelét!

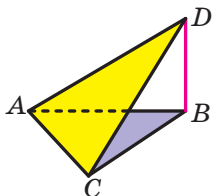


GYAKORLATOK

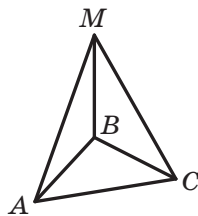
37.1.° A környezettedben lévő tárgyakon mutasd meg a lapszögeket!

37.2.° Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (37.12. ábra).

- 1) A felsorolt szögek közül melyik lesz az ABC és $AB_1 C$ síkok lap-
szöge:
a) $A_1 AB \angle$; b) $A_1 AB_1 \angle$; c) $B_1 DA \angle$; d) $B_1 AB \angle$; e) $B_1 DB \angle$?
- 2) Határozd meg az adott lapszög értékét!



37.16. ábra



37.17. ábra

37.7.° Az ABC és ACD háromszögek különböző síkokra illeszkednek (37.16. ábra). A BD egyenes merőleges az ABC síkra. Határozd meg a lapszöget, melynek lapjaira illeszkednek az adott háromszögek, ha ismert, hogy $\angle ACD = 90^\circ$, $BC = 6$ cm, $CD = 12$ cm!

37.8.° Adott az α sík és a vele párhuzamos a egyenes. Hány olyan síkot lehet fektetni az a egyenesre, hogy az α sík és a másik sík közötti φ szögre teljesüljön a következő feltétel:

- 1) $\varphi = 90^\circ$; 2) $\varphi = 0^\circ$; 3) $0^\circ < \varphi < 90^\circ$?

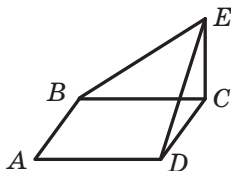
37.9.° Az MB szakasz merőleges az ABC egyenlő oldalú háromszög síkjára (37.17. ábra). Határozd meg az ABM és CBM síkok közötti szöget!

37.10.° A CE szakasz merőleges az $ABCD$ négyzet síkjára (37.18. ábra). Határozd meg a BCE és DCE síkok közötti szöget!

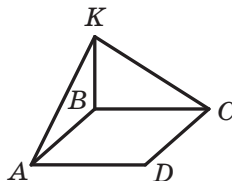
37.11.° A BK szakasz merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára (37.18. ábra), ahol $\angle ABC = 100^\circ$. Határozd meg az ABK és CBK síkok közötti szöget!

37.12.° Határozd meg a sokszög vetületét egy adott síkra, ha a sokszög területe $18\sqrt{2}$ cm², a sokszög síkja és a vetület síkja közötti szög pedig 45° !

37.13.° Határozd meg a sokszög területét, ha vetületének területe egy adott síkra 24 cm², a sokszög síkja és a vetület síkja közötti szög pedig 30° !



37.18. ábra

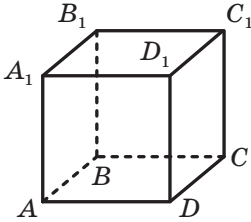


37.19. ábra

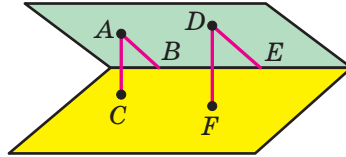
37.14.° A környezetben lévő tárgyak közül melyek alkotnak merőleges síkokat!

37.15.° A 37.20. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka látható. Határozd meg, hogy merőlegesek-e a síkok:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| 1) $A_1 B_1 C_1$ és CDD_1 ; | 3) $AA_1 C_1$ és ABC ; |
| 2) ABC és $A_1 B_1 C_1$; | 4) ACC_1 és BDD_1 ! |



37.20. ábra



37.21. ábra

37.16.° A hegyesszögű lapszög egyik lapján felvettük az A és D pontokat (37.21. ábra). Az A pontból AB és AC merőlegeseket bocsátunk a lapszög élére és a másik lapjára. A D pontból pedig DE és DF merőlegeseket a lapszög élére és a másik lapjára. Határozd meg a DE szakasz hosszát, ha $AB = 21$ cm, $AC = 12$ cm, $DF = 20$ cm!

37.17.° A hegyesszögű lapszög egyik lapján felvettük az A és B pontokat, melyek megfelelően 14 és 8 cm-re lesznek a másik lapjától. Az A pont és a lapszög éle közötti távolság 42 cm. Határozd meg a B pont távolságát a lapszög élétől!

37.18.° Az egyenlő szárú trapéz alapjai 10 cm és 18 cm, a szára pedig 8 cm. Határozd meg az adott trapéz vetületének területét az α síkra, ha a trapéz síkja és az α sík közötti szög 30° -os!

37.19.° A rombusz egyik oldalán keresztül, melynek átlói 6 cm és 12 cm, α síkot fektettünk, amely a rombusz síkjával 30° -os szöget alkot. Határozd meg a rombusz vetületét az α síkra!

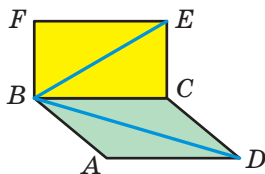
37.20.** A B pont a lapszög belsejében helyezkedik el, és a lapjaitól $\sqrt{2}$ cm és $\sqrt{3}$ cm távolságra van, az élétől pedig 2 cm-re. Határozd meg a lapszög szögét!

37.21.** A C pont a lapszög belsejében helyezkedik el. A C pontból a lapszög lapjaira bocsátott merőlegesek közötti szög 110° -os. Határozd meg a lapszög szögét!

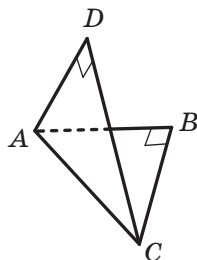
37.22.** A 45° -os lapszög lapjaira a lapszög élével párhuzamos egyeneseket fektettünk, melyek az élétől megfelelően $2\sqrt{2}$ cm és 3 cm-re vannak. Határozd meg a párhuzamos egyenesek közötti távolságot!

37.23.** Az α sík a lapszög lapjait az m és n párhuzamos egyenesekben metszi. A lapszög éle az m egyenestől 3 cm-re, az n egyenestől pedig 5 cm távolságra van. Az m és n egyenesek közötti távolság 7 cm. Határozd meg a lapszög szögét!

37.24.** Az $ABCD$ és a $CBFE$ téglalapok síkjai merőlegesek egymásra (37.22. ábra). Határozd meg az E pont és az AD egyenes közötti, valamint a D pont és a BF egyenes közötti távolságot, ha $AB = BF = 5$ cm, $BC = 12$ cm!



37.22. ábra



37.23. ábra

37.25.** Az ABC és ADC szabályos háromszögek merőleges síkokra illeszkednek. Határozd meg a BD egyenes és az ABC sík hajlás-szögét!

37.26.** Az ABC és ADC egyenlő szárú derékszögű háromszögek közös $AC = 6$ cm átfogóval rendelkeznek, a síkjaik pedig merőlegesek egymásra (37.23. ábra). Határozd meg a B és D pontok közötti távolságot!

37.27.** A szakasz végpontjai két merőleges síkra illeszkednek. A szakasz végpontjai és a síkok metszésvonala közötti távolság pedig 15 cm és 16 cm. A szakasz végpontjaiból a metszésvonalra bocsátott merőlegesek talppontjai közötti távolság 12 cm. Határozd meg az adott szakasz hosszát!

37.28.** Az A és B pontok megfelelően az α és β merőleges síkokra illeszkednek. Az A és B pontból AC és BD merőlegeseket bocsátottak az α és β síkok metszésvonalára. Határozd meg a B pont és az α és β síkok metszésvonala közötti távolságot, ha az A pont és a metszésvonal távolsága 9 cm, $AB = 17$ cm, $CD = 12$ cm!

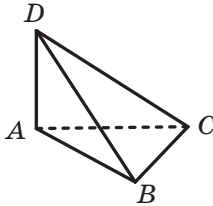
37.29.** Az α és β merőleges síkok. Az A pont az α síkra illeszkedik, a B pont pedig a β síkra. Az A pont távolsága az α és β síkok metszésvonalától 5 cm, a B ponté pedig $5\sqrt{2}$ cm. Határozd meg az AB egyenes és az α sík közötti szöget, ha az AB egyenes és a β sík közötti szög 30° -os!

37.30.** A 6 cm-es szakasz végpontjai két egymásra merőleges síkra illeszkednek, a szakasz végpontjainak távolsága a síkok metszésvonaláig 3 cm és $3\sqrt{3}$ cm. Határozd meg azokat a szögeket, amelyek ez a szakasz az adott síkokkal alkot!

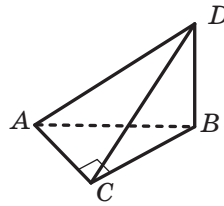
37.31.** Az $ABCD$ és $AEFD$ közös AD alapú trapézok síkjai merőlegesek egymásra, $BAD\angle = EAD\angle = 90^\circ$, $ADC\angle = ADF\angle = 60^\circ$, $CD = 4$ cm, $DF = 8$ cm. Határozd meg: 1) a BC és az EF egyenesek; 2) a C és F pontok közötti távolságot!

37.32.** Az $ABCD$ négyzet és az $AEFD$ téglalap síkjai merőlegesek egymásra. Határozd meg a BC és EF egyenesek közötti távolságot, ha a négyzet területe 25 cm^2 , a téglalap területe pedig 60 cm^2 !

37.33.** Az $ABCD$ tetraéder DA éle merőleges az ABC síkra (37.24. ábra), ahol $AB = BC = AC = 8$ cm, $BD = 4\sqrt{7}$ cm. Határozd meg az ABC és a BCD síkok által megadott lapszög szögét!



37.24. ábra



37.25. ábra

37.34.** Az $ABCD$ tetraéder DB éle merőleges az ABC síkra (37.25. ábra), ahol $ACB\angle = 90^\circ$, $AC = BC = 7$ cm, $AD = 7\sqrt{5}$ cm. Határozd meg az ABC és ACD síkok által alkotott lapszög szögét!

37.35.* Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka CC_1 élének az M pont a felezőpontja. Határozd meg a BMD és az $A_1 BD$ síkok hajlásszögét!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

37.36. A háromszög két oldala 15 cm és 25 cm, a harmadik oldalra bocsátott súlyvonal pedig 16 cm. Határozd meg a háromszög harmadik oldalát!



AZ 5. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

Az egyenesek közötti szög a térben

Két egymást metsző egyenes közötti szögnek annak a szögnek a mértékét nevezzük, amely a metszéspontjuknál keletkezik és nem nagyobb, mint 90° .

Két párhuzamos egyenes egymással 0° -os szöget zár be.

Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet olyan egymást metsző egyenesek alkotnak, melynek szárai párhuzamosak az adott kitérő egyenesekkel.

Két egyenest a térben merőlegesnek nevezzük, ha a köztük lévő szög 90° -kal egyenlő.

Az egyenes és a sík merőlegessége

Az egyenest a síkra merőlegesnek mondjuk, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére.

Ha az egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges erre a síkra is.

Ha két párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges a síkra, akkor a másik is merőleges ugyanerre a síkra.

Ha két egyenes egy és ugyanarra a síkra merőleges, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.

Az adott ponton keresztül az adott síkra egy és csakis egy merőleges bocsátható.

Az alakzat ortogonális vetülete

Legyen az F_1 alakzat az F alakzat l egyenes menti párhuzamos vetülete az α síkra. Ha az $l \perp \alpha$, akkor az F_1 alakzatot az F alakzat ortogonális vetületének nevezzük az α síkra.

A pont és a sík távolsága

Ha az adott pont nem illeszkedik a síkra, akkor a sík és a pont közötti távolságon az adott pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszát értjük. Ha a pont illeszkedik a síkra, akkor a pont és a sík közötti távolságot nullának tekintjük.

Az egyenes és a vele párhuzamos sík közötti távolság

Az egyenes távolsága a vele párhuzamos síktól egyenlő lesz az egyenes tetszőleges pontjának távolságával a síktól.

Két párhuzamos sík közötti távolság

Két párhuzamos sík közötti távolságnak nevezzük az egyik sík bármely pontjának a másik síktól való távolságát.

Három merőleges tétele

Ha az egyenes, amely egy síkra illeszkedik merőleges a ferde vetületére, akkor merőleges magára a ferdére is. És fordítva, ha a síkban fekvő egyenes merőleges a síkhoz húzott ferdére, akkor merőleges a ferde vetületére is.

Az egyenes és a sík hajlásszöge

Ha az egyenes párhuzamos a síkkal, vagy rá illeszkedik, akkor az egyenes és a sík hajlásszöge 0° .

Ha az egyenes merőleges a síkra, akkor úgy tekintjük, hogy az egyenes és a sík hajlásszöge 90° .

Ha az egyenes metszi a síkot, és nem merőleges rá, akkor az egyenes és a sík hajlásszöge az a szög, amelyet az egyenes a síkon lévő merőleges vetületével bezár.

A lapszög szöge

A lapszög szögének az élszögének mértékét nevezzük.

Két egymást metsző sík hajlásszöge

Két egymást metsző sík hajlásszögének azt a lapszöget nevezzük, amely nem nagyobb 90° -nál.

A sokszög ortogonális vetületének területe

A domború sokszög vetületének területe egyenlő a sokszög területének, valamint a sokszög és a vetülete közötti α szög koszinuszának szorzatával, ahol $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$.

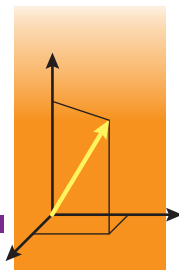
Merőleges síkok

Két síkot merőlegesnek mondunk, ha a köztük lévő szög 90° -os.

A merőleges síkok ismertetőjele

Ha két sík közül az egyik olyan egyenesre illeszkedik, amely merőleges a másik síkra, akkor ezek a síkok merőlegesek egymásra.

KOORDINÁTÁK ÉS VEKTOROK A TÉRBEN 6.§.

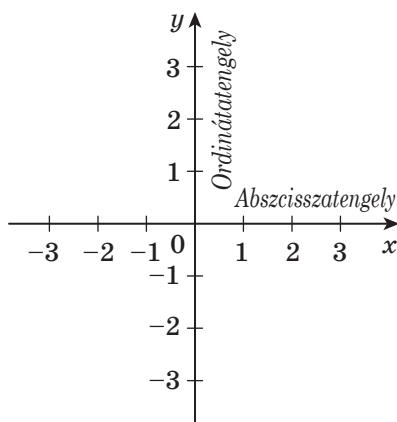


Ebben a paragrafusban megismerkedtek a térbeli derékszögű koordináta-rendszerrel, megtanuljátok meghatározni a pontok térbeli koordinátáit, a szakasz hosszát és a felezőpontjának koordinátáit.

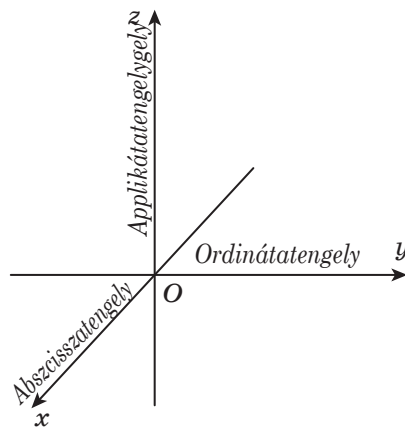
Általánosítjátok és bővítek a vektorokról eddig tanultakat.

38. A pont Descartes-féle koordinátái a térben

Az előző osztályokban megismerkedtetek a derékszögű koordináta-rendszerrel a síkon, amit két, egy közös kezdőpontból kiinduló, egymásra merőleges számegyenes alkot (38.1. ábra).



