A. H. Merzljak
V. B. Polonszkij
M. Sz. Jakir

MÉRTAN

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 9. osztálya számára

Ajánlotta
Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „СВІТ"
2017

УДК 373.167.1:512
М 52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х : Гімназія, 2017.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа „Рекомендовано Міністерством освіти і науки України”:

Л. І. Філозоф, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, кандидат фізико-математичних наук;
О. В. Тесленко, методист методичного центру Управління освіти адміністрації Слобідського району Харківської міської ради;
Т. А. Євтушевська, учитель Черкаської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 7, учитель-методист

Експертка з антидискримінації в освіті
Н. М. Дашенкова, доцентка кафедри філософії, співробітниця ЦГО ХНУРЕ

Мерзляк А. Г.
М 52 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої. – Львів : Світ, 2017. – 240 с. : іл.

ISBN 978-966-914-072-2

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-072-2 (угор.)
ISBN 978-966-474-295-2 (укр.)

A SZERZŐKTŐL

Kedves gyerekek!

Ebben a tanévben is folytatjuk a mértan tanulását. Reméljük, hogy sikerült megszeretni ezt a szép és fontos tantárgyat, és ezért fokozott érdeklődéssel fogtok hozzá az új ismeretek elsajátításához. Bízunk benne, hogy a kezetekben tartott tankönyv segítségetekre lesz ebben.

Ismerkedjetek meg a tankönyv felépítésével!

A tankönyv öt paragrafusból áll, amelyek pontokra tagozódnak. Ezek a pontok tartalmazzák az elméleti tananyagot. Fordítsatok különösen figyelmet a **félkövér**, a ***félkövér dőlt***, valamint a *dőlt* betűs szövegre. Így vannak jelölve a meghatározások, a szabályok és a legfontosabb matematikai állítások.

A hagyományoknak megfelelően az elméleti tananyagot gyakorlópéldák és feladatok követik. Ezeket a feladatmegoldás egyik lehetséges változatának tekinthetitek.

Mindegyik pont végén önálló munkához válogatott feladatok vannak, melyek megoldásához csak az elméleti tananyag elsajátítása után kezdjetek. A feladatok között vannak könnyűek, közepesek és nehezek (különösen a csillaggal (*) jelöltek). A tudásotokat tesztfeladatok megoldásával ellenőrizhetitek, melyek minden paragrafus végén megtalálhatók.

Minden páratlan sorszámú pont a *Figyeld meg, rajzold le, szerkeszd meg, képzeld el*! rubrikával fejeződik be, melyben olyan feladatok találhatók, amelyek megoldásához nem különleges mértani tudásra van szükség, hanem csak a józan eszeteket, találékonyságotokat és leleményességeteket kell használni. Ezek nagyon hasznos feladatok, melyek fejlesztik a „geometriai látást” és a kreativitást. Segítenek abban is, hogy ne csak a matematikai feladatok során alkalmazzunk váratlan és innovatív megoldásokat, hanem a mindennapi életben is.

Ha a házi feladat megoldása után még marad szabad időtök, szeretnétek többet tudni, akkor ismerkedjetek meg a *Felkészültünk az órákhoz* című rubrikában leírt feladatokkal. Az ebben közölt tananyag nem tartozik az egyszerűek közzé, de itt aztán igazán kipróbálhatjátok képességeiteket.

Sok sikert és kitartást kívánunk!

Tisztelt kollégák!

Őszintén reméljük, hogy e tankönyv megbízható segítségül szolgál egy nemes cél érdekében végzett áldozatos munkájukhoz. Szeretnénk, ha a könyv elnyerné tetszésüket.

Ebben a könyvben nagy mennyiségű és változatos módszertani anyag található. <u>Egy tanév alatt a tankönyvben található valamennyi feladatot lehetetlen megoldani, de erre nincs is szükség</u>. Sokkal kényelmesebb úgy dolgozni, hogy bőségesen válogathatunk a feladatokból. Ez az individuális módszerek alkalmazását teszi lehetővé az oktatásban, és lehetőséget biztosít a megfelelő differenciálásra.

Az általános és középiskolai tanintézmények 5–9. osztályos tanulóinak szóló matematika oktatási programjában a következő megállapítás szerepel: „A tananyag tartalma a megfelelő oktatási kurzusok témáinak megfelelően strukturált a tanulmányozásukra szánt óraszám meghatározásával. A tartalom és a tanulmányi idő ezen felosztása tájékoztató jellegű. A tanároknak és a tankönyvek szerzőinek jogukban áll módosítani azt az elfogadott módszertani koncepciónak megfelelően...”

Erre való tekintettel célszerűnek látjuk, hogy néhány témát felcseréljünk. Ez lehetővé teszi a tankönyv didaktikai anyagának szélesebb körű alkalmazását.

Zöld színnel vannak jelölve azoknak a feladatoknak a sorszámai, amelyeket házi feladatra ajánlunk, kék színnel pedig azok, melyeket a tanár megítélése szerint (figyelembe véve az osztály tanulóinak egyéni adottságait) szóbelileg is megoldhatók.

A *Felkészültünk az órákhoz* rubrikában szereplő feladatokat a matematika szakkörökön és fakultatív órákon lehet felhasználni.

Ehhez nagyon sok türelmet és alkotói kedvet kívánunk!

EGYEZMÉNYES JELEK

n°	alacsony és közepes felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;
$n^{\bullet}$	megfelelő felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;
$n^{\bullet\bullet}$	kiváló felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;
n^{*}	matematika szakkörök részére és fakultatív foglalkozásokra ajánlott feladatok;
	kulcsfontosságú feladatok jelölése, melyek megoldásait más feladatok megoldása során is alkalmazni kell;
⊙	tételek bizonyítása megfelelő felkészültségű tanulók részére;
(••)	tételek bizonyítása kiváló felkészültségű tanulók részére;
⊛	a tananyaghoz szorosan nem tartozó tétel bizonyítása;
◀	vége a tétel és a feladat bizonyításának;
	*Felkészültünk az órákhoz* rubrika.

HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA 1.§.

Ebben a paragrafusban megismerkedtek az α szög szinuszával, koszinuszával, tangensével és kotangensével, ahol $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Megtanuljátok meghatározni a háromszög harmadik oldalát, ha ismert két oldala és az általuk bezárt szöge, valamint egy oldala és rajta fekvő két szöge alapján meghatározni a háromszög másik két oldalát.

A 8. osztályban a derékszögű háromszög megoldását tanulmányoztátok. Megismerve ennek a paragrafusnak a tananyagát, tisztába lesztek bármilyen háromszög megoldásával.

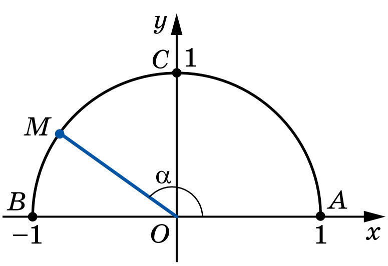
Megismerkedtek a háromszög területének meghatározására szolgáló újabb képlettel.

1. A 0°-tól 180°-ig terjedő szögek szinusza, koszinusza és tangense

A hegyesszög szinuszának, koszinuszának és tangensének fogalmával már a 8. osztályos mértan során megismerkedtetek. Ezeket a fogalmakat kibővítjük bármilyen α szögre, ahol $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$.

A koordinátasík felső félsíkjában megvizsgálunk egy félkört, melynek középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja (origó), sugara pedig 1 egység (1.1. ábra). Az ilyen félkört **egységsugarúnak** nevezzük.

Az α **szögnek** $\mathbf{(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)}$ az egységfélkörön az $\boldsymbol{M}$ **pont felel meg**, ha $MOA\angle = \alpha$, ahol az O és A pontok megfelelő koordinátái (0; 0) és (1; 0) (1.1. ábra). Például az 1.1. ábrán a 90°-kal egyenlő szögnek a C pont fog megfelelni, a 180°-kal egyenlő szögnek a B pont, a 0°-kal egyenlő szögnek pedig az A pont.



1.1. ábra

Legyen az α hegyesszög. Akkor ennek az egységfélkör AC ívén (1.2. ábra) megfelel egy $M\,(x;\,y)$ pont. Az OMN derékszögű háromszögben:

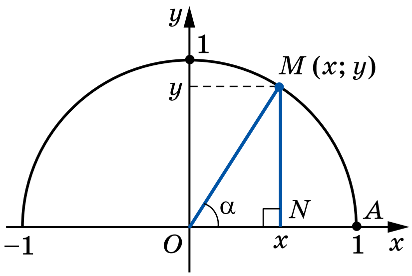
$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM},\quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Mivel $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, ezért

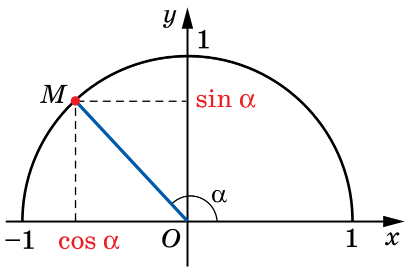
$$\cos\alpha = x,\ \sin\alpha = y.$$

Tehát az α hegyesszög koszinuszának és szinuszának az α szögnek megfelelő egységfélkörön lévő M pont abszcisszáját és ordinátáját tekintjük.

A kapott eredmény már előrevetíti azt, hogyan lehetne meghatározni egy tetszőleges α szög szinuszát és koszinuszát, ahol $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$.



1.2. ábra



1.3. ábra

Meghatározás. Az α ($\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$) szög koszinuszának és **szinuszának az egységfélkörön lévő, az α szögnek megfelelő *M* pont abszcisszáját és ordinátáját nevezzük** (1.3. ábra)**.**

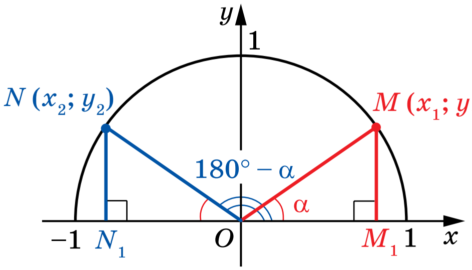
Alkalmazva ezt a meghatározást megállapítható, hogy $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Ha $M\,(x;\,y)$ az egységfélkör bármilyen pontja, akkor $-1 \leqslant x \leqslant 1$ és $0 \leqslant y \leqslant 1$. Tehát ha $\mathbf{0° \leqslant \alpha \leqslant 180°}$, akkor bármilyen α szögre igaz:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Ha α tompaszög lesz, akkor ennek a szögnek az abszcisszája negatív. Tehát a tompaszög koszinusza negatív szám. Igaz a következő állítás is: ha $\cos\alpha < 0$, akkor az α tompa- vagy egyenesszög lesz.



1.4. ábra

A 8. osztályban már tanultátok, hogy bármilyen α hegyesszögre igazak a következő egyenlőségek:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin (90° - \alpha) &= \cos \alpha,\\ \cos (90° - \alpha) &= \sin \alpha\end{aligned}}$$

Ezek a képletek igazak maradnak az $\alpha = 0°$-ra és az $\alpha = 90°$-ra is (önállóan győződjetek meg erről).

Legyen az α és a $180° - \alpha$, ahol $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ és $\alpha \neq 180°$, megfelelő pontjai az egységfélkörön az $M\,(x_1;\,y_1)$ és $N\,(x_2;\,y_2)$ pontok (1.4. ábra).

Az OMM_1 és ONN_1 derékszögű háromszögek egybevágók az átfogójuk és a hegyesszögük alapján ($OM = ON = 1$, $MOM_1\angle = NON_1\angle = \alpha$). Ebből következik, hogy $y_2 = y_1$ és $x_2 = -x_1$. Tehát

$$\boxed{\begin{aligned}\sin (180° - \alpha) &= \sin \alpha,\\ \cos (180° - \alpha) &= -\cos \alpha\end{aligned}}$$

Győződjetek meg arról önállóan, hogy a fenti egyenlőségek igazak maradnak $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ esetén is.

Ha az α hegyesszög, akkor a 8. osztályból már ismert a következő azonosság, amelyet a **trigonometria alapazonosságának** neveznek:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Ez az azonosság igaz az $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ esetében is (önállóan győződjetek meg róla).

Legyen az α tompaszög. Ekkor a **180° –** α hegyesszög lesz. A következőt kapjuk:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin (180° - \alpha))^2 + (-\cos (180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2 (180° - \alpha) + \cos^2 (180° - \alpha) = 1.$$

Tehát a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság teljesül bármilyen $\mathbf{0°} \leqslant \alpha \leqslant \mathbf{180°}$ szögre is.

Meghatározás. Az α szög tangensének a $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ arányt nevezzük, vagyis

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}},$$

ahol $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, és $\alpha \neq 90°$.

Mivel $\cos 90° = 0$, ezért tgα $\alpha = 90°$ esetén nincs értelmezve.

Könnyen beláthatjuk, hogy az α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ mindegyik értékének az egységsugarú félkör *egy-egy* pontja felel meg. Tehát minden α szögnek megfelel egyetlen olyan szám, amely az adott szög szinusza (koszinusza, tangense, ha $\alpha \neq 90°$). Ezért a szinusz értéke és a szög nagysága között függvénykapcsolat áll fenn.

Az $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \text{tg}\,\alpha$ függvényeket az α szög **trigonometrikus függvényeinek** nevezzük.

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy $\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$!

Megoldás.

$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha.$$

2. feladat. Határozzátok meg sin 120°, cos 120°, tg 120° értékét!

Megoldás. $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\text{tg}\,120° = \text{tg}\,(180° - 60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}.$$

?

1. Mit nevezünk egységfélkörnek?
2. Magyarázzátok meg, milyen esetben mondjuk, hogy az α szögnek megfelel egy M pont az egységsugarú félkörön!
3. Mit nevezünk az α szög szinuszának, ahol $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Mit nevezünk az α szög koszinuszának, ahol $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Mivel lesz egyenlő sin 0°, cos 0°, sin 90°, cos 90°, sin 180°, cos 180°?
6. Milyen értékek között lesz a sin α értéke, ha $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. Milyen értékek között lesz a cos α értéke, ha $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
8. Pozitív vagy negatív lesz-e a hegyesszög szinusza; a tompaszög szinusza; a hegyesszög koszinusza; a tompaszög koszinusza?
9. Milyen lesz az α szög, ha $\cos\alpha < 0$?
10. Mivel egyenlő $\sin(180° - \alpha)$; $\cos(180° - \alpha)$?

11. Milyen kapcsolatban vannak egymással az ugyanazon szög szinusza és koszinusza?

12. Mit nevezünk az α szög tangensének, ha $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ és $\alpha \neq 90°$?

13. Minek nincs értelmezve a **tg** α az $\alpha = 90°$ esetére?

14. Mi a közös neve az $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ és $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$ függvényeknek?

GYAKORLATI FELADATOK

1.1. Rajzoljatok egy egységsugarú félkört! Az egységnek egy olyan szakaszt vegyetek, amely 5-ször nagyobb, mint a füzet négyzetrácsának oldala! Szerkesszetek olyan szöget, melynek csúcsa a koordináta-rendszer kezdőpontja, egyik szára pedig az abszcisszatengely pozitív felére esik, melynek:

1) koszinusza $\frac{1}{5}$;
2) koszinusza –0,4;
3) szinusza 0,6;
4) szinusza 1;
5) koszinusza 0;
6) koszinusza –1!

GYAKORLATOK

1.2.° Mivel egyenlő:

1) $\sin(180° - \alpha)$, ha $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;
2) $\cos(180° - \alpha)$, ha $\cos\alpha = 0{,}7$;
3) $\cos(180° - \alpha)$, ha $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;
4) $\mathrm{tg}(180° - \alpha)$, ha $\mathrm{tg}\,\alpha = -5$?

1.3.° Az α és β mellékszögek, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Határozzátok meg a $\cos\beta$ értékét!
2) Az α és β szögek közül melyik lesz hegyesszög, és melyik tompa?

1.4.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0°$;
2) $3\sin 0° - 5\cos 180°$;
3) $\mathrm{tg}\,23° \cdot \mathrm{tg}\,0° \cdot \mathrm{tg}\,106°$;
4) $6\,\mathrm{tg}\,180° + 5\sin 180°$;
5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;
6) $\frac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$!

1.5.° Számítsátok ki:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \mathrm{tg}\,180°$;
2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$!

1.6.° Mivel egyenlő a szög szinusza, ha a koszinusza egyenlő:
1) 1; 2) 0?

1.7.° Mivel egyenlő a szög koszinusza, ha a szinusza egyenlő:
1) 1; 2) 0?

1.8.° Határozzátok meg a sin 135°, cos 135°, tg 135° értékét!

1.9.° Határozzátok meg a sin 150°, cos 150°, tg 150° értékét!

1.10.° Létezik-e olyan α szög, amelynek:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$; 4) $\cos\alpha = -0{,}99$; 6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

1.11.• Határozzátok meg:

1) $\cos\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ és $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ és $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$ értékét, ha $\cos\alpha = -0{,}8$;

5) $\operatorname{tg}\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ és $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$!

1.12.• Határozzátok meg:

1) $\cos\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$ értékét, ha $\cos\alpha = \frac{1}{6}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha$ értékét, ha $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ és $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$!

1.13.• Igaz-e a következő állítás (magyarázzátok meg a választ):
1) a hegyesszög koszinusza nagyobb a tompaszög koszinuszánál;
2) létezik tompaszög, melynek szinusza és koszinusza egyenlő;
3) létezik olyan szög, melynek szinusza és koszinusza nullával egyenlő;
4) a háromszög szögének koszinusza lehet negatív szám is;
5) a háromszög szögének szinusza lehet negatív szám is;
6) a háromszög szögének koszinusza lehet nulla is;
7) a háromszög szögének szinusza lehet nulla is;

8) a háromszög szögének koszinusza lehet -1 is;
9) a háromszög szögének szinusza lehet 1 is;
10) a derékszögtől eltérő szög szinusza kisebb, mint a derékszög szinusza;
11) az egyenesszög koszinusza kisebb, mint a derékszögtől eltérő szög koszinusza;
12) a mellékszögek szinuszai egyenlők;
13) a nem egyenlő mellékszögek koszinuszai ellentett számok lesznek;
14) ha két szög koszinuszai egyenlők, akkor ezek a szögek is egyenlők;
15) ha két szög szinuszai egyenlők, akkor ezek a szögek is egyenlők;
16) a hegyesszög tangense nagyobb a tompaszög tangensénél?

1.14.• Hasonlítsátok össze a nullával a kifejezés értékét:
1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$!

1.15.• Határozzátok meg a kifejezés értékét:
1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $2 \cos^2 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$!

1.16.• Mivel egyenlő a kifejezés értéke:
1) $2 \sin 150° - 4 \cos 120°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

1.17.• Számológép alkalmazása nélkül határozzátok meg a kifejezés értékét:
1) $\dfrac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\dfrac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$!

1.18.• Számológép alkalmazása nélkül határozzátok meg a kifejezés értékét:
1) $\dfrac{\sin 28°}{\sin 152°}$; 2) $\dfrac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 14°}{\operatorname{tg} 166°}$!

1.19.• Határozzátok meg a derékszögű háromszög szögei szinuszainak négyzetét, majd ezek összegét!

1.20.• Határozzátok meg a derékszögű háromszög szögei koszinuszainak négyzetét, majd ezek összegét!

1.21.• Az ABC háromszögben adott, hogy $B\angle = 60°$, O pedig a beírt kör középpontja. Mivel lesz egyenlő az $AOC\angle$ koszinusza?

1.22.• Az O pont az ABC háromszögbe írt körvonal középpontja, $\cos BOC\angle = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Határozzátok meg a háromszög A szögét!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1.23. A paralelogramma tompaszögének csúcsából bocsátott magassága 5 cm és a paralelogramma oldalát egyenlő részekre osztja. A paralelogramma hegyesszöge 30°. Határozzátok meg a paralelogramma tompaszögének csúcsából húzott átlóját, és az átlónak a paralelogramma oldalaival alkotott szögeit!

1.24 Az $ABCD$ trapézban a CE egyenes párhuzamos az AB szárával, és az AD alapját AE és DE szakaszokra ossza úgy, hogy $AE = 7$ cm, $DE = 10$ cm. Határozzátok meg a trapéz középvonalát!

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

1.25. A háromszög két oldala 8 cm és 11 cm. Lehet-e a 8 cm-es oldallal szemközti szöge:

1) tompaszög; 2) derékszög?

Válaszotokat magyarázzátok meg!

1.26. Az ABC háromszögben BD magasságot húztak, $A\angle = 60°$, $C\angle = 45°$, $AB = 10$ cm. Határozzátok meg a BC szakasz hosszát!

1.27. Határozzátok meg az ABC háromszög BD magasságát, és az AB oldalának vetületét az AC egyenesre, ha $BAC\angle = 150°$, $AB = 12$ cm!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

1.28. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen háromszöget fel lehet darabolni 3 részre úgy, hogy ezekből a részekből egy téglalapot lehet összerakni!

2. A koszinusztétel

A háromszögek egybevágóságának első ismertetőjeléből következik, hogy a háromszög két oldala és közbezárt szöge egyértelműen meghatározza a háromszöget. Tehát az említett elemek segítségével meg lehet határozni a háromszög harmadik oldalát. A következő tétel megmutatja, hogyan kell ezt végrehajtani.

2.1. tétel (koszinusztétel). ***Bármely háromszög egyik oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal és az általuk bezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget. Bebizonyítjuk, hogy például

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Három esetet vizsgálunk meg:

1) az A szög hegyesszög;

2) az A szög tompaszög;

3) az A szög derékszög.

Első eset. Legyen az A hegyesszög. Akkor legalább az egyik szög, a B vagy a C szög hegyesszög lesz.

● Legyen $C\angle < 90°$. Meghúzzuk a BD magasságot. Az teljesen az ABC háromszögben lesz (2.1. ábra).

Az ABD derékszögű háromszögben:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

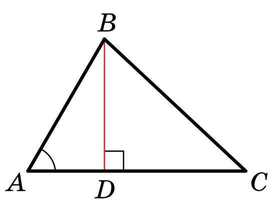
A BDC derékszögű háromszögben: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$

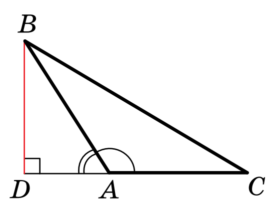
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$

$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$



2.1. ábra



2.2. ábra

● Legyen $B\angle < 90°$. Az ABC háromszög C csúcsából meghúzzuk a magasságot. Az teljesen az ABC háromszögben lesz. Ennek az esetnek a bizonyítása teljesen hasonló az előbbi esethez. Végezzétek el önállóan!

Második eset. Legyen az A tompaszög. Az ABC háromszögben meghúzzuk a BD magasságot (2.2. ábra).

Az ABD derékszögű háromszögben: $BD = AB \cdot \sin BAD\angle =$

$$= AB \cdot \sin(180° - BAC\angle) = AB \cdot \sin BAC\angle,$$

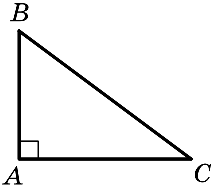
$$AD = AB \cdot \cos BAD\angle = AB \cdot \cos(180° - BAC\angle) = -AB \cdot \cos BAC\angle.$$

Az BDC derékszögű háromszögben: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 BAC\angle + (AC - AB \cdot \cos BAC\angle)^2 =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC\angle.$$

Harmadik eset. Legyen az A derékszög (2.3. ábra). Ekkor $\cos A = 0$. Be kell bizonyítani, hogy $BC^2 = AB^2 + AC^2$. A Pitagorasz-tételből következően ez az egyenlőség az ABC háromszögre igaz lesz. ◀



2.3. ábra

A koszinusztétel bizonyítása megmutatta, *hogy a Pitagorasz-tétel a koszinusztétel egy részesete, a koszinusztétel pedig a Pitagorasz-tétel általánosítása.*

Ha alkalmazzuk az ABC háromszög oldalainak és a szögeinek jelölését, akkor például az a oldal hosszára fel lehet írni:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Ha ismert a háromszög három oldalának hossza, akkor a koszinusztétel segítségével meg lehet állapítani, hogy hegyesszögű, tompaszögű vagy derékszögű-e az adott háromszög.

2.2. tétel (a koszinusztétel következménye). ***Legyen a, b és c a háromszög oldalainak hossza, melyek közül az a oldal a leghosszabb. Ha $a^2 < b^2 + c^2$, akkor a háromszög hegyesszögű lesz, ha $a^2 > b^2 + c^2$, akkor tompaszögű, ha pedig $a^2 = b^2 + c^2$, akkor az adott háromszög derékszögű lesz.***

Bizonyítás: A koszinusztétel alapján

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Innen $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

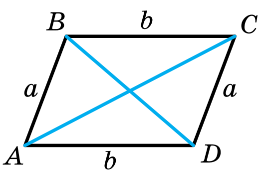
Legyen $a^2 < b^2 + c^2$. Ekkor $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Ebből következik, hogy $2bc\cos\alpha > 0$, vagyis $\cos\alpha > 0$. Ezért az α hegyesszög lesz.

Mivel az a a háromszög legnagyobb oldala, ezért ezzel az oldallal szembe a háromszög legnagyobb szöge helyezkedik el, amelyről meggyőződtünk, hogy hegyesszög lesz. Tehát ebben az esetben a háromszög hegyesszögű lesz.

Legyen $a^2 > b^2 + c^2$. Ekkor $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Ebből következik, hogy $2bc\cos\alpha < 0$, vagyis $\cos\alpha < 0$. Ezért az α tompaszög lesz. Tehát ebben az esetben a háromszög tompaszögű.

Legyen $a^2 = b^2 + c^2$. Ekkor $2bc\cos\alpha = 0$. Innen következik, hogy $\cos\alpha = 0$. Vagyis $\alpha = 90°$. Ebben az esetben a háromszög derékszögű lesz. ◀

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő a paralelogramma oldalainak négyzetösszegével.



2.4. ábra

Megoldás. A 2.4. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható.

Legyen $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $BAD\angle = \alpha$, ekkor $ADC\angle = 180° - \alpha$. Az ABD háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

Az ACD háromszögben a koszinusztétel alapján:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$. Innen

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Összeadva az (1) és a (2) egyenlőségeket azt kapjuk, hogy:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$ ◀

2. feladat. Az ABC háromszög AB oldala 4 cm-rel nagyobb, mint a BC oldal, $B\angle = 120°$, $AC = 14$ cm. Számítsátok ki az AB és AC oldalak hosszát!

Megoldás. A koszinusztétel alapján

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B.$$

Legyen $BC = x$ cm, $x > 0$, ekkor $AB = (x + 4)$ cm lesz.

A következőket kapjuk:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

A -10 nem elégíti ki az $x > 0$ feltételt.

Tehát $BC = 6$ cm, $AB = 10$ cm.

Felelet: 10 cm, 6 cm. ◀

3. feladat. Az ABC háromszög AC oldalán úgy jelöltek egy D pontot, hogy $CD : AD = 1 : 2$. Határozzátok meg a BD szakasz hosszát, ha $AB = 14$ cm, $BC = 13$ cm, $AC = 15$ cm!

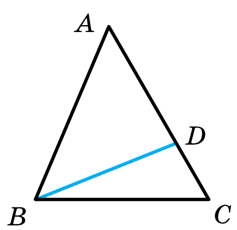
Megoldás. A koszinusztétel alapján az ABC háromszögben (2.5. ábra):

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Ebből $\cos C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$$= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Mivel $CD : AD = 1 : 2$, innen $CD = \dfrac{1}{3}AC = 5$ (cm).



2.5. ábra

A BCD háromszögből kapjuk:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Tehát $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (cm).

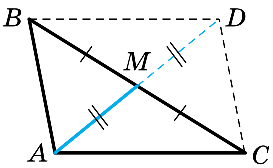
Felelet: $8\sqrt{2}$ cm.

4. feladat. A háromszög két oldala 23 cm és 30 cm, a nagyobbik ismert oldalhoz húzott súlyvonal hossza 10 cm. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát!

Megoldás. Legyen az ABC háromszögben $AC = 23$ cm, $BC = 30$ cm, az AM szakasz súlyvonal, $AM = 10$ cm.

Az AM szakasz M-en túli meghosszabbítására rámérjük az MD szakaszt, amelynek hossza megegyezik az AM súlyvonal hosszával (2.6. ábra). Ekkor $AD = 20$ cm.

Az $ABCD$ négyszög AD és BC átlói az M pontban metszik és felezik egymást ($BM = MC$ a feltétel alapján, $AM = MD$ a szerkesztés szerint). Tehát az $ABDC$ négyszög paralelogramma lesz.



2.6. ábra

Mivel a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével (lásd az 1. feladatot), ezért

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Innen

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$
$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ cm}.$$

Felelet: 11 cm.

?

1. Fogalmazzátok meg a koszinusztételt!
2. Hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű-e az a, b, c oldalú háromszög, melynek a legnagyobb oldala a, ha:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Milyen összefüggés van a paralelogramma átlói és oldalai között?

GYAKORLATOK

2.1. ° Határozzátok meg az ABC háromszög ismeretlen oldalát, ha:
1) $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $B\angle = 60°$;
2) $AB = 3$ cm, $AC = 2\sqrt{2}$ cm, $A\angle = 135°$!

2.2.° Határozzátok meg az DEF háromszög ismeretlen oldalát, ha:
1) $DE = 4$ cm, $DF = 2\sqrt{3}$ cm, $D\angle = 30°$;
2) $DF = 3$ cm, $EF = 5$ cm, $F\angle = 120°$!

2.3.° A háromszög oldalainak hossza 12 cm, 20 cm és 28 cm. Határozzátok meg a háromszög legnagyobb szögét!

2.4.° A háromszög oldalainak hossza $\sqrt{18}$ cm, 5 cm és 7 cm. Határozzátok meg a háromszög második legnagyobb szögét!

2.5.° Állapítsátok meg, hogy hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű-e az a háromszög, melynek oldalai egyenlők:
1) 5 cm; 7 cm és 9 cm;
2) 5 cm, 12 cm és 13 cm;
3) 10 cm, 15 cm és 18 cm!

2.6.° A háromszög oldalainak hossza 7 cm, 8 cm és 12 cm. Hegyesszögű-e ez a háromszög?

2.7.° Bizonyítsátok be, hogy az a háromszög, melynek oldalai 8 cm, 15 cm és 17 cm-esek, derékszögű háromszög lesz!

2.8.° A paralelogramma oldalai $2\sqrt{2}$ cm és 5 cm, az egyik szöge pedig 45°. Határozzátok meg a paralelogramma átlóinak hosszát!

2.9.° Az $ABCD$ trapézban $BC \parallel AD$, $BC = 3$ cm, $AD = 10$ cm, $CD = 4$ cm, $D\angle = 60°$. Határozzátok meg a trapéz átlóinak hosszát!

2.10.° Az ABC egyenlő oldalú háromszög AB oldalán jelöltek egy D pontot úgy, hogy $AD : DB = 2 : 1$. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát, ha $AB = 6$ cm!

2.11.° Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján jelöltek egy M pontot úgy, hogy $AM : BM = 1 : 3$. Határozzátok meg a CM szakasz hosszát, ha $AC = BC = 4$ cm!

2.12.• A háromszög két oldala 3 cm és 4 cm, a köztük lévő szög szinusza pedig $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát! Hány megoldása lesz a feladatnak?

2.13.• Az ABC háromszögben adott, hogy $C\angle = 90°$, $AC = 20$ cm, $BC = 15$ cm. Az AB oldalán jelöltek egy M pontot úgy, hogy $BM = 4$ cm. Határozzátok meg a CM szakasz hosszát!

2.14.• Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának B ponton túli meghosszabbításán úgy jelöltek egy D pontot, hogy $BD = BC$. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát, ha az ABC háromszög befogója a!

2.15.• Az ABC háromszögben adott, hogy $C\angle = 90°$, $AB = 13$ cm, $AC = 12$ cm. Az AB átfogójának B-n túli meghosszabbításán úgy jelöltek egy D pontot, hogy $BD = 26$ cm. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát!

2.16.• A derékszögű háromszögbe írt körvonal középpontja az átfogó végpontjaitól a és b távolságra van. Határozzátok meg a háromszög átfogójának hosszát!

2.17.• Az ABC háromszögbe írt körvonal középpontja az O pont, $BC = a$, $AC = b$, $AOB\angle = 120°$. Határozzátok meg az AB oldal hosszát!

2.18.• A háromszög két oldala úgy aránylik egymáshoz, mint 5 : 8. A két oldal 60°-os szöget zár be egymással, a harmadik oldalának hossza pedig 21 cm. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait!

2.19.• A háromszög két oldala úgy aránylik egymáshoz, mint $1:2\sqrt{3}$. A két oldal 30°-os szöget zár be egymással, a harmadik oldalának hossza $2\sqrt{7}$ cm. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait!