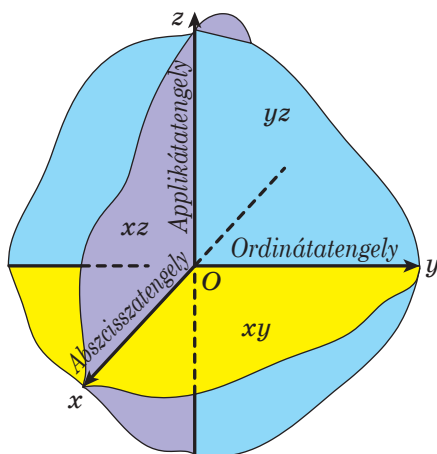
38.1. ábra



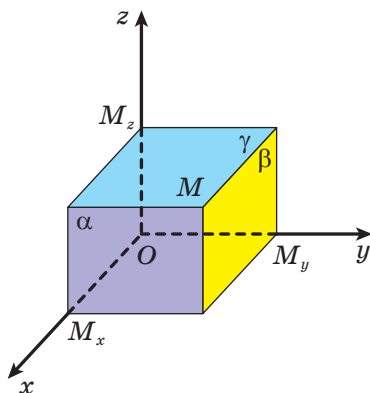
38.2. ábra

A koordináta-rendszert a térben is megadhatjuk.

A **derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszernek a térben** három, egymásra kölcsönösen merőleges számegyeneset nevezünk, melyeknek közös a kezdőpontjuk (38.2. ábra). A három számegyenes metszéspontját O betűvel jelöljük, és **origónak** (a **koordináta-rendszer kezdőpontjának**) mondjuk. A koordinátaegyeneseket x , y és z betűkkel jelöljük, és megfelelően **abszcisszatengelynek**, **ordinátatengelynek** és **applikátatengelynek** nevezzük.



38.3. ábra



38.4 ábra

Azokat a síkokat, amelyek illeszkednek az x és y , x és z , y és z tengelypárokra, **koordinátasíkoknak** nevezzük, és jelölésük megfelelően: xy , xz , yz (38.3. ábra).

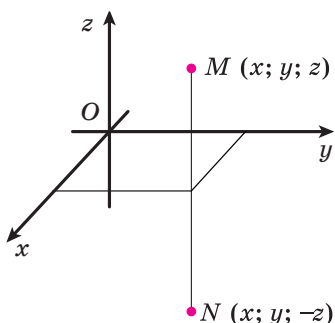
A koordináta-rendszer által meghatározott teret **koordinátatér**-nek mondjuk. Ha a koordinátatengelyeket az x , y , z betűkkel jelöljük, akkor a koordinátateret xyz -vel.

A síkmértanból már tudjuk, hogy minden M pontnak az xy koordinátasíkon egy $(x; y)$ rendezett számpár felel meg, melyeket az M pont koordinátáinak nevezzük. Így jelöljük: $M(x; y)$.

Hasonlóan minden M pontnak a koordinátatérben egy $(x; y; z)$ rendezett számhármast felel meg, melyet a következőképpen definiálunk. Az M ponton át három α , β és γ síkot fektetünk, melyek megfelelően merőlegesek az x , y és z tengelyekre. A síkok koordinátatengelyekkel való metszéspontjait az M_x , M_y és M_z betűkkel jelöljük (38.4. ábra). Az M_x pont koordinátáját az x tengelyen az M pont **abszcisszájának** nevezzük és x -szel jelöljük. Az M_y pont koordinátáját az y tengelyen az M pont **ordinátájának** nevezzük és y -nal jelöljük. Az M_z pont koordinátáját az z tengelyen az M pont **applikátájának** nevezzük és z -vel jelöljük.

Az ily módon kapott $(x; y; z)$ számhármast az **M pont térbeli koordinátájának** nevezzük. Így írjuk fel: $M(x; y; z)$.

Ha az M pont koordinátája $M(x; y; z)$, akkor az $|x|$, $|y|$, $|z|$ számok egyenlők az M pont és az yz , xz , xy koordinátasíkok közötti távolságokkal. E tény ismeretében be lehet bizonyítani, hogy az



38.5. ábra

$M(x; y; z)$ és $N(x; y; -z)$ pontok például egy olyan egyenesre illeszkednek, amely merőleges az xy síkra, és egyenlő távolságra van ettől a síktól (38.5. ábra). Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az M és N **pontok szimmetrikusak** az xy síkra.

Ha egy pont a koordinátasíkra vagy a koordinátatengelyre illeszkedik, akkor egyes koordinátái nullával lesznek egyenlők. Például az $A(x; y; 0)$ pont az xy koordinátasíkra illeszkedik, a $B(0; 0; z)$ pont pedig az applikátatengelyre.

Igazak lesznek a következő állítások.

38.1. tétel. Az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok közötti távolság a következő képlettel határozható meg:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

38.2. tétel. A végpontok koordinátaival megadott szakasz felezőpontjának koordinátái egyenlők a végpontok megfelelő koordinátáinak a számtani közepével, vagyis az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok felezőpontja a következő pont lesz:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

A 38.1. és a 38.2. tétel hasonlóan bizonyítható, mint a síkmértan megfelelő tételei.

Például az $A(x; y; z)$ és $B(-x; -y; -z)$ pontok felezőpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, vagyis az $O(0; 0; 0)$ pont. Az ilyen esetben azt mondjuk, hogy az A és B pontok **szimmetrikusak a koordináta-rendszer kezdőpontjára**.



1. Hogyan nevezzük a közös kezdőpontú három, egymásra kölcsönösen merőleges koordinátatengelyt?
2. Hogyan nevezzük azt a koordinátatengelyt, melyet x -szel jelölünk? y -nal jelölünk? z -vel jelölünk?
3. Hogyan kell felállítani a kapcsolatot a koordinátatér minden M pontja és az $(x; y; z)$ rendezett számhármassok között?
4. Milyen esetben mondjuk azt, hogy két pont szimmetrikus az xy koordinátasíkra? A xz koordinátasíkra? Az yz koordinátasíkra?
5. Hogyan kell meghatározni két pont közötti távolságot, ha ismertek a pontok koordinátái?

6. Hogyan kell meghatározni a szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha ismeretek a szakasz végpontjainak koordinátái?
7. Milyen esetben mondjuk azt, hogy két pont szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára?



GYAKORLATOK

38.1.° Állapítsd meg, hogy az adott pont illeszkedik-e koordinátatengelyre:

- 1) $A(4; -3; 0)$; 3) $C(-6; 0; 0)$; 5) $E(0; 0; -2)$;
 2) $B(1; 0; -5)$; 4) $D(0; 7; 0)$; 6) $F(3; 0; 0)$!

Igenlő válasz esetén nevezd meg a tengelyt is!

38.2.° Állapítsd meg, hogy az adott pont illeszkedik-e koordinátasíkra:

- 1) $A(4; -3; 5)$; 3) $C(3; 3; 0)$; 5) $E(0; 4; 0)$;
 2) $B(0; -2; 6)$; 4) $D(2; 0; 8)$; 6) $F(-1; 1; 2)$!

Igenlő válasz esetén nevezd meg a koordinátasíkot is!

38.3.° Mekkora távolságra van az $M(4; -5; 2)$ pont a következő koordinátasíktól:

- 1) xy ; 2) xz ; 3) yz ?

38.4.° Milyen az $M(-3; 2; 4)$ pont vetületének koordinátái a következő koordinátasíkra:

- 1) xz ; 2) yz ; 3) xy ?

38.5.° Határozd meg az A és B pontok közötti távolságot, ha:

- 1) $A(3; -4; 2)$, $B(5; -6; 1)$; 2) $A(-2; 3; 1)$, $B(-3; 2; 0)$!

38.6.° Határozd meg a $C(6; -5; -1)$ és $D(8; -7; 1)$ pontok közötti távolságot!

38.7.° Határozd meg a CD szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $C(-2; 6; -7)$, $D(4; -10; -3)$!

38.8.° Határozd meg a EF szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha $E(3; -3; 10)$, $F(1; -4; -8)$!

38.9.* Az $A(-1; 6; 2)$, $B(-1; -6; 2)$, $C(1; 6; -2)$, $D(1; -6; 2)$ pontok közül melyek illeszkednek az xz síkkal párhuzamos síkra?

38.10.* Az $M(5; 10; -3)$, $N(5; 9; 3)$, $K(4; -9; 3)$, $P(4; -9; 2)$ pontok közül melyek illeszkednek az xy síkkal párhuzamos síkra?

38.11.* Nevezd meg annak a pontnak a koordinátáit, amely szimmetrikus az $M(1; -5; 2)$ ponttal a következő koordinátasíkra:

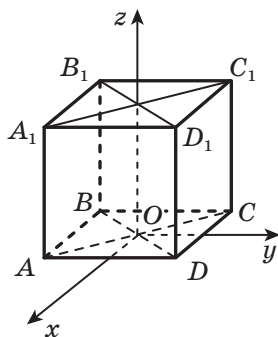
- 1) xz ; 2) yz ; 3) xy !

38.12.* Nevezd meg annak a pontnak a koordinátáit, amely szimmetrikus az $N(-7; 1; 0)$ ponttal a koordináta-rendszer kezdőpontjához képest!

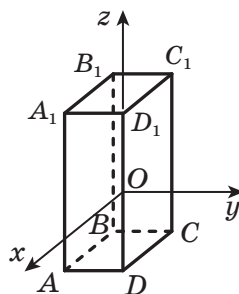
38.13.* Az $A(5; -8; 1)$, $B(5; 8; 1)$, $C(-5; 7; 1)$, $D(5; -7; -1)$ pontok közül melyek illeszkednek egy az ordinátatengellyel párhuzamos egyenesre?

38.14.* A $D(2; 3; 4)$, $E(-2; 3; 4)$, $K(2; 3; -4)$, $M(-2; -3; 4)$ pontok közül melyek illeszkednek egy, az applikátengellyel párhuzamos egyenesre?

38.15.* Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka a derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyezkedik el, mint ahogy a 38.6. ábrán látható. Az A pont koordinátái $(1; -1; 0)$. Határozd meg a többi csúcának a koordinátáit!



38.6. ábra



38.7. ábra

38.16.* Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest oldalélei párhuzamosak az applikátengellyel (38.7. ábra). $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. A koordináta-rendszer O kezdőpontja a DD_1 él felezőpontja. Határozd meg a téglatest csúcainak a koordinátáit!

38.17.* Az $A(3; -2; 6)$ és $C(-1; 2; -4)$ pontok az $ABCD$ négyzet csúcsai. Határozd meg a négyzet területét!

38.18.* Az $A(5; -5; 4)$ és $B(8; -3; 3)$ pontok az ABC egyenlő oldalú háromszög csúcsai. Határozd meg a háromszög területét!

38.19.* Az S pont az AD szakasz felezőpontja, ahol $A(-1; -2; -3)$, $S(5; -1; 0)$. Határozd meg a D pont koordinátáit!

38.20.* Az $A(1; y; 3)$ és $B(3; -6; 5)$ pontok közötti távolság $2\sqrt{6}$. Határozd meg az y értékét!

38.21.* Az A pont az abszcisszatengelyre illeszkedik. Az A pont távolsága a $C(1; -1; -2)$ ponttól 3 egység. Határozd meg az A pont koordinátáit!

38.22.** Határozd meg az $M(-3; 4; 9)$ pont és az applikátengely közötti távolságot!

38.23.** Határozd meg a $K(12; 10; -5)$ pont és az ordinátatengely közötti távolságot!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

38.24. Az egyenlő szárú trapéz alapjai 13 cm és 37 cm, az átlói pedig merőlegesek egymásra. Határozd meg a trapéz területét!

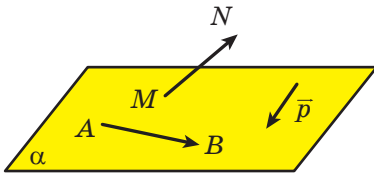
39. Vektorok a térben

A síkmértanban megismerkedtünk a síkbeli vektorokkal. Most pedig megkezdjük az ismerkedést a térbeli vektorokkal. A síkbeli vektorok sok fogalma és tulajdonsága szinte megegyezik a térbeli vektorokéval. A tételek bizonyítása is teljesen hasonlóan történik a térbeli vektorokra, mint a megfelelő tétel bizonyítása a síkvektorokra.

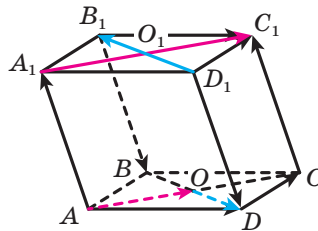
Vizsgáljuk meg az AB szakaszt. Ha az A pontot a szakasz **kezdőpontjának** tekintjük, a B pontot pedig a **végpontjának**, akkor az ilyen szakaszt nem csak a hossza, de az A pontból a B pontba való iránya is jellemezi. Ha meg van adva, hogy melyik pont a szakasz kezdőpontja, és melyik a szakasz végpontja, akkor az ilyen szakaszt **irányított szakasznak** vagy **vektornak** nevezzük.

Azt a vektort, melynek kezdete az A pont, a végpontja pedig a B , így jelöljük: $\overrightarrow{AB}$ (így olvassuk: AB vektor). A vektorok jelölésére az ábécé kisbetűjét is használhatjuk, amely fölé kis nyilat teszünk.

A 39.1. ábrán az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ és $\vec{p}$ vektorok láthatók.



39.1. ábra



39.2. ábra

A szakasztól eltérően, melynek végpontjai különböző pontok, a vektor kezdő- és végpontja egybeeshet.

Azt a vektort, melynek a kezdő- és végpontja egybeesik, **nullvektornak** nevezzük, és $\vec{0}$ -val jelöljük.

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor **abszolút értékének** az AB szakasz hosszát nevezzük. Így jelöljük: $|\overrightarrow{AB}|$. Az $\vec{a}$ abszolút értékét így jelöljük: $|\vec{a}|$. Úgy tekintjük, hogy a nullvektor hossza nullával egyenlő: $|\vec{0}| = 0$.

Definíció. Két nem nullvektort **kollineárisnak** nevezzük, ha párhuzamos egyenesekre vagy egy egyenesre illeszkednek. A nullvektort minden vektorral kollineárisnak tekintjük.

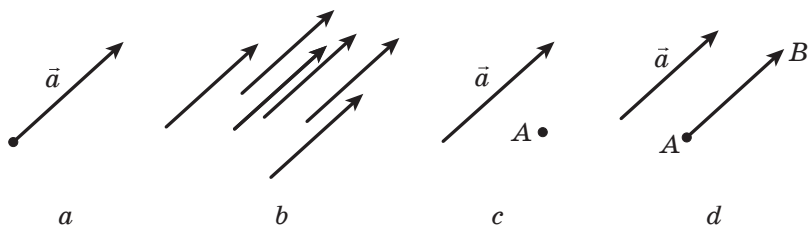
A 39.2. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ négyoldalú hasáb látható. Az $\overrightarrow{AO}$ és az $\overrightarrow{A_1 C_1}$ vektorok kollineárisak. Ezt így írjuk fel: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1 C_1}$.

A nem nullvektorok lehetnek **egyirányúak** és **ellentétes irányúak** is. Például a 39.2. ábrán az $\overrightarrow{AO}$ és $\overrightarrow{A_1C_1}$ vektorok egyirányúak. Ezt így jelöljük: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Az $\overrightarrow{OD}$ és $\overrightarrow{D_1B_1}$ vektorok ellentétes irányúak. Ezt így jelöljük: $\overrightarrow{OD} \updownarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Definíció. Két nem nullvektort **egyenlőnek** mondunk, ha az abszolút értékük egyenlő és egyirányúak. Bármilyen két nullvektor egyenlő.