2.20.• A háromszög két oldalának összege 8 cm. A két oldal 120°-os szöget zár be egymással, a harmadik oldalának hossza 7 cm. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait!

2.21.• A háromszög két oldalának aránya 5 : 3, a köztük lévő szöge pedig 120°. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha kerülete 30 cm!

2.22.• A háromszög két oldala 16 cm és 14 cm, a kisebbik ismert oldallal szemközti szöge pedig 60°. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalát!

2.23.• A háromszög két oldala 15 cm és 35 cm, a nagyobbik ismert oldallal szemközti szöge 120°. Határozzátok meg a háromszög kerületét!

2.24.• Az ABC háromszög BC oldalán úgy jelöltek egy D pontot, hogy $CD = 14$ cm. Határozzátok meg az AD szakasz hosszát, ha $AB = 37$ cm, $BC = 44$ cm és $AC = 15$ cm!

2.25.• Az ABC háromszög AB oldalán jelöltek egy K pontot, a BC oldal C utáni meghosszabbításán pedig egy M pontot. Határozzátok meg az MK távolságot, ha $AB = 15$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 13$ cm, $AK = 8$ cm, $MC = 3$ cm!

2.26.• A háromszög egyik oldalának hossza kétszer nagyobb a másiknál, a köztük lévő szöge 60°. Bizonyítsátok be, hogy az adott háromszög derékszögű!

2.27.• Bizonyítsátok be, hogy amikor a háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal összegének nem teljes négyzetével, akkor az adott oldallal szemközti szöge 120°!

2.28.$^{\bullet}$ Bizonyítsátok be, hogy amikor a háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal különbségének nem teljes négyzetével, akkor az adott oldallal szemközti szöge 60°!

2.29.$^{\bullet}$ A paralelogramma két oldalának hossza 7 cm és 11 cm, az egyik átlója pedig 12 cm. Határozzátok meg a paralelogramma másik átlóját!

2.30.$^{\bullet}$ A paralelogramma átlói 13 cm és 11 cm, az egyik oldala 9 cm. Határozzátok meg a paralelogramma kerületét!

2.31.$^{\bullet}$ A paralelogramma átlói 8 cm és 14 cm, az egyik oldala 2 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

2.32.$^{\bullet}$ A paralelogramma két oldalának hossza 11 cm és 23 cm, átlóinak aránya 2 : 3. Határozzátok meg a paralelogramma átlóit!

2.33.$^{\bullet\bullet}$ Az $ABCD$ trapézban ismert, hogy $AD \parallel BC$, $AB = 5$ cm, $BC = 9$ cm, $AD = 16$ cm, $\cos A = \frac{1}{7}$. Határozzátok meg a trapéz CD oldalát!

2.34.$^{\bullet\bullet}$ Az $ABCD$ trapézban ismert, hogy $AD \parallel BC$, $AB = 5$ cm, $AB = \sqrt{15}$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $AD = 11$ cm. Határozzátok meg a trapéz D szögének koszinuszát!

2.35.$^{\bullet\bullet}$ Határozzátok meg az $ABCD$ négyszög AC átlóját, ha a négyszög köré kör írható és $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm, $AD = 6$ cm!

2.36.$^{\bullet\bullet}$ Lehet-e körvonalat írni az $ABCD$ négyszög köré, ha $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $BD = 6$ cm és $C\angle = 30°$?

2.37.$^{\bullet\bullet}$ Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma nagyobbik szögével szemben a nagyobbik átló fekszik! Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be ennek az állításnak a fordítottját!

2.38.$^{\bullet\bullet}$ A háromszög oldalainak hossza 12 cm, 15 cm és 18 cm. Határozzátok meg a legnagyobb szögének csúcsából húzott szögfelezőjének a hosszát!

2.39.$^{\bullet\bullet}$ Az egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 20 cm. Határozzátok meg az alapnál lévő szöge szögfelezőjének hosszát!

2.40.$^{\bullet\bullet}$ A háromszög oldalai 16 cm, 18 cm és 26 cm. Határozzátok meg a legnagyobb oldalra húzott súlyvonal hosszát!

2.41.$^{\bullet\bullet}$ Az egyenlő szárú háromszög alapja $4\sqrt{2}$ cm, a szárához húzott súlyvonalának hossza 5 cm. Határozzátok meg a háromszög szárának hosszát!

2.42.•• A háromszög két oldala 12 cm és 14 cm, a harmadik oldalhoz húzott súlyvonalának hossza 7 cm. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalát!

2.43.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = BC$, $ABC\angle = 120°$. Az AB oldal B-n túli meghosszabbításán egy D pontot jelöltünk úgy, hogy $BD = 2AB$. Bizonyítsátok be, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú!

2.44.•• Bizonyítsátok be, hogy az a, b és c oldalú háromszögben teljesül a következő egyenlőség: $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, ahol m_c a háromszög c oldalára húzott súlyvonala!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

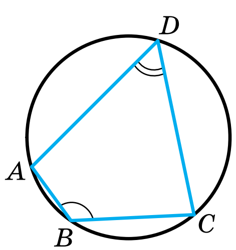
2.45. A körben egy AC átmérőt és egy olyan AB húrt húztak, amely a sugárral egyenlő. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

2.46. A paralelogramma szögfelezője és az oldalának metszésénél keletkező egyik szöge egyenlő a paralelogramma egyik szögével. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit!

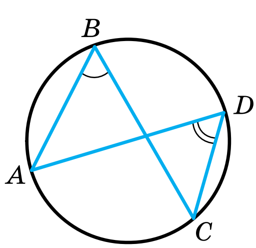
2.47. Az ABC háromszögbe egy $ADEF$ paralelogrammát írtak, ahol az A szög közös szögük, a D, E és F pontok pedig megfelelően az AB, BC és AC oldalakra illeszkednek. Határozzátok meg a $ADEF$ paralelogramma oldalait, ha $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm, $AD : AF = 2 : 3$!

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

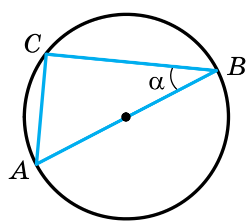
2.48. Határozzátok meg az ADC szög mértékét, ha $ABC\angle = 140°$ (2.7. ábra).



2.7. ábra



2.8. ábra



2.9. ábra

2.49. Határozzátok meg az ABC szög mértékét, ha $ADC\angle = 43°$ (2.8. ábra)!

2.50. Az AB szakasz az R sugarú körvonal átmérője, $ABC\angle = \alpha$ (2.9. ábra). Határozzátok meg az AC húr hosszát!

3. A szinusztétel

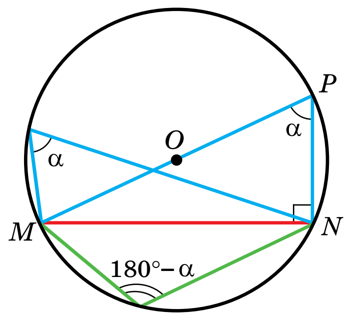
A következő tétel bizonyításához és nagyon sok feladat megoldásához is alkalmazni fogjuk a következő lemmát.

Lemma. ***A körvonal húrja egyenlő az átmérőjének és a neki megfelelő kerületi szög szinuszának szorzatával.***

Bizonyítás. ⊙ A 3.1. ábrán az MN szakasz az O középpontú körvonal húrja. Meghúzzuk az MP átmérőt. Ekkor az $MNP\angle = 90°$, mint az átmérőre támaszkodó kerületi szög. Legyen az MPN kerületi szög mértéke α. Ekkor az MPN derékszögű háromszögben kapjuk, hogy:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

Minden, az MN húrra támaszkodó kerületi szög mértéke α vagy $180° - \alpha$ lesz. Tehát szinuszaik egyenlők. Ezért az (1) egyenlőség minden, az MN húrra támaszkodó kerületi szögre igaz lesz. ◀



3.1. ábra

A háromszögek egybevágóságának második ismertetőjeléből következik, hogy egy oldala és a rajta fekvő két szöge egyértelműen meghatározzák a háromszöget. Tehát ezen elemei alapján meg lehet határozni a háromszög másik két oldalát. Hogy hogyan kell ezt megvalósítani, ebben segít a következő tétel.

3.1. tétel (szinusztétel). ***A háromszögek oldalai arányosak a szemben lévő szögek szinuszával.***

Bizonyítás. ⊙ Legyen az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Legyen az ABC háromszög köré írt körének sugara R. Ekkor a lemma alapján $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Innen

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ◀

Következmény. ***A háromszög köré írt körének sugara a következő képlettel határozható meg:***

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin\alpha},}$$

ahol a a háromszög oldalának hossza, α ***ezzel az oldallal szemközti szög mértéke.***

1. feladat. Az ABC háromszögben ismert, hogy $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = 1$ cm, $B\angle = 45°$. Határozzátok meg az A szög mértékét!

Megoldás. A szinusztétel alapján

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Innen

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel $BC < AC$, ezért $A\angle < B\angle$. Tehát az A szög hegyesszög lesz. Ebből következik, hogyha $\sin A = \frac{1}{2}$, akkor $A\angle = 30°$.

Felelet: 30°. ◀

2. feladat. Az ABC háromszögben ismert, hogy $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = 1$ cm, $A\angle = 30°$. Határozzátok meg a B szög mértékét!

Megoldás. A szinusztétel alapján $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Ekkor

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel $BC < AC$, ezért $A\angle < B\angle$. Ekkor a B szög lehet hegyes- és tompaszög is. Ezért $B\angle = 45°$ vagy $B\angle = 180° - 45° = 135°$.

Felelet: 45° vagy 135°. ◀

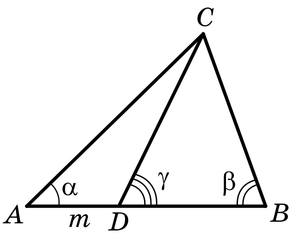
3. feladat. Az ABC háromszög AB oldalán D pontot jelöltek úgy, hogy $BDC\angle = \gamma$, $AD = m$ (3.2. ábra). Határozzátok meg a BD szakasz hosszát, ha $A\angle = \alpha$, $B\angle = \beta$!

Megoldás. A BDC szög az ADC háromszög külső szöge. Tehát $ACD\angle + A\angle = BDC\angle$, innen $ACD\angle = \gamma - \alpha$.

Az ADC háromszögből a szinusztétel alapján kapjuk, hogy:

$$\frac{CD}{\sin CAD\angle} = \frac{AD}{\sin ACD\angle}.$$

Tehát $CD = \dfrac{AD \sin CAD\angle}{\sin ACD\angle} = \dfrac{m \sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}.$



3.2. ábra

A BCD háromszögben a szinusztétel alapján kapjuk, hogy:

$$\frac{BD}{\sin BCD\angle} = \frac{CD}{\sin CBD\angle}.$$

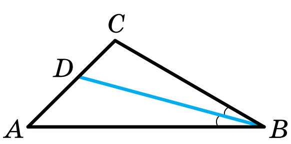
Tehát

$$BD = \frac{CD \sin BCD\angle}{\sin CBD\angle} =$$

$$= \frac{m \sin\alpha \sin(180° - (\beta+\gamma))}{\sin\beta \sin(\gamma-\alpha)} = \frac{m \sin\alpha \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin(\gamma-\alpha)}.$$

Felelet: $\dfrac{m \sin\alpha \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin(\gamma-\alpha)}.$ ◀

4.feladat. Az ABC háromszögben a BD szakasz szögfelező, $ABC\angle = 30°$, $C\angle = 105°$ (3.3. ábra). Határozzátok meg az ABC háromszög köré írt körvonal sugarát, ha a BDC háromszög köré írt körvonal sugara $8\sqrt{6}$ cm!



3.3. ábra

Megoldás. Legyen R_1 a BDC háromszög köré írt körvonal sugara $R_1 = 8\sqrt{6}$ cm.

Mivel a BD szakasz szögfelező, ezért $CBD\angle = \dfrac{1}{2} ABC\angle = 15°.$

A BDC háromszögben:

$$BDC\angle = 180° - (CBD\angle + C\angle) = 180° - (15° + 105°) = 60°.$$

A szinusztétel következményéből kapjuk, hogy $\dfrac{BC}{2 \sin BDC\angle} = R_1.$ Innen

$$BC = 2R_1 \sin BDC\angle = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60° = 24\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

Az ABC háromszögből kapjuk:

$$A\angle = 180° - (ABC\angle + C\angle) = 180° - (30° + 105°) = 45°.$$

Legyen R az ABC háromszög köré írt körvonal keresett sugara.

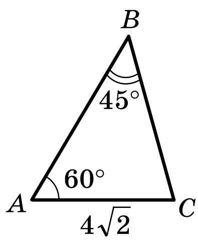
Ekkor $\dfrac{BC}{2 \sin A} = R$, ebből $R = \dfrac{BC}{2 \sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45°} = 24$ (cm).

Felelet: 24 cm. ◀

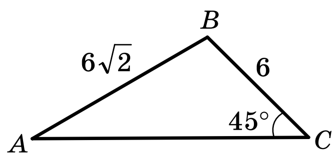
1. Hogyan kell meghatározni a körvonal húrjának hosszát, ha ismert az átmérője és a húrra támaszkodó kerületi szög?
2. Fogalmazzátok meg a szinusztételt!
3. Hogyan kell meghatározni annak a háromszög köré írt körvonalnak a sugarát, melynek oldala a, szemközti szöge pedig α?

GYAKORLATOK

3.1.° Határozzátok meg a 3.4. ábrán látható ABC háromszög BC oldalát (a szakaszok hossza cm-ben van megadva)!



3.4. ábra



3.5. ábra

3.2.° Határozzátok meg a 3.5. ábrán látható ABC háromszög A szögét (a szakaszok hossza cm-ben van megadva)!

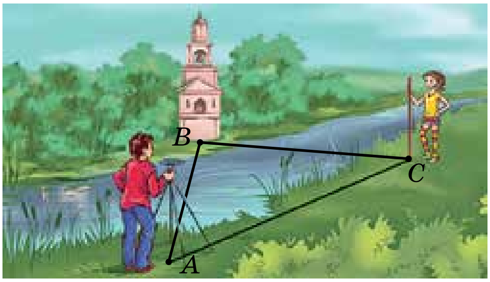
3.3.° Határozzátok meg az ABC háromszög AB oldalát, ha $AC = \sqrt{6}$ cm, $B\angle = 120°$, $C\angle = 45°$!

3.4.° Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, $\sin A = 0{,}2$. Határozzátok meg a C szög szinuszát!

3.5.° A DEF háromszögben adott, hogy $DE = 16$ cm, $F\angle = 50°$, $D\angle = 38°$. Határozzátok meg az EF oldalt!

3.6.° A MKP háromszögben adott, hogy $KP = 8$ cm, $K\angle = 106°$, $P\angle = 32°$. Határozzátok meg az MP oldalt!

3.7.° Az A pont és a folyó másik partján elhelyezkedő B harangtorony közötti távolság meghatározására (3.6. ábra) mérőszalagot és a szög mérésére szolgáló eszközt (teodolitot) használtak. Jelöltek egy C pontot úgy, hogy $BAC\angle = 42°$, $ACB\angle = 64°$, $AC = 20$ m. Hogyan határozható meg az A pont és a B harangtorony közötti távolság? Határozzátok meg ezt a távolságot!



3.6. ábra

3.8.° Az ABC háromszögben adott, hogy $BC = a$, $A\angle = \alpha$, $C\angle = \gamma$. Határozzátok meg az AB és AC oldalait!

3.9.° A paralelogramma átlója d és az oldalaival α és β szögeket alkot. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

3.10.° Határozzátok meg az ABC háromszög A szögét, ha:
1) $AC = 2$ cm, $BC = 1$ cm, $B\angle = 135°$;
2) $AC = \sqrt{2}$ cm, $BC = \sqrt{3}$ cm, $B\angle = 45°$!
Hány megoldása lesz mindegyik esetben a feladatnak? Magyarázzátok meg a válaszokat!

3.11.° Létezik-e olyan ABC háromszög, melyben $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ cm, $BC = 6$ cm? Válaszotokat indokoljátok!

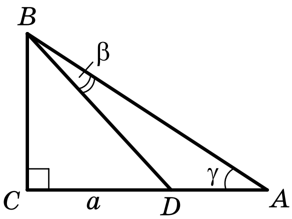
3.12.° A DEF háromszögben adott, hogy $DE = 8$ cm, $\sin F = 0{,}16$. Határozzátok meg a DEF háromszög köré írt körvonal sugarát!

3.13.° Az MKP háromszög köré írt körének sugara 5 cm-rel egyenlő, $\sin M = 0{,}7$. Határozzátok meg a KP oldal hosszát!

3.14.• Az ABC háromszög AB oldalának B-n túli meghosszabbításán jelöltek egy D pontot. Határozzátok meg az ACD háromszög köré írt kör sugarát, ha $ABC\angle = 60°$, $ADC\angle = 45°$, és az ABC háromszög köré írt kör sugara 4 cm!

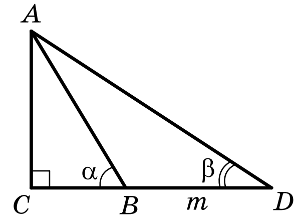
3.15.• Az ABC háromszög köré írt kör sugara 6 cm-rel egyenlő. Határozzátok meg az AOC háromszög köré írt kör sugarát, ahol az O pont az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja, ha $ABC\angle = 60°$!

3.16.• A 3.7. ábra adatainak felhasználásával határozzátok meg az AD szakasz hosszát, ha $CD = a$, $BAC\angle = \gamma$, $DBA\angle = \beta$!



3.7. ábra

3.17.• A 3.8. ábra adatainak felhasználásával határozzátok meg az AC szakasz hosszát, ha $BD = m$, $ABC\angle = \alpha$, $ADC\angle = \beta$!



3.8. ábra

3.18.• Az ABC háromszög AB oldalán úgy jelöltek egy M pontot, hogy $AMC\angle = \varphi$. Határozzátok meg a CM szakaszt, ha $AB = c$, $A\angle = \alpha$, $ACB\angle = \gamma$!

3.19.• Az ABC háromszögben adott, hogy $A\angle = \alpha$, $B\angle = \beta$. A BC oldalán úgy jelöltek egy D pontot, hogy $ADB\angle = \varphi$, $AD = m$. Határozzátok meg a BC oldalt!

3.20.• Bizonyítsátok be, hogy a háromszög szögfelezője a szemközti oldalt olyan szakaszokra osztja, melyek hosszainak aránya fordítottan arányos az oldalon lévő szögei szinuszaival!

3.21.• A háromszög két oldalának hossza 6 cm és 12 cm, a harmadik oldalra bocsátott magassága 4 cm. Határozzátok meg az adott háromszög köré írt kör sugarát!

3.22.• Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög köré írt kör sugarát, melynek alapja 16 cm, szára pedig 10 cm!

3.23.• A háromszög oldala 24 cm, a köré írt kör sugara $8\sqrt{3}$ cm. Mivel lesz egyenlő az adott oldallal szemközti szöge?

3.24.• A háromszög alakú kerékpárút egyik szöge 50°, a másik pedig 100°. A háromszög legkisebb oldalát a kerékpáros 1 óra alatt tette meg. Mennyi idő alatt ér körbe a kerékpáros? Az eredményt adjátok meg órákban, és kerekítsétek tizedekre!

3.25.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AC = b$, $A\angle = \alpha$, $C\angle = \gamma$. Határozzátok meg a háromszög BD szögfelezőjét!

3.26.•• Az egyenlő szárú háromszög alapja a, az azzal szemben lévő szöge α. Határozzátok meg a háromszög alapon lévő csúcsából húzott szögfelező hosszát!

3.27.•• Bizonyítsátok be a szinusztétel alkalmazásával, hogy a háromszög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre[1]!

---

[1] Emlékeztetőül, ez az állítás az arányos szakaszok tételével bizonyítva volt a következő tankönyvben: A. H. Merzljak, V. B. Polonszkij, M. Sz. Jakir. Mértan: Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 8. osztálya számára. Lviv : Szvit, 2016. A következőkben erre így hivatkozunk: Mértan, 8. osztály.

3.28.•• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 9 cm és 21 cm, a magassága pedig 8 cm. Határozzátok meg a trapéz köré írt körvonal sugarát!

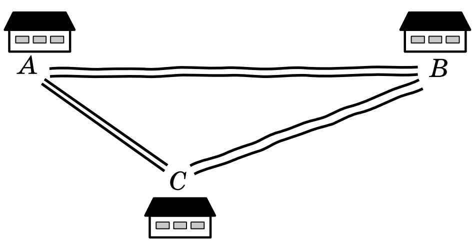
3.29.•• Az ABC háromszögnek a CD szakasz a szögfelezője, az $A\angle = \alpha$, $B\angle = \beta$. A D ponton keresztül egy egyenest fektettünk, amely párhuzamos a BC oldallal, és az AC oldalt az E pontban metszi úgy, hogy $AE = a$. Határozzátok meg a CE szakasz hosszát!

3.30.•• Az ABC háromszög AM súlyvonalának hossza m, és az AB valamint AC oldalakkal megfelelően α és β szögeket alkot. Határozzátok meg az AC és BC oldalakat!

3.31.•• Az ABC háromszög CD súlyvonala az AB és AC oldalakkal megfelelően α és β szögeket alkot, $BC = a$. Határozzátok meg a CD súlyvonal hosszát!

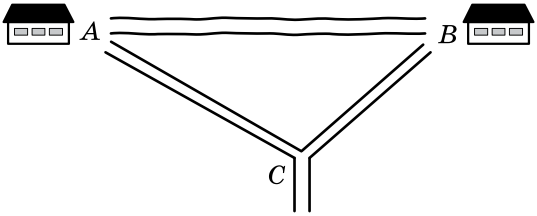
3.32.•• Az ABC egyenlő szárú háromszög magasságai a H pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az AHB, BHC, AHC és ABC háromszögek köré írt körvonalak sugarai egyenlők!

3.33.•• Az A, B és C falvakat összekötő útvonalak háromszöget alkotnak (3.9. ábra). Az A és C falvak közötti út aszfaltozott, viszont az A-ból B-be vezető és a B-ből C-be vezető utak földutak. Az A faluból a B-be és C-be vezető utak 15°-os szöget alkotnak, B faluból A-ba és C-be vezető utak közötti szög pedig 5°-os. Az aszfaltozott úton az autó sebessége kétszer nagyobb, mint a földúton. Milyen útvonalat kell választani, hogy a leggyorsabban jussunk el A faluból B-be?



3.9. ábra

3.34.•• Az A és B falvakból vezető útvonalak a C elágazásnál találkoznak (3.10. ábra). Az útvonalak egy olyan háromszöget alkotnak, amelynek A csúcsnál lévő szöge 30°-os, a B-nél lévő szöge pedig 70°-os. Az A faluból az elágazásig egy gépkocsi indult el 90 km/h sebességgel, ezzel egyidejűleg B-ből egy autóbusz indult el 60 km/h-s sebességgel. Melyik fog hamarabb az elágazáshoz érkezni?



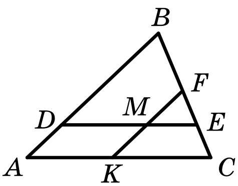
3.10. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

3.35. Az $ABCD$ téglalap B és C szögeinek szögfelezői az AD oldalt megfelelően az M és K pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy $BM = CK$!

3.36. A 3.11. ábrán $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Nevezzétek meg az ábra hasonló háromszögeit!

3.37. Az $ABCD$ négyzet AB oldalán jelöltek egy K pontot, a CD-n pedig egy M-et úgy, hogy $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Határozzátok meg a négyzet oldalát, ha $MK = 13$ cm!



3.11. ábra

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

3.38. Oldjátok meg a derékszögű háromszöget, ha ismert:

1) két befogója: $a = 7$ cm, $b = 35$ cm;

2) átfogója $c = 17$ cm és befogója $a = 8$ cm;

3) átfogója $c = 4$ cm és hegyesszöge $\alpha = 50°$;

4) befogója $a = 8$ cm és szemközti szöge $\alpha = 42°$!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

3.39. Az 1 cm-es sugarú körbe ötszög van írva. Bizonyítsátok be, hogy az oldalainak és átlóinak összege 17 cm!

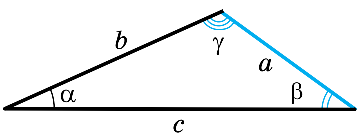
4. A háromszögek megoldása

A háromszöget megoldani annyit jelent, mint meghatározni ismeretlen oldalait és szögeit az ismert oldalai és szögei által[1].

A 8. osztályban megtanultátok megoldani a derékszögű háromszöget. A koszinusztétel és a szinusztétel lehetőséget ad bármilyen háromszög megoldására.

A következő feladatokban a trigonometrikus függvények értékeit számológép segítségével határozzuk meg, majd századokra kerekítjük azokat. A szögek mértékét számológéppel határozzuk meg, és ezeket egészre kerekítjük. Az oldalak hosszának kiszámítása során az eredményt tizedekre kerekítjük.

1. feladat. Oldjátok meg a háromszöget (4.1. ábra), ha adott oldala $a = 12$ cm és két szöge $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$!



4.1. ábra

Megoldás. Alkalmazva a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt, az kapjuk, hogy: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

A szinusztétel alapján $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Innen $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. Ebből azt kapjuk, hogy:

$$b = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0{,}59}{0{,}42} \approx \mathbf{16{,}9}\ \text{(cm)}.$$

Újra alkalmazva a szinusztételt, felírjuk:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Innen $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

$$c = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0{,}87}{0{,}42} \approx \mathbf{24{,}9}\ \text{(cm)}.$$

Felelet: $b \approx 16{,}9$ cm, $c \approx 24{,}9$ cm, $\alpha = 25°$. ◀

2. feladat. Oldjátok meg a háromszöget két oldala $a = 14$ cm, $b = 8$ cm és közbezárt szöge $\gamma = 38°$ alapján!

[1] Ennek a pontnak a 4.1–4.9. feladataiban a következő jelöléseket használjuk: a, b és c a háromszög oldalainak hossza, α, β és γ azoknak a szögeknek a mértéke, melyek megfelelően az a, b és c oldalakkal szemben helyezkednek el.

Megoldás. A koszinusztétel alapján $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ Innen:

$$c^2 = 196 + 64 - 2\cdot 14\cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224\cdot 0{,}79 = 83{,}04;$$
$$c \approx 9{,}1 \text{ cm}.$$

Továbbiakban:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2\cdot 8\cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$$

Innen kapjuk, hogy $\alpha \approx 110°$.

Alkalmazva a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt, az kapjuk, hogy:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma);\quad \beta \approx 180° - 148° = 32°.$$

Felelet: $c \approx 9{,}1$ cm, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$. ◀

3. feladat. Oldjátok meg a háromszöget, ha ismert három oldala $a = 7$ cm, $b = 2$ cm, $c = 8$ cm!

Megoldás. A koszinusztétel alapján $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Innen $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2\cdot 2\cdot 8} \approx 0{,}59.$ Megkaptuk, hogy $\alpha \approx 54°$.

A szinusztétel alapján: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Innen

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\quad \sin\beta \approx \frac{2\sin 54°}{7} \approx \frac{2\cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23.$$

Mivel a b az adott háromszög legkisebb oldala, ezért a β hegyesszög lesz. Tehát $\beta \approx 13°$.

Alkalmazva a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt, az kapjuk, hogy:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\quad \gamma \approx 180° - 67° = 113°.$$

Felelet: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$. ◀

4. feladat. Oldjátok meg a háromszöget, ha adott két oldala és az egyikkel szemközti szöge:

1) $a = 17$ cm, $b = 6$ cm, $\alpha = 156°$;
2) $b = 7$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 65°$;
3) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 50°$.

Megoldás. 1) Szinusztétel alapján $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Innen

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\quad \sin\beta = \frac{6\sin 156°}{17} = \frac{6\sin 24°}{17} \approx \frac{6\cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$$

Mivel az adott háromszögben α tompaszög, ezért β hegyesszög lesz. Ebből adódik $\beta \approx 8°$.

Alkalmazva a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt, az kapjuk, hogy: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 16°$.

A szinusztétel alapján $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Innen $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c \approx \dfrac{17\sin 16°}{\sin 156°} \approx \dfrac{17\cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx \mathbf{11{,}6}$ (cm).

Felelet: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11{,}6$ cm.

2) A szinusztétel alapján $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

$\sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b}$; $\sin\gamma = \dfrac{8\sin 65°}{7} \approx \dfrac{8\cdot 0{,}91}{7} = \mathbf{1{,}04 > 1}$, ami nem lehetséges.

Felelet: a feladatnak nincs megoldása.

3) A szinusztétel alapján $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$. Innen

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b};\ \sin\alpha = \frac{6\sin 50°}{5} \approx \frac{6\cdot 0{,}77}{5} \approx \mathbf{0{,}92}.$$

Két eset lehetséges: $\alpha \approx 67°$ vagy $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Megvizsgáljuk azt az esetet, mikor $\alpha \approx 67°$.

Alkalmazva a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt, az kapjuk, hogy:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 180° - 117° = 63°$.

A szinusztétel alapján $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Innen $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $c \approx \dfrac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \dfrac{5\cdot 0{,}89}{0{,}77} \approx \mathbf{5{,}8}$ (cm).

Megvizsgáljuk azt az esetet, mikor $\alpha \approx 113°$.

Alkalmazva a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt, az kapjuk, hogy:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 163° = 17°.$$

Mivel $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, így $c \approx \dfrac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \dfrac{5\cdot 0{,}29}{0{,}77} \approx 1{,}9$ (cm).

Felelet: $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5{,}8$ cm vagy $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1{,}9$ cm. ◀

?

Mit jelent a megoldani a háromszöget?

GYAKORLATOK

4.1.° Oldjátok meg a háromszöget oldala és két szöge ismeretében:
1) $a = 10$ cm, $\beta = 20°$, $\gamma = 85°$; 2) $b = 16$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$!

4.2.° Oldjátok meg a háromszöget oldala és két szöge ismeretében:
1) $b = 9$ cm, $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$; 2) $c = 14$ cm, $\beta = 132°$, $\gamma = 24°$!

4.3.° Oldjátok meg a háromszöget két oldala és közbezárt szöge ismeretében:
1) $b = 18$ cm, $c = 22$ cm, $\alpha = 76°$;
2) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 104°$!

4.4.° Oldjátok meg a háromszöget két oldala és közbezárt szöge ismeretében:
1) $a = 8$ cm, $c = 6$ cm, $\beta = 15°$; 2) $b = 7$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 145°$!

4.5.° Oldjátok meg a háromszöget három oldala ismeretében:
1) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm; 2) $a = 26$ cm, $b = 19$ cm, $c = 42$ cm!

4.6.° Oldjátok meg a háromszöget három oldala ismeretében:
1) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm; 2) $a = 21$ cm, $b = 17$ cm, $c = 32$ cm!

4.7.° Oldjátok meg a háromszöget, melyben:
1) $a = 10$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 10°$, az α hegyesszög;
2) $a = 10$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 10°$, az α tompaszög!

4.8.• Oldjátok meg a háromszöget két oldala és az egyikkel szemközti szöge ismeretében:
1) $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $\beta = 46°$; 3) $a = 7$ cm, $c = 3$ cm, $\gamma = 27°$!
2) $b = 15$ cm, $c = 17$ cm, $\beta = 32°$;

4.9.• Oldjátok meg a háromszöget két oldala és az egyikkel szemközti szöge ismeretében:
1) $a = 23$ cm, $c = 30$ cm, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ cm, $b = 25$ cm, $\alpha = 36°$!

4.10.• Az ABC háromszögben ismert, hogy $AB = BC = 20$ cm, $A\angle = 70°$. Határozzátok meg:
1) AC oldalt;
2) CM súlyvonalat;
3) AD szögfelezőt;
4) az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

4.11.• Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz ($BC \parallel AD$) AC átlója 8 cm, $CAD\angle = 38°$, $BAD\angle = 72°$. Határozzátok meg:
1) a trapéz oldalait;
2) az ABC háromszög köré írt körvonal sugarát!

4.12.•• A trapéz alapjai 12 cm és 16 cm, szárai pedig 7 cm és 9 cm. Határozzátok meg a trapéz szögeit!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

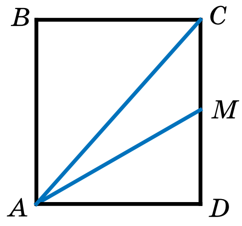
4.13. Az $ABCD$ paralelogramma B szögének szögfelezője az AD oldalát egy M pontban metszi, a CD oldal D-n túli meghosszabbítását pedig a K pontban. Határozzátok meg a DK szakasz hosszát, ha $AM = 8$ cm, és a paralelogramma kerülete 50 cm!

4.14. Két hasonló háromszög kerületei közül az egyik 18 cm-rel kisebb, mint a másik, a háromszögek két megfelelő oldalának hossza 5 cm és 8 cm. Határozzátok meg az háromszögek kerületeit!