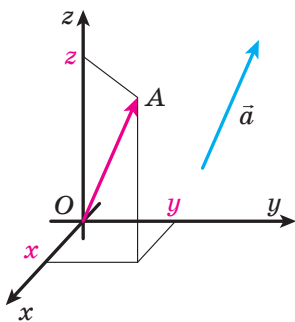
A 39.2. ábrán $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Gyakran, amikor egy vektorról beszélünk, nem tisztázzuk, hogy melyik pont lesz annak a kezdőpontja. Így, a 39.3. a ábrán az $\vec{a}$ vektor látható. A 39.3. b ábrán az $\vec{a}$ vektorral egyenlő vektorok láthatók. Ezek mindegyikét $\vec{a}$ vektornak szokás nevezni.



39.3. ábra

A 39.3. c ábrán az $\vec{a}$ vektor és az A pont látható. Megszerkesztjük az $\overrightarrow{AB}$ vektort, amely egyenlő az $\vec{a}$ vektorral. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\vec{a}$ vektort az A pontból indítjuk (39.3. d ábra).



39.4. ábra

Vizsgáljuk meg a koordinátatérben az $\vec{a}$ vektort. A koordináta-rendszer kezdőpontjából indítjuk az $\overrightarrow{AB}$ vektort, amely az $\vec{a}$ vektorral egyenlő (39.4. ábra). Az $\vec{a}$ **vektor koordinátáinak** az A pont koordinátáit nevezzük. Az $\vec{a}(x; y; z)$ felírás azt jelenti, hogy az $\vec{a}$ vektornak a koordinátái $(x; y; z)$ lesz.

Az egyenlő vektoroknak a koordinátái is egyenlők és fordítva, ha két vektor megfelelő koordinátái egyenlők, akkor maguk a vektorok is egyenlők lesznek.

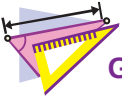
39.1. tétel. Ha az $A(x_1; y_1; z_1)$ és $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontjai, akkor az $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ és $z_2 - z_1$ számok megfelelően az $\vec{a}$ vektor első, második és harmadik koordinátái lesznek.

A két pont távolságának képletéből következik, hogyha az $\vec{a}$ vektornak a koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$, akkor

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$



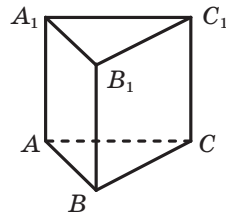
1. Hogyan jelöljük az A kezdőpontú és B végpontú vektort?
2. Mit nevezünk nullvektornak?
3. Mit nevezünk a vektor abszolút értékének?
4. Milyen vektorokat nevezünk kollineárisoknak?
5. Milyen két nem nullvektort nevezünk egyenlőknek?
6. Mit mondhatunk az egyenlő vektorok koordinátáiról?
7. Mit mondhatunk azokról a vektorokról, melyeknek a megfelelő koordinátái egyenlők?
8. Hogyan kell meghatározni a vektor koordinátáit, ha ismert a kezdő- és végpontjának a koordinátái?
9. Hogyan kell meghatározni a vektor abszolút értékét, ha ismertek a koordinátái?



GYAKORLATOK

39.1.° A 39.5. ábrán az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb látható, melynek alapja szabályos háromszög. Egyenlők-e a következő vektorok:

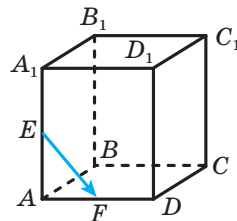
- 1) $\vec{AC}$ és $\vec{A_1C_1}$;
- 2) $\vec{AC}$ és $\vec{A_1B_1}$;
- 3) $\vec{BB_1}$ és $\vec{C_1C}$;
- 4) $\vec{BB_1}$ és $\vec{AA_1}$?



39.5. ábra

39.2.° Az $ABCD A_1B_1C_1D_1$ téglatest AA_1 és AD éleinek megfelelő felezőpontjai az E és F pontok (39.6. ábra). $AB \neq AD$. Nevezd meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjuk a téglatest csúcsai, és:

- 1) egyirányúak az $\vec{EF}$ vektorral;
- 2) ellentétes irányúak az $\vec{AB_1}$ vektorral;
- 3) azonos az abszolút értékük a $\vec{BC_1}$ vektorral!



39.6. ábra

39.3.° Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest CD és CC_1 éleinek megfelelő felezőpontjai az M és K pontok. Nevezd meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjuk a téglatest csúcsai, és:

- 1) egyirányúak az $\overline{AD}$ vektorral;
- 2) ellentétes irányúak az $\overline{MK}$ vektorral;
- 3) egyenlő az abszolút értékük az $\overline{AC_1}$ vektorral!

39.4.° Rajzolj egy $ABCD$ tetraédert! Mérj fel:

- 1) az A pontból a $\overline{CA}$ vektorral egyenlő vektort;
- 2) a B pontból az $\overline{AC}$ vektorral egyenlő vektort;
- 3) a D pontból a $\overline{BC}$ vektorral egyenlő vektort!

39.5.° Rajzolj egy $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kockát! Mérj fel:

- 1) az A pontból az $\overline{A_1 A}$ vektorral egyenlő vektort;
- 2) a C pontból az $\overline{A_1 C_1}$ vektorral egyenlő vektort;
- 3) a D_1 pontból a $\overline{B_1 D}$ vektorral egyenlő vektort!

39.6.° Mik a nullvektor koordinátái?

39.7.° Határozd meg az $\overline{AB}$ vektor koordinátáit, ha

- 1) $A(3; 4; 2)$, $B(1; -4; 5)$; 2) $A(-6; 7; -1)$, $B(2; 9; 8)$!

39.8.° Határozd meg a $\overline{CD}$ vektor koordinátáit, ha $C(-1; 10; 4)$, $D(-1; 0; 2)$!

39.9.° Határozd meg az $\overline{m}(2; -5; \sqrt{7})$ vektor abszolút értékét!

39.10.° Határozd meg az $\overline{MK}$ vektor abszolút értékét, ha $M(10; -4; 20)$, $K(8; -2; 19)$!

39.11.° Határozd meg a $\overline{PF}(2; -3; 6)$ vektor végpontjának koordinátáit, ha $P(3; 5; -1)$!

39.12.° Határozd meg az $\overline{ST}(-3; 4; -2)$ vektor kezdőpontjának koordinátáit, ha $T(4; 2; 0)$!

39.13.° Adottak az $A(-2; 3; 5)$, $B(1; 2; 4)$, $C(4; -3; 6)$ pontok. Határozd meg a D pont koordinátáit, hogy teljesüljön a következő egyenlőség: $\overline{AB} = \overline{CD}$!

39.14.° Adott az $A(5; -12; 7)$, $B(0; y; 3)$, $C(x; 17; -14)$, $D(15; 0; z)$ pontok. Az x , y és z mely értékeinél teljesül az $\overline{AB} = \overline{CD}$ egyenlőség?

39.15.° Az $\overline{a}(-4; y; 12)$ abszolút értéke 13. Határozd meg az y értékét!

39.16.* A k mely értékeinél lesznek az $\vec{a}(4; k+3; 10)$ és $\vec{b}(k; 4; k+9)$ vektorok abszolút értékei egyenlők?

39.17.** Vektorokat alkalmazva bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ha a csúcsainak koordinátái: $A(-4; 2; 5)$, $B(-6; 3; 0)$, $C(12; -8; 1)$ és $D(14; -9; 6)$!

39.18.** Adott az $ABCD$ paralelogramma három csúcsának koordinátái: $A(10; -8; -1)$, $C(-2; 4; 4)$ és $D(11; -20; 10)$. Határozd meg a B pont koordinátáit, és ehhez használd a vektorokat!

39.19.** Az $\vec{m}$ vektor abszolút értéke $4\sqrt{3}$, a koordinátái pedig egyenlők. Határozd meg az $\vec{m}$ vektor koordinátáit!

39.20.** A $\vec{c}(x; y; z)$ vektor abszolút értéke 9, az x és z koordinátái egyenlők, az x és y koordináták pedig ellentett számok. Határozd meg a $\vec{c}$ vektor koordinátáit!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

39.21. A kör középpontjának egyik oldalán 30 és 48 cm-es párhuzamos húrokat húztak. Határozd meg a húrok közötti távolságot, ha a kör sugara 25 cm!

40. A vektorok összeadása és kivonása

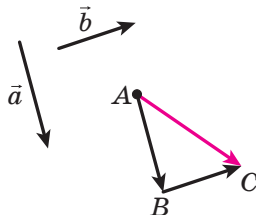
Legyen adott a térben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. Fektesünk egy tetszőleges A pontból egy $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort, majd a B pontból egy $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{BC}$ vektort. Az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **vektorok összegének** nevezzük (40.1. ábra) és így írjuk fel: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

A két vektor összeadásának fenti algoritmusát **háromszög-szabálynak** nevezzük.

Be lehet bizonyítani, hogy az $\vec{a} + \vec{b}$ összeg független az A pont kiválasztásától.

Megjegyezzük, hogy *tetszőleges* A , B és C pontokra teljesül az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ egyenlőség.

Ez az egyenlőség a háromszög-szabályt fejezi ki.



40.1. ábra

A vektorok összeadásának tulajdonságai hasonlóak a számok összeadásának tulajdonságaival.

Tetszőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokra igazak a következő egyenlőségek:

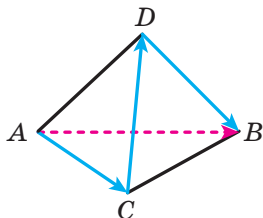
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (felcserélhetőségi tulajdonság);}$$

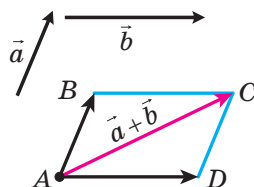
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \text{ (csoportosítási tulajdonság).}$$

Három vagy több vektor összegét a következőképpen határozzuk meg: először összeadjuk az első két vektort, aztán a kapott összeghez hozzáadjuk a harmadik vektort és így tovább. Például $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

A 40.2. ábrán látható $ABCD$ tetraéder esetében fel lehet írni a következő egyenlőséget: $\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$.



40.2. ábra



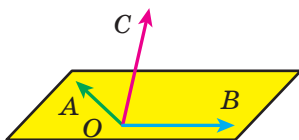
40.3. ábra

Két nem kollineáris $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összeadására célszerű alkalmazni a **parallelogramma-szabályt**.

Egy közös A kezdőpontból indítjuk az $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\vec{AB}$ vektort és a $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\vec{AD}$ vektort (40.3. ábra). Megszerkesztjük az $ABCD$ paralelogrammát. Ekkor az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor egyenlő lesz az $\vec{AC}$ vektorral.

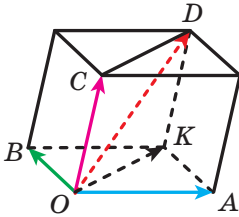
Megvizsgáljuk az $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ és $\vec{OC}$ vektorokat, melyek nem illeszkednek egy síkra (40.4. ábra). Meghatározzuk ezeknek a vektoroknak az összegét.

Megszerkesztünk egy olyan paralelepipedont, melynek az OA , OB és OC szakaszok lesznek az élei (40.5. ábra), az OD szakasz pedig az átlója. Bebizonyítjuk, hogy $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$.

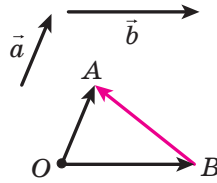


40.4. ábra

Mivel az $OBKA$ négyszög paralelogramma, ezért $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OK}$. A következőt kaptuk: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OK} + \vec{OC}$. Mivel az $OCDK$ négyszög paralelogramma, ezért $\vec{OK} + \vec{OC} = \vec{OD}$.



40.5. ábra



40.6. ábra

A három vektor összeadásának a fenti módszerét, amely az egy pontból induló és nem egy síkra illeszkedő vektorokról szól, **paralelepipedon-szabálynak** nevezzük.

Definíció. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok **különbségének** azt a $\vec{c}$ vektort nevezzük, amelynek a $\vec{b}$ vektorral való összege egyenlő az $\vec{a}$ vektorral.

Ezt így írjuk fel: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Megmutatjuk, hogyan kell megszerkeszteni azt a vektort, amely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége lesz.

Egy tetszőleges O pontból felmérjük az $\vec{OA}$ és $\vec{OB}$ vektorokat, melyek megfelelően egyenlők az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal (40.6. ábra). Ekkor $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$, vagyis $\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$, tehát a $\vec{BA}$ vektor egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségével.

Megjegyezzük, hogy *bármely három, O , A és B pontra teljesül az $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ egyenlőség.* Ez az egyenlőség két, egy pontból induló vektor különbsége meghatározásának szabályát adja meg.

40.1. tétel. Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok koordinátái megfelelően $(a_1; a_2; a_3)$ és $(b_1; b_2; b_3)$, akkor az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor koordinátái pedig $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ koordináták lesznek.



1. Írd le a két vektor összeadásának háromszög-szabályát!
2. Írd le a két vektor összeadásának paralelogramma-szabályát!
3. Írd le a három vektor összeadásának paralelepipedon-szabályát!
4. Mit nevezünk két vektor különbségének?
5. Mivel egyenlő két adott vektor összegének koordinátái?
6. Mivel egyenlő két adott vektor különbségének koordinátái?



GYAKORLATOK

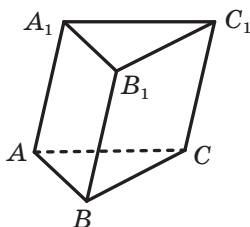
40.1.° Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb (40.7. ábra). Határozd meg a következő vektorok összegét:

- 1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1C_1}$!

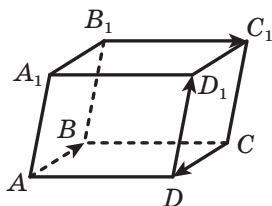
40.2.° Adott az $ABCD A_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg a következő vektorok összegét:

- 1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1D_1}$!

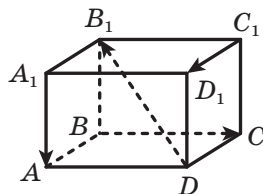
40.3.° Adott az $ABCD A_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (40.8. ábra). Határozd meg a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{B_1C_1}$ vektorok összegét!



40.7. ábra



40.8. ábra



40.9. ábra

40.4.° Adott az $ABCD A_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (40.9. ábra). Határozd meg a $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$ vektorok összegét!

40.5.° Adott az $\vec{a} (3; -6; 4)$ és $\vec{b} (-2; 4; -5)$ vektor. Határozd meg az
1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$ vektorok koordinátáit!

40.6.° Adott az $\vec{m} (-7; -1; 8)$ és $\vec{n} (-3; 2; -4)$ vektor. Határozd meg az
1) $\vec{m} + \vec{n}$; 2) $|\vec{m} + \vec{n}|$ vektorok koordinátáit!

40.7.° Adott az $\vec{a} (-10; 15; -20)$ és $\vec{b} (2; 6; -12)$ vektor. Határozd meg az
1) $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}|$ vektorok koordinátáit!

40.8.° Adott az $\vec{m} (3; -1; 2)$ és $\vec{n} (4; -2; -3)$ vektor. Határozd meg az
1) $\vec{m} - \vec{n}$; 2) $|\vec{m} - \vec{n}|$ vektorok koordinátáit!