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

4.15. Az M pont az $ABCD$ téglalap CD oldalának felezőpontja (4.2. ábra), $AB = 6$ cm, $AD = 5$ cm. Mivel egyenlő az ACM háromszög területe?

4.16. Az ABC háromszög AC oldalán úgy jelöltek egy D pontot, hogy az $ADB\angle = \alpha$. Bizonyítsátok be, hogy $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha$!

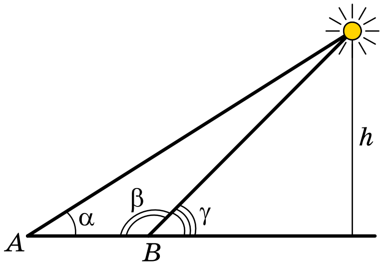


4.2. ábra

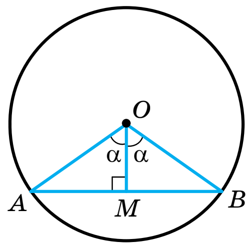
A TRIGONOMETRIA A HÁROMSZÖGEK MÉRÉSÉVEL FOGLALKOZÓ TUDOMÁNY

Az ókori utazók a csillagok és más égitestek állásából tájékozódtak. Viszonylag pontosan meg tudták határozni a hajók és a karavánok tartózkodási helyét a tengereken, illetve a sivatagban. Az egyik tájékozódási pont a mérés során az a magasság, amelyre az adott csillag vagy égitest a horizont fölé emelkedett az adott időpillanatban.

Nyilvánvaló, hogy ez a magasság közvetlenül nem mérhető. Ezért a tudósok közvetett méréseket kezdtek alkalmazni. Ebben jelentős szerepet kapott a háromszögek megoldása, amelynek két csúcsa a földfelszínen helyezkedett el, a harmadik pedig egy csillag volt (4.3. ábra) – a már általatok megismert 3.17. feladathoz hasonlóan.



4.3. ábra



4.4. ábra

A hasonló feladatok megoldásához az ókori csillagászoknak választ kellett adniuk arra a kérdésre, hogy milyen összefüggés van a háromszög elemei között. Így alakult ki a **trigonometria** tudományág, amely a háromszögek oldalai és szögei közötti kapcsolatokat vizsgálja. A trigonometria görög eredetű kifejezés, *trigonom* – háromszög és *metreo* – mérés szavakból ered, aminek jelentése *háromszögek mérése*.

A 4.4. ábrán az AOB középponti szög látható, amely egyenlő 2α. Az OMB derékszögű háromszögből kapjuk: $MB = OB \sin \alpha$. Tehát, ha az egységkörben a 2°, 4°, 6°, ..., 180° nagyságú középponti szögekhez tartozó félhúrokat felmérjük, ezzel tulajdonképpen megkaptuk az 1°, 2°, 3°, ..., 90° szögek szinuszát.

Hipparkhosz ógörög csillagász (i. e. II. sz.) megmérte a félhúrok hosszát, majd ezek alapján összeállította az első csillagászati vagy trigonometrikus táblázatot.

A szinusz és a koszinusz fogalmak először a IV–V. században alkotó indiai tudósok tanulmányaiban fordulnak elő. A X. században az arab tudósok már alkalmazták a tangens fogalmát, amely a *gnómonika* – a napóraszerkesztés tudománya – szükségleteinek kielégítésére jött létre (4.5. ábra).

4.5. ábra

Az első, Európában 1533-ban megjelent könyv, amely a trigonometriát önálló tudományként tárgyalta az *Öt könyv mindenfajta há-*

Leonhard Euler
(1707–1783)

Kiemelkedő matematikus, fizikus, mechanikus, csillagász, több mint 860 jelentős értekezést írt. Tagja a Szentpétervári, Berlini, Párizsi Tudományos Akadémiának, a Londoni Királyi Társaságnak, és más akadémiáknak, illetve társaságoknak. Euler a matematika szinte valamennyi ágában maradandót alkotott. Számos matematikai fogalom kötődik nevéhez. Létezik Euler-tétel, Euler-azonosság, -függvény, -szög, -integrál, -képlet, -egyenlet stb.

romszögekről című tanulmány. A kötet szerzője a német származású Regiomontanus (1436–1476). Ugyanő fogalmazta meg a tangenstételt is:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

ahol a, b és c a háromszög oldalai, az α, β és γ pedig a megfelelő oldalakkal szembeni szögei.

A ma használatos trigonometria megalkotója a jeles svájci matematikus, Leonhard Euler.

5. A háromszög területének meghatározására szolgáló képletek

A 8. osztályos mértanból már tudjátok, hogy az a, b és c oldalú, valamint h_a, h_b és h_c magasságú háromszög S területe a következő képlettel számítható ki

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

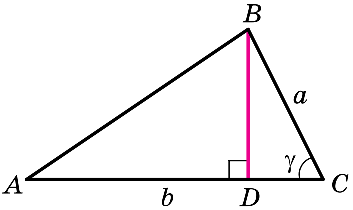
Most már az is lehetővé vált, hogy néhány más képletet is levezessünk a háromszög területének meghatározására.

5.1. tétel. ***A háromszög területe a háromszög két oldalának és az általuk közbezárt szög szinusza szorzatának a felével egyenlő.***

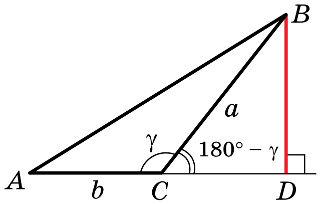
Bizonyítás: Vizsgáljuk meg azt az S területű ABC háromszöget, melyben $BC=a$, $AC=b$ és $C\angle=\gamma$. Bebizonyítjuk, hogy

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Három eset lehetséges:
1) a γ szög hegyesszög (5.1. ábra);
2) a γ szög tompaszög (5.2. ábra);
3) a γ szög derékszög.



5.1. ábra



5.2. ábra

Az 5.1. és az 5.2. ábrákon megrajzoljuk az ABC háromszögben a BD magasságot. Ekkor $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} BD \cdot b$.

Az első esetben BDC derékszögű háromszögben (5.1. ábra) ezt kapjuk: $BD = a \sin \gamma$, a második esetben (5.2. ábra): $BD = a \sin(180° - \gamma) = a \sin \gamma$. Ebből következik, hogy az első két esetben: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Ha a C szög derékszög, akkor $\sin \gamma = 1$. Az ABC derékszögű háromszögben az a és b befogók:

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \sin 90° = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \blacktriangleleft$$

5.2. tétel (Hérón[1] képlete). ***Az a, b és c oldalú háromszög területét a következő képlettel lehet meghatározni:***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

ahol p a háromszög kerületének fele.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melynek területe S, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bebizonyítjuk, hogy

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[1] Alexandriai Hérón – ógörög tudós, aki a Kr. u. I. században élt. Matematikai munkái az alkalmazott matematika enciklopédiája.

Legyen $C\angle = \gamma$. Felírjuk a háromszög területének kiszámítására szolgáló képletet:

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Innen $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

A koszinusztétel alapján $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Innen a $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Mivel $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, ezért:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$
$$= \frac{1}{4}a^2b^2\cdot\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}a^2b^2\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{1}{16}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2) =$$
$$= \frac{c-a+b}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2} =$$
$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2}\cdot\frac{(a+b+c)-2b}{2}\cdot\frac{(a+b+c)-2c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2} =$$
$$= \frac{2p-2a}{2}\cdot\frac{2p-2b}{2}\cdot\frac{2p-2c}{2}\cdot\frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Innen következik: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◀

5.3. tétel. ***Az a, b és c oldalú háromszög S területe a következő képlettel is meghatározható***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

ahol R a háromszög köré írt kör sugara.

Bizonyítás: ⊙ Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melynek területe S, oldalai $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Bebizonyítjuk, hogy $S = \frac{abc}{4R}$, ahol R a háromszög köré írt körvonal sugara.

Legyen $A\angle = \alpha$. Felírjuk a háromszög területképletét:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

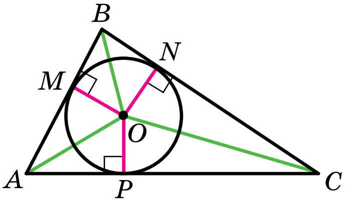
A 3. pont lemmájából következik, hogy $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Ekkor $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ◀

A bebizonyított tantétel lehetőséget ad a háromszög köré írt kör sugarának meghatározására

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

5.4. tétel. ***A háromszög területe egyenlő a fél kerületének és a beírt körvonal sugarának szorzatával.***



5.3. ábra

Bizonyítás: Az 5.3. ábrán az ABC háromszög látható, amelybe egy r sugarú körvonal van írva. Bebizonyítjuk, hogy

$$\boxed{S = pr,}$$

ahol S az adott háromszög területe, p a kerületének fele.

Legyen az O pont a beírt kör középpontja, amely az M, N és P pontokban érinti az ABC háromszög oldalait. Az ABC háromszög területe egyenlő az AOB, BOC, és COA területeinek összegével:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Meghúzzuk az érintési pontokhoz a sugarakat. Azt kapjuk, hogy $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Innen:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} ON \cdot BC = \frac{1}{2} r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} OP \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot AC.$$

Tehát $S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ◀

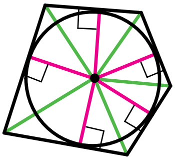
Az 5.4. tételt általánosítja a következő tétel.

5.5. tétel. ***A kör köré írt sokszög területe egyenlő a fél kerületének és a beírt körvonal sugarának szorzatával.***

Bizonyítsátok be önállóan ezt a tételt (5.4. ábra).

Megjegyezzük, hogy az 5.5. tétel segítségével meghatározhatjuk a sokszögbe írt körvonal sugarát

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

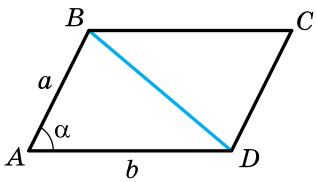


5.4. ábra

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma S területe meghatározható az alábbi képlettel

$$\boxed{S = ab \sin \alpha,}$$

ahol a és b a paralelogramma szomszédos oldalainak hossza, α a köztük lévő szög.

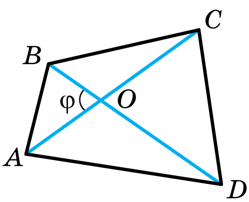


5.5. ábra

Megoldás. Vizsgáljuk meg az $ABCD$ paralelogrammát, melyben $AB = a$, $AD = b$, $BAD\angle = \alpha$ (5.5. ábra). Meghúzzuk a BD átlót. Mivel az $ABD\Delta = CBD\Delta$, ezért felírhatjuk:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha. \blacktriangleleft$$

2. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a domború négyszög területe az átlói és a köztük lévő szög szinusza szorzatának felével egyenlő.



5.6. ábra

Megoldás. Legyen az $ABCD$ négyszög AC és BD átlói közötti szög φ. Az 5.6. ábrán $AOB\angle = \varphi$. Ekkor a $BOC\angle = AOD\angle = 180° - \varphi$ és a $COD\angle = \varphi$. Vagyis:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(180° - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin(180° - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} OB(OA + OC) \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD(OC + OA) \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} OB \cdot AC \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot AC \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AC(OB + OD) \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi. \blacktriangleleft$$

3. feladat. A háromszög oldalai 17 cm, 65 cm és 80 cm. Határozzátok meg a háromszög legkisebb magasságát, valamint a beírt és a körülírt körök sugarait!

Megoldás. Legyen $a = 17$ cm, $b = 65$ cm, $c = 80$ cm.

Meghatározzuk a háromszög félkerületét: $p = \dfrac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (cm).

A háromszög területét Hérón képletével számítjuk ki:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$

$$= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \ (\text{cm}^2).$$

A háromszög legkisebb magassága a c hosszúságú oldalra bocsátott magasság lesz. Ez az oldal a háromszög legnagyobb oldala.

Mivel $S = \frac{1}{2}ch_c$, ezért $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (cm).

A beírt kör sugara $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (cm).

A körülírt kör sugara $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (cm).

Felelet: 7,2 cm, $\frac{32}{9}$ cm, $\frac{5525}{72}$ cm. ◄

?

1. Hogyan lehet meghatározni a háromszög területét, ha ismert két oldala és az általuk bezárt szöge?
2. Írjátok fel a háromszög területének kiszámítására szolgáló Hérón-képletet!
3. Hogyan lehet meghatározni a háromszög területét, ha ismertek az a, b és c oldalai és a körülírt kör R sugara?
4. Hogyan lehet meghatározni a háromszög köré írt kör sugarát, ha ismert a háromszög területe és az oldalai?
5. Hogyan lehet meghatározni a háromszög területét, ha ismert a félkerülete és a beírt kör sugara?
6. Hogyan lehet meghatározni a háromszög beírt körének sugarát, ha ismert a háromszög területe és az oldalai?
7. Mivel egyenlő a kör köré írt sokszög területe?

GYAKORLATOK

5.1.° Határozzátok meg az ABC háromszög területét, ha:
1) $AB = 12$ cm, $AC = 9$ cm, $A\angle = 30°$;
2) $AC = 3$ cm, $BC = 6\sqrt{2}$ cm, $C\angle = 135°$!

5.2.° Határozzátok meg a DEF háromszög területét, ha:
1) $DE = 7$ cm, $DF = 8$ cm, $D\angle = 60°$;
2) $DE = 10$ cm, $EF = 6$ cm, $E\angle = 150°$!

5.3.° Az MKN háromszög területe 75 cm². Határozzátok meg az MK oldal hosszát, ha $KN = 15$ cm, $K\angle = 30°$!

5.4.° Határozzátok meg az ABC háromszög adott oldalai közötti szöget, ha:
1) $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm, a háromszög területe pedig $30\sqrt{3}$ cm^2;
2) $AB = 14$ cm, $AC = 8$ cm, a háromszög területe pedig 56 cm^2!

5.5.° Az ABC háromszög területe 18 cm^2. Adott, hogy $AC = 8$ cm, $BC = 9$ cm. Határozzátok meg a C szög fokmértékét!

5.6.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög területét, ha a szára 16 cm és az alapnál lévő szöge 15°!

5.7.° Határozzátok meg a háromszög területét, ha oldalai:
1) 13 cm, 14 cm, 15 cm; 2) 2 cm, 3 cm, 4 cm!

5.8.° Határozzátok meg a háromszög területét, ha oldalai:
1) 9 cm, 10 cm, 17 cm; 2) 4 cm, 5 cm, 7 cm!

5.9.° Határozzátok meg a háromszög legkisebb magasságát, ha oldalainak hossza 13 cm, 20 cm és 21 cm!

5.10.° Határozzátok meg a háromszög legnagyobb magasságát, ha oldalainak hossza 11 cm, 25 cm és 30 cm!

5.11.° A háromszög kerülete 32 cm, a beírt kör sugara 1,5 cm. Határozzátok meg a háromszög területét!

5.12.° A háromszög területe 84 cm^2, a kerülete 72 cm. Határozzátok meg a beírt kör sugarát!

5.13.° Határozzátok meg a beírt és a körülírt kör sugarait, ha a háromszög oldalai:
1) 5 cm, 5 cm és 6 cm; 2) 25 cm, 29 cm és 36 cm!

5.14.° Határozzátok meg a beírt és a körülírt kör sugarait, ha a háromszög oldalai 6 cm, 25 cm és 29 cm!

5.15.° Határozzátok meg a paralelogramma területét, ha oldalai a és b valamint a köztük lévő szög α, ha:
1) $a = 5\sqrt{2}$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 45°$;
2) $a = 10$ cm, $b = 18$ cm, $\alpha = 150°$!

5.16.° Mivel egyenlő annak a paralelogrammának a területe, melynek oldalai 7 cm és 12 cm, az egyik szöge pedig 120°?

5.17.° Határozzátok meg a rombusz területét, ha oldala $9\sqrt{3}$ cm és szöge 60°!

5.18.° A domború négyszög átlói 8 cm és 12 cm, a köztük lévő szög pedig 30°. Határozzátok meg a négyszög területét!

5.19.° Határozzátok meg a domború négyszög területét, ha átlói $3\sqrt{3}$ cm és 4 cm, a köztük lévő szög pedig 60°!

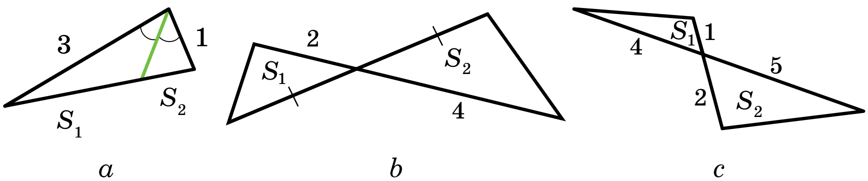
5.20.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szárát, ha területe 36 cm^2, a szárszöge pedig 30°!

5.21.• Két adott oldallal rendelkező háromszög közül, melyiknek lesz nagyobb a területe?

5.22.• Lehet-e a 4 cm és 6 cm-es oldalakkal rendelkező háromszögnek a területe:
1) 6 cm^2; 2) 14 cm^2; 3) 12 cm^2?

5.23.• A paralelogramma két szomszédos oldala megfelelően egyenlő a téglalap két szomszédos oldalával. Mivel egyenlő a paralelogramma hegyesszöge, ha a területe kétszer kisebb a téglalap területénél?

5.24.• Határozzátok meg az 5.7. ábrán lévő S_1 és S_2 területű háromszögek területeinek arányát (a szakaszok hossza centiméterben van megadva)!



5.7. ábra

5.25.• Az AD szakasz az ABC háromszög szögfelezője. Az ABD háromszög területe 12 cm^2, az ACD háromszögé pedig 20 cm^2. Határozzátok meg az AB és AC oldalak arányát!

5.26.• Határozzátok meg a háromszög területét, melynek oldala a, és a rajta fekvő két szöge β és γ!

5.27.• A háromszög köré írt kör sugara R. A háromszög két szöge α és β. Határozzátok meg a háromszög területét!

5.28.• Az ABC háromszögben adott, hogy $AC = b$, $A\angle = \alpha$, $B\angle = \beta$. Határozzátok meg a háromszög területét!

5.29.• Az ABC háromszögben az A egyenlő α-val, a BD és CE magasságok pedig megfelelően h_1 és h_2. Határozzátok meg az ABC háromszög területét!

5.30.• Az ABC háromszög magassága BM, $BM = h$, $A\angle = \alpha$, $ABC\angle = \beta$. Határozzátok meg az ABC háromszög területét!

5.31.• A háromszögbe, melynek oldalai 17 cm, 25 cm és 28 cm, egy olyan kör van írva, melynek középpontja össze van kötve a háromszög csúcsaival. Határozzátok meg a keletkezett háromszögek területeit!

5.32.•• Az ABC háromszögben az AD szakasz szögfelező, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BAC\angle = 120°$. Határozzátok meg az AD szögfelező hosszát!

5.33.•• Határozzátok meg annak a trapéznak a területét, melynek alapjai 10 cm és 50 cm, szárai pedig 13 cm és 17 cm!

5.34.•• Határozzátok meg annak a trapéznak a területét, melynek alapjai 4 cm és 5 cm, átlói pedig 7 cm és 8 cm!

5.35.•• A BM és CK szakaszok az ABC háromszög magasságai, $A\angle = 45°$. Határozzátok az AMK és ABC háromszögek területeinek arányát!

5.36.•• A háromszög oldalai 39 cm, 41 cm és 50 cm. Határozzátok meg annak a körnek a sugarát, melynek középpontja a háromszög legnagyobb oldalára illeszkedik, és a másik két oldalát a körvonal érinti!

5.37.•• A háromszög csúcsait összekötötték a beírt kör középpontjával. Ezek a szakaszok az adott háromszöget olyan háromszögekre bontják, melyek területei 26 cm^2, 28 cm^2 és 30 cm^2. Határozzátok meg az adott háromszög oldalait!

5.38.•• Bizonyítsátok be, hogy $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, ahol a h_1, h_2 és h_3 a háromszög magasságainak hossza, r pedig a beírt kör sugara!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

5.39. A téglalap csúcsából az átlóra bocsátott merőleges a szöget 4 : 5 arányban osztja. Határozzátok meg a merőleges és a másik átló közötti szöget!

5.40. Az $ABCD$ trapéz ($BC \parallel AD$) MK középvonala 56 cm. Az AB oldal M felezőpontján át a CD oldallal párhuzamos egyenest fektettek, amely az AD alapot E pontban úgy osztja fel, hogy $AE : ED = 5 : 8$. Határozzátok meg a trapéz alapjait!

5.41. Az ABC háromszögben a CD szakasz szögfelező. A D ponton át az AC egyenessel párhuzamos egyenest fektettek, amely a BC oldalt az E pontban metszi. Határozzátok meg a DE szakasz hosszát, ha $AC = 16$ cm, $BC = 24$ cm!

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

5.42. Határozzátok meg a domború hétszög szögeinek összegét!

5.43. Létezik-e olyan domború sokszög, mely szögeinek összege:
1) 1080°; 2) 1200°?

5.44. Létezik-e olyan sokszög, melynek minden szöge:
1) 72°; 2) 171°?

5.45. Igaz-e az állítás (magyarázzátok meg a választ):

1) ha a körbe írt sokszög minden oldala egyenlő, akkor szögei szintén egyenlők;
2) ha a körbe írt sokszög minden szöge egyenlő, akkor oldalai szintén egyenlők;
3) ha a kör köré írt sokszög minden oldala egyenlő, akkor szögei szintén egyenlők;
4) ha a kör köré írt sokszög minden szöge egyenlő, akkor oldalai szintén egyenlők?

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

5.46. Adott egy 99×99 négyzetrácsos négyzet. Mindegyik négyzet vagy feketére vagy fehérre van festve. Egyszerre át lehet olyan színre festeni egy oszlopot vagy egy sort, amelyik színű négyzetből az adott oszlopban vagy sorban eredetileg több volt, mint a másik színű négyzetből. Mindig el lehet-e így érni, hogy az összes négyzet egyszínű legyen?

A HÁROMSZÖGET KÍVÜLRŐL ÉRINTŐ KÖRVONALAK

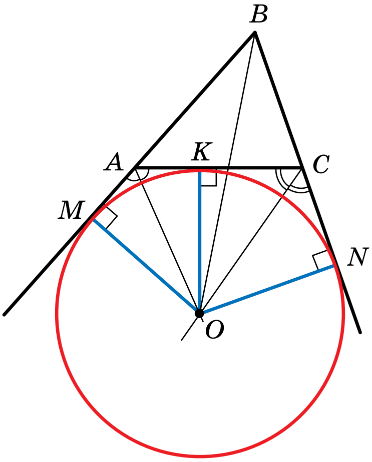
Meghúzzuk az ABC háromszög két külső A és C szögének a szögfelezőit (5.8. ábra). Legyen ezen szögfelezők metszéspontja O. Ekkor az O pont egyenlő távolságra lesz az AB, BC és AC egyenesektől.

Meghúzunk három merőlegest: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Érthető, hogy $OM = OK = ON$. Tehát létezik egy O középpontú körvonal, amely érinti a háromszög oldalát, és a másik két oldal meghosszabbítását. Az ilyen körvonalat az ABC háromszög **kívülről érintő** körének vagy a háromszög **hozzáírt körének** nevezzük (5.8. ábra).

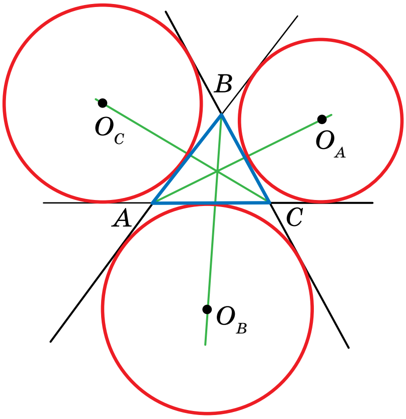
Mivel $OM = ON$, ezért az O pont az ABC szög szögfelezőjére illeszkedik.

Bármely háromszög három kívülről érintő körvonallal rendelkezik. Az 5.9. ábrán ezeknek a köröknek a középpontjait O_A, O_B és O_C -val, a hozzájuk tartozó körvonalak sugarait pedig r_a, r_b és r_c-vel jelölték.

A körhöz egy pontból húzott érintők tulajdonsága alapján kapjuk, hogy $CK = CN$, $AK = AM$ (5.8. ábra). Ekkor $AC = CN + AM$. Tehát az ABC háromszög kerülete egyenlő a $BM + CN$ összeggel. De a $BM = BN$. Ekkor a $BM = BN = p$, ahol a p az ABC háromszög félkerülete.



5.8. ábra



5.9. ábra

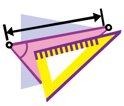
Innen a következőt kapjuk:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2}r_b\,(c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b\,(p - b).$$

Adódik, hogy $r_b = \dfrac{S}{p - b}$, ahol S az ABC háromszög területe.

Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $r_a = \dfrac{S}{p - a}$, $r_c = \dfrac{S}{p - c}$.



GYAKORLATOK

1. Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, ahol az r az ABC háromszögbe írt körvonal sugara!
2. Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög S területét ki lehet számítani az $S = r_c \cdot r$ képlettel, ahol r_c a derékszögű háromszöget kívülről érintő körvonal sugara, amely az átfogót érinti, r az adott háromszögbe írt kör sugara!
3. Az a oldalú egyenlő oldalú háromszögbe kör van írva. A körhöz olyan érintő van húzva, melynek a háromszögön belüli szakaszának hossza b-vel egyenlő. Határozzátok meg annak a háromszögnek a területét, melyet ez az érintő lemetsz az egyenlő oldalú háromszögből!

4. Az $ABCD$ négyszög BD átlója merőleges az AD oldallal, $ADC\angle = 135°$, $BAD\angle = BCD\angle = 60°$. Bizonyítsátok be, hogy az AC átló a BAD szög szögfelezője lesz!

Útmutatás. Bizonyítsátok be, hogy a C pont az ABD háromszöget kívülről érintő körvonal középpontja!

5. Az ABC háromszög B szöge 120°. Az AN, CF és BK szakaszok az ABC háromszög szögfelezői. Bizonyítsátok be, hogy az NKF szög értéke 90°!

Útmutatás. Az AB oldal B-n túli meghosszabbításán jelöljünk egy M pontot. Ekkor az $MBC\angle = KBC\angle = 60°$, vagyis a BC félegyenes az ABK háromszög MBK külső szögének a szögfelezője. Ebből következik, hogy az N pont az ABK háromszöget kívülről érintő körének középpontja. Hasonlóan bizonyítható, hogy az F pont BCK háromszöget kívülről érintő körének középpontja.

6. Az $ABCD$ négyzet oldala 1 cm. Az AB és BC oldalakon megfelelően jelöltek egy M és N pontot úgy, hogy az MBN háromszög kerülete 2 cm legyen. Határozzátok meg az MDN szög mértékét!

Útmutatás. Bizonyítsátok be, hogy a D pont az MBN háromszöget kívülről érintő körének középpontja lesz!

1. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Melyik igaz az alábbi egyenlőségek közül?

A) $\cos(180° - \alpha) = \sin\alpha$;
B) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
C) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
D) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

2. Melyik igaz az alábbi egyenlőtlenségek közül?

A) $\sin 100° \cos 110° > 0$;
B) $\sin 100° \cos 10° < 0$;
C) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
D) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát, ha két oldala 3 cm és 8 cm, a köztük lévő szöge pedig 120°!

A) $\sqrt{97}$ cm; B) 7 cm; C) 9 cm; D) $\sqrt{32}$ cm.

4. Milyen az a szög, amely a háromszög legnagyobb oldalával szemközt fekszik, ha az oldalai 4 cm, 7 cm és 9 cm?

A) hegyes;
B) tompa;
C) derék;
D) nem lehet megállapítani.

5. A háromszög két oldala közötti szög 60°, ezek közül az egyik oldala 10 cm-rel nagyobb a másiknál, a harmadik oldala pedig 14 cm. Milyen hosszú a háromszög legnagyobb oldala?

A) 16 cm; B) 14 cm; C) 18 cm; D) 15 cm.

6. A paralelogramma átlói 17 cm és 19 cm, oldalainak aránya pedig 2 : 3. Mivel egyenlő a paralelogramma területe?

A) 25 cm; B) 30 cm; C) 40 cm; D) 50 cm.

7. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 8$ cm, $C\angle = 30°$, $A\angle = 45°$. Határozzátok meg a BC oldal hosszát!

A) $8\sqrt{2}$ cm; B) $4\sqrt{2}$ cm; C) $16\sqrt{2}$ cm; D) $12\sqrt{2}$ cm.

8. Mivel egyenlő az ABC háromszögben az $AC : BC$ oldalak aránya, ha $A\angle = 120°$, $B\angle = 30°$?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $C\angle = 135°$. Határozzátok meg a háromszög köré írt körvonal átmérőjét!
A) 4 cm; B) 8 cm; C) 16 cm; D) 2 cm.

10. Legfeljebb mekkora lehet annak a háromszögnek a területe, melynek oldalai 8 cm és 12 cm?
A) 96 cm^2;
B) 48 cm^2;
C) 24 cm^2;
D) nem lehet megállapítani.

11. Határozzátok meg a háromszögbe írt és körülírt körvonalak sugarainak összegét, ha a háromszög oldalai 25 cm, 33 cm és 52 cm!
A) 36 cm; B) 30 cm; C) 32,5 cm; D) 38,5 cm.

12. A háromszög két oldalának hossza 11 cm és 23 cm, a harmadik oldalhoz húzott súlyvonala pedig 10 cm. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalát!
A) 15 cm; B) 30 cm; C) 25 cm; D) 20 cm.

! AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Koszinusz és szinusz

Az α **($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$)** szög koszinuszának és szinuszának az egységfélkörön lévő, az α szögnek megfelelő M pont abszcisszáját és ordinátáját nevezzük.

Tangens

Az α, ahol **$0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$** és $\alpha \neq 90°$, a szög tangensének a $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ arányt nevezzük.

A koszinusztétel

A háromszög oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és az általuk bezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

A koszinusztétel következménye

Legyen a, b és c a háromszög oldalainak hossza, melyek közül az a oldal a leghosszabb. Ha $a^2 < b^2 + c^2$, akkor a háromszög hegyesszögű lesz, ha $a^2 > b^2 + c^2$, akkor tompaszögű, ha pedig $a^2 = b^2 + c^2$, akkor az adott háromszög derékszögű lesz.

A körvonal húrjáról szóló lemma

A körvonal húrja egyenlő az átmérőjének és a neki megfelelő kerületi szög szinuszának szorzatával.

A szinusztétel

A háromszögek oldalai arányosak a szemben lévő szögek szinuszával:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

A háromszög területének meghatározására szolgáló képletek

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Hérón képlete: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

A háromszögbe írt körvonal sugarának képlete

$$r = \frac{S}{p}$$

A háromszög köré írt körvonal sugarának képlete

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

A kör köré írt sokszög területe

A kör köré írt sokszög területe egyenlő a fél kerületének és a beírt kör sugarának szorzatával.

SZABÁLYOS SOKSZÖGEK 2.§.

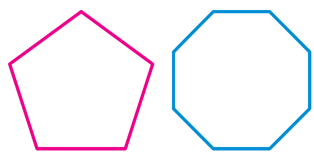
Ebből a paragrafusól megtudjátok, milyenek a szabályos sokszögek. Megtudjátok azt is, hogyan lehet körző és vonalzó segítségével megszerkeszteni néhányat közülük.

Megtanuljátok meghatározni a szabályos sokszögbe és köré írt körvonalak sugarát, a körív hosszát, a körcikk és a körszelet területét.

6. Szabályos sokszögek és ezek tulajdonságai

Meghatározás. **A sokszöget szabályosnak nevezzük, ha minden oldala és minden szöge egyenlő**.

Már néhány szabályos sokszöggel találkoztatok: az egyenlő oldalú háromszög az egy szabályos háromszög, a négyzet pedig egy szabályos négyszög. A 6.1. ábrán szabályos ötszög és nyolcszög látható.



6.1. ábra

Megismerkedünk néhány olyan tulajdonsággal, amely minden szabályos n-szögre érvényes.

6.1. tétel. ***A szabályos sokszög domború sokszög lesz.***

A tétel bizonyítása a 60–61. oldalakon található.

A szabályos n-szög mindegyik szöge $\frac{180°(n-2)}{n}$-nel egyenlő. Valóban, a domború n-szög szögeinek összege egyenlő $180°(n-2)$, és mivel minden szöge ugyanakkora, ezért mindegyik szöge $\frac{180°(n-2)}{n}$.

A szabályos háromszögben van olyan pont, amely egyenlő távolságra van mindegyik csúcsától és oldalától. Ez a pont a szabályos háromszög szögfelezőinek metszéspontja. A négyzet átlóinak metszéspontjára is igaz ez a tulajdonság. Azt, hogy bármilyen szabályos sokszögben van olyan pont, amely egyenlő távolságra van a csúcsaitól és az oldalaitól, a következő tétel igazolja.

6.2. tétel. ***Bármilyen szabályos sokszög egyszerre lesz körbe írt és kör köré írt is, és a beírt és körülírt körvonalainak középpontjai egybeesnek.***

Bizonyítás. A 6.2. ábrán egy szabályos $A_1A_2A_3...A_n$ sokszög látható. Bebizonyítjuk, hogy bele is és köré is körvonal írható.

Meghúzzuk az A_1 és A_2 szögek szögfelezőit. Legyen az O pont ezek metszéspontja. Az O pontot összekötjük az A_3 ponttal. Mivel az OA_1A_2 és az OA_2A_3 háromszögekben a 2. és 3. szögek egyenlők, $A_1A_2 = A_2A_3$ és OA_2 a közös oldaluk, ezért ezek a háromszögek egybevágóak lesznek a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Ezenkívül az 1. és 2. szögek egyenlők, mint az egyenlő szögek félszögei. Innen következik, hogy az OA_1A_2 egyenlő szárú háromszög lesz, tehát az OA_2A_3 háromszög szintén egyenlő szárú. Ezért $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

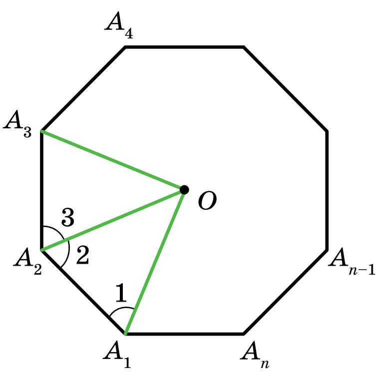
Összekötve az O pontot az A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n pontokkal, hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Tehát az $A_1A_2A_3...A_n$ sokszögben létezik egy pont, amely egyenlő távolságra van mindegyik csúcstól. Ez az O pont, amely a sokszög köré írt körvonal középpontja.

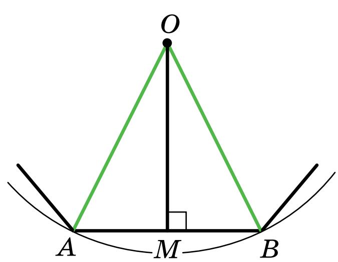
Mivel az OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1, egyenlő szárú háromszögek egybevágóak, ezért az O pontból húzott magasságaik is egyenlők. Innen levonhatjuk azt a következtetést, hogy az O pont egyenlő távolságra lesz a sokszög minden oldalától. Tehát az O pont a sokszögbe írt körvonal középpontja. ◄

Azt a pontot, amely a szabályos sokszög beírt körének és a körülírt körének a középpontja, a **szabályos sokszög középpontjának** nevezzük.

A 6.3. ábrán a szabályos n-szög egy része látható, melynek az O pont a középpontja és AB az a_n hosszúságú oldala. Az AOB szöget **a szabá-**



6.2. ábra



6.3. ábra

lyos sokszög középponti szögének nevezzük. Érthető, hogy $AOB\angle = \dfrac{360°}{n}$.

Az AOB háromszögben meghúzzuk az OM magasságot. Ekkor $AOM\angle = BOM\angle = \dfrac{180°}{n}$, $AM = MB = \dfrac{a_n}{2}$. Az OMB háromszögből kapjuk, hogy $OB = \dfrac{MB}{\sin BOM\angle} = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$ és $OM = \dfrac{MB}{\operatorname{tg} BOM\angle} = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$.

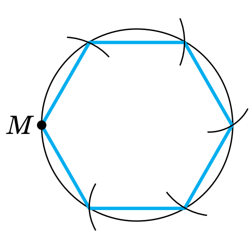
Az OB és OM szakaszok a szabályos n-szög körülírt és beírt körének sugarai. Ha ezek hosszát megfelelően R_n és r_n-nel jelöljük, akkor az eredmények a következő képletekkel írhatók fel:

$$\boxed{R_n = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}} \qquad \boxed{r_n = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}}$$

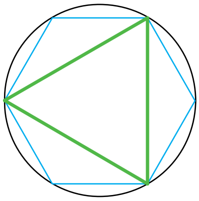
Ha a képletekbe az n helyett behelyettesítjük a 3, 4, 6 számokat, akkor megkapjuk a szabályos a oldalú háromszög, négyszög és hatszög beírt és körülírt körei sugarainak képletét.

A szabályos n-oldalú sokszög oldalainak száma	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
A körülírt kör sugara	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
A beírt kör sugara	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

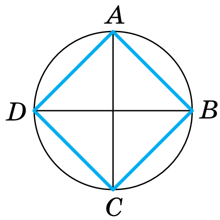
A kapott eredményekből az következik, hogy a szabályos hatszög oldala egyenlő a körülírt körének sugarával. Ennek ismeretében felírhatjuk a szabályos hatszög szerkesztésének algoritmusát: a körvonal bármely M pontjából egymás után sorba rá kell mérni a körvonalra a sugárral egyenlő íveket (6.4. ábra). Így megkapjuk a szabályos hatszög csúcsait.



6.4. ábra



6.5. ábra

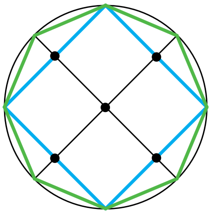


6.6. ábra

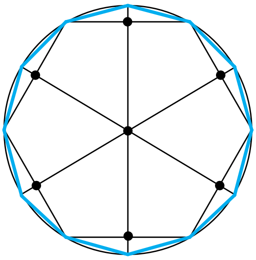
A szabályos hatszög minden második csúcsának összekötésével szabályos háromszöget kapunk (6.5. ábra).

Szabályos négyszög szerkesztéséhez elegendő két, AC és BD egymásra merőleges átmérőt meghúzni (6.6. ábra). Ekkor az $ABCD$ négyszög négyzet lesz (bizonyítsátok be önállóan).

Egy szabályos n-szög megszerkesztése után könnyen megszerkeszthetjük a szabályos $2n$-szöget is. Ehhez meg kell határozni az n-szög minden oldalának felezőpontját, majd ezeken a felezőpontokon keresztül meghúzni a körülírt körvonal sugarait. Ekkor a sugarak végpontjai és az adott n-szög csúcsai a szabályos $2n$-szög csúcsai lesznek. A 6.7. és a 6.8. ábrák a szabályos 8-szög és 12-szög szerkesztését szemléltetik.



6.7. ábra



6.8. ábra

1. feladat. Létezik-e olyan szabályos sokszög, melynek szöge: 1) 155°; 2) 177°? Ha a válaszotok igen, akkor nevezzétek meg a sokszög típusát!

1) Legyen n a keresett szabályos sokszög oldalainak száma. Egyrészt a sokszög szögeinek összege $180° (n-2)$. Másrészt viszont $155°n$. Tehát $180° (n-2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$. Mivel n-nek természetes számnak kell lennie, ilyen szabályos háromszög nem létezik.

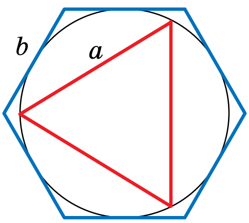
2) $180°(n-2) = 177°n$; $180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

Felelet: 1) nem létezik; 2) létezik, ez a szabályos sokszög százhúszszög lesz. ◄

2. feladat. A körbe egy szabályos háromszög van írva, melynek oldala 18 cm. Határozzátok meg annak a szabályos hatszögnek az oldalát, amely az adott kör köré van írva!

Megoldás. A szabályos háromszög köré írt kör sugara az $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ képlettel számolható ki, ahol az a a háromszög oldala (6.9. ábra). Tehát $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (cm).

A feladat feltétele szerint a szabályos hatszögbe írt kör sugara egyenlő a szabályos háromszög köré írt kör sugarával, vagyis $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ cm. Mivel $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, ahol b a szabályos hatszög oldalának hossza, ezért $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (cm).



6.9. ábra

Felelet: 12 cm. ◄

?

1. Milyen sokszöget nevezünk szabályosnak?
2. Hogyan nevezik másképpen a szabályos háromszöget?
3. Hogyan nevezik másképpen a szabályos négyszöget?
4. Milyen szabályos sokszög köré lehet kört írni?
5. Milyen szabályos sokszögbe lehet kört írni?
6. Hogyan helyezkedik el a szabályos sokszögbe írt körvonal középpontja a szabályos sokszög köré írt kör középpontjához képest?
7. Mit nevezünk a szabályos sokszög középpontjának?
8. Írjátok fel a szabályos sokszögbe írt körvonal és a szabályos sokszög köré írt kör sugarainak képletét az n-szögre, a háromszögre, a négyszögre, a hatszögre!
9. Írjátok le a szabályos hatszög szerkesztésének folyamatát!
10. Írjátok le a szabályos négyszög szerkesztésének folyamatát!
11. Hogyan lehet megszerkeszteni egy szabályos $2n$-szöget egy szabályos n-szög alapján?

GYAKORLATI FELADATOK

6.1.° Rajzoljatok egy körvonalat, melynek sugara 3 cm! Szerkesszetek ebbe a körbe írt:
1) szabályos hatszöget;
2) szabályos háromszöget;
3) szabályos tizenkétszöget!

6.2.° Rajzoljatok egy körvonalat, melynek sugara 2,5 cm! Szerkesszetek ebbe a körbe írt: 1) szabályos négyszöget; 2) szabályos nyolcszöget!

GYAKORLATOK

6.3.° Határozzátok meg a szabályos n-szög szögeit, ha:
1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$!

6.4.° Határozzátok meg szögeit a szabályos:
1) nyolcszögnek; 2) tízszögnek!

6.5.° Hány oldala van a szabályos sokszögnek, ha a szöge egyenlő:
1) 160°-kal; 2) 171°-kal?

6.6.° Hány oldala van a szabályos sokszögnek, ha a szögei egyenlők:
1) 108°-kal; 2) 175°-kal?

6.7.° Létezik-e olyan szabályos sokszög, melynek szögei egyenlők:
1) 140°-kal; 2) 130°-kal?

6.8.° Hány oldalú a szabályos sokszög, ha szögének mellékszöge $\frac{1}{9}$-de a sokszög szögének?

6.9.° Állapítsátok meg a szabályos sokszög oldalainak számát, ha a szöge 168°-kal nagyobb a mellékszögénél!

6.10.° Hány oldala van a körbe írt szabályos sokszögnek, ha az oldalán lévő körív fokmértéke:
1) 90°; 2) 24°?

6.11.° Határozzátok meg a szabályos sokszög oldalainak számát, ha az oldalára támaszkodó középponti szög:
1) 120°; 2) 72°!

6.12.° Legyen a a szabályos háromszög oldalának hossza, R és r pedig megfelelően a körülírt és a beírt körének sugarai. Töltsétek ki a táblázatot (az adatok cm-ben vannak megadva)!

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

6.13.° Legyen a a négyzet oldalának hossza, R és r pedig megfelelően a körülírt és a beírt körének sugarai. Töltsétek ki a táblázatot (az adatok cm-ben vannak megadva)!

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

6.14.° A szabályos háromszög magassága 15 cm. Mivel egyenlő a:
1) körülírt kör; 2) beírt kör sugara?

6.15.° A négyzet átlója $6\sqrt{2}$ cm. Mivel egyenlő a:

1) körülírt kör; 2) beírt kör sugara?

6.16.° A kör sugara 12 cm-rel egyenlő. Határozzátok meg a beírt sokszög oldalát a szabályos:
1) hatszögnek; 2) tizenkétszögnek!

6.17.° A kör sugara $8\sqrt{3}$ cm. Határozzátok meg a kör köré írt szabályos

hatszög oldalát!

6.18.° Bizonyítsátok be, hogy a szabályos háromszög köré írt kör sugara kétszer nagyobb a háromszögbe írt kör sugaránál!

6.19.° A szabályos háromszög köré írt kör sugara 4 cm-rel nagyobb a beírt kör sugaránál. Határozzátok meg a háromszögbe írt és a körülírt kör sugarát, valamint a háromszög oldalát!

6.20.° A szabályos sokszög oldala a, a köré írt kör sugara R. Határozzátok meg a beírt kör sugarát!

6.21.° A szabályos sokszög beírt és körülírt körének sugara r és R. Határozzátok meg a sokszög oldalát!

6.22.° A szabályos sokszög oldala a, a beírt kör sugara pedig r. Határozzátok meg a körülírt kör sugarát!

6.23.° A kör köré írt szabályos hatszög oldala $4\sqrt{3}$ cm. Határozzátok meg ebbe a körbe írt négyzetnek az oldalát!

6.24.° A körbe egy $6\sqrt{2}$ cm oldalú négyzetet írtak. Határozzátok meg a kör köré írt szabályos háromszög oldalát!

6.25.° A kör átmérője 16 cm. Ki lehet-e ebből a körből egy 12 cm-es oldalú négyzetet vágni?

6.26.° Legalább mekkora annak a rönknek az átmérője, melyből egy olyan gerenda készíthető, melynek keresztmetszete egy 15 cm-es oldalú szabályos háromszög?

6.27.° Legalább mekkora annak a rönknek az átmérője, melyből olyan gerenda készíthető, melynek keresztmetszete egy 14 cm-es oldalú négyzet?

6.28.• Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek szöge 36°-kal nagyobb, mint az oldalának megfelelő középponti szöge?

6.29.• A szabályos sokszögbe írt körvonal szomszédos érintési pontjaihoz húzott sugarak közötti szög 20°-os. Határozzátok meg a sokszög oldalainak számát!

6.30.• Bizonyítsátok be, hogy a szabályos ötszög minden átmérője egymással egyenlő!

6.31.• Bizonyítsátok be, hogy a szabályos ötszög minden átmérője párhuzamos valamelyik oldalával!

6.32.• Két egymást metsző körvonal közös húrja az egyik körbe írt szabályos háromszög oldala, és a másik körbe írt négyzet oldala lesz. Ennek a húrnak a hossza a. Határozzátok meg a körök középpontjai közötti távolságot, ha:
1) a húr különböző oldalain helyezkednek el;
2) a húr egyik oldalán vannak!

6.33.• Két egymást metsző körvonal közös húrja az egyik körbe írt szabályos háromszög oldala, és a másik körbe írt szabályos hatszög oldala lesz. Ennek a húrnak a hossza a. Határozzátok meg a körök középpontjai közötti távolságot, ha:

1) a húr különböző oldalain helyezkednek el;

2) ha a húr egyik oldalán vannak!

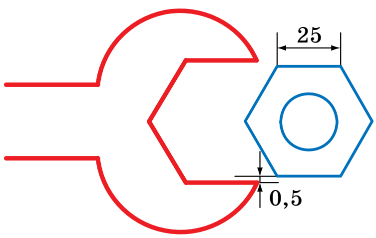
6.34.• A körbe egy szabályos háromszöget írtak és köré is írtak egy szabályos háromszöget. Határozzátok meg a háromszögek oldalainak arányát!

6.35.• A körbe egy szabályos hatszöget írtak és köré is írtak egy szabályos hatszöget. Határozzátok meg a hatszögek oldalainak arányát!

6.36.• Bizonyítsátok be, hogy a szabályos nyolcszög oldala $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ahol R a köré írt kör sugara!

6.37.• Bizonyítsátok be, hogy a szabályos tizenkétszög oldala $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, ahol R a köré írt kör sugara!

6.38.• Mekkora a villáskulcs pofanyílása (6.10. ábra), ha a csavar éle 25 mm, a csavar és a kulcspofa közötti távolság 0,5 mm?



6.10. ábra

6.39.• Határozzátok meg a szabályos nyolcszög területét, ha a köré írt kör sugara R!

6.40.• Határozzátok meg a szabályos hatszög átlóit és területét, ha az oldala a!

6.41.•• A 6 cm-es négyzet szögeit úgy vágták le, hogy szabályos nyolcszöget kaptak. Határozzátok meg a keletkezett nyolcszög oldalát!

6.42.•• A 24 cm-es szabályos háromszög szögeit úgy vágták le, hogy szabályos hatszöget kaptak. Határozzátok meg a keletkezett hatszög oldalát!

6.43.•• Határozzátok meg az a oldalú szabályos nyolcszög átlóit!

6.44.•• Az a oldalú szabályos tizenkétszögben egymás után összekötötték minden második oldalának a felezőpontját. Határozzátok meg az így keletkezett szabályos hatszög oldalát!

6.45.•• Az a oldalú szabályos nyolcszögben egymás után összekötötték minden második oldalának a felezőpontját. Határozzátok meg az így keletkezett négyzet oldalát!

6.46.* Milyen szabályos sokszög alakúnak kell lennie a parkettának, hogy lerakható legyen a padló?

6.47.* Adott egy szabályos hatszög, melynek oldala 1 cm. Csak vonalzót alkalmazva szerkesszetek egy $\sqrt{7}$ cm-es szakaszt!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

6.48. A kör 5 egyenlő ívre van osztva: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Határozzátok meg a következő szögek mértékét:
1) $BAC\angle$; 2) $BAD\angle$; 3) $BAE\angle$; 4) $CAD\angle$; 5) $DAE\angle$.

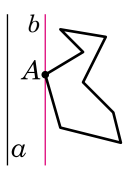
6.49. Az A csúcsú szög egyik szárán B és C pontokat jelöltek (a B pont az A és C pontok között fekszik), a másik szárán pedig D és E (a D pont pedig az A és E pontok között), az $AB = 28$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 24$ cm, $AE = 42$ cm, $BE = 21$ cm. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát!

6.50. Az egyenlő szárú tompszögű háromszög alapja 24 cm, a köré írt kör sugara pedig 13 cm. Határozzátok meg a háromszög területét!

6.51. Az A ponton keresztül a körhöz két érintőt húztak. Az A pont és az érintési pont között a távolság 12 cm, az érintési pontok között pedig 14,4 cm. Határozzátok meg a kör sugarát!

A SZABÁLYOS n-SZÖGEK SZERKESZTÉSÉRŐL

Bebizonyítjuk, hogy bármilyen szabályos n-szög domború sokszög lesz. Ehhez elegendő bizonyítani, hogy legalább egy szöge kisebb, mint 180°. Abból, hogy a szabályos n-szögnek minden szöge egyenlő következik, hogy mindegyik kisebb, mint 180°, vagyis a sokszög domború.



6.11. ábra

Megvizsgálunk egy tetszőleges sokszöget és egy a egyenest, amelynek nincs vele közös pontja (6.11. ábra). A sokszög minden csúcsából merőlegest bocsátunk az a egyenesre.

Összehasonlítva a merőlegesek hosszát, kiválaszthatjuk azt a csúcsot, amely legkisebb távolságra van az

a egyenestől (ha ezekből több is van, akkor bármelyiket választhatjuk). Legyen ez az A csúcs (6.11. ábra). Ezen keresztül egy b egyenest fektetünk, amely párhuzamos lesz az a egyenessel. Ekkor a sokszögnek az A szöge a b egyeneshez viszonyítva egy félsíkban fekszik. Tehát $A\angle < 180°$.

Már tudtok körző és vonalzó segítségével szabályos 4-szöget szerkeszteni, ami azt jelenti, hogy már 8-szöget, 16-szöget, 32-szöget is, vagyis bármilyen 2^n-szöget (n természetes szám, $n > 1$). A szabályos háromszög szerkesztése lehetőséget ad szabályos 6-szög, 12-szög, 24-szög és így tovább, vagyis bármilyen $3 \cdot 2^n$-szög (n természetes szám) szerkesztésére.

Szabályos sokszög szerkesztését körző és vonalzó segítségével, már az ókori görög geométerek is tanulmányozták. A fentebb felsorolt szabályos sokszögeken kívül már sikeresen megbirkóztak a szabályos 5-szögek, illetve 15-szögek szerkesztésével.

Az ókori tudósok, akik már tudtak szabályos n-szöget szerkeszteni, ha $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, próbálkoztak ennek a feladatnak a megoldásával, ha $n = 7, 9$. Ez viszont nem sikerült nekik. Több mint kétezer éven át a matematikusoknak nem sikerült ezt a problémát megoldani. 1796-ban a nagy német matematikus, Carl Friedrich Gauss körző és vonalzó alkalmazásával szerkesztett szabályos 17-szöget. 1801-ben Gauss bebizonyította, hogy csak körző és vonalzó alkalmazásával akkor és csakis akkor lehet szabályos n-szöget szerkeszteni, ha $n = 2^k$, $k \in N$, $k > 1$ vagy $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, ahol k nem negatív egész szám, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ különböző prímszámok, melyek $2^{2^m} + 1$ alakúak, ahol m nem negatív egész szám, melyeket Ferma–prímeknek neveznek[1]. Most csak öt Ferma-prímet ismernek: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Gauss olyan nagy jelentőséget tulajdonított a felfedezésének, hogy végrendeletében azt kérte, 17 szög legyen a sírkövén. A sírkövére nem került fel ez a rajz, azonban a braunschweigi Gauss-emlékmű egy tizenhét szögű talapzaton áll.

[1] Pierre de Fermat (1601–1665) – francia matematikus, a számelmélet egyik alapítója.

7. A körvonal hossza. A körlap területe

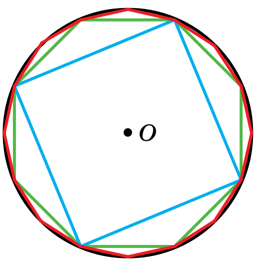
A 7.1. ábrán körbe írt szabályos 4-szög, 8-szög és 16-szög látható.

Azt vesszük észre, hogy a szabályos sokszög oldalainak növelésével a szabályos n-szög P_n kerülete egyre kisebb mértékben tér el a körülírt körvonal C hosszától.

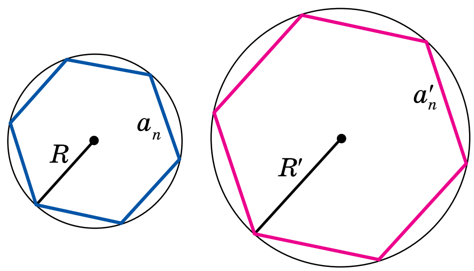
A fentiekre igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

A szabályos sokszög oldalainak végtelen számú növelése után, az nagyon kis mértékben fog eltérni a körvonal hosszától. Ez azt jelenti, hogy $C - P_n$ különbséget nagyon kicsivé lehet alakítani, például 10^{-6}, 10^{-9} vagy bármilyen pozitív számnál kisebbé.



7.1. ábra



7.2. ábra

Vizsgáljunk meg két, a_n és a'_n oldalú szabályos n-szöget, melyek megfelelően az R és R' sugarú körbe vannak írva (7.2. ábra). Ekkor a P_n és P'_n kerületeiket a következő képletekkel lehet kiszámítani:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Innen

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Ez az egyenlőség az n (n természetes szám, $n \geqslant 3$) tetszőleges értékére igaz. Az n értékének végtelen növelése után a P_n és P'_n kerületek nagyon kis mértékben fognak különbözni a köré írt körvonalak C és C' hosszától. Vagyis az n értékének végtelen növelése után a $\frac{P_n}{P'_n}$ arány nagyon kis mértékben különbözik a $\frac{C}{C'}$ aránytól. Figyelembe véve a (*)

összefüggést, arra a következtetésre jutunk, hogy a $\frac{2R}{2R'}$ szám alig fog különbözni a $\frac{C}{C'}$ szám értékétől. Ez csak akkor lehetséges, ha $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ vagyis $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Az utolsó egyenlőség azt jelenti, hogy ***minden körvonal esetén a körvonal hosszának*** és ***átmérőjének aránya mindig ugyanaz a szám.***

A 6. osztályos matematikából már tudjátok, hogy ezt a számot a görög π (így olvassuk: „pi") betűvel jelöljük.

A $\frac{C}{2R} = \pi$ egyenlőségből megkapjuk a körvonal hosszának kiszámítására szolgáló képletet:

$$\boxed{\boldsymbol{C = 2\pi R}}$$

A π irracionális szám, tehát nem lehet megadni véges tizedes tört alakban. A feladatok megoldása során a π-nek közelítő értékével számolunk, ami 3,14.

A híres ógörög tudós, Archimédesz (i. e. III. század) a szabályos 96-szög köré írt kör átmérőjén keresztül kifejezte a sokszög kerületét, megállapítva, hogy $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Innen következik, hogy $\pi \approx 3{,}14$.

A korszerű számítógépek és speciális programok alkalmazásával a π értékét nagy pontossággal meg lehet határozni. Bemutatjuk a π tizedesvessző utáni 47 számjegyet tartalmazó közelítő értékét:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

1989-ben a π számnak kiszámították a tizedesvessző után 1 011 196 691 számjegy pontossággal. Ez a tény bekerült a Guinness-rekordok könyvébe. Maga a szám nem szerepel ebben a könyvben, mert ennek leírására közel ezer oldalra lenne szükség. 2017-ben a π számnak már több mint 22 billió számjegyét határozták meg.

Meghatározzuk az n°-os ív hosszának kiszámítására szolgáló képletet. Mivel a teljes kör fokmértéke 360°-kal egyenlő, ezért az 1°-os ív hossza $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ lesz. Tehát az n°-os ív l hossza a következő képlettel adható meg:

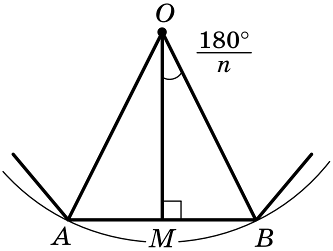
$$\boxed{\boldsymbol{l = \frac{\pi R n}{180}}}$$

Levezetjük a körlap területének meghatározására szolgáló képletet.

Újra visszatérünk a 7.1. ábrához. Látható, hogy az oldalak számának növelésével az n-szög S_n területe folyamatosan közelíteni fog a körlap S területének értékéhez. Az oldalak számát a végtelenhez közelítve a sokszög területe meg fogja közelíteni a körlap területét.

A 7.3. ábrán a szabályos n-szög részlete látható, melynek középpontja az O pont, oldala $AB = a_n$ és a körülírt kör sugara R. Bocsássunk egy OM merőlegest az AB szakaszra. Ekkor

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}.$$



7.3. ábra

Mivel a szabályos n-szög csúcsaihoz húzott sugarak n egybevágó háromszögre osztja a sokszöget, ezért az n-szög S_n területe n-szer nagyobb az AOB háromszög területénél. Ekkor $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}$. Innen következik, hogy

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

ahol P_n az adott szabályos n-szög kerülete.

Az n értékének végtelenhez való közelítése a $\frac{180°}{n}$ értékének a nullához való közeledését vonja maga után, és ekkor $\cos \frac{180°}{n}$ értéke az egyhez fog közeledni. A P_n kerület a körvonal C hosszát közelíti meg, az S_n terület pedig a körlap S területéhez fog közelíteni. Figyelembe véve az (**) egyenlőséget fel lehet írni a következő képletet: $S = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Ebből az egyenlőségből megkapjuk a körlap területének képletét:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \pi R^2}}$$

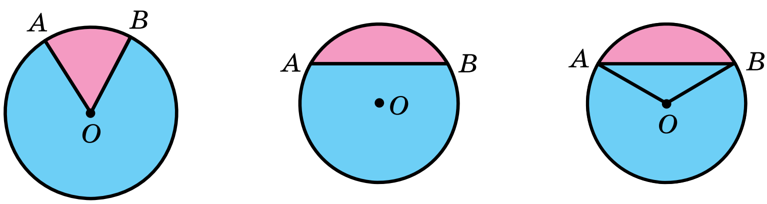
A 7.4. ábrán az OA és OB sugarak a körlapot két részre osztják, melyeket különböző színűre festettek. Ezeket a részeket az OA és az OB sugarakkal együtt **körcikknek** nevezzük.

Érthető, hogy az R sugarú körlapot 360 egyenlő körcikkre is fel lehet osztani, melyek ívei 1°-osak lesznek. Egy-egy ilyen körcikk területe

$\frac{\pi R^2}{360}$. Ekkor az $n°$-os ívhez tartozó körcikk S területe a következő képlettel számítható ki:

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

A 7.5. ábrán az AB húr két részre osztja a körlapot, melyet különböző színnel jelöltek. Ezeket a részeket az AB húrral együtt **körszeletnek** nevezzük. Az AB húrt a **körszelet alapjának** nevezzük.



7.4. ábra 7.5. ábra 7.6. ábra

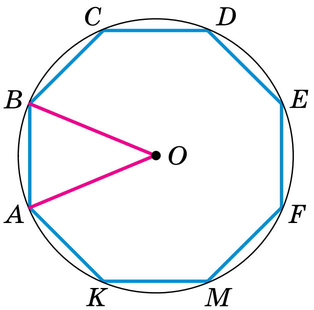
Ahhoz, hogy meghatározzuk a rózsaszínű körszelet (7.6. ábra) területét, a AB húrt tartalmazó körcikkből ki kell vonni az AOB háromszög területét (O a körlap középpontja). Ahhoz, hogy meghatározzuk a kék színű körszelet területét, a AB húrt nem tartalmazó körcikkhez hozzá kell adni az AOB háromszög területét.

Ha az AB húr a körvonal átmérője, akkor a körlapot két körszeletre osztja, melyeket **félkörnek** nevezünk. A félkör S területe az $S = \frac{\pi R^2}{2}$ képlettel határozható meg, ahol R a körlap sugara.

1. feladat. A 25 cm-es sugarú körlap körívének hossza π cm. Határozzátok meg a körív fokmértékét!

Megoldás. Az $l = \frac{\pi R n}{180}$ képletből kifejezve $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Tehát a keresett fokmérték: $n° = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^{\circ} = 7{,}2°$.

Felelet: 7,2°. ◄



7.7. ábra

2. feladat. Az O középpontú, 8 cm sugarú körbe $ABCDEFMK$ szabályos nyolcszöget rajzoltak (7.7. ábra). Határozzátok meg az AB ívet tartalmazó körcikk és körszelet területét!

Megoldás. A szabályos nyolcszög AOB középponti szöge $AOB\angle = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

A keresett körcikk területe $S_{\text{körcikk}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (cm²).

A körszelet területe:

$$S_{\text{körszelet}} = S_{\text{körcikk}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2}OA^2 \sin AOB\angle = \left(8\pi - 16\sqrt{2}\right) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Felelet: 8π cm², $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ cm². ◄

?

1. Milyen arányt jelöl a π?
2. Nevezzétek meg a π századokra kerekített közelítő értékét!
3. Milyen képlettel számítható ki a körvonal hossza?
4. Milyen képlettel számítható ki a körív hossza?
5. Milyen képlettel számítható ki a körlap területe?
6. Magyarázzátok meg, milyen mértani alakzatot nevezünk körcikknek!
7. Milyen képlettel számítható ki a körcikk területe?
8. Magyarázzátok meg, milyen mértani alakzatot nevezünk körszeletnek!
9. Magyarázzátok meg, milyen képlettel számítható ki a körszelet területe!

GYAKORLATOK

7.1.° Határozzátok meg a körvonal hosszát, ha átmérője:
1) 1,2 cm; 2) 3,5 cm!

7.2.° Határozzátok meg a körvonal hosszát, ha sugara:
1) 6 cm; 2) 1,4 m!

7.3.° Határozzátok meg a körlap területét, ha sugara:
1) 4 cm; 2) 14 dm!

7.4.° Határozzátok meg a körlap területét, ha átmérője:
1) 20 cm; 2) 3,2 dm!

7.5.° Határozzátok meg a körlap területét, ha körvonalának hossza *l*!

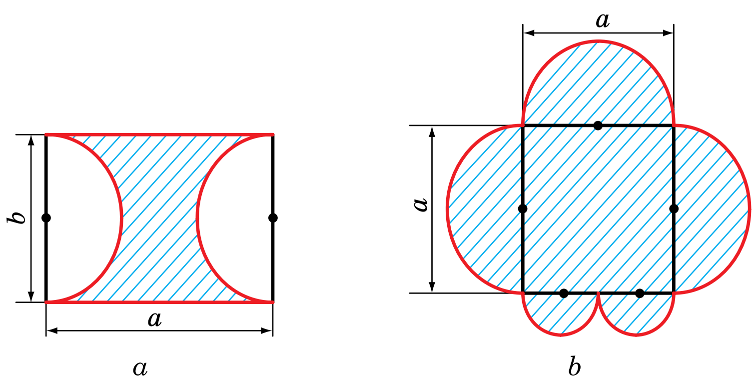
7.6.° Határozzátok meg a farönk keresztmetszetének területét, ha kerülete 125,6 cm!

7.7.° Hogyan változik meg a körvonal hossza, ha sugarát:
1) kétszeresére növeljük; 2) harmadára csökkentjük?

7.8.° A körvonal sugarát 1 cm-rel növelték. Mennyivel növekszik eközben a körvonal hossza?