40.9.° Adott az $ABCA_1B_1C_1$ hasáb (40.7. ábra). Határozd meg a következő vektorok különbségét:

- 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{B_1C_1}$!

40.10.° Adott az $ABCD A_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg a következő vektorok különbségét:

- 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$!

40.11.* Egyszerűsítsd a kifejezést: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NK}$!

40.12.* Egyszerűsítsd a kifejezést: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BM}$!

40.13.** Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka. Határozd meg azt a vektort, amely az $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1 C} - \overrightarrow{C_1 D_1}$ vektorral egyenlő!

40.14.** Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka. Határozd meg azt a vektort, amely az $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC}$ vektorral egyenlő!

40.15.** Határozd meg annak az A pontnak a koordinátáit, amelyre igaz az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ egyenlőség, ha $B(4; -2; 12)$, $C(3; -1; 4)$!

40.16.** Határozd meg annak az M pontnak a koordinátáit, amelyre teljesül az $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ egyenlőség, ha $C(1; -5; 3)$, $D(-2; 0; 6)$!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

40.17. A körvonal AB és AC húrjai merőlegesek, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Határozd meg az A pont távolságát a BC egyenestől!

41. A vektor számmal való szorzása

Definíció. Az $\vec{a}$ nem nullvektor és egy k nullától különböző szám szorzatának azt a $\vec{b}$ vektort nevezzük, amelyre teljesül, hogy:

$$1) \quad |\vec{b}| = |k| |\vec{a}|;$$

2) ha $k > 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; ha $k < 0$, akkor $\vec{b} \downarrow\downarrow \vec{a}$.

Így írjuk fel: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Ha $\vec{a} = \vec{0}$ vagy $k = 0$, akkor $k\vec{a} = \vec{0}$.

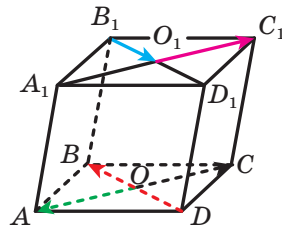
A 41.1. ábrán az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedon látható, amelyben $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{O_1 C_1}$,

$$\overrightarrow{B_1 O_1} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{A_1 C_1} = -2 \overrightarrow{OA}.$$

A meghatározásból következik, hogy

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

41.1. tétel. Bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra teljesül az $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ egyenlőség.



41.1. ábra

Ez a tétel lehetővé teszi a vektorok kivonásának összeadásra való visszavezetését: ahhoz, hogy az $\vec{a}$ vektorból kivonjuk a $\vec{b}$ vektort, az $\vec{a}$ vektorhoz elegendő hozzáadni a $(-1) \cdot \vec{b}$ vektort.

A $-1 \cdot \vec{a}$ vektort $-\vec{a}$ -val jelöljük, és az $\vec{a}$ vektor **ellentettjének** nevezzük. Például:

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

A vektor számmal való szorzásának meghatározásából következik, hogyha $\vec{b} = k\vec{a}$, akkor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak.

Tehát az $\vec{OA} = k\vec{OB}$ egyenlőségből következik, hogy az O , A és B pontok egy egyeneshez illeszkednek.

41.2. tétel. Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, amelyre teljesül a $\vec{b} = k\vec{a}$ egyenlőség.

41.3. tétel. Ha az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$, akkor a $k\vec{a}$ vektor koordinátái $(ka_1; ka_2; ka_3)$ lesznek egyenlők.

A vektor számmal való szorzásának tulajdonságai:

Bármely k, m számra és bármely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra teljesülnek a következő egyenlőségek:

$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (csoportosítási tulajdonság);

$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (az első széttagolási tulajdonság);

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (a második széttagolási tulajdonság).

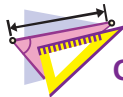
Az algebrai kifejezésekhez hasonlóan ezek a tulajdonságok lehetőséget adnak az olyan kifejezések átalakítására, melyek vektorok összegét és különbségét, valamint a vektor számmal való szorzását tartalmazzák. Például

$$2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}.$$



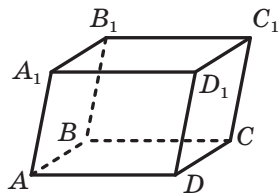
1. Mit nevezünk az $\vec{a}$ nem nullvektor és a k nullától különböző szám szorzatának?
2. Milyen vektort nevezünk az adott vektor ellentett vektorának?
3. Mit mondhatunk az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokra, ha $\vec{b} = k\vec{a}$, ahol k egy tetszőleges szám?
4. Adott, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak, és $\vec{a} \neq \vec{0}$. Hogyan lehet kifejezni a $\vec{b}$ vektort az $\vec{a}$ vektoron keresztül?
5. Az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$. Mivel egyenlők a $k\vec{a}$ vektor koordinátái?

6. Mit mondhatunk azokról a vektorokról, melyeknek koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$ és $(ka_1; ka_2; ka_3)$?
7. Írd fel a vektor számmal való szorzásának csoportosítási és széttagolási tulajdonságait!



GYAKORLATOK

- 41.1.^o** Az $\vec{m}$ vektor abszolút értéke 4. Mivel lesz egyenlő az $\vec{n}$ vektor abszolút értéke, ha:
- $\vec{n} = 3\vec{m}$;
 - $\vec{n} = -5\vec{m}$?
- 41.2.^o** Egyirányúak vagy ellentétes irányúak lesznek-e az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok, ha:
- $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$;
 - $\vec{a} = -2\vec{b}$?
- 41.3.^o** Adott az $\vec{a}$ (4; -8; -20) vektor. Milyen koordinátái lesznek a $\vec{b}$ vektornak, ha:
- $\vec{b} = 5\vec{a}$;
 - $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$?
- 41.4.^o** Adottak az $\vec{a}$ (-3; 2; 5) és $\vec{b}$ (-2; -4; 1) vektorok. Határozd meg a $\vec{c}$ vektor koordinátáit, ha:
- $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$!
- 41.5.^o** Adottak az $\vec{m}$ (1; 7; -8) és az $\vec{n}$ (3; -1; 6) vektorok. Határozd meg az $\vec{a}$ vektor koordinátáit, ha:
- $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$;
 - $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$!
- 41.6.^o** Adott egy $ABCA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (41.2. ábra). Nevezd meg az összes olyan vektort, melynek kezdő- és végpontja a paralelepipedon csúcspontjai lesznek, és ellentétes irányúak a következő vektorral:
- $\overrightarrow{AD}$;
 - $\overrightarrow{B_1D}$;
 - $\overrightarrow{AC}$!
- 41.7.^o** Adott egy $ABCA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon (41.2. ábra). Nevezd meg az összes olyan vektort, melynek kezdő- és végpontja a paralelepipedon csúcspontjai lesznek, és ellentétes irányúak a következő vektorral:
- $\overrightarrow{B_1B}$;
 - $\overrightarrow{CD_1}$!
- 41.8.^o** Nevezd meg annak a vektornak a koordinátáit, mely ellentétes irányú az $\vec{a}$ (13; -10; 9) vektorral!
- 41.2. ábra**



41.2. ábra

41.9.* Határozd meg a $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$ vektor abszolút értékét, ha $\vec{a}(-1; 1; 1)$, $\vec{b}(2; 2; -2)$!

41.10.* Határozd meg a $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$ vektor abszolút értékét, ha $\vec{a}(0,5; -0,5; 1,5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$!

41.11.* Kollineárisak-e az $\vec{AB}$ és $\vec{CD}$ vektorok, ha $A(4; -1; -4)$, $B(0; 5; 6)$, $C(0; 2; 7)$, $D(2; -1; 2)$?

41.12.* Kollineárisak-e az $\vec{DE}$ és $\vec{FK}$ vektorok, ha $D(2; -3; 4)$, $E(-1; 6; 2)$, $F(-2; 8; 6)$, $K(-3; 11; 7)$?

41.13.* Határozd meg az x és y értékeit, ha az $\vec{a}(x; y; 2)$ és a $\vec{b}(-2; 3; 1)$ vektorok kollineárisak!

41.14.* Határozd meg az x és z értékeit, ha az $\vec{m}(-1; 7; z)$ és az $\vec{n}(x; 4; 5)$ vektorok kollineárisak!

41.15.** Adott az $\vec{a}(3; 2; 1)$ vektor. Határozd meg a vele kollineáris $\vec{AB}$ vektort, ha az $A(1; 1; 1)$, és a B pont az yz síkra illeszkedik!

41.16.** Adottak az $A(-3; 6; 4)$, $B(6; -1; 2)$, $C(0; 3; -2)$ pontok. Határozd meg a D pont koordinátáit, amely az xz síkra illeszkedik, és $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$!

41.17.** Adott az $\vec{a}(-2; 6; 3)$ vektor. Határozd meg a $\vec{b}$ koordinátáit, ha az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok ellentétes irányúak, és a $\vec{b}$ vektor abszolút értéke 1!

41.18.** Adott: $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}(1; -1; 2)$. Határozd meg az $\vec{m}$ koordinátáit!

41.19.** Egy egyenesre illeszkednek-e a következő pontok:

1) $A(5; 6; -4)$, $B(7; 8; 2)$ és $C(3; 4; 14)$;

2) $D(-1; -7; -8)$, $E(0; -4; -4)$ és $F(2; 2; 4)$?

41.20.** Az A , B és C pontokra igaz, hogy $\vec{AB}(10; 15; -5)$ és $\vec{AC}(-6; y; z)$. Az y és z mely értékeinél fognak az A , B és C pontok egy egyenesre illeszkedni?

41.21.** Az E pont az $ABCD_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon CC_1 élének a felezőpontja. Fejezd ki az $\vec{AE}$ vektort az $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ és $\vec{AA_1}$ vektorok által!

41.22.** Adott az $ABCD_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon. Az M pont az A_1B_1 élének a felezőpontja, a K pont pedig a CC_1 élének a felezőpontja. Fejezd ki az $\vec{MK}$ vektort az $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ és $\vec{AA_1}$ vektorok által!

41.23.** Adott az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka. Az E pont a CC_1 élének a felezőpontja, az F pont pedig az AD élének a felezőpontja. Fejezd ki az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AA_1}$ vektorok által!



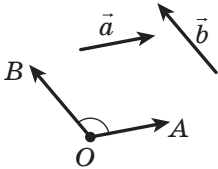
ISMÉTLŐ GYAKORLAT

41.24. Az egyenlő szárú háromszög alapja 48 cm, a területe pedig 432 cm^2 . Határozd meg a háromszögbe írt körvonal sugarát!

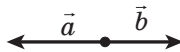
42. A vektorok skaláris szorzata

Legyen az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ két nem egyirányú és nem nullvektor. Az O ponttól felmérjük az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal megfelelően egyenlő $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat (42.1. ábra). Az AOB szöveget az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **vektorok közötti szög**nek nevezzük.

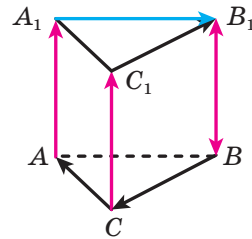
Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöveget így jelöljük: $(\vec{a}, \vec{b})^\circ$. Természetesen, ha $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, akkor $(\vec{a}, \vec{b})^\circ = 180^\circ$ (42.2. ábra).



42.1. ábra



42.2. ábra



42.3. ábra

Ha $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, akkor $(\vec{a}, \vec{b})^\circ = 0^\circ$. Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor úgy tekintjük, hogy az $(\vec{a}, \vec{b})^\circ = 0^\circ$.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat **merőlegeseknek** nevezzük, ha a köztük lévő szög 90° . Ezt így jelöljük: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

A 42.3. ábrán egy háromoldalú hasáb látható, melynek az alaplappja szabályos háromszög, és az oldalélei merőlegesek az alaplapp síkjára.

A következőt kapjuk: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1 B_1})^\circ = 60^\circ$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1 B_1})^\circ = 120^\circ$, $(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1})^\circ = 0^\circ$, $(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC})^\circ = 90^\circ$, $(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1 B})^\circ = 180^\circ$.

Definíció. Két vektor skaláris szorzatának nevezzük e vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát így jelöljük: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A meghatározás matematikai nyelven való leírása:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})^\angle.$$

Ha az $\vec{a}$ vagy a $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor természetesen az $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Az $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skaláris szorzatot az $\vec{a}$ vektor **skaláris négyzetének** nevezzük és $\vec{a}^2$ -tel jelöljük.

A vektor skaláris négyzete egyenlő a vektor abszolút értékének a négyzetével, vagyis $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

42.1. tétel. Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha ezek a vektorok merőlegesek egymásra.

Például a 42.3. ábrán látható vektorokra igazak a következő egyenlőségek: $\vec{AA_1} \cdot \vec{BC} = 0$, $\vec{B_1A_1} \cdot \vec{C_1C} = 0$.

42.2. tétel. Az $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ vektorok skaláris szorzatát a következő képlettel lehet meghatározni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

42.3. tétel. Az $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ nem nullvektorok közötti szög koszinuszát a következő képlettel lehet kiszámítani:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b})^\angle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

A vektorok skaláris szorzatának néhány tulajdonsága megegyezik a számok szorzásának tulajdonságával. Például:

bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorra és bármely k számra igazak a következő egyenlőségek:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

A vektorok összeadását és számmal való szorzását, valamint a vektorok skaláris szorzatát tartalmazó kifejezéseket, az algebrai kifejezésekhez hasonlóan lehet átalakítani. Például

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \\&= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.\end{aligned}$$

Feladat. A hasáb ABC alapja egy egyenlő szárú háromszög ($AB = AC$). Az AA_1 oldaléle az AB és AC élekkel egyenlő szögeket alkot (42.4. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $AA_1 \perp BC$!

Megoldás. Legyen a $BAA_1\angle = \alpha$. A feladat feltétele alapján fel lehet írni, hogy: $CAA_1\angle = \alpha$.

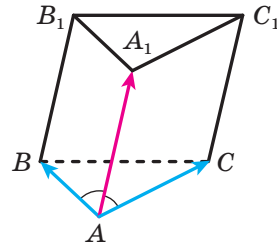
Meghatározzuk az $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok skaláris szorzatát.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Felírjuk a következőt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \\&= |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha - |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.\end{aligned}$$

Mivel $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$, ezért a vizsgált skaláris szorzat egyenlő nullával. Tehát $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$. ◀



42.4. ábra



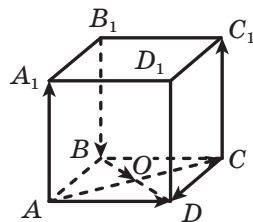
1. Mivel egyenlő két ellentétes irányú vektor hajlásszöge? Két egyirányú vektor hajlásszöge?
2. Mivel egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge, ha legalább az egyik nem nullvektor?
3. Milyen vektorokat nevezünk merőlegeseknek?
4. Mit nevezünk két vektor skaláris szorzatának? Mivel egyenlő ez a szorzat?
5. Mit nevezünk a vektor skaláris négyzetének? Mivel egyenlő ez a szorzat?
6. Fogalmazd meg két nem nullvektor merőlegességének a feltételét!
7. Hogyan kell meghatározni a vektorok skaláris szorzatát, ha ismerjük a koordinátáikat?
8. Írd fel a vektorok skaláris szorzatának a tulajdonságait!



GYAKORLATOK

42.1.^o Adott egy $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka (42.5. ábra), ahol az O pont az $ABCD$ lap középpontja. Mivel egyenlő a következő vektorok hajlásszöge:

- | | |
|---|--|
| 1) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$; | 5) $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{BO}$; |
| 2) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CD}$; | 6) $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$; |
| 3) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BO}$; | 7) $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{B_1 B}$; |
| 4) $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AA_1}$; | 8) $\overrightarrow{BO}$ és $\overrightarrow{CD}$? |



42.5. ábra

42.2.^o Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 40° .