7.9.° A Föld egyenlítőjének hossza 40 000 000 m. Tekintve, hogy a Föld gömb alakú, számítsátok ki a sugarát kilométerekben!

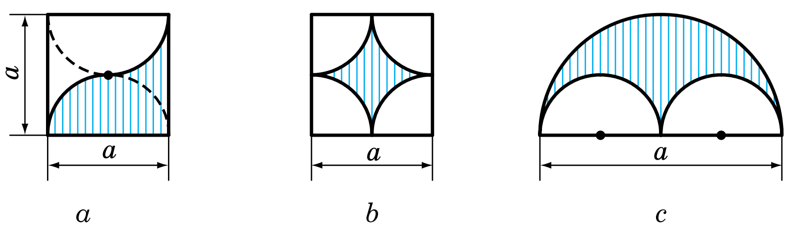
7.10.° Határozzátok meg a 7.8. ábrán látható alakzatok piros vonalainak hosszát!



7.8. ábra

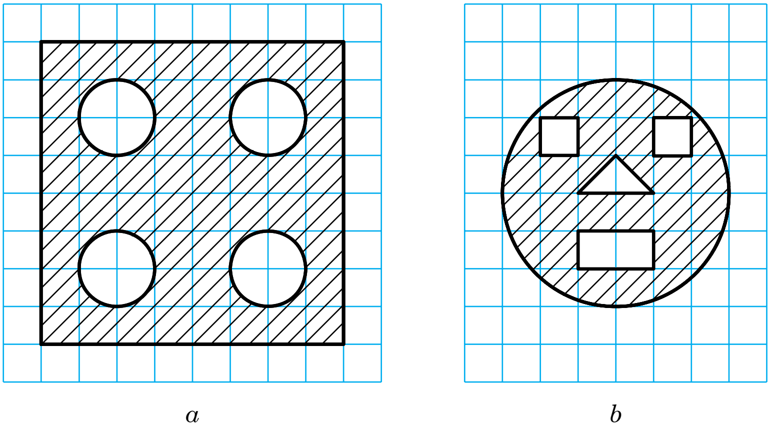
7.11.° Hogyan változik meg a körlap területe, ha a sugarát:
1) 4-szeresére növeljük;
2) 5-ödére csökkentjük?

7.12.° Számítsátok ki a 7.9. ábrán látható alakzatok vonalkázott területeit!



7.9. ábra

7.13.° Számítsátok ki a 7.10. ábrán látható alakzatok vonalkázott területeit, ha a négyzetrács oldala a egység!



7.10. ábra

7.14.° Kétféle palacsintát árulnak: 30 cm-es és 20 cm-es átmérőkkel. Ha a palacsinták egyforma vastagok, akkor a vevő mikor jár jobban: ha egy nagyot, vagy ha két kicsit vásárol?

7.15.° Határozzátok meg az a oldalú szabályos háromszög köré írt körvonal hosszát!

7.16.° Határozzátok meg az a oldalú négyzetbe írt körvonal hosszát!

7.17.° Határozzátok meg az a oldalú négyzet köré írt körvonal hosszát!

7.18.° Határozzátok meg az a oldalú szabályos hatszögbe írt körlap területét!

7.19.° Határozzátok meg az a oldalú szabályos háromszögbe írt körlap területét!

7.20.° Határozzátok meg a körlap területét, ha az a és b oldalú téglalap köré van írva!

7.21.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög köré írt körlap területét, ha a háromszög szára b, az alapnál lévő szöge pedig α!

7.22.° Határozzátok meg a téglalap köré írt körvonal hosszát, ha a téglalap oldala a és ez az oldal az átlóval α szöget alkot!

7.23.° A kör sugara 8 cm. Határozzátok meg a körvonal körívének hosszát, ha ívének fokmértéke:
1) 4°; 2) 18°; 3) 160°; 4) 320°!

7.24.° A kör ívének hossza 12π cm, fokmértéke pedig 27°. Határozzátok meg a kör sugarát!

7.25.° A kör ívének hossza 3π cm, sugara pedig 24 cm. Határozzátok meg a körív fokmértékét!

7.26.° Határozzátok meg a Föld egyenlítőjének azt az ívét, melynek fokmértéke 1°, ha az egyenlítő sugara megközelítőleg 6400 km!

7.27.° A kör sugara 6 cm. Határozzátok meg a körcikk területét, ha a hozzá tartozó ív fokmértéke:

1) 15°; 2) 144°; 3) 280°!

7.28.° A körcikk területe a körlap területének $\frac{5}{8}$ része. Határozzátok meg a körív fokmértékét!

7.29.° A körcikk területe 6π cm². Határozzátok meg e körcikk ívét, ha a kör sugara 12 dm!

7.30.° A körcikk területe $\frac{5\pi}{4}$ cm², a körcikk ívének fokmértéke 75°. Határozzátok meg a körlap sugarát, melynek része az adott körcikk!

7.31.° Lehet-e a körcikk, az adott körlap körszelete is egyben?

7.32.° Határozzátok meg a körszelet területét, ha a kör sugara 5 cm, a körszelet körívének fokmértéke pedig:

1) 45°; 2) 150°; 3) 330°!

7.33.° Határozzátok meg a körszelet területét, ha a kör sugara 2 cm, a körszelet körívének fokmértéke pedig:

1) 60°; 2) 300°!

7.34.• A gépkocsi kerekének átmérője 65 cm. A gépkocsi olyan sebességgel halad, hogy a kereke másodpercenként 6 fordulatot tesz meg. Határozzátok meg a gépkocsi sebességét kilométer per órában! A feleletet tizedekre kerekítsétek!

7.35.• Határozzátok meg annak a körívnek a hosszát, melyet az óra 6 cm-es kismutatója 1 óra alatt tesz meg!

7.36.• Határozzátok meg annak a körívnek a hosszát, melyet az óra 24 cm-es percmutatója 40 perc alatt tesz meg!

7.37.• A kör sugarát a egységgel növelték. Bizonyítsátok be, hogy a körvonal hossza olyan mértékben növekedett, amely az adott kör sugarától független!

7.38.• A háromszög oldala 6 cm, a rajta lévő szögei 50° és 100°. Határozzátok meg azoknak a köríveknek a hosszát, amelyekre az adott háromszög csúcsai osszák a körülírt körvonalat!

7.39.• A háromszög oldala $5\sqrt{3}$ cm, a rajta lévő szögei 35° és 25°. Határozzátok meg azoknak a köríveknek a hosszát, amelyekre az adott háromszög csúcsai osszák a körülírt körvonalat!

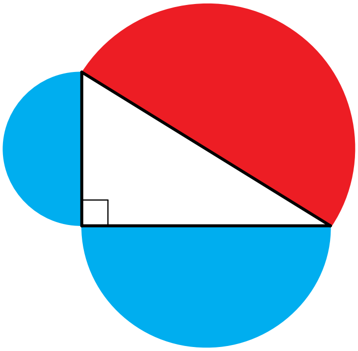
7.40.• Az ABC háromszög ($C\angle = 90°$) AC befogójára, mint átmérőre kört szerkesztettek. Határozzátok meg a háromszöghöz tartozó körív hosszát, ha $A\angle = 24°$, $AC = 20$ cm!

7.41.• Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge 70°. Az alapra bocsátott magassága 27 cm, és erre, mint átmérőre, körvonalat szerkesztettek. Határozzátok meg a háromszögbe tartozó körív hosszát!

7.42.• Az AB szakasz n részre van osztva. Mindegyik részre, mint átmérőre, félköröket szerkesztettek. Ezt a műveletet úgy ismételték meg, hogy az adott szakaszt m részre osztották. Határozzátok meg az első és a második esetben kapott félkörei összegének arányát!

7.43.• Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög átfogójára, mint átmérőre szerkesztett félkör területe (7.11. ábra) egyenlő a befogókra, mint átmérőkre szerkesztett félkörök területének összegével!

7.44.• Két csövet, melynek átmérői 30 cm és 40 cm egy csőre kell kicserélni úgy, hogy az új cső áteresztőképessége[1] megegyezzen a két cső együttes áteresztőképességével. Milyen legyen ennek a csőnek az átmérője?



7.11. ábra

7.45.• Hány százalékkal fog növekedni a körlap területe, ha a sugarát 10%-kal növelik?

7.46.• A körbe egy a oldalú négyzetet írtak. Határozzátok meg a kisebbik körszelet területét, melynek alapja az adott négyzet oldala lesz!

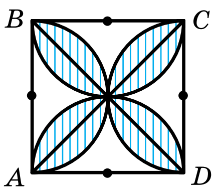
7.47.• Egy kör alakú lemezből a lehető legnagyobb szabályos hatszöget vágjuk ki. Mekkora a hulladék összterülete? Hány százaléka ez a körlemez területének?

[1] A vízvezeték áteresztőképessége a cső keresztmetszetén egységnyi idő alatt átfolyó vízmennyiség.

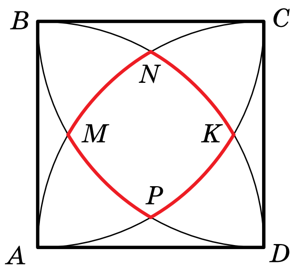
7.48.• A körbe a oldalú szabályos háromszög van írva. Határozzátok meg a kisebbik körszelet területét, melynek alapja a háromszög oldala!

7.49.• Az R sugarú körcikkbe, melynek középponti szöge 60°, körlap van írva. Határozzátok meg a körlap területét!

7.50.•• Határozzátok meg a 7.12. ábrán látható alakzat vonalkázott részének területét, ha az $ABCD$ négyzet oldala a!

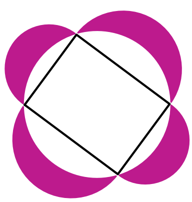


7.12. ábra

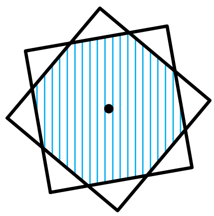


7.13. ábra

7.51.•• Az $ABCD$ négyzet csúcsaiból négy, a négyzet oldalával egyenlő sugarú körív megszerkesztése után a 7.13. ábrán látható piros színnel jelölt alakzatot kaptuk. Határozzátok meg a piros vonal hosszát, ha a négyzet oldala a!



7.14. ábra



7.15. ábra

7.52.•• (Hippokratész feladata). A téglalap köré kört írtak, és minden oldala fölé félköröket szerkesztettek (7.14. ábra). Bizonyítsátok be, hogy a színezett részek (Hippokratész holdjai) területeinek összege a téglalap területével egyenlő!

7.53.•• Két, 1 cm oldalhosszúságú négyzetnek közös a középpontja (7.15. ábra). Bizonyítsátok be, hogy a közös részük területe nagyobb mint $\frac{3}{4}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

7.54. Határozzátok meg a rombusz oldalát, ha a magassága 6 cm és az oldala az egyik átlóval 15°-os szöget alkot!

7.55. Az $ABCD$ téglalap A szögének szögfelezője a BC oldalát BM és MC szakaszokra osztja, melyek hosszai megfelelően 10 cm és 14 cm. Milyen hosszú szakaszokra osztja ez a szögfelező a rombusz átlóját?

7.56. A trapéz nagyobbik alapjánál lévő szögek összege 90°. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz alapjai felezőpontjainak távolsága az alapok különbségének felével egyenlő!

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

7.57. Mivel egyenlő a koordinátaegyenesre illeszkedő A és B pontok közötti távolság, ha:
1) A (3) és B (7);
2) A (–2) és B (4);
3) A (–2) és B (–6);
4) A (a) és B (b)?

7.58. Rajzoljátok meg a koordinátasíkon az AB szakaszt, határozzátok meg a rajz alapján a szakasz felezőpontját, és hasonlítsátok össze az A és B pontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével:
1) A (–1; –6), B (5; –6);
2) A (3; 1), B (3; 5);
3) A (3; –5), B (–1; 3)!

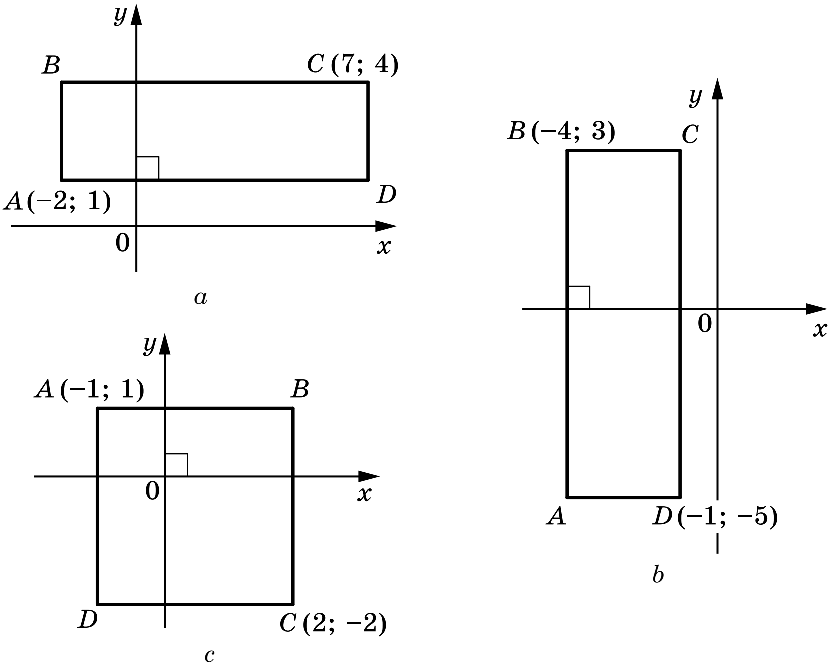
7.59. Szerkesszetek a koordinátasíkon egy ABC háromszöget, és határozzátok meg az oldalait, ha A (5; –1), B (–3; 5), C (–3; 1)!

7.60. Melyik koordinátanegyedben helyezkedik el a pont:
1) A (3; –4); 2) B (–3; 1); 3) C (–4; –5); 4) D (1; 9)?

7.61. Melyik koordinátanegyedben helyezkedik el az M pont, ha:
1) az abszcisszája pozitív, ordinátája negatív;
2) az abszcisszájának és ordinátájának szorzata negatív;
3) az abszcisszája és az ordinátája negatív?

7.62. Mit lehet mondani az A pont koordinátáiról, ha:
1) az A pont az abszcisszatengelyhez illeszkedik;
2) az A pont az ordinátatengelyhez illeszkedik;
3) az A pont a negyedik negyed szögfelezőjéhez illeszkedik;
4) az A pont a harmadik negyed szögfelezőjéhez illeszkedik;
5) az A pont az első negyed szögfelezőjéhez illeszkedik?

7.63. Nevezzétek meg az $ABCD$ téglalap csúcsainak koordinátáit (7.16. ábra)!



7.16. ábra

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

7.64. A síkon jelöltek néhány pontot. Néhányat közülük pirosra színeztek, a többit pedig kékre. Ismert, hogy mindegyik színű pontból legalább három van, és bármelyik három egyszínű pont nem egy egyenesre illeszkedik. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen három egyszínű pont egy olyan háromszög csúcsai, melynek oldalára csak legfeljebb két másik színű pont illeszkedhet!

2. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Határozzátok meg a szabályos sokszög oldalainak számát, ha a sokszög szöge 170°!

A) 30; C) 36;
B) 32; D) ilyen sokszög nem létezik.

2. Mivel egyenlő a szabályos tízszög középponti szöge?

A) 18°; B) 36°; C) 144°; D) 10°.

3. Milyen legnagyobb középponti szöge lehet a szabályos sokszögnek?

A) 90°; C) 150°;
B) 120°; D) nem lehet megállapítani.

4. A körbe egy szabályos a oldalú hatszöget írtak. Határozzátok meg e kör köré írt szabályos háromszög oldalát!

A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $a\sqrt{3}$; D) $2a\sqrt{3}$.

5. Mivel egyenlő a szabályos hatszögbe írt körvonal sugara, ha a hatszög legkisebb átlója 12 cm?

A) 6 cm; B) $6\sqrt{3}$ cm; C) $2\sqrt{3}$ cm; D) 12 cm.

6. Határozzátok meg a 4 cm sugarú körvonal körívének hosszát, ha fokmértéke 207°!

A) 23 cm; B) 4,6 cm; C) 23π cm; D) $4{,}6\pi$ cm.

7. A kör területének hányad részét képezi annak a körcikknek a területe, melynek a középponti szöge 140°?

A) $\frac{7}{9}$; B) $\frac{7}{12}$; C) $\frac{7}{15}$; D) $\frac{7}{18}$.

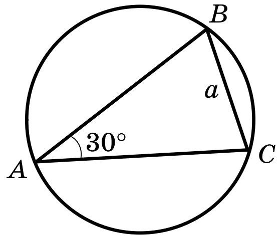
8. A körbe írt 40°-os szög egy 8 cm-es ívre támaszkodik. Mekkora az adott körvonal hossza?

A) 72 cm; B) 72π cm; C) 36 cm; D) 36π cm.

9. Milyen hosszú az R sugarú körvonal húrja, ha a húr végpontjaival megadott ívek hosszának aránya 2 : 1?

A) R; B) $2R$; C) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; D) $R\sqrt{3}$.

10. A rajzon egy körbe írt ABC háromszög látható, melyben $A\angle = 30°$, $BC = a$. Mivel egyenlő annak a körszeletnek a területe, melynek alapja a BAC ívet köti össze?



A) $\dfrac{a^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

B) $\dfrac{a^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

C) $\dfrac{a^2\left(10\pi + 3\sqrt{3}\right)}{12}$;

D) $\dfrac{a^2\left(10\pi - 3\sqrt{3}\right)}{12}$.

11. Az ABC háromszögben adott, hogy $A\angle = 20°$, $C\angle = 30°$, $AC = 14$ cm. Az A középpontú körvonal érinti a BC egyenest. Számítsátok ki az ABC háromszöghöz tartozó körív hosszát!

A) $\dfrac{7\pi}{18}$ cm; B) $\dfrac{7\pi}{9}$ cm; C) $\dfrac{7\pi}{12}$ cm; D) $\dfrac{7\pi}{6}$ cm.

12. A szabályos sokszög köré írt körvonal sugara $6\sqrt{3}$ cm, a beírt kör sugara pedig 9 cm. Hány oldalú ez a sokszög?

A) 6; B) 12; C) 9; D) 18.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Szabályos sokszög

A sokszöget szabályosnak nevezzük, ha minden oldala és minden szöge egyenlő.

Szabályos sokszög tulajdonságai

- A szabályos sokszög domború sokszög.
- Bármilyen szabályos sokszög egyszerre lesz körbe írt és kör köré írt is, és a beírt és a körülírt körvonalainak középpontjai egybeesnek.

A szabályos sokszög körülírt köre és a beírt köre sugarának meghatározására szolgáló képletek

A szabályos n oldalú sokszög oldalainak száma	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
A körülírt kör sugara	$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
A beírt kör sugara	$r_n = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

A körvonal hossza

$C = 2\pi R$

Az n°-os ív hossza

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

A körlap területe

$S = \pi R^2$

Az n°-os ívet tartalmazó körcikk területe

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

DESCARTES-FÉLE KOORDINÁTÁK A SÍKON 3.§.

Ennek a paragrafusnak a tananyagát elsajátítva szélesíteni fogjátok a koordinátasíkról szóló ismereteiteket.

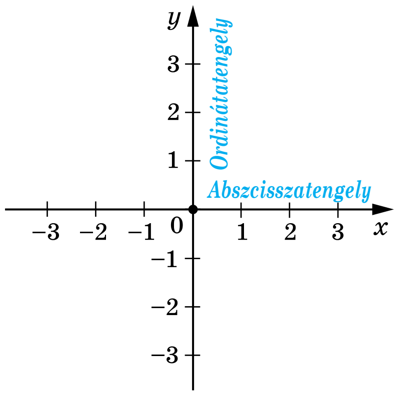
Megtanuljátok meghatározni a szakasz hosszát, illetve felezőpontjának koordinátáit a végpontjai koordinátáinak ismeretében.

Elképzeléseket szereztek az alakzatok egyenleteiről, megismeritek az egyenes és a kör egyenletének levezetését.

Megismerkedtek a koordináta-módszerrel, amely lehetőséget ad a geometriai feladatok megoldására algebrai módszerek alkalmazásával.

8. Két pont közötti távolság, ha ismeretesek a pontok koordinátái. A szakasz felezőpontjának koordinátái

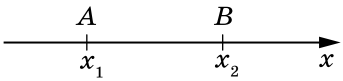
A 6. osztályban megismerkedtetek a koordinátasíkkal, vagyis az olyan síkkal, melyen két egymásra merőleges koordinátaegyenes (abszcisszatengely és ordinátatengely) helyezkedik el közös kezdőponttal (8.1. ábra). Már ábrázolni tudjátok rajta az ismert koordinátájú pontokat, és fordítva, meg tudjátok határozni a koordinátasíkon ábrázolt pontnak a koordinátáit.



8.1. ábra

Az x (abszcissza) és y (ordináta) tengelyeket tartalmazó koordinátasíkot az ***xy* síknak** nevezzük.

Az xy síkon lévő pont koordinátáit **Descartes-féle koordinátáknak** nevezzük, a nagy francia matematikus, René Descartes tiszteletére (lásd a 101. oldalon lévő értekezést).



8.2. ábra

Már tudjátok azt, hogyan kell meghatározni a koordinátatengelyen adott koordinátával rendelkező két pont távolságát. Az $A\,(x_1)$ és $B\,(x_2)$ pontokra (8.2. ábra) a következőképpen történik:

$$AB = |\,x_2 - x_1\,|.$$

Megtanuljuk, hogy az xy koordinátasíkon hogyan lehet meghatározni az $A\,(x_1;\,y_1)$ és $B\,(x_2;\,y_2)$ végpontú szakasz hosszát, amikor az AB szakasz nem párhuzamos egyik koordinátatengellyel sem (8.3. ábra).

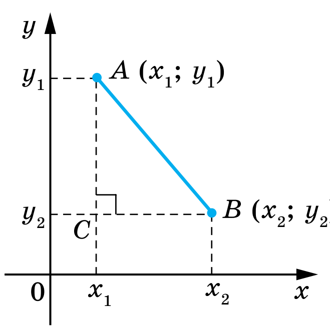
Az A és B pontokon át merőlegeseket bocsátunk a koordinátatengelyekre. Az ACB derékszögű háromszöget kapjuk, melyben $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Ebből azt kapjuk, hogy $AB^2 = BC^2 + AC^2 =$ $= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Tehát az $A\,(x_1;\,y_1)$ és $B\,(x_2;\,y_2)$ végpontú szakasz hosszának képletét így lehet felírni:

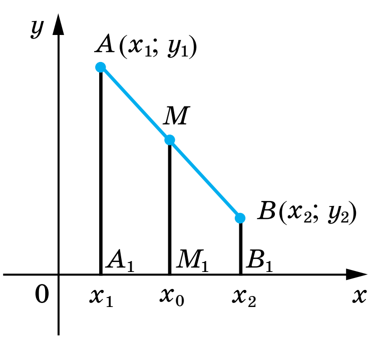
$$\boxed{\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}}$$

Önállóan bizonyítsátok be, hogy ez a képlet akkor is igaz, ha az AB szakasz merőleges valamelyik koordinátatengelyre.

Legyenek az $A\,(x_1;\,y_1)$ és $B\,(x_2;\,y_2)$ pontok az xy koordinátasík pontjai. Meghatározzuk a M pont $(x_0;\,y_0)$ koordinátáit, ahol M az AB szakasz felezőpontja lesz.



8.3. ábra



8.4. ábra

Azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor az AB szakasz nem merőleges az egyik koordinátatengelyre sem (8.4. ábra). Legyen $x_2 > x_1$ (az $x_2 < x_1$ eset vizsgálata hasonlóan történik). Az A, B és M pontokon át merőleges egyeneseket bocsátunk az abszcisszatengelyre, amelyek ezt a tengelyt megfelelően az A_1, M_1 és B_1 pontokban metszik. Thalész tételéből következik, hogyha $A_1M_1 = M_1B_1$, akkor $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Mivel $x_2 > x_0 > x_1$, ezért fel lehet írni, hogy $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

A szakasz felezőpontjának koordinátáit megadó képlet akkor is teljesülni fog, ha az AB szakasz merőleges valamelyik koordinátatengelyre. Bizonyítsátok ezt be önállóan.

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az a háromszög, ahol a csúcsainak koordinátái A (–1; 7), B (1; 3) és C (5; 5), egyenlő szárú derékszögű háromszög lesz!

Megoldás. Alkalmazva a szakasz hosszának képletét, meghatározzuk a háromszög oldalainak hosszát:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Tehát az $AB = BC$, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

Mivel $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, ezért az ABC háromszög derékszögű is egyben. ◀

2. feladat. Az M (2; –5) pont az AB szakasz felezőpontja, A (–1; 3). Határozzátok meg a B pont koordinátáit!

Megoldás. Megjelöljük a B pont koordinátáit: $(x_B; y_B)$, az A pont koordinátáit: $(x_A; y_A)$, az M pont koordinátáit: $(x_M; y_M)$.

Mivel $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_M$, ekkor $\dfrac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Ehhez hasonlóan $\dfrac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\dfrac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Felelet: B (5; –13). ◀

3. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög, melynek csúcsai A (2; –1), B (1; 3), C (–3; 2) és D (–2; –2) pontok, ez téglalap!

Megoldás. Legyen M pont az AC átló felezőpontja. Ekkor

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5.$$

Tehát M (–0,5; 0,5).

Legyen K pont a BD átló felezőpontja. Ekkor

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5; \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0{,}5.$$

Tehát K (–0,5; 0,5).

Vagyis az M és K pontok egybeesnek, tehát az $ABCD$ négyszög átlóinak közös felezőpontja van. Ebből következik, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

Meghatározzuk a paralelogramma átlóit:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Tehát az $ABCD$ paralelogramma átlói egyenlők. Ebből következik, hogy ez a paralelogramma téglalap lesz. ◀

?

1. Hogyan lehet meghatározni két pont közötti távolságot ismert koordinátáik alapján?
2. Hogyan lehet meghatározni a szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha adottak a szakasz végpontjainak koordinátái?

GYAKORLATOK

8.1.° Határozzátok meg az A és B pontok közötti távolságot, ha adottak:
1) A (10; 14), B (5; 2); 2) A (–1; 2), B (4; –3)!

8.2.° Határozzátok meg a C és D pontok közötti távolságot, ha adottak:
1) C (–2; –4), D (4; –12); 2) C (6; 3), D (7; –1)!

8.3.° A háromszög csúcsai A (–1; 3), B (5; 9), C (6; 2). Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

8.4.° Bizonyítsátok be, hogy az M (0; –1) pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja, ha A (6; –9), B (–6; 7), C (8; 5)!

8.5.° Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög B és C szögei egyenlők, ha A (5; –7), B (–3; 8), C (–10; –15)!

8.6.° Határozzátok meg a BC szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha:
1) B (5; 4), C (3; 2); 2) B (–2; –1), C (–1; 7)!

8.7.° A C pont az AB szakasz felezőpontja. Határozzátok meg a B pont koordinátáit, ha:
1) A (3; –4), C (2; 1); 2) A (–1; 1), C (0,5; –1)!

8.8.° A K pont az AD szakasz felezőpontja. Töltsétek ki a táblázatot!

Pont	A pont koordinátái		
A	(–3; 1)	(–8; 2)	
D	(–1; –3)		(–9; 2)
K		(–4; 6)	(1; 2)

8.9.° Határozzátok meg a háromszög BM súlyvonalának hosszát, ha adottak a háromszög csúcsai A (3; –2), B (2; 3) és C (7; 4)!

8.10.° Adottak az A (–2; 4) és B (2; –8) pontok. Határozzátok meg a koordináta-rendszer kezdőpontja és az AB szakasz felezőpontja közötti távolságot!

8.11.• Bizonyítsátok be, hogy a háromszög derékszögű, ha csúcsai az A (2; 7), B (–1; 4) és C (1; 2) pontok!

8.12.• Az A (–1; 2) és B (7; 4) pont a derékszögű háromszög csúcsai. Lehet-e a harmadik csúcsának a koordinátái:
1) (7; 2); 2) (2; –3)?

8.13.• Egy egyeneshez illeszkednek-e a következő pontok:
1) A (–2; –7), B (–1; –4) és C (5; 14);
2) D (–1; 3), E (2; 13) és F (5; 21)?
Amennyiben igen a felelet, akkor azt is mondjátok meg, hogy melyik fekszik a másik kettő között!

8.14.• Bizonyítsátok be, hogy az M (–4; 5), N(–10; 7) és K (8; 1) egy egyeneshez illeszkednek, és állapítsátok meg, hogy melyik fekszik a másik kettő között!

8.15.• Az x mely értékénél lesz a C (3; 2) és D (x; –1) pontok között a távolság 5?

8.16.• Az abszcisszatengelyen határozzátok meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz az A (–1; –1) és B (2; 4) ponttól!

8.17.• Az ordinátatengelyen határozzátok meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz a D (–2; –3) és E (4; 1) ponttól!

8.18.• Határozzátok meg annak a pontnak a koordinátáit, amely az AB szakaszt 1 : 3 arányban osztja, ha A (5; –3) és B (–3; 7)! A számolást az A ponttól kezdjük.

8.19.• Az $ABCD$ négyszög paralelogramma, A (–5; 1), B (–4; 4), C (–1; 5). Határozzátok meg a D csúcs koordinátáit!

8.20.• Az $ABCD$ négyszög paralelogramma, A (–2; –2), C (4;1), D (–1; 1). Határozzátok meg a B csúcs koordinátáit!

8.21.• Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ha csúcsai A (–2; 8), B (3; –3), C (6; 2) és D (1; 13)!

8.22.• Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög rombusz, ha csúcsai A (–3; –2), B (–1; 2), C (1; –2) és D (–1; –6)!

8.23.• Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet, ha csúcsai A (–2; 6), B (–8; –2), C (0; –8) és D (6; 0)!

8.24.• A D (1; 4) és az E (2; 2) pontok megfelelően az ABC háromszög AC és BC oldalainak felezőpontjai. Határozzátok meg az A és C pontok koordinátáit, ha adott a B (–3; –1)!

8.25.• Határozzátok meg annak a szakasznak a hosszát, melynek végpontjai a koordinátatengelyekhez illeszkednek, és felezőpontja az M (–3; 8) pont lesz!

8.26.•• Határozzátok meg az ABC egyenlő oldalú háromszög C csúcsának koordinátáit, ha A (2; –3) és B (–2; 3)!

8.27.•• Határozzátok meg a DEF egyenlő oldalú háromszög E csúcsának koordinátáit, ha D (–6;0) és F (2; 0)!

8.28.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = BC$, A (5; 9) C (1; –3), a B pont koordinátáinak abszolút értékei egyenlők. Határozzátok meg a B pont koordinátáit!

8.29.•• Határozzátok meg az abszcisszatengelyhez illeszkedő összes olyan C pont koordinátáit, ha az ABC háromszög egyenlő szárú, valamint az A (1; 1), B (2; 3)!

8.30.•• Határozzátok meg az ordinátatengelyhez illeszkedő összes olyan B pont koordinátáit, ha az ABC háromszög derékszögű, valamint az A (1; 3), B (3; 7)!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

8.31. Az ABC háromszögben adott, hogy $C\angle = 90°$, $AB = 9$ cm, $BC = 3$ cm. Az AB átfogón jelöljetek egy M pontot úgy, hogy $AM : MB = 1 : 2$. Határozzátok meg a CM szakasz hosszát!

8.32. Határozzátok meg a rombusz szögeit, ha az egy csúcsból induló magassága és átlója által bezárt szög mértéke 28°!

8.33. Az $ABCD$ paralelogramma BD átlója 24 cm, az E pont pedig a BC oldal felezőpontja. Határozzátok meg azokat a szakaszokat, melyekre az AE egyenes osztja a BD átlót!

FELKÉSZÜLTÜNK AZ ÓRÁKHOZ

8.34. Az A (1; –6) pont a körvonal középpontja, a B (10; 6) pont pedig a körvonal egy pontja. Mivel egyenlő a kör sugara?

8.35. A CD szakasz a kör átmérője. Határozzátok meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát, ha C (6; –4), D (–2; 10)!

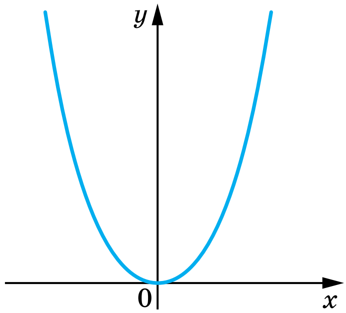
8.36. Milyen alakzat lesz az egyenlet grafikonja:

1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

9. Az alakzat egyenlete. A körvonal egyenlete

A 7. osztályos algebrából már tudjátok, hogy milyen alakzatot nevezünk az egyenlet grafikonjának. Ebben a pontban az alakzat egyenletével fogtok megismerkedni.

A 9.1. ábrán látható parabola minden pontjának $(x; y)$ koordinátái megoldásai lesznek az $y = x^2$ egyenletnek. És fordítva, az $y = x^2$ kétváltozós egyenlet minden megoldása az ehhez a parabolához illeszkedő pontoknak a koordinátái lesznek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a 9.1. ábrán látható parabola egyenletének az $y = x^2$ felel meg.



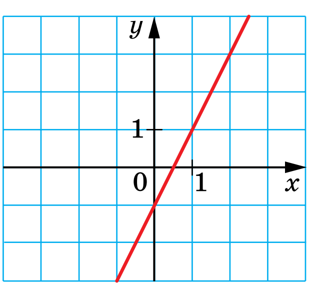
9.1. ábra

M e g h a t á r o z á s. ***Az xy síkon az F alakzat egyenletének azt az x és y kétváltozós egyenletet nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:***

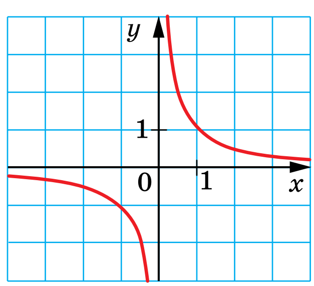
1) **ha a pont illeszkedik az *F* alakzathoz, akkor a koordinátái igazzá teszik az egyenletet;**
2) **az adott egyenlet bármilyen $(x; y)$ megoldásai az *F* alakzathoz illeszkedő pont koordinátái lesznek.**

A 9.2. ábrán látható egyenes egyenlete az $y = 2x - 1$, a 9.3. ábrán látható hiperbola egyenlete pedig $y = \frac{1}{x}$. Az $y = 2x - 1$ és az $y = \frac{1}{x}$ egyenletek megfelelően egy egyenest és hiperbolát **adnak meg** vagy **írnak le**.

Ha az adott egyenlet az *F* alakzat egyenlete, akkor ezt az alakzatot úgy is vizsgálhatjuk, mint azon pontok mértani helye (PMH), melyek igazzá teszik az adott egyenletet.

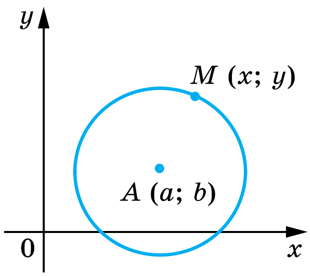


9.2. ábra

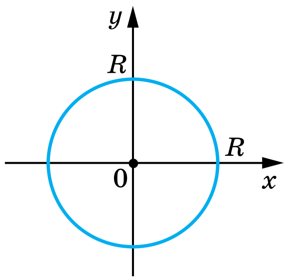


9.3. ábra

A fenti gondolatmenet alkalmazásával levezetjük az R sugarú és A $(a; b)$ középpontú körvonal egyenletét.



9.4. ábra



9.5. ábra

Legyen M $(x; y)$ az adott kör egy tetszőleges pontja (9.4. ábra). Ekkor $AM = R$. Alkalmazva a pontok közötti távolság képletét, kapjuk: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$. Innen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Bebizonyítottuk, hogy az adott kör tetszőleges M pontjának $(x; y)$ koordinátái megoldásai az (*) egyenletnek. Most igazoljuk, hogy az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ egyenlet bármilyen megoldása az adott körvonalhoz tartozó pontok koordinátái lesznek.

Legyen az $(x_1; y_1)$ tetszőleges megoldása az (*) egyenletnek. Ekkor $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$. Innen $\sqrt{(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2} = R$.

Ez az egyenlet azt bizonyítja, hogy az $N(x_1; y_1)$ pont a körvonal A $(a; b)$ koordinátájú középpontjától a körvonal sugarával egyenlő távolságra lesz, tehát $N(x_1; y_1)$ a körvonalhoz illeszkedik.

Tehát bebizonyítottuk a következő tételt.

9.1.tétel. ***Az R sugarú és A (a; b) középpontú körvonal egyenlete:***

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

Igaz a következő állítás: *bármely $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ alakú egyenlet, ahol a, b és R tetszőleges számok, és $R > 0$, egy olyan R sugarú körvonal egyenlete, melynek középpontja az $(a; b)$ koordinátájú pont.*

Ha a körvonal középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja (9.5. ábra), akkor $a = b = 0$. Ebben az esetben a körvonal egyenlete így alakul:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

1. feladat. Adjátok meg annak a körvonalnak az egyenletét, melynek átmérője az AB szakasz, ha A (–5; 9), B (7; –3)!

Megoldás. Mivel a körvonal középpontja egyszersmind átmérőjének felezőpontja, ezért a C középpont (a; b) koordinátáit a következő képlettel adjuk meg:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Tehát C (1; 3).

A körvonal R sugara az AC szakasz hossza. Ekkor $R^2 = (1+5)^2 + (3-9)^2 = 72$.

Tehát a keresett egyenlet:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72.$$

Felelet: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 72$. ◀

2. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ egy körvonal egyenlete! Határozzátok meg a körvonal középpontját és sugarát!

Megoldás: Az adott egyenletet $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ alakban adjuk meg:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$
$$(x+3)^2 + (y-7)^2 = 8.$$

Tehát az adott egyenlet egy olyan körvonal egyenlete, melynek középpontja (–3; 7), sugara $2\sqrt{2}$.

Felelet: (–3; 7), $2\sqrt{2}$. ◀

3. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az a háromszög, melynek csúcsai A (–2; –3), B (1; 3) és C (5; 1) derékszögű, és határozzátok meg az ABC háromszög köré írt körvonalának egyenletét!

Megoldás: Meghatározzuk az adott háromszög oldalhosszainak négyzetét:

$$AB^2 = (1+2)^2 + (3+3)^2 = 45;$$
$$AC^2 = (5+2)^2 + (1+3)^2 = 65;$$
$$BC^2 = (5-1)^2 + (1-3)^2 = 20.$$

Mivel $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ezért az adott háromszög derékszögű, melynek derékszöge a B csúcsnál van. A körülírt kör sugara az AC átfogó felezőpontja lesz, vagyis az (1,5; –1) pont, sugara pedig az $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Tehát a keresett körvonal egyenlete a következő alakban írható fel:

$$(x-1,5)^2 + (y+1)^2 = \frac{65}{4}.$$

Felelet: $(x-1,5)^2 + (y+1)^2 = \frac{65}{4}$. ◀

?

1. Mit nevezünk az xy síkon megadott alakzat egyenletének?
2. Írjátok le az $(a; b)$ középpontú és R sugarú körvonal egyenletét!
3. Írjátok le annak a körvonalnak az egyenletét, melynek középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, sugara pedig R?

GYAKORLATOK

9.1.° Határozzátok meg a körvonal egyenlete alapján a középpontját és a sugarát:

1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 = 7$;
4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$!

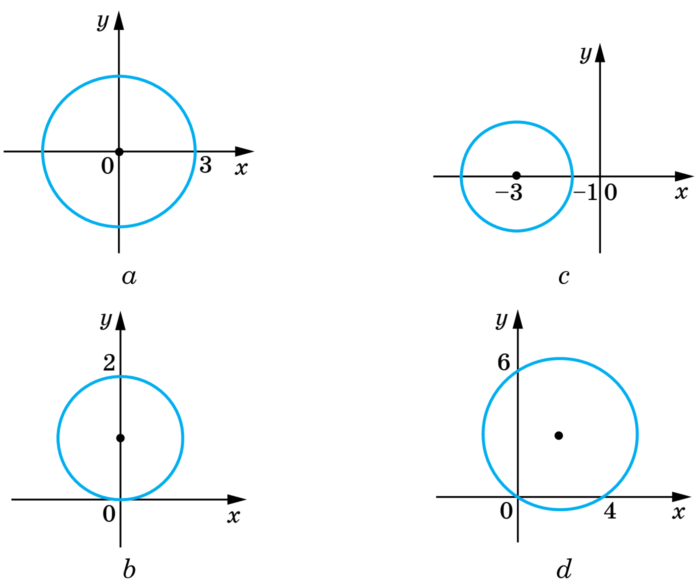
9.2.° Állítsátok fel a körvonal egyenletét, ha adott az A középpontjának koordinátái és az R sugara:

1) $A\ (3; 4)$, $R = 4$;
2) $A\ (-2; 0)$, $R = 1$;
3) $A\ (7; -6)$, $R = \sqrt{2}$;
4) $A\ (0; 5)$, $R = \sqrt{7}$.

9.3.° Állítsátok fel a körvonal egyenletét, ha adott a B középpontjának koordinátái és az R sugara:

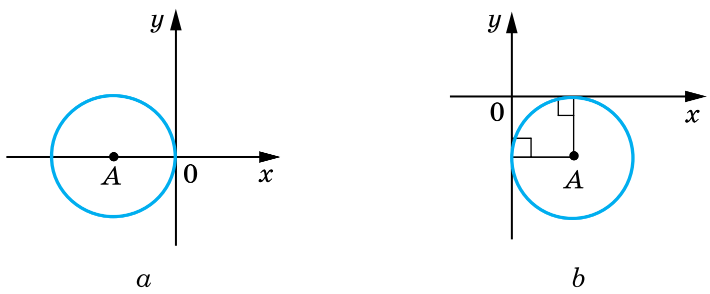
1) $B\ (-1; 9)$, $R = 9$;
2) $B\ (-8; -8)$, $R = \sqrt{3}$.

9.4.° Határozzátok meg a 9.6. ábrán látható körvonalak középpontjának koordinátáit, illetve sugarát, és írjátok fel ezeknek a körvonalaknak az egyenletét!



9.6. ábra

9.5.° Adott az A középpontú és 4 egység sugarú körvonal (9.7. ábra). Állítsátok fel a körvonal egyenletét!



9.7. ábra

9.6.° Szerkesszétek meg a koordinátasíkon azt a körvonalat, melynek egyenlete:
1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$!

9.7.° Szerkesszétek meg a koordinátasíkon az $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ egyenletű körvonalat!

9.8.° A körvonal az $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$ egyenlettel van megadva. Állapítsátok meg, hogy az A (–3; 0), B (–5; –2), C (1; 0), D (–4; 3), E (–7; –3), F (–9; 0) pontok közül melyik illeszkedik: 1) a körvonalhoz; 2) a körvonal középső részéhez (körlap belsejéhez); 3) a körvonalon kívül van!

9.9.° Az $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ körvonalhoz illeszkedik-e a következő pont:
1) A (8; –8); 2) B (6; –9); 3) C (–3; 7); 4) D (–4; 6)?

9.10.° Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, melynek középpontja az M (–3; 1) pont és a K (–1; 5) ponton illeszkedik rá!

9.11.° Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, melynek átmérője az AB szakasz, ha A (2; –7), B (–2; 3)!

9.12.• Bizonyítsátok be, hogy az AB szakasz az $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$ körvonal átmérője, ha A (1; –5), B (9; –3)!

9.13.• Bizonyítsátok be, hogy a CD szakasz az $x^2 + (y - 9)^2 = 169$ körvonal húrja, ha C (5; –3), D (–12; 4)!

9.14.• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, melynek középpontja a P (–6; 7) pont, és érinti az ordinátatengelyt!

9.15.• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, melynek középpontja az $y = -5$ egyenletű egyeneshez illeszkedik, és az abszcisszatengelyt az S (2; 0) pontban érinti!

9.16.• Hány olyan körvonal létezik, amelyre a (3; 5) pont illeszkedik, sugara $3\sqrt{5}$-tel egyenlő és a középpontja illeszkedik az ordinátatengelyhez? Írjátok fel valamennyi ilyen kör egyenletét!

9.17.• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amelyhez az A (–4; 1) és a B (8; 5) pontok illeszkednek, a középpontja pedig az abszcisszatengelyen van!

9.18.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$ körvonal:
1) érinti az ordinátatengelyt;
2) metszi az abszcisszatengelyt;
3) nincs közös pontja az $y = 10$ egyenletű egyenessel!

9.19.•• Állapítsátok meg, hogy az adott egyenlet körvonal egyenlete lesz-e? Ha igen, akkor adjátok meg az adott kör középpontjának koordinátáit és sugarát:
1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$!

9.20.•• Bizonyítsátok be, hogy az adott egyenlet egy körvonal egyenlete, és állapítsátok meg középpontjának koordinátáit, valamint az R sugarát:
1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

9.21.•• Bizonyítsátok be, hogy a háromszög, melynek csúcsai az A (–1; –2), B (–1; 2), C (5; 2) pontok derékszögű háromszög, és írjátok fel e háromszög köré írt körvonal egyenletét!

9.22.•• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amelynek sugara 5 egység, és a C (–1; 5) és D (6; 4) pontok illeszkedjenek erre a körvonalra!

9.23.•• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amelynek sugara $\sqrt{10}$ egység, és az M (–2; 1) és K (–4; –1) pontok illeszkedjenek erre a körvonalra!

9.24.•• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amely érinti a koordinátatengelyeket, és az $y = -4$ egyenest!

9.25.•• Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amely érinti a koordinátatengelyeket, és az $x = 2$ egyenest!

9.26.* Állítsátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amelyhez a következő pontok illeszkednek:
1) A (–3; 7), B (–8, 2), C (–6, –2);
2) M (–1; 10), N (12; –3), K (4; 9)!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

9.27. Az $ABCD$ paralelogramma B szögének szögfelezője az AD oldalát egy E pontban metszi, $AB = BE = 12$ cm, $ED = 18$ cm. Határozzátok meg a paralelogramma területét!

9.28. A téglalap csúcsából az átlójára bocsátott merőleges az átlót egy 9 cm és egy 16 cm-es szakaszra osztja. Határozzátok meg a téglalap kerületét!

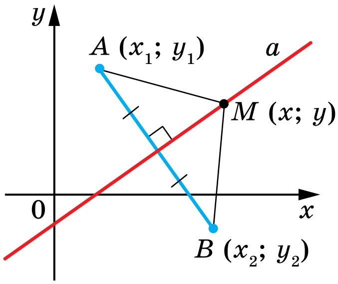
9.29. Az egyenlő szárú trapézba egy 12 cm-es sugarú kör van írva. Az egyik szárat az érintési pont két szakaszra osztja, melyek közül az egyik 16 cm. Határozzátok meg a trapéz területét!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

9.30. A síkon egy A és B pont van jelölve. Csak körzőt alkalmazva, szerkesszetek egy olyan C pontot, hogy a B pont az AC szakasz felezőpontja legyen!

10. Az egyenes egyenlete

Az előző pontban úgy vizsgáltuk a körvonalat, mint azon pontok mértani helyét (PMH), melyek egy adott ponttól egyenlő távolságra lesznek, és az egyenletét is levezettük. Az egyenes egyenletének levezetése során úgy tekintünk rá, mint azon PMH, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra lesznek.



10.1. ábra

Legyen a az adott egyenes. Úgy választjuk ki az A $(x_1; y_1)$ és B $(x_2; y_2)$ pontokat, hogy az a egyenes az AB szakasz felezőmerőlegese legyen (10.1. ábra).

Legyen M $(x; y)$ az a egyenes egy tetszőleges pontja. Ekkor a szakasz felezőmerőlegesének tulajdonsága alapján teljesül az $MA = MB$ egyenlőség, vagyis

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Igazoltuk, hogy az a egyenes tetszőleges M pontjának $(x; y)$ koordinátái megoldásai az (*) egyenletnek.

Most bizonyítjuk, hogy az (*) egyenlet bármely megoldása az a egyenesre illeszkedő pont koordinátái is egyben.

Legyen $(x_0; y_0)$ az (*) egyenlet bármilyen megoldása.

Ekkor teljesül az $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$ egyenlőség. Ez az egyenlőség viszont azt jelenti, hogy az N $(x_0; y_0)$ pont egyenlő távolságra lesz az A $(x_1; y_1)$ és B $(x_2; y_2)$ pontoktól, tehát az N pont az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. Vagyis az a egyenesre.

Ily módon bizonyítottuk, hogy az (*) egyenlet az adott a egyenes egyenlete lesz.

A 7. osztályos algebra tananyagából már tudjátok, hogy az egyenes egyenletének jóval egyszerűbb alakja is van, mégpedig: $ax + by = c$, ahol az a, b és c tetszőleges számok, emellett az a és b egyszerre nem lehet egyenlő nullával.

Négyzetre emeljük az (*) egyenlet mindkét oldalát: $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$.

Felbontjuk a zárójeleket, és összevonjuk az egynemű összeadandókat. Ekkor a következőt fogjuk kapni:

$$2\,(x_2 - x_1)\,x + 2\,(y_2 - y_1)\,y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Elvégezve a $2\,(x_2 - x_1) = a$, $2\,(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$ helyettesítéseket, az $ax + by = c$ egyenletet kapjuk.

Mivel az $A\,(x_1; y_1)$ és $B\,(x_2; y_2)$ különböző pontok, ezért az $x_2 - x_1$ és az $y_2 - y_1$ különbségek közül legalább az egyik nem lesz 0. Tehát az a és b egyszerre nem egyenlő nullával.

Ily módon a következő tételt bizonyítottuk be:

10.1. tétel. ***Az egyenes egyenlete a következő alakban írható fel*:**

$$\boxed{\boldsymbol{ax + by = c},}$$

ahol az a, b és c valamilyen szám, de az a és a b egyszerre nem egyenlő nullával.

Igaz a következő állítás: *bármilyen $ax + by = c$ alakú egyenlet, ahol az a, b és c valamely szám, de az a és a b egyidejűleg nem egyenlő nullával, az egyenes egyenlete lesz.*

Ha az $a = b = c = 0$, akkor az $ax + by = c$ alakú egyenlet grafikonja az xy koordinátasík. Ha $a = b = 0$ és $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

A 7. osztályos algebrából már tudjátok, hogy az $ax + by = c$ alakú egyenletet kétváltozós lineáris egyenletnek nevezzük. Az egyenes egyenlete a lineáris egyenletek egy speciális esete. A 10.2. ábra illusztrálja a fenti állítást.

10.2. ábra

A 7. osztályos algebra órákon bizonyítás nélkül fogadtuk el azt, hogy az $y = kx + p$ lineáris függvény grafikonja egy egyenes. Most be is bizonyítjuk.

Átírjuk az $y = kx + p$ egyenletet a következőképpen: $-kx + y = p$. Megkaptunk egy $ax + by = c$ alakú egyenletet arra az esetre, ha $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Mivel ebben az esetben $b \neq 0$, tehát az egyenes egyenletét kaptuk meg.

Vajon bármilyen egyenes egyenlete megadható $y = kx + p$ alakban? Erre a kérdésre nemmel kell válaszolnunk.

Ha az egyenes merőleges az abszcisszatengelyre, akkor nem lehet egy függvény grafikonja, tehát nem adható meg $y = kx + p$ alakban.

Ezzel együtt, ha az $ax + by = c$ egyenes egyenletébe behelyettesítjük a $b = 0$, akkor így lehet átírni azt: $x = \frac{c}{a}$. Az egyenes egyenletének egy olyan alakját kaptuk meg, ahol minden pontjának az abszcisszája ugyanaz a szám lesz. Ezt függőlegesnek hívjuk.

Amikor $b \neq 0$, akkor az $ax + by = c$ egyenes egyenletét a következőképpen lehet átírni: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Elvégezve a $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$ helyettesítéseket, megkapjuk az $y = kx + p$ egyenletet.

Tehát ***ha b = 0 és a ≠ 0, akkor az ax + by = c egyenes egyenlete egy függőleges egyenest ad meg; ha b ≠ 0, akkor pedig (nem függőleges egyenes) egy ferde egyenes lesz.***

A nem függőleges egyenes egyenletét érdemes az $y = kx + p$ alakban felírni.

A következő táblázatban összefoglaljuk az ebben a pontban tanultakat.

Egyenlet	Az a, b és c értékei	Grafikon
$ax + by = c$	$b \neq 0$, az a és c bármilyen szám	Nem függőleges egyenes
	$b = 0$, $a \neq 0$, c bármilyen szám	Függőleges egyenes
	$a = b = c = 0$	A teljes koordinátasík
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

1. feladat. Írjátok fel az egyenes egyenletét, ha az illeszkedik a következő pontokhoz:

1) A (–3; 5) és B (–3; –6); 2) C (6; 1) és D (–18; –7)!

Megoldás. 1) Mivel az adott pontok abszcisszái egyenlők, ezért az AB egyenes képe függőleges. Egyenlete az $x = -3$.

2) Mivel az adott pontok abszcisszái különbözőek, ezért a CD egyenes nem függőleges. Ezért lehet alkalmazni az iránytényezős egyenletet, melynek alakja: $y = kx + p$.

Behelyettesítve a C és D pontok koordinátáit az $y = kx + p$ egyenletbe, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

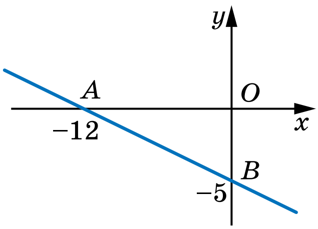
Felelet: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$.

2. feladat. Határozzátok meg annak a háromszögnek a kerületét és területét, melyet az $5x + 12y = -60$ egyenes és a koordinátatengelyek határolnak!

Megoldás. Meghatározzuk az adott egyenes és a koordinátatengelyek metszéspontjait.

Az abszcisszatengelyt: az $y = 0$ esetén $5x = -60$; $x = -12$.

Az ordinátatengelyt: az $x = 0$ esetén $12y = -60$; $y = -5$.



10.3. ábra

Tehát az adott egyenes és a koordinátatengelyek egy AOB (10.3. ábra) derékszögű háromszöget határolnak, melynek csúcsai $A\,(-12;\ 0)$, $B\,(0;\ -5)$ és $O\,(0;\ 0)$ pontok lesznek. Meghatározzuk a háromszög oldalainak hosszát: $OA = 12$, $OB = 5$; $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Tehát a keresett kerület és terület: $P = OA + OB + AB = 30$.

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 30.$$

Felelet: $P = 30$, $S = 30$.

?

1. Milyen alakja lesz az xy síkon elhelyezkedő egyenes egyenletének?
2. Hogyan nevezzük az olyan egyenest, ahol pontjainak abszcisszája egyenlő? Hogyan helyezkedik el ez az egyenes az abszcisszatengelyhez viszonyítva?
3. Megegyezik-e bármilyen kétváltozós lineáris egyenlet az egyenes egyenletével?
4. Milyen alakban célszerű felírni a nem függőleges egyenes egyenletét?
5. Megadható-e bármilyen egyenes az $y = kx + p$ egyenlettel?
6. Milyen feltételek mellett tekinthető az $ax + by = c$ egyenes egyenlete a függőleges egyenes egyenletének? A nem függőleges egyenes egyenletének?

GYAKORLATOK

10.1.° A felsorolt egyenletek közül melyik lesz az egyenes egyenlete:

1) $2x - 3y = 5$;	4) $2x = 5$;	7) $0x + 0y = 0$;
2) $2x - 3y = 0$;	5) $-3y = 5$;	8) $0x + 0y = 5$?
3) $2x^2 - 3y = 5$;	6) $2x + 0y = 0$;	

10.2.° Határozzátok meg a $4x - 5y = 20$ egyenesnek a koordinátatengelyekkel való metszéspontjainak koordinátáit! Illeszkednek-e az egyeneshez az alábbi pontok:
1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (–1,5; 5,2); 4) D (–1; 5)?

10.3.° Határozzátok meg a $3x + 4y = 12$ egyenes és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit! Az M (–2; 4) és a K (8; –3) pont közül melyik illeszkedik az adott egyeneshez?

10.4.° Állítsátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyhez az A (6; –3) pont illeszkedik, és az egyenes merőleges az x tengelyhez! Nevezzétek meg az egyenes és az x tengely metszéspontjának koordinátáit!

10.5.° Állítsátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyhez a B (5; –8) pont illeszkedik, és az egyenes merőleges az y tengelyhez! Nevezzétek meg az egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit!

10.6.° Állítsátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyhez a C (–4; 9) pont illeszkedik, és párhuzamos az: 1) abszcisszatengellyel; 2) ordinátatengellyel!

10.7.° Állítsátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a következő pontokhoz illeszkedik:
1) A (1; –3) és B (–2; –9); 3) E (–4; –1) és F (9; –1);
2) C (3; 5) és D (3; –10); 4) M (3; –3) és K (–6; 12)!

10.8.° Állítsátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a következő pontokhoz illeszkedik:
1) A (2; –5) és B (–3; 10); 2) C (6; –1) és D (24; 2)!

10.9.° Határozzátok meg az egyenesek metszéspontjainak koordinátáit:
1) $y = 3x - 7$ és $y = 5x + 9$; 2) $2x - 7y = -16$ és $6x + 11y = 16$.

10.10.° Határozzátok meg az egyenesek metszéspontjainak koordinátáit:
1) $y = -4x + 1$ és $y = 2x - 11$; 2) $3x + 2y = 10$ és $x - 8y = 12$.

10.11.• Az A (–6; –1), B (1; 2) és C (–5; –8) pontok az ABC háromszög csúcsai. Írjátok fel a háromszög súlyvonalát tartalmazó egyenes egyenletét!

10.12.• Az A (–3; –4), B (–2; 2), C (1; 3) és D (3; –2) pontok az $ABCD$ ($BC \parallel AD$) trapéz csúcsai. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a trapéz középvonalát tartalmazza!

10.13.• A trapéz szárai felezőpontjainak abszcisszái egyenlők. Ki lehet-e jelenteni, hogy a trapéz alapjai merőlegesek az abszcisszatengelyre?

10.14.• Határozzátok meg annak a háromszögnek a kerületét, amelyet a koordinátatengelyek és a $4x - 3y = 12$ képlettel leírható egyenes határol!

10.15.• Határozzátok meg annak a háromszögnek a területét, amelyet a koordinátatengelyek és a $7y - 2x = 28$ képlettel leírható egyenes határol?

10.16.• Határozzátok meg annak a háromszögnek a területét, amelyet a $3x + 2y = 6$ és $y = -\frac{9}{4}x$ egyenesek és az ordinátatengelyek határolnak!

10.17.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ kör és az $x + y = 7$ egyenes metszik egymást, majd határozzátok meg a metszéspontok koordinátáit!

10.18.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$ kör és az $x + y = 5$ egyenes érintik egymást, majd határozzátok meg az érintési pont koordinátáit!

10.19.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ körnek és a $3x + y = 3$ egyenesnek nincs közös pontja!

10.20.•• Határozzátok meg az $5x - 2y = 10$ egyenes és a koordinátarendszer kezdőpontja közötti távolságot!

10.21.•• Határozzátok meg az $x + y = -8$ egyenes és a koordináta-rendszer kezdőpontja közötti távolságot!

10.22.•• Határozzátok meg az $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ körvonal húrjának hosszát, ha az az $y = 3x$ egyeneshez illeszkedik!

10.23.•• Írjátok fel azon körvonalak középpontjai mértani helyének egyenletét, melyek az A (1; –7) és B (–3; 5) pontokhoz illeszkednek!

10.24.•• Írjátok fel azon körvonalak középpontjai mértani helyének egyenletét, melyek a C (2; 3) és D (–5; –2) pontokhoz illeszkednek!

10.25.•• Határozzátok meg annak a pontnak a koordinátáit, amely egyenlő távolságra van a koordinátatengelyektől és az A (3; 6) ponttól!

10.26.•• Határozzátok meg annak a pontnak a koordinátáit, amely egyenlő távolságra van a koordinátatengelyektől és a B (–4; 2) ponttól!

10.27.* Írjátok fel annak a körvonalnak az egyenletét, amely az A (2; 0) és a B (4; 0) pontokra illeszkedik, a középpontja pedig a $2x + 3y = 18$ egyenesre!

10.28.* Határozzátok meg a körvonalak középpontjai mértani helyének egyenletét, ha sugara 5 egység és az abszcisszatengelyből egy 6 egység hosszúságú húrt metsz ki!

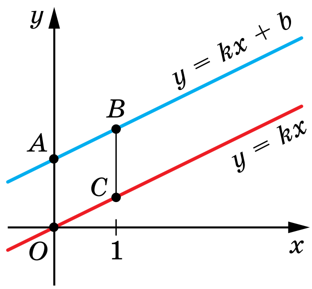
ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

10.29. A paralelogramma átlói $6\sqrt{2}$ cm és 8 cm, a köztük lévő szög pedig 45°. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait!

10.30. A háromszög egyik oldala 15 cm-rel nagyobb, mint a másik oldal, a harmadik oldalára bocsátott magasság 32 cm és 7 cm-es szakaszokra osztja azt. Határozzátok meg a háromszög kerületét!

10.31. Az egyenlő szárú trapéz köré írt kör középpontja a nagyobbik alapjára illeszkedik. Határozzátok meg a kör sugarát, ha a trapéz átlója 20 cm, magassága pedig 12 cm!

11. Az egyenes iránytényezője



11.1. ábra

Megvizsgáljuk az $y = kx$ egyenletet. Ez egy nem függőleges egyenest ad meg, amelyhez illeszkedik a koordináta-rendszer kezdőpontja.

Bebizonyítjuk, hogy az $y = kx$ és az $y = kx + b$, ahol $b \neq 0$, párhuzamos egyenesek.

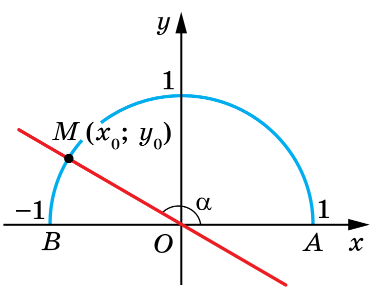
Az O (0; 0) és a C (1; k) pontok az $y = kx$ egyeneshez, az A (0; b) és a B (1; $k + b$) pontok pedig az $y = kx + b$ egyeneshez illeszkednek (11.1. ábra). Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $OABC$ négyszög AC és OB átlói felezik egymást (végezzétek ezt el önállóan). Tehát az $OABC$ négyszög paralelogramma. Ebből következik, hogy $AB \parallel OC$.

Az alábbi következtetést vonhatjuk le:

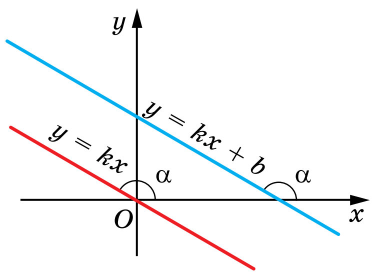
ha $k_1 = k_2$ és $b_1 \neq b_2$, akkor az $y = k_1x + b_1$ és az $y = k_2x + b_2$ egyenesek párhuzamosak (1).

Metssze az $y = kx$ egyenes az egységsugarú félkört az M (x_0; y_0) pontban (11.2. ábra). Az AOM szöget **az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szögnek** nevezzük.

Ha az $y = kx$ egyenes egybeesik az abszcisszatengellyel, akkor az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szöget 0°-nak tekintjük.



11.2. ábra



11.3. ábra

Ha az $y = kx$ egyenes az abszcisszatengely pozitív irányával α szöget alkot, akkor az $y = kx + b$ egyenes, amely párhuzamos az $y = kx$ egyenessel szintén α szög alatt hajlik az abszcisszatengely pozitív irányához (11.3. ábra).

Vizsgáljuk meg az $y = kx$ egyenlettel megadott MO egyenest (11.2. ábra). Ha $MOA\angle = \alpha$, akkor $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Mivel az $M(x_0; y_0)$ az $y = kx$ egyeneshez illeszkedik, ezért $\frac{y_0}{x_0} = k$. Ebből következik, hogy $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Tehát az $y = kx + b$ egyenes esetében is

$$\boxed{\boldsymbol{k} = \mathbf{tg}\,\alpha,}$$

ahol az α az a szög, amely alatt az egyenes az abszcisszatengely pozitív irányához hajlik.

Ezért a k tényezőt az egyenes **iránytényezőjének** vagy **iránytangensének** nevezzük.

Amikor a nem függőleges egyenesek párhuzamosak, akkor az abszcisszatengely pozitív irányával egyenlő szöget zárnak be. Akkor ezeknek a szögeknek a tangensei is egyenlők, ezért az iránytényezőjük is egyenlő.

Tehát ***ha az $y = k_1x + b_1$ és az $y = k_2x + b_2$ egyenesek párhuzamosak, akkor $k_1 = k_2$*** **(2)**.

Az **(1)** és **(2)** következményeket egy tételbe egyesítjük.

11.1. tétel. ***Az $y = k_1x + b_1$ és az $y = k_2x + b_2$ egyenesek akkor és csakis akkor lesznek párhuzamosak, ha $k_1 = k_2$ és $b_1 \neq b_2$.***

Feladat. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $A(-4; 3)$ ponthoz illeszkedik és párhuzamos az $y = 0{,}5x - 4$ egyenessel!