Mivel egyenlő a következő vektorok hajlásszöge:

- 1) $2\vec{a}$ és $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ és $-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$ és $-5\vec{b}$; 4) $-7\vec{a}$ és $10\vec{b}$?

42.3.^o Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

- 1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) \angle = 30^\circ$;
 2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}, \vec{b}) \angle = 135^\circ$!

42.4.^o Határozd meg az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

$$|\vec{m}| = 2, \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{m}, \vec{n}) \angle = 120^\circ!$$

42.5.^o Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

- 1) $\vec{a} (1; -2; 3)$, $\vec{b} (2; -4; 3)$; 2) $\vec{a} (-9; 4; 5)$, $\vec{b} (3; -1; 4)$!

42.6.^o Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

- 1) $\vec{a} (4; -1; 6)$, $\vec{b} (-7; 2; 8)$; 2) $\vec{a} (1; -3; 9)$, $\vec{b} (-1; 3; 0)$!

42.7.^o Adott az $\vec{m} (3; -2; 4)$ és $\vec{n} (2; 2; z)$ vektor. A z mely értékénél teljesül az $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$ egyenlőség?

42.8.^o Adott az $\vec{a} (9; c; -1)$ és $\vec{b} (-2; 3; c)$ vektor. A c mely értékénél teljesül az $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$ egyenlőség?

42.9.^o Az $\vec{a} (1; 1; 2)$, $\vec{b} (1; 2; 1)$ és $\vec{c} (-5; 3; 1)$ vektorok közül válaszd ki a merőleges vektorokat!

42.10.^o Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 45° , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Határozd meg:

- 1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$!

42.11.* Az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok közötti szög 150° , $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. Határozd meg:

1) $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$; 2) $(\vec{m} + \vec{n})^2$!

42.12.* Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 120° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Határozd meg az $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$ skaláris szorzatot!

42.13.* Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög 60° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Határozd meg az $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$ skaláris szorzatot!

42.14.* Az x mely értékei mellett lesznek merőlegesek az $\vec{a}(x; -x; 1)$ és $\vec{b}(x; 2; 1)$ vektorok?

42.15.* A p mely értékei mellett lesznek merőlegesek az $\vec{a}(p; -2; 1)$ és $\vec{b}(p; 1; -p)$ vektorok?

42.16.* Határozd meg a $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$ skaláris szorzatot, ha az $\vec{a}(2; -1; -2)$, $\vec{b}(4; -3; 2)$!

42.17.* Határozd meg az $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$ skaláris négyzetet, ha $\vec{m}(2; 1; -3)$, $\vec{n}(4; -2; 0)$!

42.18.** Az $ABCD$ tetraéder minden éle a -val egyenlő, az M pont az AB él felezőpontja. Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát:

1) $\vec{CM}$ és $\vec{DC}$; 2) $\vec{AB}$ és $\vec{CD}$!

42.19.** Az $ABCDM$ gúla alapja egy olyan négyzet, melynek minden éle a -val egyenlő. Határozd meg az $\vec{AM}$ és $\vec{AC}$ vektorok skaláris szorzatát!

42.20.** Határozd meg az $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ és az $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ vektorok hajlásszögét, ha $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) \angle = 135^\circ$!

42.21.** Határozd meg az $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ vektorok hajlásszögét, ha $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m}, \vec{n}) \angle = 30^\circ$!

42.22.** Határozd meg az $\vec{AB}$ és $\vec{CD}$ vektorok közötti szög koszinuszát, ha $A(3; -2; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(4; -1; 5)$, $D(1; 3; 0)$!

42.23.** A háromszög csúcsai az $A(1; 0; 1)$, $B(-5; 4; 3)$ és $C(0; 3; -1)$ pontok. Határozd meg a háromszög A szögét!



ISMÉTLŐ GYAKORLAT

42.24. Az egyenlő szárú trapéz szára 10 cm, a beírt kör sugara pedig 4 cm. Határozd meg a trapéz területét!



A 6. §. ÖSSZEFOGLALÁSA

Két pont távolsága

Az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok közötti távolság az $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ képlettel határozható meg.

A szakasz felezőpontjának koordinátái

A végpontok koordinátaival megadott szakasz felezőpontjának koordinátái egyenlők a végpontok megfelelő koordinátáinak a számtani közepével.

Két vektor kölcsönös helyzete

Két nem nullvektort kollineárisnak nevezünk, ha párhuzamos egyenesekre vagy ugyanarra az egyenesre illeszkednek. A nullvektor minden vektorral kollineáris lesz.

A vektorok egyenlősége

Két nem nullvektort egyenlőnek mondunk, ha az abszolút értékük egyenlő és egyirányúak. Bármely két nullvektor egyenlő egymással.

A vektor koordinátái

Ha az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontjai, akkor az $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ és $z_2 - z_1$ számok megfelelően az $\vec{a}$ vektor első, második és harmadik koordinátái lesznek.

Vektor abszolút értéke

Ha az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$, akkor az $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Műveletek a vektorokkal

Bármilyen A , B és C pontra teljesül az $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ egyenlőség. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor különbségének azt a $\vec{c}$ vektort nevezzük, melynek a $\vec{b}$ vektorral való összege egyenlő az $\vec{a}$ vektorral.

Bármely három O , A és B pontra teljesül az $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$ egyenlőség.

Az $\vec{a}$ nem nullvektor és egy nullától különböző k szám szorzatának azt a $\vec{b}$ vektort nevezzük, amelyre teljesül: 1) $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$; 2) ha $k > 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; ha $k < 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor kollineáris, és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, amelyre teljesül a $\vec{b} = k\vec{a}$ egyenlőség.

A $-1 \cdot \vec{a}$ -t a $-\vec{a}$ -ral jelöljük és az $\vec{a}$ vektor ellentettjének nevezzük. Két vektor skaláris szorzatának nevezzük a vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát.

Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha ezek a vektorok merőlegesek.

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok megfelelő koordinátái $(a_1; a_2; a_3)$ és $(b_1; b_2; b_3)$, akkor:

- az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
- a $k\vec{a}$ vektor koordinátái $(ka_1; ka_2; ka_3)$;
- az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzata $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ lesz egyenlő;
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (ahol az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok).

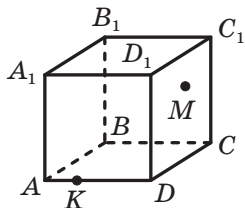
43. A 10. osztályos mértan tananyagának ismétlő gyakorlatai

Párhuzamosság a térben

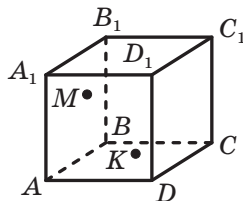
43.1. Az $ABCD$ téglalap átlói az O pontban metszik egymást. Az M pont nem illeszkedik az ABC síkhoz. Lehet-e olyan síkot fektetni, amely:

- 1) az AM egyenesre és az O és C pontokra illeszkedik;
- 2) az AC egyenesre és a B és M pontokra illeszkedik?

43.2. Az M pont az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $BB_1 C_1 C$ lapjának egy pontja, a K pedig az AD élének a pontja (43.1. ábra). Szerkeszd meg az MK egyenes és az ABB_1 sík metszéspontját!



43.1. ábra



43.2. ábra

43.3. Az M pont az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka $AA_1 B_1 B$ lapjának egy pontja, a K pedig az $AA_1 D_1 D$ lapjának a pontja (43.2. ábra). Szerkeszd meg az MK egyenes és az $A_1 B_1 C_1$ sík metszéspontját!

43.4. Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ hasáb BB_1 , CC_1 és DD_1 élein úgy vették fel az M , N és K pontokat, hogy $BM \neq CN$, $BM \neq DK$ és $CN \neq DK$. Szerkeszd meg az ABC és az MNK síkok metszévonalát!

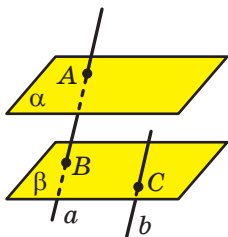
43.5. Az M pont $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ hasáb $A_1 B_1$ élének felezőpontja, a K pont pedig a CD élének a felezőpontja. Szerkeszd meg az AMK és a $BB_1 C_1$ síkok metszévonalát!

43.6. Az $ABCD$ tetraéder AB , AD , AC és BC élein megfelelően jelölték az E , F , M és K pontokat. Szerkeszd meg az EFM és a DAK síkok metszévonalát!

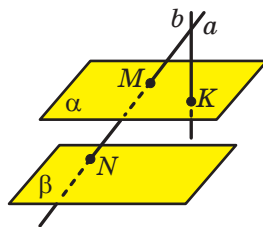
43.7. Az $ABCD$ tetraéder DA és DB élein megfelelően jelölték az M és K pontokat. Szerkeszd meg az ABC és az MKC síkok metszévonalát!

43.8. Az MK egyenes, amely nem illeszkedik az $ABCD$ paralelogramma síkjához, párhuzamos az AD egyenessel. Milyen az: 1) MK és BC ; 2) MK és AB egyenesek kölcsönös helyzete?

- 43.9.** Adott, hogy az a és b egyenesek párhuzamosak, és a c egyenes metszi a b -t, de nem metszi az a -t. Bizonyítsd be, hogy az a és c egyenesek kitérő egyenesek lesznek?
- 43.10.** Az AB és CD szakaszok egy kör átmérői. Az α síknak nincs közös pontja ezzel a körrel. Az A , B , C és D pontokon keresztül párhuzamos egyeneseket fektettek, melyek az α síkot megfelelően az A_1 , B_1 , C_1 és D_1 pontokban metszik. Határozd meg a CC_1 szakasz hosszát, ha $AA_1 = 5$ cm, $BB_1 = 9$ cm, $DD_1 = 3$ cm!
- 43.11.** Az M pont nem illeszkedik az $ABCD$ paralelogramma síkjára. Bizonyítsd be, hogy $AB \parallel CMD$!
- 43.12.** Az ABC és ABD háromszögek nem egy síkra illeszkednek. Az M pont az AC szakasz felezőpontja, az N pont pedig a BC -jé. Az AD szakaszon jelöltünk egy K pontot, a BD szakaszon pedig egy E pontot úgy, hogy $KE \parallel ABC$. Bizonyítsd be, hogy $KE \parallel MN$!
- 43.13.** Az $ABCD$ tetraéder AD , BD és CD élein megfelelően úgy jelölték az E , F és M pontokat, hogy $ABE\angle = FEB\angle$, $CBM\angle = FMB\angle$. Bizonyítsd be, hogy az ABC és EFM síkok párhuzamosak!
- 43.14.** Adott, hogy $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$. Az a egyenes az A pontban metszi az α síkot, a β síkot pedig a B pontban. A b egyenes a C pontban metszi a β síkot (43.3. ábra). Szerkeszd meg a b egyenes és az α sík metszéspontját!



43.3. ábra



43.4. ábra

- 43.15.** Adottak az α és a β párhuzamos síkok, valamint az a és b egymást metsző egyenesek. Az a egyenes az α síkot az M pontban metszi, a β síkot pedig az N pontban, a b egyenes az α síkot a K pontban metszi (43.4. ábra). Szerkeszd meg a b egyenes és a β sík metszéspontját!
- 43.16.** Az $ABCD$ tetraéder ADB lapjának súlyvonalai az E pontban metszik egymást, a BDC lapé pedig az F pontban. Bizonyítsd be, hogy az EF egyenes párhuzamos az ABC síkkal!

43.17. Igaz-e az állítás:

- 1) ha két egyenes síkra eső vetületei párhuzamosak, akkor az adott egyenesek is párhuzamosak;
- 2) ha egy síkbeli alakzat egybevágó a párhuzamos vetületével, akkor a sík, amelyre az adott alakzat illeszkedik, és az a sík, melyre a vetülete illeszkedik, párhuzamosak?

43.18. Az A_1 , B_1 és C_1 pontok megfelelően az $ABCD$ paralelogramma A , B és C csúcsainak a vetületei (43.5. ábra). Szerkeszd meg az $ABCD$ paralelogramma vetületét!

$B_1 \bullet \bullet C_1$

43.19. Az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC derékszögű háromszög vetülete lesz, az AB átfogójának a vetülete pedig az A_1B_1 szakasz. Szerkeszd meg annak a négyzetnek a képét, melynek közös szöge van az ABC háromszöggel, és minden csúcsa a háromszög oldalán helyezkedik el!

$A_1 \bullet$

43.5. ábra

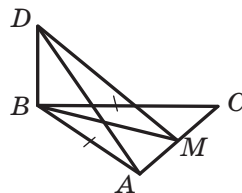
Merőlegesség a térben

43.20. Az m egyenes párhuzamos az ABC háromszög AC oldalával, és nem illeszkedik az ABC síkra, $ABC\angle = BAC\angle = 30^\circ$.

- 1) Bizonyítsd be, hogy az m és a BC egyenesek kitérők!
- 2) Határozd meg az m és a BC egyenesek közötti szöget!

43.21. Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ téglatest $ABCD$ lapja négyzet, és az AA_1 éle kétszer nagyobb az AB élnél. Határozd meg: 1) AB_1 és CD ; 2) AB_1 és CD_1 ; 3) AB_1 és A_1C_1 egyenesek hajlásszögét!

43.22. Az ABC háromszög B csúcsán keresztül BD egyenest fektettek, amely merőleges az ABC síkra (43.6. ábra). Az M pont az AC szakasz felezőpontja. Határozd meg a DA és DM szakaszok hosszát, ha $AB = BC = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $DB = 24$ cm!



43.6. ábra

43.23. Az $ABCD$ négyzet O középpontján át a négyzet síkjára merőlegesen egy MO egyenest fektettünk. A K pont a CD szakasz felezőpontja, $MC = 6$ cm, $MCK\angle = 60^\circ$.

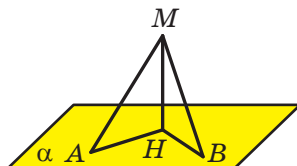
- 1) Bizonyítsd be, hogy a CD egyenes merőleges a MOK síkra!
- 2) Határozd meg az MO szakasz hosszát!

43.24. Az AB szakasz nem metszi az α síkot, az AB egyenes viszont az α síkot a C pontban metszi. Az A és B pontokra illeszkedve az α síkra merőleges egyeneseket fektettünk, amelyek megfelelően az

A_1 és B_1 pontokban metszik a síkot. Határozd meg a B_1C szakasz hosszát, ha $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 6$ cm, $A_1B_1 = 4$ cm!

- 43.25. Az AB szakasz metszi az α síkot. Az A és B pontokon és az AB szakasz C felezőpontján át merőleges egyeneseket bocsátottunk az α síkra, melyek ezt a síkot megfelelően az A_1 , B_1 és C_1 pontokban metszik. Határozd meg a CC_1 szakasz hosszát, ha $AA_1 = 18$ cm, $BB_1 = 9$ cm!

- 43.26. Az M pontból az α síkra MH merőlegest, valamint egymással egyenlő MA és MB ferdeket bocsátottunk (43.7. ábra). Határozd meg a ferdek talppontjai közötti távolságot, ha $MAH\angle = 30^\circ$, $AMB\angle = 60^\circ$, $MH = 5$ cm!



43.7. ábra

- 43.27. Az $ABCD$ téglalap átlója és egyik oldala közötti szög 30° . Az M pont a téglalap minden csúcsától $5\sqrt{3}$ cm-re van, a téglalap síkjától pedig $5\sqrt{2}$ cm-re. Határozd meg a téglalap területét!