Megoldás. Legyen a keresett egyenlet $y = kx + p$ alakú. Mivel ez az egyenes párhuzamos az $y = 0{,}5x - 4$ egyenessel, ezért az iránytényezőjük is egyenlő, tehát $k = 0{,}5$.

A keresett egyenlet ezért $y = 0{,}5x + p$ alakú. Mivel ez az egyenes illeszkedik az $A(-4; 3)$ ponthoz, ezért $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$. Innen $p = 3$.

A keresett egyenes egyenlete: $y = 0{,}5x + 5$.

Felelet: $y = 0{,}5x + 5$. ◀

?

1. Magyarázzátok meg, mit nevezünk az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szögnek!
2. Az abszcisszatengellyel párhuzamos, illetve a vele egybeeső egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög egyenlő egymással. Miért?
3. Mit nevezünk az egyenes iránytényezőjének?
4. Hogyan függ össze az egyenes iránytényezője és az egyenes valamint az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög?

5. Fogalmazzátok meg a koordinátasíkon lévő két nem függőleges egyenes párhuzamosságának szükséges és elégséges feltételét!

GYAKORLATOK

11.1.° Mivel egyenlő a következő egyenesek iránytényezői:
1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

11.2.° Az $y = 6x - 5$, $y = 0,6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ és az $y = 600 + 0,6x$ egyenesek közül melyek lesznek párhuzamosak?

11.3.° Milyen számot kell a csillagok helyébe írni, hogy az egyenesek párhuzamosak legyenek:
1) $y = 8x - 14$ és $y = {*}x + 2$;
2) $y = {*}x - 1$ és $y = 3 - 4x$?

11.4.° Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a koordináta-rendszer kezdőpontjához, és párhuzamos a következő egyenessel:
1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1,15x + 2$!

11.5.• Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az A (–3; 7) ponthoz, az iránytényezője pedig:
1) 4; 2) –3; 3) 0!

11.6.• Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a B (2; –5) ponthoz, az iránytényezője pedig –0,5!

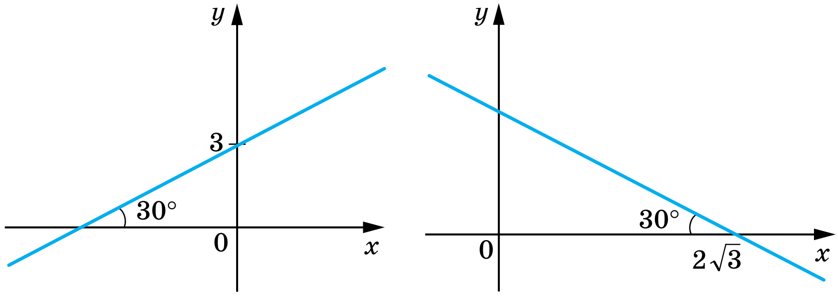
11.7.• Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az M (–1; 9) ponthoz, és párhuzamos a következő egyenessel:
1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$!

11.8.• Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $K\left(-\frac{1}{3};\ 10\right)$ ponthoz, és párhuzamos a következő egyenessel:
1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$!

11.9.• Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az A (2; 6) ponthoz, és az abszcisszatengellyel a következő szöget zárja be:
1) 60°; 2) 120°!

11.10.• Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a B (3; –2) ponthoz, és az abszcisszatengellyel a következő szöget zárja be:
1) 45°; 2) 135°!

11.11.$^{\bullet}$ Írjátok fel a 11.4. ábrán látható egyenes egyenletét!



a *b*

11.4. ábra

11.12.$^{\bullet}$ Állapítsátok meg, hogy párhuzamosak-e egymással az egyenesek!

1) $2x - 5y = 9$ és $5y - 2x = 1$; 3) $7x - 2y = 12$ és $7x - 3y = 12$;

2) $8x + 12y = 15$ és $4x + 6y = 9$; 4) $3x + 2y = 3$ és $6x + 4y = 6$!

11.13.$^{\bullet}$ Bizonyítsátok be, hogy a $7x - 6y = 3$ és a $6y - 7x = 6$ egyenesek párhuzamosak!

11.14.$^{\bullet\bullet}$ Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = 4x + 2$ egyenessel, és az $y = -8x + 9$ egyenest az ordinátatengely egy pontjában metszi!

11.15.$^{\bullet\bullet}$ Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = 3x + 4$ egyenessel, és az $y = -4x + 16$ egyenest az abszcisszatengely egy pontjában metszi!

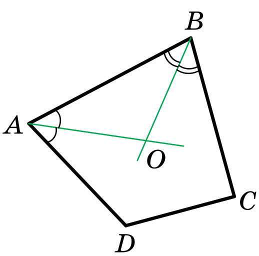
11.16.* Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $y = -x + 3$ egyenesre, és az A (1; 5) ponthoz illeszkedik!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

11.17. Az $ABCD$ domború sokszög A és B szögének szögfelezői az O pontban metszik egymást (11.5. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az AOB szög mértéke egyenlő a sokszög C és D szögeinek fél összegével!

11.18. A rombusz tompaszögének csúcsából húzott magassága a rombusz oldalát 7 cm és 18 cm-es szakaszokra osztja, a hegyesszög csúcsától kezdve a számolást. Határozzátok meg a rombusz átlóinak a hosszát!

11.19. Az egyenlő szárú háromszög súlyvonalainak hossza 15 cm, 15 cm és 18 cm. Határozzátok meg a háromszög területét!



11.5. ábra

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

11.20. Mekkora a sugara a lehető legkisebb körnek, melyből ki lehet vágni egy háromszöget, melynek oldalai: 2 cm, 3 cm, 4 cm?

KOORDINÁTÁK MÓDSZERE

Gyakran azt mondjuk: az $y = 2x - 1$ egyenes, az $y = x^2$ parabola, az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal, vagyis az alakzatot azonosítjuk az egyenletével. Ez a megközelítés lehetővé teszi, hogy az alakzat tulajdonságainak vizsgálatához elegendő az egyenlet vizsgálata. Ebben rejlik a koordináta módszer lényege.

A fentieket egy példán illusztráljuk.

Az egyenes és a kör ábrázolásából nyilvánvaló, hogy legfeljebb két közös pontjuk lehet. Ugyanakkor ez a kijelentés nem axióma, ezért bizonyítani kell.

Ez a feladat visszavezethető a következő egyenletrendszer gyökei számának meghatározására:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

ahol az a és b számok egyidejűleg nem egyenlők nullával és $R > 0$.

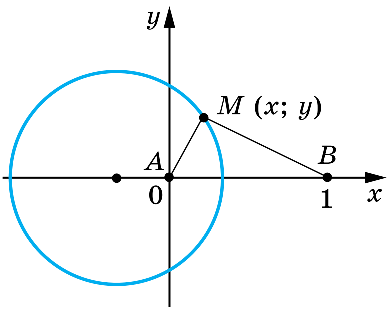
Az egyenletrendszer helyettesítési módszerrel történő megoldása után egy olyan másodfokú egyenletet kapunk, melynek lehet két megoldása, egy megoldása vagy egyáltalán nincs megoldása. Tehát három eset lehetséges:

1) az egyenletrendszernek két megoldása van – a kör és az egyenes két pontban metszik egymást;
2) az egyenletrendszernek egy megoldása van – ekkor az egyenes érinti a kört;
3) az egyenletrendszernek nincs megoldása – ekkor a kör és az egyenes nem metszi egymást.

A fenti esetek mindegyike előfordult a 10.17. – 10.19. feladatok megoldása során.

A koordináták módszere különösen azokban az esetekben eredményes, mikor azt az alakzatot kell meghatározni, melynek pontjai eleget tesznek a feltételnek, vagyis meg kell határozni a PMH.

Megjelölünk a síkon két pontot. Legyenek ezek az A és B pontok. Már tudjátok, hogy milyen alakzat lesz az M pontok mértani helyei, melyekre igaz, hogy $\dfrac{MA}{MB} = 1$.



11.6. ábra

Ez az AB szakasz felezőmerőlegese lesz. Érdekes lenne azt is megállapítani, hogy milyen alakzat lesz az, amikor az $\frac{MA}{MB} = k$, ahol $k \neq 1$. Oldjuk meg a feladatot $k = \frac{1}{2}$ esetén.

Az A és B pontot tartalmazó síkot koordinátasíkká „alakítjuk át”. A következőképpen járunk el: a koordináta-rendszer kezdőpontjának vegyük az A pontot, az egységnek pedig az AB szakaszt; az abszcisszatengely kijelölésénél a B pont koordinátája legyen (1; 0) (11.6. ábra).

Legyen $M(x;\ y)$ a keresett F alakzat tetszőleges pontja. Ekkor $2MA = MB$; $4MA^2 = MB^2$. Innen következik, hogy

$$4(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$
$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3};$$
$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = \frac{4}{9};$$
$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}. \qquad (*)$$

Tehát ha az $M(x;\ y)$ pont az F alakzathoz illeszkedik, akkor a koordinátái kielégítik az (*) egyenletet.

Legyen $(x_1;\ y_1)$ valamelyik megoldása a (*)-nak. Ekkor könnyen be lehet bizonyítani, hogy $4(x_1^2 + y_1^2) = (x_1 - 1)^2 + y_1^2$. Ez azt jelenti, hogy az $N(x_1;\ y_1)$ pontra teljesül a $4NA^2 = NB^2$. Ezért $2NA = NB$. Tehát az N pont illeszkedik az F alakzathoz.

Vagyis (*) az F alakzat egyenlete, következésképpen az F alakzat egy olyan körvonal, melynek középpontja az $O\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$ pont, sugara pedig $\frac{2}{3}$.

Mi a feladat részesetét oldottuk meg, amikor $k = \frac{1}{2}$. Be lehet bizonyítani, hogy a keresett alakzat bármilyen pozitív $k \neq 1$ esetén körvonal lesz. Ezt a kört **Apollóniusz** körének[1] nevezzük.

[1] P e r g a i A p o l l ó n i o s z (i. e. III – II. sz.) – ógörög matematikus és csillagász.

MIKÉNT VERTEK HIDAT AZ ALGEBRA ÉS A MÉRTAN KÖZÖTT?

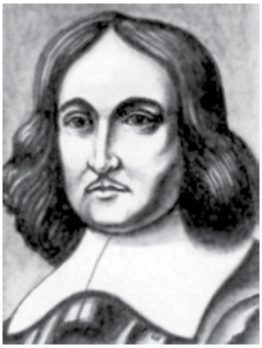
A koordináták ötlete már nagyon régen megszületett. Az emberek az őskorban tanulmányozták a Földet, megfigyelték a csillagokat és a kapott adatok alapján rajzokat és térképeket készítettek.

Az i. e. II. században Hipparkhosz görög csillagász elsőként használta a koordinátákat helymegállapításhoz a Föld felszínén.

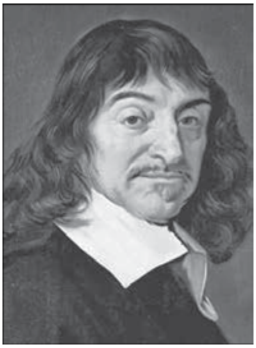
Nicole Oresme (ejtsd: *Nikol Orem*) (1323–1382) francia tudós a XIV. században alkalmazta először a matematikában Hipparkhosz ötletét: a síkot négyzetrácsokra osztotta (hasonlóan a kockás füzetlaphoz), majd a pontok helyzetét szélesség és hosszúság alapján adta meg.

A koordinátákban rejlő nagy lehetőségeket viszont csak a XVII. században fedezte fel Pierre Fermat (ejtsd: *Pier Fermá*) és René Descartes (ejtsd: *Röné Dékárt*) francia matematikusok. A tudósok munkáikban bemutatták, hogy a koordináta-rendszer segítségével hogyan juthatunk el a pontoktól a számokig, a vonalaktól az egyenletekig, az algebrától a mértanig.

Noha Fermat a tanulmányát Descartesnél egy évvel korábban publikálta, a matematikában ma is használt koordináta-rendszert mégis **Descartes-féle koordináta-rendszernek** nevezik. Ez annak köszönhető, hogy Descartes az *Értekezés a módszerről* című munkájában bemutatott egy új, kisebb változtatásokkal ma is használatos betűs jelölési módszert. Ennek alapján jelöljük az ismeretleneket a latin ábécé utolsó betűivel: x, y, z, az együtthatókat pedig az elsőkkel: a, b, c, … . A már ismert x^2, y^3, z^5 stb. hatványjelöléseket szintén Descartesnak köszönhetjük.



Pierre Fermat
(1601–1665)



René Descartes
(1596–1650)

3. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Mik lesznek az AB szakasz felezőpontjának koordinátái, ha A (–6; 7), B (4; –9)?

A) (–5; 8); C) (–5; –1);
B) (–1; –1); D) (–1; 8).

2. Mekkora a C (8; –11) és D (2; –3) pontok közötti távolság?

A) 100; C) $\sqrt{296}$;
B) 10; D) $\sqrt{164}$.

3. Mik lesznek az $(x-5)^2+(y+9)^2=16$ körvonal középpontjának koordinátái?

A) (5; –9); C) (5; 9);
B) (–5; 9); D) (–5; –9).

4. Melyik körvonalnak lesz a középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja?

A) $x^2+(y-1)^2=1$; C) $x^2+y^2=1$;
B) $(x-1)^2+y^2=1$; D) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

5. Határozzátok meg annak a körnek a sugarát, melynek átmérője az MK szakasz, ha M (14; 12) és K (–10; 2)!

A) 26; C) 25;
B) 13; D) 5.

6. Mik lesznek az $5x-3y=15$ egyenes és az abszcisszatengely metszéspontjának koordinátái?

A) (0; –5); C) (0; 3);
B) (–5; 0); D) (3; 0).

7. Az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Adott három csúcsa: B (–2; 3), C (10; 9), D (7; 0). Határozzátok meg az A csúcs koordinátáit!

A) (1; 6); C) (–5; –6);
B) (19; –3); D) (6; 5).

8. Mik lesznek a koordinátái az ordinátatengelyen lévő pontnak, amely egyenlő távolságra van az A (–3; 4) és B (1; 8) pontoktól?

A) (–5; 0); C) (5; 0);
B) (0; –5); D) (0; 5).

9. Határozzátok meg az AB egyenes azon pontjának abszcisszáját, melynek ordinátája 2, ha A (–7; 4), B (9; 12)!

A) 8,5; C) 4;

B) –11; D) –2.

10. Mekkora az $x - y = 4$ és az $x + 3y = 12$ egyenesek metszéspontja és az M (1; 7) pont közötti távolság?

A) 5; C) $5\sqrt{2}$;

B) 50; D) $2\sqrt{5}$.

11. Milyen lesz annak az egyenesnek az egyenlete, amely illeszkedik a P (–1; 6) ponthoz és párhuzamos az $y = 2x - 5$ egyenessel?

A) $y = 6 - 5x$; C) $y = 5x - 6$;

B) $y = 2x + 8$; D) $y = 2x - 8$.

12. Mivel egyenlő az $x^2 + y^2 + 14y - 12x + 78 = 0$ körvonal sugara?

A) $\sqrt{7}$; C) 14;

B) 7; D) $\sqrt{14}$.

! A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Két pont közötti távolság

Az A (x_1; y_1) és B (x_2; y_2) végpontú szakasz hosszát a következő képlettel határozható meg: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

A szakasz felezőpontjának koordinátái

Az (x_1; y_1) és (x_2; y_2) végpontú szakasz felezőpontjának (x_0; y_0) koordinátái a következő képlettel határozhatók meg:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Az alakzat egyenlete

Az F alakzat xy síkbeli egyenletének azt az x és y kétváltozós egyenletet nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1) ha a pont illeszkedik az F alakzathoz, akkor a koordinátái igazzá teszik az egyenletet;
2) az adott egyenlet bármilyen (x; y) megoldásai az F alakzathoz illeszkedő pont koordinátái lesznek.

A körvonal egyenlete

Az R sugarú és A (a; b) középpontú körvonal egyenlete a következőképpen írható fel: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
Bármilyen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ alakú egyenlet, ahol az a, b és R tetszőleges számok, és $R > 0$, egy olyan R sugarú körvonal egyenlete, melynek középpontja az (a; b) koordinátájú pont.

Az egyenes egyenlete

Az egyenes egyenlete a következő alakban írható fel: $ax + by = c$, ahol az a, b és c valamilyen szám, de az a és a b egyszerre nem egyenlő nullával.
Bármilyen $ax + by = c$ alakú egyenlet, ahol az a, b és c valamilyen szám, de az a és a b egyszerre nem egyenlő nullával, az egyenes egyenlete lesz.
Ha $b = 0$ *és* $a \neq 0$, akkor az $ax + by = c$ egyenes egyenlete egy függőleges egyenest ad meg; ha $b \neq 0$, akkor pedig nem függőleges egyenes lesz.

Az egyenes iránytényezője

Az $y = kx + b$ egyenes egyenletében a k együtthatót az egyenes iránytényezőjének nevezzük, ami egyenlő az egyenes és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög tangensével.

A nem függőleges egyenesek párhuzamosságának szükséges és elégséges feltétele

Az $y = k_1x + b_1$ és az $y = k_2x + b_2$ egyenesek akkor és csakis akkor lesznek párhuzamosak, ha $k_1 = k_2$ és $b_1 \neq b_2$.

VEKTOROK 4.§.

Megismerve ennek a paragrafusnak az anyagát megtudjátok, hogy a vektorokat nemcsak a fizikában, de a mértanban is alkalmazzák.
Megtanuljátok a vektorokat összeadni és kivonni, számmal szorozni, meghatározni két vektor közötti szöget, alkalmazni a vektorok tulajdonságát a feladatok megoldása során.

12. A vektor fogalma

Már nagyon sok olyan mennyiséget ismertek, amit a számértékével fejezünk ki: ilyen volt a tömeg, terület, hosszúság, térfogat, idő, hőmérséklet stb. Ezeket a mennyiségeket **skaláris mennyiségeknek** vagy **skalároknak** nevezzük.

A fizikából már ismertek olyan mennyiségeket, melyeknek nem elegendő meghatározni a számbeli értékeit. Például ha egy rugóra 5 N erő hat, akkor nem világos, hogy ez a rugó összenyomott vagy széthúzott állapotban van (12.1. ábra). Azt is meg kell adni, hogy az erő milyen irányba hat rá.

12.1. ábra

Azokat a mennyiségeket, melyek számértéken kívül iránnyal is rendelkeznek, **vektormennyiségeknek** vagy **vektoroknak**[1] nevezzük.

Az erő, elmozdulás, sebesség, gyorsulás, súly vektormennyiségnek tekinthető.

A vektorokat a mértanban is alkalmazzák.

---

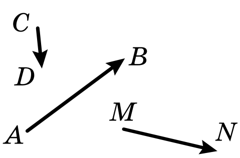
[1] A *vektor* kifejezés először 1845-ben jelent meg, W. R. Hamilton ír matematikus és csillagász vezette be.

Vizsgáljuk meg az AB szakaszt. Ha az A pontot tekintjük a szakasz kezdőpontjának, a B pontot pedig a szakasz végpontjának, akkor a szakaszt már nemcsak a hosszával lehet jellemezni, hanem az A pontból a B pontig való irányával is.

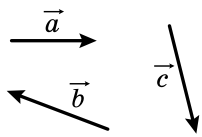
Ha adott, hogy melyik pont lesz a szakasz kezdőpontja, és melyik a végpontja, akkor az ilyen szakaszt **irányított szakaszoknak** vagy **vektoroknak** nevezzük.

Az A kezdőpontú és B végpontú vektort a következőképpen jelöljük: $\overrightarrow{AB}$ (így olvassuk: AB vektor).

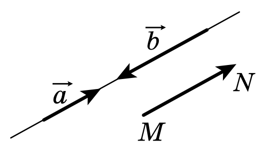
A rajzon a vektort olyan szakasszal ábrázoljuk, amelynek a végén nyíl van, ami az irányát mutatja. A 12.2. ábrán az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{MN}$ vektorok láthatók.



12.2. ábra



12.3. ábra



12.4. ábra

A vektorok jelölésére latin kisbetűket is használnak, melyek fölé nyilat tesznek. A 12.3. ábrán az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok láthatók.

Azt a vektort, melynek a kezdő- és a végpontja ugyanaz a pont, **nullvektornak** nevezzük és $\vec{0}$ jelöljük. Ha a vektor kezdő- és végpontja az A pont, akkor az ilyen vektort $\overrightarrow{AA}$-nak is jelölhetik. A nullvektort egy ponttal ábrázoljuk.

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor **abszolút értékének** (**modulusának**) az AB irányított szakasz hosszát nevezzük. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor abszolút értékét így jelöljük: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ és az $\vec{a}$ vektor abszolút értékét pedig így: $\left|\vec{a}\right|$.

A nullvektor abszolút értékét nullának tekintjük: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

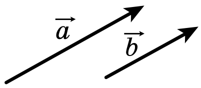
Meghatározás. **A nem nullvektorokat kollineárisnak nevezzük, ha ezek a vektorok párhuzamos egyeneseken helyezkednek el vagy egy egyenesen fekszenek.**

A nullvektor bármilyen vektorral kollineáris.

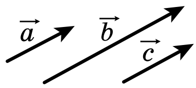
A 12.4. ábrán az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\overrightarrow{MN}$ kollineáris vektorok láthatók.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kollineáris vektorokat így jelöljük: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

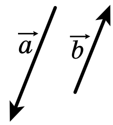
A 12.5. ábrán az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok egyirányúak. Az ilyen vektorokat **egyirányú** vektoroknak nevezzük és így jelöljük: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



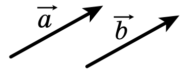
12.5. ábra



12.6. ábra



12.7. ábra



12.8. ábra

Ha $\vec{a} \parallel \vec{b}$ és $\vec{b} \parallel \vec{c}$, akkor $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Ehhez hasonló tulajdonságai vannak az egyirányú vektoroknak is, vagyis ha $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ és $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, akkor $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (12.6. ábra).

A 12.7. ábrán a kollineáris $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok **ellentétes irányúak**. Ezt így jelöljük: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Meghatározás. A nem nullvektorokat egyenlőknek nevezzük, ha az abszolút értékűk egyenlő és egyirányúak. Bármilyen két nullvektor egyenlő.

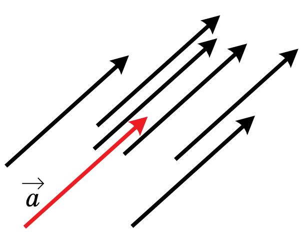
A 12.8. ábrán az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyenlők. Ezt így jelöljük: $\vec{a} = \vec{b}$.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nullvektorok egyenlősége azt jelenti, hogy $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ és $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

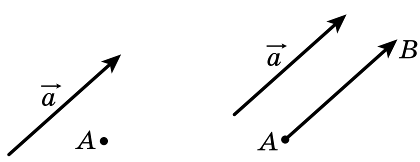
Könnyen bizonyítható, hogyha az $\vec{a} = \vec{b}$ és $\vec{b} = \vec{c}$, akkor $\vec{a} = \vec{c}$. Győződjetek meg erről önállóan.

Gyakran, amikor a vektorról beszélünk, nem konkretizáljuk, melyik pont lesz a kezdőpontja. A 12.9. ábrán az $\vec{a}$ vektor látható, és olyan vektorok, melyek az $\vec{a}$-val egyenlők. Ezek mindegyikét $\vec{a}$-nak nevezhetjük.

A 12.10. *a* ábrán az $\vec{a}$ vektor és egy A pont látható. Ha megszerkesztjük az $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort, akkor azt mondjuk, hogy az $\vec{a}$ **az A pontból induló (vagy A kezdőpontú)** vektor (12.10. *b* ábra).



12.9. ábra

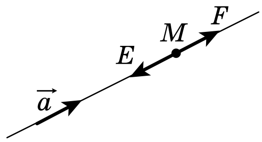


a *b*

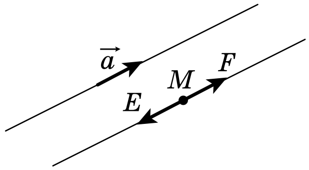
12.10. ábra

Megmutatjuk, hogy bármilyen M pontból indíthatunk egy az $\vec{a}$ vektorral egyenlő vektort.

Ha az $\vec{a}$ vektor nullvektor, akkor a keresett vektor az $\overrightarrow{MM}$ vektor lesz.



12.11. ábra



12.12. ábra

Most megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az $\vec{a} \neq \vec{0}$. Legyen az M pont azon az egyenesen, amelyen az $\vec{a}$ fekszik (12.11. ábra). Ezen az egyenesen létezik olyan E és F pont, melyekre igaz, hogy $ME = MF = |\vec{a}|$. Ugyanezen az ábrán látható, hogy az $\overrightarrow{MF}$ vektor egyenlő az $\vec{a}$-ral amit meg kellett határozni.

Ha az M pont nem illeszkedik az $\vec{a}$-t tartalmazó egyeneshez, akkor az M ponton át fektetünk egy egyenest, amely párhuzamos vele (12.12. ábra). Ezután a szerkesztés már az előzőhöz hasonlóan történik.

Adott pontból egyetlen olyan vektor indulhat, amely az adott vektorral egyenlő.

Feladat. Adott egy $ABCD$ négyszög. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ és $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Határozzátok meg az $ABCD$ négyszög fajtáját!

Megoldás. Az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ feltételből következik, hogy $AB \parallel DC$ és $AB = DC$. Tehát az $ABCD$ négyszög paralelogramma lesz.

Az $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ feltételből az következik, hogy az $ABCD$ négyszög átlói egyenlők. Az a paralelogramma, melynek az átlói egyenlők, téglalap lesz. ◀

?

1. Hozzatok fel példákat a skalár mennyiségekre!
2. Mit nevezünk vektormennyiségnek?
3. Mit értünk vektor alatt a geometriában?
4. A következő mennyiségek közül melyek lesznek vektormennyiségek: idő, súly, gyorsulás, impulzus, tömeg, elmozdulás, út, terület, nyomás?
5. Milyen szakaszt nevezünk irányított szakasznak vagy vektornak?

6. Hogyan jelöljük az *A* kezdőpontú és *B* végpontú vektort?
7. Mit nevezünk nullvektornak?
8. Mit nevezünk az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszának?
9. Mivel egyenlő a nullvektor abszolút értéke?
10. Milyen vektorokat nevezünk kollineáris vektoroknak?
11. Hogyan jelöljük az egyirányú vektorokat? Ellentétes irányú vektorokat?
12. Milyen vektorok lesznek egyenlők?

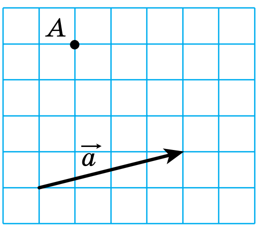
GYAKORLATI FELADATOK

12.1.° Jelöljetek nem egy egyenesen fekvő *A*, *B* és *C* pontot. Rajzoljátok meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorokat!

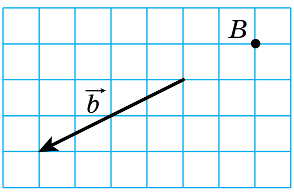
12.2. A motoros hajó az *A* pontból észak felé a 40 km-re lévő *B* pontba ment, majd nyugatra a *B* pontból 60 km-re lévő *C* pontba. A megfelelő méretarány kiválasztásával rajzoljátok meg azokat a vektorokat, melyek az *A*-pontból a *B*-be, a *B* pontból a *C*-be, és az *A*-ból a *C*-be való elmozdulást jelölik!

12.3.° Rajzoljatok egy *ABC* háromszöget! Rajzoljatok egy olyan vektort, amely egyirányú a $\overrightarrow{CA}$ vektorral, de a kezdőpontja a *B* pont!

12.4.° Adott egy $\vec{a}$ és egy *A* pont (12.13. ábra). Ábrázoljátok azt a vektort, amelynek az *A* pont a kezdőpontja és az $\vec{a}$-ral egyenlő!



12.13. ábra



12.14. ábra

12.5.° Adott egy $\vec{b}$ és egy *B* pont (12.13. ábra). Ábrázoljátok azt a vektort, amelynek a *B* pont a kezdőpontja és a $\vec{b}$-ral egyenlő!

12.6.° Jelöljetek egy *A* és *B* pontot! Rajzoljatok egy olyan $\overrightarrow{BC}$ vektort, amely egyenlő az $\overrightarrow{AB}$-ral!

12.7.° Rajzoljatok egy $\vec{a}$-t, és jelöljétek az *M* és *N* pontokat! Szerkesszetek ezekből a pontokból induló olyan vektorokat, melyek az $\vec{a}$-ral lesznek egyenlők!

12.8.• Rajzoljatok egy ABC háromszöget, és jelöljetek egy M pontot a BC oldalának felezőpontján! Az M pontból szerkesszetek az $\overrightarrow{AM}$-ral egyenlő vektort, a B-ből pedig az $\overrightarrow{AC}$-ral egyenlő vektort! Bizonyítsátok be, hogy az így kapott vektorok végpontjai egybeesnek!

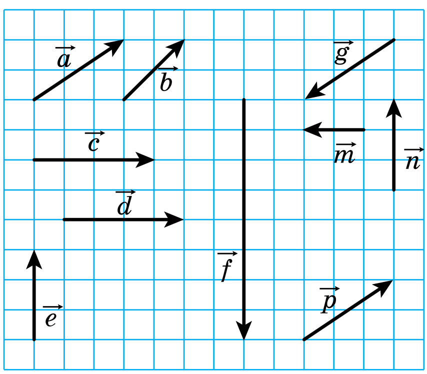
12.9.• Rajzoljatok egy ABC háromszöget! A B és C pontokból rajzoljatok $\overrightarrow{AC}$-ral és $\overrightarrow{AB}$-ral egyenlő vektorokat! Bizonyítsátok be, hogy az így kapott vektorok végpontjai egybeesnek!

GYAKORLATOK

12.10.° Nevezzétek meg azokat az egyenlő vektorokat, melyeknek végpontjai az $ABCD$ négyzet csúcsai lesznek!

12.11.° Az $ABCD$ rombusz átlói az O pontban metszik egymást. Nevezzétek meg azokat az egyenlő vektorokat, melyeknek a kezdő- és végpontjai az A, B, C, D és O pontok lesznek!

12.12.° Melyek:
1) egyenlők;
2) egyirányúak;
3) ellentétes irányúak;
4) kollineárisak a 12.15. ábrán lévő vektorok közül?



12.15. ábra

12.13.° Az $ABCD$ paralelogramma AB és CD oldalának megfelelő felezőpontjai az M és N pont. Nevezzétek meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjai az A, B, C, D, M és N pontok, és:
1) egyenlő az $\overrightarrow{AM}$-ral;

2) kollineáris a $\overrightarrow{CD}$-ral;

3) ellentétes irányú az $\overrightarrow{NC}$-ral;

4) egyirányú a $\overrightarrow{BC}$-ral!

12.14.° Legyen az O pont az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja. Nevezzétek meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjai az A, B, C, D és O pontok, és:

1) egyenlők egymással;

2) egyirányúak;

3) ellenkező irányúak!

12.15.° Az M, N és P pontok megfelelően az ABC háromszög AB, BC és CA oldalainak felezőpontjai. Nevezzétek meg azokat a vektorokat, melyeknek kezdő- és végpontjai az A, B, C, M, N és P pontok, és:

1) az $\overrightarrow{MN}$-ral egyenlők;

2) az $\overrightarrow{AB}$-ral kollineárisak;

3) az $\overrightarrow{MP}$-ral ellenkező irányúak;

4) a $\overrightarrow{CA}$-ral egyirányúak!

12.16.° Igaz-e a következő állítás:

1) ha $\vec{m} = \vec{n}$, akkor $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) ha $\vec{m} = \vec{n}$, akkor $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) ha $\vec{m} \neq \vec{n}$, akkor $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

12.17.° Bizonyítsátok be, hogyha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$!

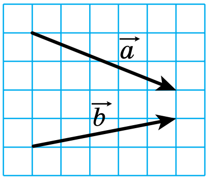
12.18.° Állapítsátok meg az $ABCD$ négyszög fajtáját, ha $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$!

12.19.° Állapítsátok meg az $ABCD$ négyszög fajtáját, ha a $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok kollineárisak és $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$!

12.20.° Határozzátok meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok abszolút értékét (12.16. ábra), ha a füzet négyzetrácsának oldala 0,5 cm!

12.21.° Az $ABCD$ téglalapban adott, hogy $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, az O pont az átlók metszéspontja. Határozzátok meg a következő vektorok abszolút értékét: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$ és $\overrightarrow{OC}$!

12.22.° Az $ABCD$ téglalap átlói az O pontban metszik egymást. Adott, hogy $|\overrightarrow{AB}| = 5$ cm, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ cm. Határozzátok meg a $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok abszolút értékét!