- 43.28. Az MC szakasz merőleges az ABC háromszög síkjára, $ACB\angle = 90^\circ$, $AC = BC = 6$ cm. Az M pont és az AB egyenes közötti távolság $3\sqrt{6}$ cm. Határozd meg az M pont és az ABC sík közötti távolságot!

- 43.29. Az MB szakasz merőleges az $ABCD$ téglalap síkjára, $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm. Határozd meg az M pont távolságát az AD egyenestől, ha az M pont és a CD egyenes közötti távolság 20 cm!

- 43.30. A 6 cm, 25 cm és 29 cm oldalú ABC háromszögbe írt körvonal O középpontjából a háromszög síkjára DO merőlegest állítottak. A D pont és az ABC háromszög közötti távolság $2\sqrt{15}$ cm. Határozd meg a D pont távolságát a háromszög oldalaitól!

- 43.31. Az M pont az ABC szabályos háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra van, a háromszög síkjától pedig 5 cm-re. Határozd meg az ABC háromszög területét, ha az MA egyenes az ABC háromszög síkjához 60° -os szög alatt hajlik!

- 43.32. A DC szakasz merőleges az ABC derékszögű háromszög síkjára ($ACB\angle = 90^\circ$), $DC = 9$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. A DE szakasz a D pontból az AB egyenesre bocsátott merőleges. Határozd meg a DE egyenes és az ABC sík hajlásszögét!

- 43.33. Az MK szakasz nem metszi az α síkot. Határozd meg az MK egyenes és az α sík közötti szöget, ha $MK = 6$ cm, és az MK szakasz végpontjainak távolsága az α síktól $8\sqrt{3}$ cm és $5\sqrt{3}$ cm!

- 43.34. Az ABC szabályos háromszög BC oldala az α síkra illeszkedik. A háromszög AH magassága az α síkhoz φ szög alatt hajlik. Határozd meg az AB egyenes és az α sík közötti szöget!
- 43.35. Az A pont a lapszög lapjai között helyezkedik el, amelynek mértéke α . Az A pont távolsága a lapszög mindegyik lapjától h lesz. Határozd meg az A pont és a lapszög éle közötti távolságot!
- 43.36. Az MC szakasz merőleges az ABC háromszög síkjára ($ABC\angle = 90^\circ$). Határozd meg az ABC és az ABM síkok hajlásszögét, ha $AC = 8$ cm, $BAC\angle = 30^\circ$, az M pont és az AB egyenes közötti távolság pedig 12 cm!
- 43.37. Az ABC háromszög AB oldalán keresztül α síkot fektettek. Az ABC háromszög síkja és az α sík közötti szög 60° -os. Határozd meg a C pont távolságát az α síktól, ha $AC = 7$ cm, $AB = 10$ cm, $BC = 13$ cm!
- 43.38. Az $ABCD$ négyzet síkja és az $AEFD$ téglalap síkjának hajlásszöge 60° -os. A négyzet területe 16 cm², a téglalapé pedig 32 cm². Határozd meg négyzet és a téglalap párhuzamos oldalai közötti távolságot!
- 43.39. A c egyenes az α és a β sík metszésvonala. Az M pont az α síktól 9 cm-re, a β síktól pedig 12 cm-re van. Határozd meg az M pont és a c egyenes közötti távolságot!
- 43.40. Az ABC háromszög C derékszögének csúcsán át egy m egyenest fektettek, amely merőleges az ABC síkra. Az m egyenesen úgy jelöltek egy D pontot, hogy az ABC és az ABD síkok közötti szög 30° -os lesz. Határozd meg az ABD háromszög területét, ha $AB = 16$ cm, $BAC\angle = 45^\circ$!
- 43.41. A $40\sqrt{2}$ cm² területű trapéz vetülete egy síkra egy olyan egyenlő szárú trapéz, melynek alapjai 7 cm és 13 cm, a szára pedig 5 cm. Határozd meg az adott trapézok síkjai közötti hajlásszöget!

Térkoordináták és térvektorok

- 43.42. Adott az $A(7; 3; -1)$ és a $B(x; 5; z)$ pont. Ismert, hogy az AB szakasz C felezőpontja az ordinátatengelyre illeszkedik.
- 1) Határozd meg a C pont koordinátáit!
 - 2) Határozd meg az x és z értékeit!
- 43.43. Adottak az $A(8; 0; 4)$, $B(13; 4; 7)$, $C(11; -3; 3)$ pontok.
- 1) Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög derékszögű!
 - 2) Határozd meg az ABC háromszög köré írt kör lap területét!
- 43.44. Határozd meg az ABC egyenlő szárú háromszög területét, ha $A(1; 1; -2)$, $C(-3; 3; 2)$, a B pont pedig az applikátatengelyre illeszkedik!

- 43.45. Adottak a következő pontok: $A(-2; 1; 3)$, $B(0; 5; 9)$ és $C(-3; y; 6)$. Az y mely értékeinél lesz az AB szakasz hossza kétszer nagyobb az AC szakasz hosszánál?
- 43.46. A $C(2; -3; 1)$ pontból induló $\overrightarrow{CD}$ vektor egyenlő az $\overrightarrow{AB}$ vektorral. Határozd meg a D pont koordinátáit, ha $A(-1; 0; 5)$, $B(0; 4; -1)$!
- 43.47. Adottak az $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ és $C(-1; 2; 0)$ pontok. Határozd meg a D pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$!
- 43.48. Az $\vec{a}(x; 3; -4)$ és $\vec{b}(20; -12; 16)$ vektorok a paralelogramma szemközti oldalaira illeszkednek. Határozd meg az x értékét!
- 43.49. Adottak az $A(-4; 1; 2)$, $B(-2; 0; -1)$ és $C(1; 1; 0)$ pontok. Határozd meg az yz síkra illeszkedő D pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok kollineárisak!
- 43.50. Az $ABCD$ tetraéder BDC lapjának súlyvonalai az O pontban metszik egymást, az M pont az AD él felezőpontja. Fejezd ki az $\overrightarrow{MO}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok által!
- 43.51. Határozd meg az $\vec{a}(2; 2; 1)$ és a $\vec{b}(6; -2; -3)$ vektorok közötti szög koszinuszát!
- 43.52. Határozd meg az $\vec{a}(3; -2; 4)$ és a $\vec{b}(2; 3; 0)$ vektorok közötti szöget!
- 43.53. Az x mely értékeinél lesznek az $\vec{a}(x; -2; 1)$ és a $\vec{b}(x; 2x; 3)$ vektorok merőlegesek!
- 43.54. Határozd meg annak az $\vec{m}$ vektornak a koordinátáit, amely kollineáris az $\vec{n}(1; -2; 1)$ vektorral, ha $\vec{m} \cdot \vec{n} = -3$!
- 43.55. Határozd meg az $\vec{a}(-1; 2; 5)$ vektor és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szöget!
- 43.56. Határozd meg a $\vec{b}(6; -2; -3)$ vektor és az applikátatengely negatív iránya közötti szöget!
- 43.57. Adott, hogy $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) \angle = 135^\circ$. Határozd meg az $|\vec{a} - \vec{b}|$ értékét!
- 43.58. Az M pont az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka AB élének a felezőpontja, az $A_1 B_1$ él felezőpontja pedig a K pont. Határozd meg az MB_1 és a DK egyenesek közötti szög mértékét!

Feleletek és útmutatások

1. fejezet. Algebra és az analízis elemei

1. §. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjaik

1.16. 1) 16; 2) 32. 1.17. 2500 m². 1.22. 2; 5. 1.23. -3; -1. 1.28. 3) {-6}.

2.7. 4) $\min_{(-\infty; -2]} f(x) = 256$; legnagyobb értéke nem létezik. 2.11. 1) Ha $a = 6$, akkor egy gyöke van; ha $a > 6$, akkor 2 gyöke; ha $a < 6$, akkor nincsenek gyökei; 2) ha $a = 1$ vagy $a = -8$, akkor egy gyöke van; ha $a < -8$ vagy $a > 1$, akkor 2 gyöke van; ha $-8 < a < 1$, akkor nincsenek gyökei.

3.5. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. 3.6. 1) $\max_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 64$,

$\min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 1$; 2) $\max_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64$, $\min_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1$; 3) $\max_{[1; +\infty)} f(x) = 1$, leg-

kisebb értéke nem létezik. 3.7. 1) $\max_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = 27$, $\min_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = \frac{1}{8}$;

2) $\max_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min_{[-2; -1]} f(x) = -1$; 3) legnagyobb értéke nem létezik,

$\min_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$.

4.4. 5) -1. 4.8. 6) Nincsenek megoldásai; 9) 5; -15. 4.9. 5) -0,5; 6) 0; 6. 4.12. 29. 4.13. -11,8. 4.14. 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. 4.15. 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. 4.16. 4) -5 és -4. 4.20. 1) -1; 2) -1; 3. 4.21. -3; 1.

5.11. 0. 5.12. $27\sqrt[3]{2}$. 5.13. 3) $\sqrt[12]{128}$. 5.14. 3) $\sqrt[3]{a}$. 5.19. 1) $a \leq 0$, $b \leq 0$; 2) $a \geq 0$, $b \leq 0$; 3) a és b tetszőleges számok; 4) a és b tetszőleges számok. 5.20. 2) $\mathbb{R}$. 5.21. 2) $-n$; 4) c^4 . 5.22. 2) $10x$. 5.25. 1) $[-4; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$. 5.26. 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 5.28. 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$. 5.29. 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$. 5.30. 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{6b^6}$, ha $b \geq 0$; $-\sqrt[6]{6b^6}$, ha $b < 0$; 3) $-\sqrt[6]{-a^7}$. 5.31. 1) $\sqrt[6]{a^7}$; 2) $-\sqrt[4]{-a^7}$. 5.32. $[3; 5]$. 5.34. 6) 16.

- 6.5.** 3) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$. **6.6.** 3) 4. **6.7.** 3) 125. **6.8.** 2) 49. **6.11.** 1) 6; 2) 100;
 3) $12\frac{4}{9}$; 4) 2. **6.12.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$. **6.13.** 2) $a^{0,5} - 2b^{0,5}$,
 5) $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **6.14.** 3) $1 + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$. **6.15.** $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$. **6.16.** $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.
7.3. 3) -1; 1. **7.4.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) nincsenek gyökei; 4) 7. **7.5.** 2) Nincsenek gyökei. **7.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2. **7.7.** 1) -5; 2) 4;
 3) -1; 4) 5. **7.8.** 1) 4; 2) 2; 3. **7.9.** $\frac{1}{3}$. **7.10.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 8;
 5) 0; 16; 6) $\frac{9}{8}$. **7.11.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) -4; 11; 4) 2,8; -1,1. **7.12.** 1) 0; 5;
 2) 7. **7.13.** 1) 6; 2) 2; 3) -1; 3; 4) -2. **7.14.** 1) 2; 2) 8. **7.15.** 1) 6; 9;
 2) $\frac{137}{16}$; 3) nincsenek gyökei; 4) 1; -3. **7.16.** 1) -5; 4; 2) -1. **7.17.** 1) 1; 4;
 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) -1; 4; 4) -2; 5. **7.18.** 1) -1; 5; 2) 1; 2;
 3) -6; 4. **7.19.** 27. **7.20.** 10. **7.22.** $f(x) = -2x + 1$.

2. §. Trigonometrikus függvények

- 8.4.** 3) 10π . **8.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **8.8.** 8) Az I. negyedben. **8.9.** 4) A III. negyedben; 7) a II. negyedben. **8.10.** 3) (0; -1); 6) (1; 0). **8.11.** 2) (-1; 0).
8.13. 1) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 2) 2π ; -2π . **8.14.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$,
 $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.15.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.16.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (0; -1); 3) (0; 1), (0; -1); 4) (1; 0),
 (-1; 0). **8.19.** 1) -2; 2) $-\frac{4}{3}$. **8.20.** 80 000 lakos.

- 9.1.** 1) 5; 4) $\frac{7}{4}$. **9.2.** 1) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.3.** 1) Nem; 2) nem. **9.4.** 1) Nem;
 2) nem; 3) igen. **9.5.** 1) 3; -3; 3) 3; 1; 4) 1; 0. **9.6.** 2) 1; -5. **9.11.** *Útmutatás.* Legyen a P_1 és P_2 pontok a P_0 pontnak α -val és $\alpha + \frac{\pi}{2}$ -vel
 történő elforgatásának az eredménye. P_1A és P_2B merőlegeseket bo-

csátunk megfelelően az x és y tengelyre (9.3. ábra). Mivel a $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, ezért megállapítható, hogy a $\triangle OP_1A = \triangle OP_2B$. Ebből következik, hogy $OA = OB$. Tehát a P_1 pont abszcisszája egyenlő a P_2 pont ordinátájával, vagyis $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. A P_1 és P_2 pontok elhelyezkedésének más eseteit hasonlóan lehet megvizsgálni. Vizsgáld meg külön azokat az eseteket, amikor a P_1 és P_2 pontok a koordinátatengelyekre illeszkednek.

10.4. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.5.** $-\frac{1}{2}$. **10.6.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **10.7.** 1, 5. **10.8.** 1) A

II. negyedben. **10.12.** 1) $2 \sin \alpha$; 2) $-2 \cos \alpha$; 3) 0. **10.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **10.14.** 1) Páros; 2) se nem páros, se nem páratlan. **10.15.** 1) Páratlan; 2) páros. **10.16.** 1) 5; 2) 2.

11.1. 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **11.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$.

11.15. 2) $\cos 20^\circ > \cos 21^\circ$; 3) $\sin \frac{10\pi}{9} > \sin \frac{25\pi}{18}$. **11.16.** 2) $\sin \frac{5\pi}{9} > \sin \frac{17\pi}{18}$.

11.19. 1) $\sin 58^\circ > \cos 58^\circ$; 2) $\sin 18^\circ < \cos 18^\circ$; 3) $\cos 80^\circ < \sin 70^\circ$.

11.21. 1) $[2; +\infty)$; 2) $[3; +\infty)$.

12.1. 5) $2 \cos^2 \alpha$. 6) 2. **12.2.** 3) 1; 4) 1. **12.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$; 2) $\frac{2}{\sin \alpha}$;

3) $\sin^4 \alpha$; 4) 1. **12.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos \beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$. **12.7.** 2) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$; 3) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. **12.8.** 1) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$.

12.11. $-\frac{1}{2}$. *Útmutatás.* Osszuk el a tört számlálóját és nevezőjét

$\cos \alpha$ -val. **12.12.** $-\frac{16}{11}$. **12.13.** 2; 1. **12.14.** 3; -2. **12.15.** 1) 125; 2) 2.

13.1. 3) 0; 4) 0. **13.2.** 2) 0. **13.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin 2\beta$;

6) $\operatorname{tg} 15^\circ$. **13.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos(\alpha + \beta)$. **13.5.** $\frac{6}{7}$. **13.7.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13.8. 1) $\sqrt{3}$. **13.9.** 1) $2 \cos \alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\cos^2 \alpha$; 4) $\sin 25^\circ$;

5) $\cos \alpha + \sin \alpha$; 6) $\cos \frac{\alpha}{2}$; 7) $-\cos \frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$. **13.10.** 1) $2 \sin 40^\circ$;

2) $\cos^2 2\beta$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$; 6) $2 \sin 2\alpha$; 7) $\frac{1}{2} \cos 2\alpha$; 8) $\sin 3\alpha$.

13.11. 1) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 13.12. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 13.15. $-\frac{24}{25}$.

13.16. $-\frac{4}{5}$. 13.17. 2. 13.18. 5. 13.19. $-0,96$. 13.20. $-\frac{8}{15}$. 13.21. $\frac{7}{8}$.

13.22. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 13.23. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 13.25. 1. 13.26. 1) 2; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$;

3) $\sin 2\alpha$; 4) $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 13.27. 1) $\frac{2}{\operatorname{tg} 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$. 13.28. 2. 13.29. -2 .

13.30. $-\frac{8}{9}$. 13.31. $\frac{3}{4}$. 13.32. Ha $x = 1$, akkor 9, 6, 3; ha $x = 9$, akkor

41, 62, 83. 13.33. Ha $x = 2$, akkor 1, -3 , 9; ha $x = \frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$.

14.3. 3) $-\cos 38^\circ$; 4) $-\sin \frac{\pi}{18}$. 14.4. 2) $\sin \frac{\pi}{15}$. 14.7. 1) $\frac{5}{3}$; 2) 1.

14.8. -1 . 14.9. 1) $-\cos \alpha$; 2) 1. 14.11. 0. 14.12. 1) 1; 2) 1.

15.3. 2) $\pm \frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

15.4. 2) $\pm \frac{25\pi}{6} + 10\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. 15.5. 3) $12 + 6\pi +$

$+ 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24} \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. 15.6. 2) $\pm \frac{3\pi}{2} - 6 + 4\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. 15.7. $-\frac{\pi}{6}$. 15.8. Például -3π . 15.9. 4 gyöke van. 15.10. $\frac{7\pi}{12}$;

$\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. 15.11. 1. 15.12. 1) $\left[0; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $[-3; -2) \cup (-2; 3]$.

16.3. 2) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8} \arcsin \frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$.

16.4. 3) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 16.7. 3) $-\frac{4\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$.

16.9. 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 16.10. 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. 16.11. 2) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 16.12. 2) $-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$,

$n \in \mathbb{Z}$. 16.13. $\frac{13\pi}{12}$. 16.14. $-\frac{13\pi}{90}$. 16.15. $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. 16.16. 6 gyöke

van. **16.17.** 4 gyöke van. **16.18.** $-\frac{2\pi}{3}$. **16.19.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.

- 17.1.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\arctg 3 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.2.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$,
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, πn , $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\arctg \frac{3}{4} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm 4\arccos \frac{1}{3} + 8\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.3.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{2} \arctg 4 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.4.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{4} \arctg \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} +$
 πn , $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm \arccos(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 4) $2\pi n$, $\pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 2\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $2\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 8) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.6.** 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$,
 $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1} \pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
17.7. 1) $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **17.8.** 1) $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;
 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, πn , $n \in \mathbb{Z}$. **17.10.** 3) -2; 4) 1.

3. §. A derivált és alkalmazása

18.7. 8 m/s. **18.8.** 1) 20 m/s; 2) 10 m/s.

- 19.4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.5.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.8.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **19.9.** 1) -32;
 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **19.12.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **19.13.** 1) 5;
 2) $\frac{3}{16}$.

20.9. $16 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. **20.10.** 400 J . **20.12.** 1) $y = 4x - 8$; 2) $y = -4$; 3) $y = -x - 3$.

21.1. 1) $y = x - 1$; 2) $y = -4x + 4$; 3) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 4) $y = x$; 5) $y = -1$;

6) $y = x + 4$. **21.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y = -x + \frac{\pi}{2}$;

4) $y = 5x - 18$. **21.3.** $y = -3x - 3$. **21.4.** $y = -5x + 2$. **21.5.** 1) $y = 6x - 3$;

2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **21.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$.

21.7. 4) $[1; 3) \cup (3; 4]$.

22.1. 1) Növekvő a $[-2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; -2]$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; 0]$ és $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[0; 1]$; 3) növekvő a $[-1; 7]$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; -1]$ és a $[7; +\infty)$ intervallumon; 4) növekvő a $[2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 2]$ intervallumon. **22.2.** 1) Növekvő a $(-\infty; 3]$ intervallumon, csökkenő a $[3; +\infty)$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; -3]$ és az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; 1]$ intervallumon; 3) növekvő a $[-1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; -1]$ intervallumon.

22.3. 1) Növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 1]$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; 2)$ és a $(2; +\infty)$ intervallumon; 3) növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 0)$ és a $(0; 1]$ intervallumon; 4) növekvő a $(-\infty; -3]$ és a $[3; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; 0)$ és a $(0; 3]$ intervallumon. **22.4.** 1) Növekvő a $(-\infty; 3]$ intervallumon, csökkenő a $[3; +\infty)$ intervallumon; 2) növekvő a $(-\infty; 0)$ és a

$[2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(0; 2]$ intervallumon. **22.9.** $-\frac{1}{3}$.

23.3. 1) $x_{\min} = 0$; 2) $x_{\min} = 3$; 3) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = 5$,

$x_{\max} = -1$. **23.4.** 1) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 3) $x_{\min} = 1$,

$x_{\max} = -7$; 4) $x_{\min} = \frac{3}{2}$. **23.7.** 1) Növekvő a $(-\infty; -2]$ és a $[2; +\infty)$ inter-

vallumon, csökkenő a $[-2; 0)$ és a $(0; 2]$ intervallumon, $x_{\max} = -2$;

$x_{\min} = 2$; 2) Növekvő a $(-\infty; 0]$ intervallumon, csökkenő a $[0; +\infty)$ inter-

vallumon, $x_{\max} = 0$. **23.8.** 1) Növekvő a $(-\infty; -3]$ és a $[3; +\infty)$ inter-

vallumon, csökkenő a $[-3; 0)$ és a $(0; 3]$ intervallumon, $x_{\max} = -3$;

$x_{\min} = 3$; 2) növekvő a $[0; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 0]$ inter-

vallumon, $x_{\min} = 0$. **23.9.** 1) -25 ; 2) -13 ; 3) -22 . **23.10.** 1) 26 ; 2) 17 ;

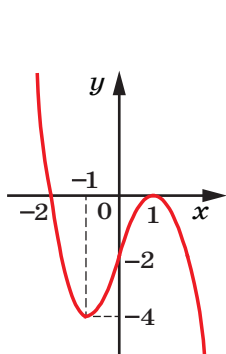
3) -10 .

24.1. 1) 4 ; 0; 2) 13 ; 4; 3) -3 ; -30 ; 4) -4 ; -8 . **24.2.** 1) 0 ; $-\frac{16}{3}$; 2) 1 ;

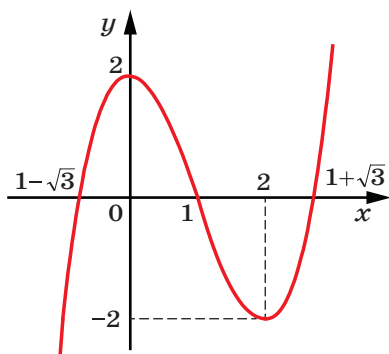
-2 ; 3) 48 ; -6 ; 4) 0 ; -28 . **24.3.** $8 = 2 + 6$. **24.4.** $12 = 8 + 4$.

24.5. $180 = 40 + 80 + 60$. **24.6.** $18 = 8 + 3 + 7$.

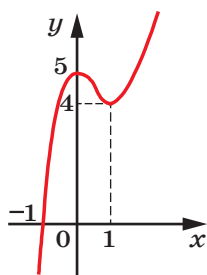
25.1. Lásd az ábrát! **25.2.** Lásd az ábrát!



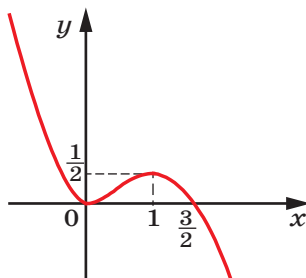
1)



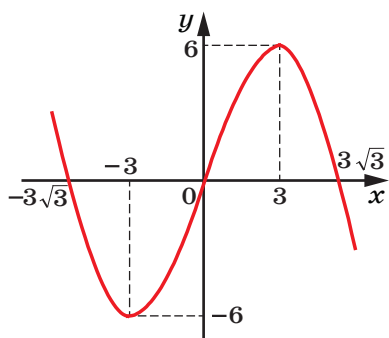
4)



2)

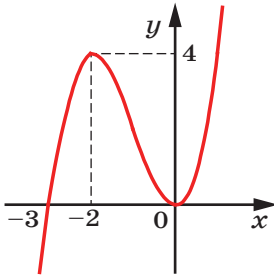


5)

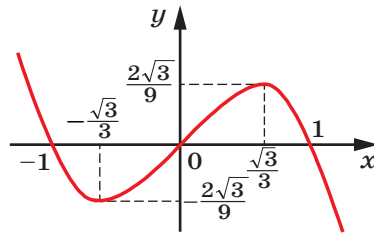


3)

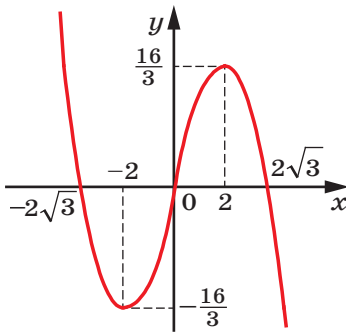
A 25.1. feladathoz



1)



3)



2)

A 25.2. feladathoz

- 26.6.** 1) -163 ; 2) 3 . **26.14.** 5) $\frac{1}{3}$. **26.16.** 1) 4 ; 2) 2 ; 3) 3 ; 4) -2 ; 5) -2 ;
 6) $\frac{2}{9}$; 2; 7) 625 ; 8) -25 ; 3. **26.19.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **26.20.** 2 ; -3 . **26.21.** 1) 0 ;
 2) 0 . **26.22.** -1 . **26.24.** 1) $\tan \alpha$; 2) 2 ; 3) 0 ; 4) 1 . **26.25.** 1) $-\frac{7\pi}{2} + 12\pi k$,
 $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{7\pi}{3} + 4\pi k$ vagy $-\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.26.** $\frac{\pi}{2}$.
26.27. $-\frac{\pi}{24}$. **26.28.** 2 gyöke van. **26.29.** 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.32.** 3. **26.33.** 1. **26.34.** 3) $y =$
 $= -6x + 13$; 4) $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.35.** $y = -4x$ és $y = 4x - 16$. **26.36.** $3,5$ s.

26.38. 2) Növekvő a $(-\infty; 0]$ és a $[4; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[0; 4]$ intervallumon, $x_{\max} = 0$; $x_{\min} = 4$; 3) növekvő a $(-\infty; -4]$ és a $[4; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-4; 0]$ és a $(0; 4]$ intervallumon, $x_{\max} = -4$; $x_{\min} = 4$; 6) növekvő a $(-\infty; -3]$ és az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $[-3; -1]$ és a $(-1; 4]$ intervallumon, $x_{\max} = -3$; $x_{\min} = 1$.
26.39. 2) 2; -2. **26.40.** $32 + 32$. **26.41.** 2.

2. fejezet. Térmértan

4. §. Párhuzamosság a térben

27.6. Végtelen vagy egy. **27.14.** 11 cm vagy 3 cm. **27.15.** 10 cm. **27.16.** 1 : 3.

28.15. 72° , 108° , 72° , 108° .

29.9. Egy sík vagy három sík. **29.14.** 4 cm. **29.15.** 9 cm. **29.16.** 1 : 2.

30.12. 7,5 cm. **30.13.** 8 : 3. **30.14.** *Útmutatás.* Bizonyítsd be, hogy az $ABCA \sim EBFA$, és alkalmazd a hasonló háromszögek megfelelő szögeinek egyenlőségét. **30.18.** 156 cm^2 .

31.13. 2) 24 cm. **31.15.** 1,5.

32.8. 9 cm. **32.14.** 60° .

5. §. Merőlegesség a térben

33.4. 60° . **33.5.** 1) 90° ; 2) 40° . **33.6.** 1) 0° ; 2) 70° ; 3) 35° . **33.7.** 80° .

33.8. 10 cm. **33.9.** 10 cm. **33.10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **33.11.** α vagy $180^\circ - \alpha$.

33.12. 90° . *Útmutatás.* Bizonyítsd be, hogy a keresett szög egyenlő lesz az OB_1 és AC egyenesek közötti szöggel, valamint azt, hogy az AB_1C háromszög egyenlő szárú. **33.13.** 60° . **33.14.** 52 cm.

34.7. 2 cm. **34.8.** $2\sqrt{5}$ cm. **34.9.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **34.10.** 8 cm.

34.13. 12 cm. **34.14.** 14 cm. **34.15.** 12 cm.

35.5. 7 cm. **35.6.** 12 cm. **35.16.** 15 cm. **35.17.** 15 cm, 13 cm. **35.18.** 3 cm. **35.19.** 12 cm. **35.23.** $3\sqrt{5}$ cm. **35.24.** 2 cm. **35.25.** $2\sqrt{2}$ cm. **35.26.** $2\sqrt{6}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{6}$ cm. **35.27.** 17 cm. **35.28.** 8 cm. **35.29.** 10 cm. **35.30.** 5 cm. **35.31.** 4 cm. **35.33.** 20 cm. **35.34.** $3\sqrt{10}$ cm. **35.36.** $4\sqrt{3}$ cm.

36.7. 30° . **36.10.** 30° . **36.11.** $6\sqrt{2}$ cm. **36.12.** 3 cm. **36.13.** $8\sqrt{2}$ cm.
36.14. $3\sqrt{10}$ cm. **36.15.** 6 cm. **36.16.** $3\sqrt{14}$ cm. **36.17.** 30° . **36.18.** 30° .
37.6. 60° . **37.7.** 60° . **37.11.** 80° . **37.16.** 35 cm. **37.18.** 84 cm^2 .
37.20. 105° . **37.21.** 70° . **37.22.** $\sqrt{5}$ cm. **37.23.** 120° . **37.24.** $5\sqrt{2}$ cm,
 13 cm. **37.25.** 45° . **37.26.** $3\sqrt{2}$ cm. **37.27.** 25 cm. **37.28.** 8 cm. **37.29.** 45° .
37.30. 30° , 60° . **37.31.** 1) $2\sqrt{15}$ cm; 2) 8 cm. **37.32.** 13 cm. **37.33.** 45° .
37.34. 60° . **37.35.** 90° . **37.36.** 26 cm.

6. §. Koordináták és vektorok a térben

38.18. 66. **38.19.** $3\sqrt{14}$. **38.20.** $y = -2$ vagy $y = -10$.
38.21. $A(3; 0; 0)$ vagy $A(-1; 0; 0)$. **38.22.** 5. **38.23.** 13. **38.24.** 625 cm^2 .
39.10. 3. **39.13.** $D(7; -4; 5)$. **39.14.** $x = 20$, $y = -29$, $z = -18$.
39.15. -3 vagy 3. **39.16.** -14 vagy 2. **39.18.** $B(-3; 16; -7)$. **39.19.**
 $\vec{m}(4; 4; 4)$ vagy $\vec{m}(-4; -4; -4)$. **39.20.** $\vec{c}(3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ vagy
 $\vec{c}(-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$. **39.21.** 13 cm.

40.11. $\vec{NK}$. **40.12.** $\vec{FM}$. **40.15.** $A(3,5; -1,5; 8)$.
40.16. $(-0,5; -2,5; 4,5)$. **40.17.** 9,6 cm.

41.14. $x = -\frac{4}{7}$, $z = \frac{35}{4}$. **41.15.** $\vec{AB}\left(-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **41.16.** $D(6; 0; 10)$.
41.17. $\vec{b}\left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. **41.18.** $\vec{m}(5; -5; 10)$. **41.19.** 1) Nem; 2) igen.
41.20. $y = -9$, $z = 3$. **41.21.** $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}$. **41.22.** $\vec{MK} = \frac{1}{2}\vec{AB} +$
 $+\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AA_1}$. **41.23.** $\vec{EF} = -\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AA_1}$. **41.24.** 8 cm.

42.7. 4. **42.8.** -3. **42.9.** $\vec{a}$ és $\vec{c}$. **42.12.** -19,5. **42.13.** -12. **42.14.** 1.
42.15. -1 vagy 2. **42.16.** 143. **42.17.** 70. **42.18.** 1) $-\frac{a^2}{2}$. *Útmutatás.*
 Fejezd ki a $\vec{CM}$ vektort a $\vec{CA}$ és $\vec{CB}$ vektorok által! 2) 0. *Útmutatás.*
 Fejezd ki az $\vec{AB}$ vektort a $\vec{DA}$ és $\vec{DB}$ vektorok által! **42.19.** a^2 .
Útmutatás. Fejezd ki a $\vec{AC}$ vektort az $\vec{AB}$ és $\vec{AD}$ vektorok által!
42.20. $180^\circ - \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$. **42.21.** $180^\circ - \arccos \frac{7\sqrt{19}}{38}$. **42.22.** 0,7.

42.23. 60° . 42.24. 80 cm^2 .

- 43.10. 11 cm. 43.20. 2) 60° . 43.21. 1) $\arctg 2$; 2) $2 \arctg \frac{1}{2}$;
 3) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$. 43.22. 26 cm, $8\sqrt{10}$ cm. 43.23. 2) $3\sqrt{2}$ cm. 43.24. 2,4 cm.
 43.25. 4,5 cm. 43.26. 10 cm. 43.27. $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 43.28. 6 cm.
 43.29. 13 cm. 43.30. 8 cm. 43.31. $\frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$. 43.32. $\arctg \frac{3}{4}$.
 43.33. 60° . 43.34. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi\right)$. 43.35. $\frac{h}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. 43.36. $\arccos \frac{1}{3}$.
 43.37. 6 cm. 43.38. $4\sqrt{3}$ cm. 43.39. 15 cm. 43.40. $\frac{128\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$.
 43.41. 45° . 43.42. 1) $C(0; 4; 0)$; 2) $x=-7, z=1$. 43.43. 2) $\frac{69\pi}{4}$. 43.44. 9.
 43.45. $y=3$ vagy $y=-1$. 43.46. $D(3; 1; -5)$. 43.47. $D(-2; 1; 2)$.
 43.49. $D(0; 1,5; 1,5)$. 43.50. $\overline{MO} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} - \frac{1}{6}\overline{AD}$. 43.51. $\frac{5}{21}$.
 43.52. 90° . 43.53. $x=1$ vagy $x=3$. 43.54. $\overline{m}(-0,5; 1; -0,5)$.
 43.55. $180^\circ - \arccos \frac{\sqrt{30}}{30}$. 43.56. $\arccos \frac{3}{7}$. 43.57. $2\sqrt{5}$.
 43.58. $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$.

TÁRGYMUTATÓ

- Abszcissza** 211
Abszcisszatengely 210
Alakzat ortogonális vetülete 185
 — párhuzamos vetülete a síkra 169
Alapfogalmak 142
Applikáta 211
Applikátatengely 210
Arccos 87
Arctg 93
Arcsin 92
Argumentum növekménye 103
Derivált 109
 — geometriai értelmezése 109
 — mechanikai értelmezése 109
Differenciálás 110
Differenciálható függvények 109
Egész kitevőjű
 hatványfüggvények 17
Egyenes és a vele párhuzamos
 sík távolsága 187
 — és sík közötti szög 194
 — — merőlegességének ismertetőjele 181
 — — párhuzamosságának ismertetőjele 161
Egyenlet hamis gyöke 40
Egyenlet-következmény 40
Egyenlő vektorok 216
Egyirányú vektorok 216
Egymást metsző síkok 144
Egységgör 51
Elforgatás szögének koszinusza 55
Elforgatási szög szinusza 55
 — — szög tangense 56
Ellentétes irányú vektorok 216
Ellentett vektor 224
Ellipszis 171
Érintő egyenlete 118
Extrémumpont 124
Ferde 186
 — talppontja 186
 — vetülete 186
Függvény alapperiódusa 63
 — állandóságának ismertetőjele 120
 — csökkenésének ismertetőjele 120
 — grafikonjának érintője 107
 — legkisebb értéke az adott intervallumon 7
 — legnagyobb értéke az adott intervallumon 7
 — maximumpontjának ismertetőjele 125
 — minimumpontjának ismertetőjele 125
 — növekedésének ismertetőjele 120
 — növekménye 103
 — origóra szimmetrikus értelezési tartománya 8
 — periódusa 63
Gúla alapéle 150
 — alapja 150
 — csúcsai 150
 — oldaléle 150
 — oldallapja 150
Gyök alatti kifejezés 22
Gyökjel 22
Hányados deriváltja 115
Három merőleges tétele 188

- Háromszög-szabály 219
 Hasáb 150
 — alapja 150
 — oldaléle 150
 — oldallapja 150
 Hatványkitevő csökkentésének képletei 77
 Irracionális egyenlet 40
 Ívmérték 50
 Két egymást metsző egyenes közötti szög 177
 — kitérő egyenes közötti szög 177
 — párhuzamos egyenes közötti szög 177
 — — sík közötti távolság 187
 — sík közötti szög 200
 — — párhuzamosságának ismertetőjele 165
 — sokszög közötti szög 200
 Kétszeres argumentum koszinuszának képlete 77
 — — szinusznak képlete 77
 — — tangensének képlete 77
 Kitérő egyenes ismertetőjele 157
 — egyenesek 155
 — szakaszok 156
 Kocka 151
 Kollineáris vektorok 215
 Koordinátasík 211
 Koordinátatér 211
 Körgyök 22
 Különbség koszinuszának képlete 76
 — szinusznak képlete 76
 — tangensének képlete 76
 Lapszög 198
 — éle 198
 — élszöge 199
 — lapja 198
 — mértéke 199
 Maximumpont 123
 Merőleges 186
 — egyenesek 178
 — síkok 201
 — szakaszok 178
 — talppontja 186
 — vektorok 227
 Minimumpont 123
 n -edik gyök 21
 Nullvektor 215
 Ordináta 211
 Ordinátatengely 210
 Origó 210
 Origóra szimmetrikus pontok 212
 Összeg deriváltja 114
 — koszinuszának képlete 76
 — szinusznak képlete 76
 — tangensének képlete 76
 Összegzési képletek 76
 Paralelepipedon 151
 Paralelepipedon-szabály 221
 Paralelogramma-szabály 220
 Páratlan függvények 8
 Párhuzamos egyenesek 155
 — síkok 165
 — sokszögek 166
 — szakaszok 156
 — vetítés 169
 Páros függvények 8
 Periodikus függvények 63
 Pont és a sík távolsága 187
 — koordinátái 211
 — környezete 123
 Pontban differenciálható függvények 109
 Racionális kitevőjű hatvány 34
 — — hatványfüggvények 35
 Radián 49

- Sík 143
Síkkal párhuzamos egyenes 160
— párhuzamos szakasz 161
Síkok merőlegességének
ismertetőjele 202
Síkot metsző egyenes 144
Síkra illeszkedő egyenes 143
— merőleges egyenes 181
— merőleges szakasz 181
— szimmetrikus pontok 212
Soklap 149
— csúcsa 150
— éle 150
— lapja 149
— és sík közötti szög 200
Sokszög ortogonális vetületének a
területe 200
Szakasz és sík közötti szög 195
Számítási n -edik gyök 23
Szinuszoid 67
Szinuszvonal 66
Szorzat deriváltja 114
Téglatest 151
Térbeli Descartes- féle
koordináta-rendszer 210
Térmértan axiómái 144
Természetes kitevőjű
hatványfüggvények 13
Tetraéder 150
Trigonometriai
alapazonosságok 73
Trigonometrikus függvények 57
Vektor 215
— abszolút értéke 215
— koordinátái 216
— számmal való szorzása 223
Vektorok közötti szög 227
— különbsége 221
— összege 219
— skaláris négyzete 228
— skaláris szorzata 228
Visszavezetési képletek 82

Tartalom

<i>A szerzőktől</i>	3
<i>Egyezményes jelek</i>	4

1. fejezet. ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI

1. §. Függvények, ezek tulajdonságai és grafikonjaik

1. A függvény legnagyobb és legkisebb értékei. Páros és páratlan függvények	6
2. A természetes kitevőjű hatványfüggvény	13
3. Az egész kitevőjű hatványfüggvény	17
4. Az n -edik gyök meghatározása	21
5. Az n -edik gyök tulajdonságai	27
6. A racionális kitevőjű hatvány meghatározása és tulajdonságai	33
7. Irracionális egyenletek	39
• <i>A lemergi matematikai iskola</i>	44
<i>Az 1. §. összefoglalása</i>	47

2. §. Trigonometrikus függvények

8. A szög radiánmértéke	49
9. A számargumentumú trigonometrikus függvények	55
10. A trigonometrikus függvények előjelei. Páros és páratlan trigonometrikus függvények	59
11. A trigonometrikus függvények tulajdonságai és grafikonjaik	63
12. Az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggések	72
13. Addíciós (összegzési) képletek	76
14. Visszavezetési képletek	82
15. A $\cos x = b$ egyenlet	85
16. A $\sin x = b$ és a $\operatorname{tg} x = b$ egyenletek	90
17. Algebrai egyenletekké alakítható trigonometrikus egyenletek	96
• <i>Légy te is Osztrohadszkij!</i>	99
<i>A 2. §. összefoglalása</i>	100

3. §. A derivált és alkalmazása

18. A pillanatnyi sebességről és a függvénygrafikon érintőjéről szóló feladatok	103
19. A derivált fogalma	108
20. A derivált kiszámításának szabályai	114

21. Az érintő egyenlete	118
22. A függvény növekedésének és csökkenésének (fogyásának) ismertetőjelei	120
23. A függvény extrémumpontjai	123
24. A függvény legnagyobb és legkisebb értéke	128
25. A függvény grafikonjának ábrázolása	131
A 3. §. összefoglalása	134
26. A 10. osztályos algebra és az analízis tananyagának ismétlő gyakorlatai	136

2. fejezet. TÉRMÉRTAN

4. §. Párhuzamosság a térben

27. A térmértan alapfogalmai. A térmértan axiómái.....	142
28. Térbeli testek. A soklapokra vonatkozó alapismeretek.....	149
29. Két egyenes kölcsönös helyzete a térben	154
30. Az egyenes és a sík párhuzamossága	160
31. A síkok párhuzamossága	164
32. Párhuzamos vetítés	169
• Ukrajnának vannak tehetségei!	173
A 4. §. összefoglalása	175

5. §. Merőlegesség a térben

33. Az egyenesek közötti szög a térben	177
34. Az egyenes és a sík merőlegessége	180
35. A merőleges és a ferde	185
36. Az egyenes és a sík hajlásszöge	194
37. Lapszögek. A síkok hajlásszöge	198
Az 5. §. összefoglalása.....	208

6. §. Koordináták és vektorok a térben

38. A pont Descartes-féle koordinátái a térben	210
39. Vektorok a térben	215
40. A vektorok összeadása és kivonása.....	219
41. A vektor számmal való szorzása	223
42. A vektorok skaláris szorzata	227
A 6. §. összefoglalása	232
43. A 10. osztályos mértan tananyagának ismétlő gyakorlatai	234

<i>Feleletek és útmutatások</i>	240
---------------------------------------	-----

<i>Tárgymutató</i>	251
--------------------------	-----

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
ТА ГЕОМЕТРІЯ
РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти
з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Переклад з української мови
Перекладач *Поллої Дезидер Федорович*

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Турканич*

Формат 60×90/16.

Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,86.
Тираж 1019 прим. Зам. № ?????.

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua
e-mail: office@svit.gov.ua

Віддруковано у ТДВ «Патент»
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011 р.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Перекладено за виданням:

Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

Мерзляк А. Г.

М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. осв. з навч. угорською мовою / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої. – Львів : Світ, 2018. – 256 с. : іл.

ISBN 978-966-914-139-2

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

© Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С., 2018
© ТОВ ТО „Гімназія”, оригінал-макет, художнє оформлення, 2018
© Поллої Д. Ф., переклад угорською мовою, 2018

ISBN 978-966-914-139-2 (угор.)
ISBN 978-966-474-310-2 (укр.)

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
ТА ГЕОМЕТРІЯ
РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти
з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Переклад з української мови
Перекладач *Поллої Дезидер Федорович*

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Турканич*

Формат 60×90/16.

Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,86.
Додатковий тираж 14 прим. Зам. № ????.

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua
e-mail: office@svit.gov.ua

Віддруковано у ТДВ «Патент»
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011 р.

1. előzők



Szerelmem Ukrajna és a matematika – ezek a szavak vannak felvésvé Mihajlo Pilipovics Kravcsuk (1892–1942) gránitból készült sír- emlékére.

Reméljük, hogy a kimagasló ukrán matematikus hazaszeretetről árulkodó szavai biztos útmutatóul szolgálnak számotokra a szakmai tudás megszerzésében.

2. előzők

Az n -edik gyök tulajdonságai

$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$ $\sqrt[2k]{a^{2k}} = a $	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[k]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

A gyök tulajdonságai

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$(ab)^p = a^p b^p$	

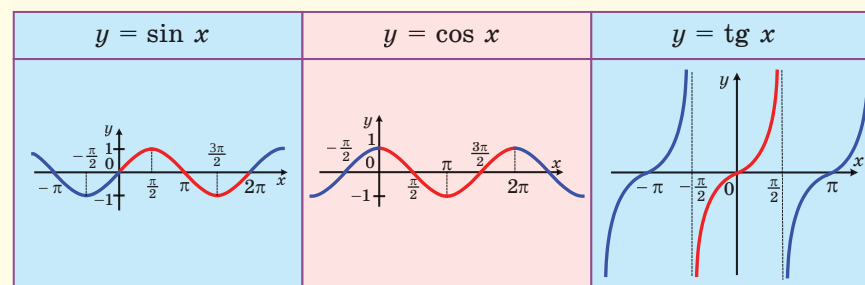
Deriválási táblázat

$(c)' = 0$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x)' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Deriválási szabályok

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(fg)' = f' \cdot g + g' \cdot f$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
--------------------------	-----------------------------------	---

Trigonometrikus függvények grafikonjai



3. előzők

Trigonometrikus függvények értéktáblázata

α°	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
α , рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

Az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggések

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Összegési képletek

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

A kétszeres argumentumú trigonometrikus függvények képletei

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Hatványcsökkentő képletek

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

4. előzők

A legismertebb trigonometrikus egyenletek gyökeinek képletei

Egyenlet	Az egyenlet gyökeinek képlete
$\cos x = b, b \leq 1$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b, b \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Egyenlet	Az egyenlet gyökeinek képlete	Egyenlet	Az egyenlet gyökeinek képlete
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$	$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$\sin x = 0$	$x = \pi n$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$	$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Ha S a sokszög területe, S_{vet} a sokszög ortogonális vetületének területe,

α pedig a sokszög és vetülete közötti szög, akkor

$$S_{\text{vet}} = S \cos \alpha$$

Az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ pontok közötti távolság:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Az $A(x_1; y_1; z_1)$ és a $B(x_2; y_2; z_2)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontjának koordinátái:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Az $(a_1; a_2; a_3)$ koordinátájú $\vec{a}$ vektor abszolút értéke:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Az $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ vektorok skaláris szorzata:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}); \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Az $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ vektorok közötti szög koszinusza:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Két $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektor merőlegességének feltétele:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$