12.16. ábra

12.23.° Adott, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ki lehet-e jelenteni, hogy az A, B, C és D pontok egy paralelogramma csúcsai?

12.24.° Adott, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Milyen egyenlő vektorokat adnak meg az A, B, C és D pontok?

12.25.° Adott az $ABCD$ négyszög. Igazak a következő állítások: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ és $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Állapítsátok meg az $ABCD$ négyszög fajtáját!

12.26.° Adott az $ABCD$ négyszög. Ismert, hogy $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok kollineárisak és $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Állapítsátok meg az $ABCD$ négyszög fajtáját!

12.27.° Mit lehet mondani az $\overrightarrow{AB}$-ról, ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

12.28.• Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogó felezőpontja az M pont lesz és $B\angle = 30°$. Határozzátok meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok abszolút értékét, ha $AC = 2$ cm!

12.29.• Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) a CM súlyvonal 6 cm. Határozzátok meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok abszolút értékét, ha $A\angle = 30°$!

12.30.• Adott, hogy a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok nem kollineárisak. Az $\vec{a}$ kollineáris a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokkal. Bizonyítsátok be, hogy az $\vec{a}$ vektor nullvektor lesz!

12.31.• Adott, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok kollineárisak. Bizonyítsátok be, hogy az A, B és C pontok egy egyeneshez illeszkednek! Igaz-e a fordított állítás: ha az A, B és C pontok egy egyeneshez illeszkednek, akkor az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok kollineárisak?

12.32.• Az A, B, C és D pontokra igaz, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Bizonyítsátok be, hogy az AD és BC szakaszok felezőpontjai egybeesnek! Bizonyítsátok be a fordított állítást: ha az AD és BC szakaszok felezőpontjai egybeesnek, akkor az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$!

12.33.• Adott, hogy $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Bizonyítsátok be, hogy az O pont az MN szakasz felezőpontja! Bizonyítsátok be a fordított állítást: ha az O pont az MN szakasz felezőpontja, akkor $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

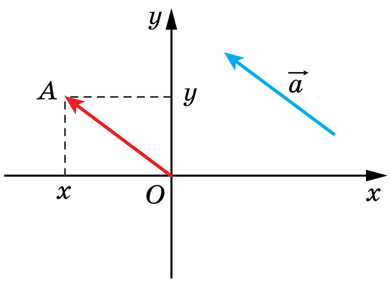
12.34. A paralelogramma egyik szöge egyenlő a többi három szög összegének felével. Határozzátok meg a paralelogramma szögeit!

12.35. Két hasonló háromszög közül az egyik kerülete 8 cm-rel nagyobb, mint a másiké. Határozzátok meg az adott háromszögek kerületeit, ha a hasonlósági arányuk $\frac{1}{3}$!

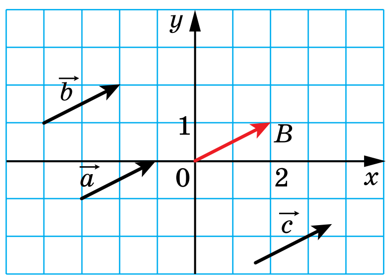
12.36. Az $ABCD$ rombusz BC és AD oldalain megfelelően jelölték az M és K pontokat úgy, hogy $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Határozzátok meg az MK szakasz hosszát, ha $AB = a$, $ABC\angle = 60°$!

13. A vektor koordinátái

Vizsgáljuk meg a koordinátasíkon az $\vec{a}$-t. A koordináta-rendszer kezdőpontjától egy vele egyenlő $\overrightarrow{OA}$-t rajzolunk (13.1. ábra). Az $\vec{a}$ **vektor koordinátáinak** az A pont koordinátáit nevezzük. $\vec{a}\,(x; y)$ felírás azt jelenti, hogy az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(x; y)$ koordináták lesznek.



13.1. ábra



13.2. ábra

Az x és y számokat megfelelően az $\vec{a}$ vektor **első** és **második koordinátájának** nevezzük.

A meghatározásból következik, hogy **az egyenlő vektorok egyenlő koordinátákkal rendelkeznek**. Például az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ egyenlő vektorok (13.2. ábra) mindegyikének a (2; 1) lesznek a koordinátái.

A fordított állítás is igaz: ***ha a vektorok megfelelő koordinátái egyenlők, akkor a vektorok is egyenlők lesznek.***

Valóban, ha az ilyen vektorokat a koordináta-rendszer kezdőpontjától indítjuk, akkor a végpontjainak koordinátái egybeesnek.

Természetesen a nullvektornak a koordinátái (0; 0) lesz.

13.1. tétel. ***Ha az $A\,(x_1; y_1)$ és $B\,(x_2; y_2)$ pontok megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontja, akkor az $x_2 - x_1$ és az $y_2 - y_1$ számok megfelelően az $\vec{a}$ vektor első és második koordinátái lesznek.***

Bizonyítás. Legyenek az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2)$. Bebizonyítjuk, hogy $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Ha $\vec{a} = \vec{0}$, akkor a tétel állítása nyilvánvaló.

Lgyen $\vec{a} \neq \vec{0}$. A koordináta-rendszer kezdőpontjából fektetünk egy $\overrightarrow{OM}$ vektort, amely egyenlő lesz az $\overrightarrow{AB}$ vektorral. Ekkor az M koordinátái $(a_1; a_2)$ lesznek.

Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, ezért alkalmazva a 12.32. feladat eredményét, levonhatjuk azt a következtetést, hogy az OB és AM szakaszok felezőpontjai egybeesnek. Az OB és AM szakaszok felezőpontjainak koordinátái megfelelően $\left(\frac{0+x_2}{2}; \frac{0+y_2}{2}\right)$ és $\left(\frac{x_1+a_1}{2}; \frac{y_1+a_2}{2}\right)$ egyenlők. Vagyis $\frac{0+x_2}{2} = \frac{x_1+a_1}{2}$, $\frac{0+y_2}{2} = \frac{y_1+a_2}{2}$. Ezek az egyenlőségek akkor is teljesülnek, ha az O pont egybeesik a B-vel vagy az A pont egybeesik az M-mel.

Ebből következik, hogy $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◀

Két pont távolságának képletéből következik, hogyha az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2)$, akkor

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Feladat. Adott az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak koordinátái: $A\,(3; -2)$, $B\,(-4; 1)$, $C\,(-2; -3)$. Határozzátok meg a D pont koordinátáit!

Megoldás. Mivel az $ABCD$ négyszög paralelogramma, ezért $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Tehát ezeknek a vektoroknak a koordinátái egyenlők.

Legyen a D pont koordinátái $(x; y)$. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorok koordinátáinak meghatározására alkalmazzuk a 13.1. tételt. A következőt kapjuk:

$\overrightarrow{AB}\,(-4-3; 1-(-2)) = \overrightarrow{AB}\,(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}\,(-2-x; -3-y)$. Innen azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

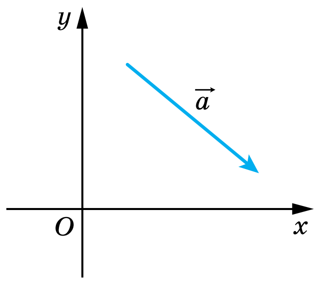
Felelet: $D\,(5; -6)$. ◀

?

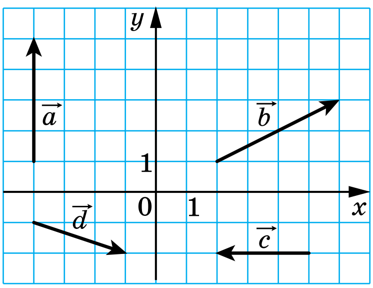
1. Magyarázzátok meg, mit nevezünk a vektor koordinátáinak!
2. Mit lehet elmondani az egyenlő vektorok koordinátáiról?
3. Mit mondhatunk azokról a vektorokról, melyeknek a megfelelő koordinátái egyenlők?
4. Hogyan lehet meghatározni a vektor koordinátáit, ha ismertek a kezdő- és a végpontjának koordinátái?
5. Hogyan lehet meghatározni a vektor abszolút értékét, ha adottak a koordinátái?

GYAKORLATI FELADATOK

13.1.° Körző és vonalzó segítségével szerkesszétek meg azt a pontot, amelynek koordinátái az adott $\vec{a}$ vektor koordinátáival egyenlők (13.3. ábra)!



13.3. ábra



13.4. ábra

13.2.° Ábrázoljátok az origóból induló $\vec{a}$ **(–3; 2)**, $\vec{b}$ **(0; –2)** és $\vec{c}$ **(4; 0)** vektorokat!

13.3.° Ábrázoljátok az M (–1; 2) ponttól kezdődő $\vec{a}$ **(1; –3)**, $\vec{b}$ **(–2; 0)** és $\vec{c}$ **(0; –1)** vektorokat!

GYAKORLATOK

13.4.° Határozzátok meg a 13.4. ábrán látható vektorok koordinátáit!

13.5.° Határozzátok meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit, ha adott:

1) A (2; 3), B (–1; 4);
2) A (3; 0), B (0; –3);
3) A (0; 0), B (–2; –8);
4) A (m; n), B (p, k)!

13.6.° Adott az A (1; 3) pont és az $\vec{a}$ **(–2; 1)** vektor. Határozzátok meg a B pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$!

13.7.° Adottak az A (3; –7), B (4; –5) és C (5; 8) pontok. Határozzátok meg a D pont koordinátáit, ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$!

13.8.° Az A (4; –3) pont az $\vec{m}$ **(–1; 8)** vektor kezdőpontja. Határozzátok meg a vektor végpontjának koordinátáit!

13.9.° Adottak az A (3; –4), B (–2; 7), C (–4; 16) és D (1; 5) pontok. Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$!

13.10.° Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma lesz, ha a csúcsai: A (1; –5), B (2; 3), C (–3; 1) és D (–4; –7) pontok!

13.11.° Az $\vec{a}\,(3; -4)$, $\vec{b}\,(-4; 2)$, $\vec{c}\left(3; \sqrt{11}\right)$, $\vec{d}\,(-2; -4)$, $\vec{e}\left(-1; -2\sqrt{6}\right)$ és $\vec{f}\,(-4; 5)$ vektorok közül válasszátok ki az egyenlő abszolút értékű vektorokat!

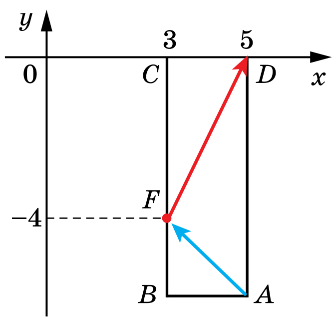
13.12.° Adottak az A (1; –4) B (–2; 5), C (1 + a; –4 + b) és D (–2 + a; 5 + b) pontok. Bizonyítsátok be, hogy $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$!

13.13.° Határozzátok meg az x összes olyan értékét, melyre teljesül, hogy az $\vec{a}\,(x; -8)$ vektor abszolút értéke 10 lesz!

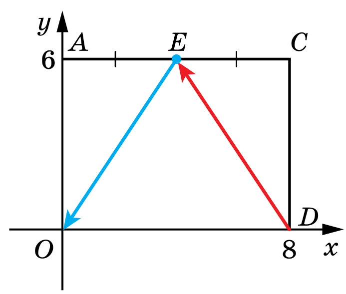
13.14.° Az y mely értékénél lesz a $\vec{b}\,(12; y)$ vektor abszolút értéke 13?

13.15.• A BM szakasz az ABC háromszög súlyvonala, melynek csúcsai: A (3; –5), B (2; –3) és C (–1; 7) pontok. Határozzátok meg a $\overrightarrow{BM}$ vektor abszolút értékét!

13.16.• Az F pont az $ABCD$ téglalap BC oldalát 1 : 2 arányban osztja (13.5. ábra). Határozzátok meg az $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{FD}$ vektorok koordinátáit!



13.5. ábra



13.6. ábra

13.17.• Az E pont az $OACD$ téglalap AC oldalának felezőpontja (13.6. ábra). Határozzátok meg a $\overrightarrow{DE}$ és $\overrightarrow{EO}$ vektorok koordinátáit!

13.18.• Az $\vec{a}$ abszolút értéke 10. Az első koordinátája 2-vel nagyobb, mint a második. Határozzátok meg az $\vec{a}$ vektor koordinátáit!

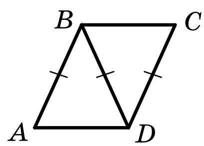
13.19.• A $\vec{c}$ abszolút értéke 2, és koordinátái egyenlők. Határozzátok meg az $\vec{c}$ vektor koordinátáit!

13.20.•• Az A (2; 5) és B (7; 5) pontok az $ABCD$ téglalap csúcsai. A $\overrightarrow{BD}$ vektor abszolút értéke 13. Határozzátok meg a C és D pontok koordinátáit!

13.21.•• Az A (1; 2) és D (1; –6) pontok az $ABCD$ téglalap csúcsai. Az $\overrightarrow{AC}$ vektor abszolút értéke 17. Határozzátok meg a B és C pontok koordinátáit!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

13.22. Az ADB és CBD két egybevágó egyenlő szárú háromszög ($AB = BD = CD$) közös szárral rendelkeznek (13.7. ábra). Határozzátok meg az $ABCD$ négyszög típusát!



13.7. ábra

13.23. A háromszög kerülete 48 cm, a szögfelezője a háromszög oldalát 5 cm és 15 cm-es részekre osztja. Határozzátok meg a háromszög oldalainak hosszát!

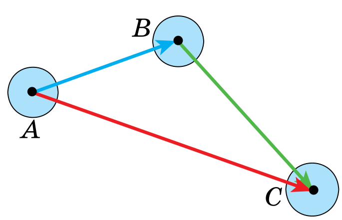
13.24. Az egyenlő szárú trapéz szára a, egyik szöge pedig 60°. A trapéz kör köré van írva. Határozzátok meg a trapéz területét!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

13.25. Lehet-e egy 10 cm-es oldalú négyzetből néhány kört kivágni, hogy átmérőinek összege nagyobb mint 5 cm?

14. A vektorok összeadása és kivonása

Ha a test az A pontból elmozdult a B-be, majd a B-ből a C-be, akkor az elmozdulások összegét az A pontból a C pontba $\overrightarrow{AC}$ vektor formában szokás megadni, amely az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok összege lesz, vagyis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (14.1. ábra)



14.1. ábra

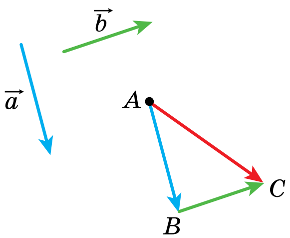
Ez a példa segíthet abban, hogyan kell értelmeznünk a vektorok összegét, vagy hogyan kell összeadni két $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektort.

Egy tetszőleges A pontból felmérünk egy $\overrightarrow{AB}$ vektort, mely egyenlő az $\vec{a}$-ral. Aztán a B pontból felmérjük a $\overrightarrow{BC}$ vektort, amely a $\vec{b}$-ral egyenlő. Az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összegének nevezzük (14.2. ábra) *és így írjuk fel:* $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

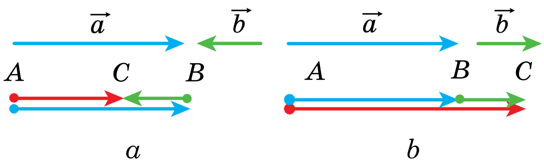
A két vektor összeadásának ezt a módját **háromszög-szabálynak (vagy láncmódszernek)** nevezzük.

Az elnevezés azzal magyarázható, hogy amikor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem kollineárisak, akkor az A, B és C pontok egy háromszög csúcsai lesznek (14.2. ábra).

A háromszög-szabállyal össze lehet adni a kollineáris vektorokat is. A 14.3. ábrán az $\overrightarrow{AC}$ vektor két, az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kollineáris vektor összege lesz.



14.2. ábra



14.3. ábra

Tehát ***tetszőleges három, A, B és C pontokra igaz*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, amely kifejezi a vektorok összegének háromszög-szabályát.

14.1. tétel. ***Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok megfelelő koordinátái $(a_1; a_2)$ és $(b_1; b_2)$, akkor az $\vec{a}+\vec{b}$ koordinátái $(a_1+b_1; a_2+b_2)$ lesznek.***

Bizonyítás. Legyenek az $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$ és $C\ (x_3; y_3)$ pontok olyanok, hogy $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ és $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Ekkor: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Bebizonyítjuk, hogy az $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinátái $(a_1+b_1; a_2+b_2)$ lesznek.

Meghatározzuk az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok koordinátáit: $\vec{a}\ (x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\vec{b}\ (x_3-x_2; y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}\ (x_3-x_1; y_3-y_1)$.

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\ (x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}\ (x_3-x_2+x_2-x_1; y_3-y_2+y_2-y_1).$$

Figyelembe véve, hogy $x_2-x_1=a_1$, $x_3-x_2=b_1$, $y_2-y_1=a_2$, $y_3-y_2=b_2$, azt kapjuk, hogy: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\ (a_1+b_1; a_2+b_2)$. ◀

Megjegyzés. Miközben az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összeadásának háromszög-szabályát írtuk le, akkor az $\vec{a}$ vektor kezdőpontja bármilyen pont lehet. Ha az A pontot A_1-re cseréljük, akkor az $\overrightarrow{AC}$ vektor helyett, amely az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege lesz, egy $\overrightarrow{A_1C_1}$ vektort kapunk. A 14.1. tételből következik, hogy az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{A_1C_1}$ vektorok koordinátái $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$-vel lesznek egyenlők, tehát $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Ez azt jelenti, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege független attól, hogy milyen pontból indul az $\vec{a}$.

A vektorok összeadásának tulajdonságai hasonlók lesznek a számok összeadásának tulajdonságaival.

Bármilyen $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra teljesülnek a következő azonosságok:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ felcserélhetőségi törvény;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ csoportosítási törvény.

Ezeknek a törvényeknek a bizonyításához elegendő összehasonlítani a jobb és bal oldalon a megfelelő vektorok koordinátáit. Végezzétek ezt el önállóan!

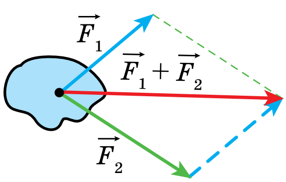
Három vagy több vektor összegének meghatározása úgy történik, hogy először összeadjuk az első és a második vektort, majd a kapott vektorhoz adjuk a harmadikat és így tovább. Például: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

A vektorok felcserélhetőségi és csoportosítási törvényeiből az következik, hogy a vektorok összeadásánál felcserélhetjük az összeadandók helyét, és a zárójeleket is bármilyen módon kitehetjük.

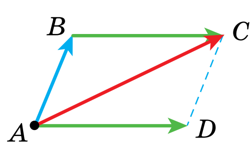
A fizikában gyakran kell összeadni olyan vektorokat, melyeknek közös a kezdőpontjuk. Például ha a testre az $\vec{F_1}$ és $\vec{F_2}$ erő hat (14.4. ábra), akkor a rá ható eredő erő $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ lesz.

Két, egy pontból kiinduló nem kollineáris vektor összeadásakor célszerű **a vektorok összeadásának paralelogramma-szabályát** alkalmazni.

Meg kell határozni az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ nem kollineáris vektorok összegét (14.5. ábra). A $\overrightarrow{BC}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AD}$ vektort szerkesztünk.



14.4. ábra



14.5. ábra

A $\overrightarrow{BC}$ vektort az $\overrightarrow{AD}$-vel párhuzamosan az $\overrightarrow{AD}$ vektor végpontjából vesszük fel. Ekkor $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Mivel a $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok egyenlők, ezért az $ABCD$ négyszög egy olyan paralelogramma lesz, melynek AC az átlója.

A fenti gondolatmenet alapján meg lehet fogalmazni a nem kollineáris $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összeadásának paralelogramma-szabályát.

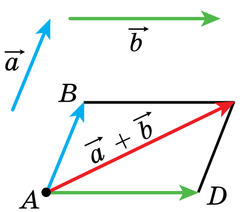
Egy közös A kezdőpontból felvesszük az $\vec{a}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort, és a $\vec{b}$ vektorral egyenlő $\overrightarrow{AD}$ vektort, majd megrajzoljuk az ABCD paralelogrammát (14.6. ábra). *Akkor a keresett $\vec{a}+\vec{b}$ összeg az $\overrightarrow{AC}$ vektor lesz.*

Meghatározás. **Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor különbségének azt a $\vec{c}$ vektort nevezzük, amelynek a $\vec{b}$ vektorral való összege egyenlő az $\vec{a}$ vektorral.**

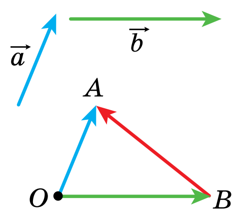
Ezt így írjuk fel: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Bemutatjuk azt, hogyan kell megszerkeszteni a vektorok különbségét, ha adott az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor.

Egy tetszőleges O kezdőpontból felvesszük az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat, melyek megfelelően egyenlők az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal (14.7. ábra). Ekkor a $\overrightarrow{BA}$ vektor egyenlő lesz az $\vec{a}-\vec{b}$ különbséggel. Valóban, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. Tehát a vektorok különbségének meghatározása alapján $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, vagyis $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

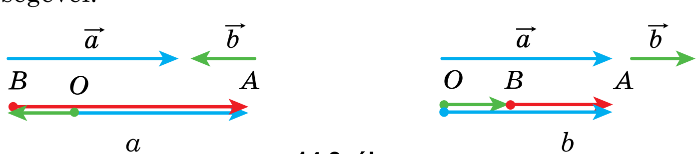


14.6. ábra



14.7. ábra

A 14.7. ábrán az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok nem kollineárisak. A leírt algoritmussal meg lehet a kollineáris vektorok különbségét is határozni. A 14.8. ábrán a $\overrightarrow{BA}$ vektor egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kollineáris vektorok különbségével.



14.8. ábra

Tehát ***bármilyen O, A és B pontra teljesül az*** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ ***egyenlőség,*** amely az egy pontból kiinduló **két vektor különbségének szabályát** adja meg.

14.2. tétel. ***Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok koordinátái megfelelően $(a_1;\ a_2)$ és $(b_1;\ b_2)$, akkor az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$ lesz.***

Bizonyítsátok be önállóan ezt a tételt.

A 14.2. tételből következik, hogy bármilyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektornak létezik egyetlen olyan $\vec{c}$ vektora, melyre teljesül az $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ egyenlőség.

Meghatározás. Két nem nullvektort ellentett vektoroknak nevezünk, ha az abszolút értékük egyenlő, az irányuk pedig ellentétes.

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok ellentettek, akkor azt mondjuk, hogy az $\vec{a}$ **ellentettje** a $\vec{b}$ vektornak, a $\vec{b}$ pedig ellentettje az $\vec{a}$-nak**.**

A nullvektor ellentettjének a nullvektort tartjuk.

Az $\vec{a}$ ellentettjét $-\vec{a}$-ral jelöljük.

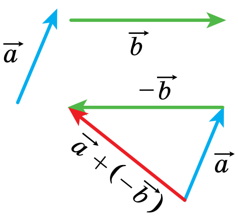
A meghatározásból következik, hogy az $\overrightarrow{AB}$ ellentett vektora a $\overrightarrow{BA}$ vektor lesz. Ezért ***bármilyen A és B pontra teljesül az*** $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ ***egyenlőség.***

A háromszög-szabályból következik, hogy

$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$$

Ebből az egyenlőségből az következik, hogyha az $\vec{a}$ koordinátái $(a_1;\ a_2)$, akkor a $-\vec{a}$ vektornak a koordinátái: $(-a_1;\ -a_2)$ lesznek.

14.3.tétel. ***Bármilyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra teljesül az $\vec{a}-\vec{b}=$ $=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ egyenlőség.***



14.9. ábra

A bizonyításához elegendő összehasonlítani a bal és jobb oldalon a megfelelő koordinátákat. Végezzétek el önállóan!

A 14.3. tétel lehetőséget ad arra, hogy a vektorok kivonását az összeadásra vezessük vissza: *ahhoz, hogy az $\vec{a}$ vektorból kivonjuk a $\vec{b}$ vektort, elegendő az $\vec{a}$ vektorhoz hozzáadni a $-\vec{b}$ vektort* (14.9. ábra).

Feladat. Az $ABCD$ paralelogramma átlói az O pontban metszik egymást (14.10. ábra). Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorokat a $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$ vektorok által!

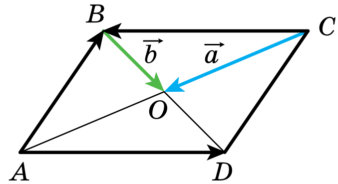
Megoldás. Mivel az O pont az AC és BD szakaszok felezőpontja, ezért $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

Innen a következőt kapjuk:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO}=-\vec{a}-\vec{b}$;

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$;

$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$. ◀



14.10. ábra

?

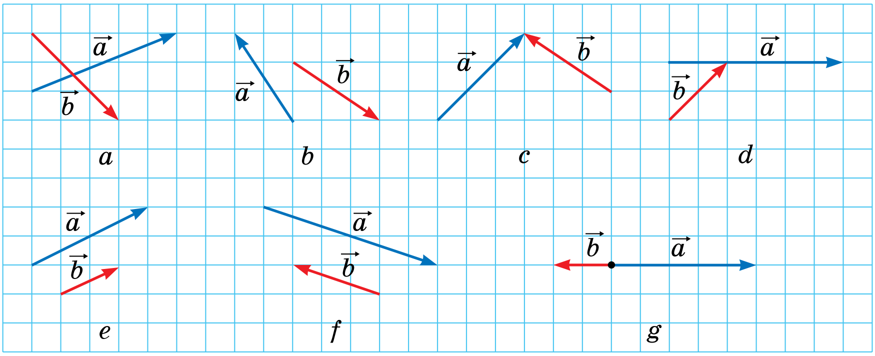
1. Magyarázzátok meg a vektorok összeadásának háromszög-szabályát!
2. Milyen egyenlőség fejezi ki a vektorok összeadásának háromszög-szabályát?
3. Mivel egyenlő az összegvektor (két vektor összegének) koordinátái?
4. Írjátok fel a vektorok összeadásának tulajdonságait kifejező egyenlőségeket!
5. Ismertessétek a vektorok összeadásának paralelogramma-szabályát!
6. Mit nevezünk különbségvektornak (vagy két vektor különbségének)?
7. Milyen egyenlőség fejezi ki az egy pontból induló két vektor különbségét?
8. Mivel egyenlő a különbségvektor (két vektor különbségének) koordinátái?
9. Mit nevezünk ellentett vektoroknak?
10. Hogyan jelöljük az $\vec{a}$ vektor ellentettjét?
11. Hogyan lehet a vektorok különbségét vektorok összegeként felírni?

GYAKORLATI FELADATOK

14.1.° A háromszög-szabály alkalmazásával szerkesszétek meg a 14.11. ábrán látható $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összegét!

14.2.° A paralelogramma-szabály alkalmazásával szerkesszétek meg a 14.11. *a–d* ábrán látható $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összegét!

14.3.° A 14.11. ábrán látható $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor alapján szerkesszétek meg az $\vec{a}-\vec{b}$ vektort!



14.11. ábra

14.4.° Rajzoljatok egy ABC háromszöget! Szerkesszétek meg az A pontból induló:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ vektor ellentett vektorát!

14.5.° Rajzoljatok egy $ABCD$ paralelogrammát! Szerkesszétek meg: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ vektorokat!

14.6.° Rajzoljatok egy MNP háromszöget! Szerkesszétek meg: $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$ vektorokat!

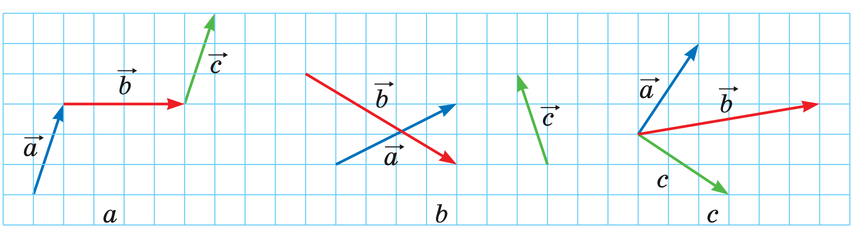
14.7.° Rajzoljatok egy $ABCD$ paralelogrammát! Szerkesszétek meg: $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$ vektorokat!

14.8.° Rajzoljatok egy ABC háromszöget! Szerkesszétek meg: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$ vektorokat!

14.9.° Vegyetek fel négy pontot: M, N, P és Q! Szerkesszétek meg az $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$ vektort!

14.10.° A 14.12. ábrán látható $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok alapján szerkesszétek meg az:

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorokat!

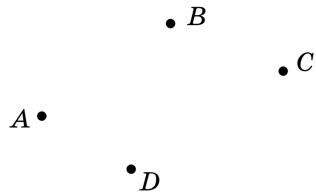


14.12. ábra

14.11.• Rajzoljatok három olyan közös kezdőpontból kiinduló vektort, amelyek abszolút értéke egyenlő, a két vektor összege pedig egyenlő a harmadik vektorral!

14.12.• Rajzoljatok három olyan közös kezdőpontból kiinduló vektort, amelyek abszolút értéke egyenlő, az összegük pedig nullvektort ad!

14.13.• A 14.13. ábrán látható A, B, C és D pontok alapján szerkesszétek meg azt az $\vec{x}$ vektort, melyre igaz az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$ egyenlőség!



14.13. ábra

14.14.• Rajzoljatok egy ABC háromszöget! Szerkesszetek egy olyan X pontot, melyre igaz:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$; 2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$!

GYAKORLATOK

14.15.° Adott az ABC háromszög. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BC}$ vektort, az alábbi vektorokon keresztül:

1) $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$!

14.16.° Adott az $ABCD$ paralelogramma. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{DA}$ vektorokat a $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ vektorokon keresztül!

14.17.° Adott az $ABCD$ paralelogramma. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokat a $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$ vektorokon keresztül!

14.18.° Adott az $ABCD$ paralelogramma. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{DA}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ vektorokon keresztül!

14.19.° Bizonyítsátok be, hogy bármilyen A, B, C és D pontra teljesül a következő egyenlőség:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$!

2) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$;

14.20.° Bizonyítsátok be, hogy bármilyen A, B, C és D pontra teljesül a következő egyenlőség:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$!

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$;

14.21.° Az M és N pontok az ABC háromszög BA és BC oldalainak felezőpontjai. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ és $\overrightarrow{NB}$ vektorokat a $\overrightarrow{BM}=\vec{m}$ és $\overrightarrow{BN}=\vec{n}$ vektorok által!

14.22.° Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja az O pont. Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$!

14.23.° Adott egy $ABCD$ négyszög és egy O pont. Ismert, hogy $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

14.24.° Adott egy $ABCD$ négyszög és egy O pont. Ismert, hogy $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

14.25.° Adott az $\vec{a}\,(4; -5)$ és $\vec{b}\,(-1; 7)$ vektor. Határozzátok meg:

1) az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorok koordinátáit;

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$ és $|\vec{a}-\vec{b}|$!

14.26.° Adottak a következő pontok: $A\,(1; -3)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(-2; -1)$ és $D\,(3; 0)$. Határozzátok meg:

1) az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ és $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$ vektorok koordinátáit!

14.27.° A $\vec{c}\,(2; y)$ vektor az $\vec{a}\,(5; -3)$ és a $\vec{b}\,(x; 4)$ vektorok összege. Határozzátok meg az x és y értékét!

14.28.° Az $\vec{a}\,(x; -1)$ és a $\vec{b}\,(2; y)$ vektorok összege a $\vec{c}\,(-3; 4)$ vektor lesz. Határozzátok meg az x és y értékét!

14.29.° Adott az $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$ vektor. Határozzátok meg az $\overrightarrow{NM}$ vektor koordinátáit!

14.30.° Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala 3 cm. Határozzátok meg az $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$ értékét!

14.31.° Az ABC egyenlő szárú derékszögű ($C\angle = 90°$) háromszög befogója 4 cm. Határozzátok meg az $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$ értékét!

14.32.° Adott az $N\,(3; -5)$ és $F\,(4; 1)$ pont. Határozzátok meg az $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ és $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$ értékeit, ha az O egy tetszőleges pont!

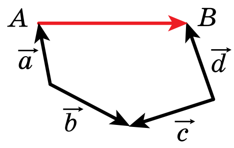
14.33.° Az úszó a párhuzamos partokra merőlegesen $\sqrt{3}$ m/s sebességgel ússza át a folyót. A vízfolyás sebessége 1 m/s. Milyen szög alatt fog haladni az úszó a párhuzamos partokra merőlegeshez képest?

14.34.• Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges n esetén az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokra teljesül a következő egyenlőség

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}!$$

14.35.• Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges A, B, C, D és E pontra teljesül a következő egyenlőség:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}!$$



14.14. ábra

14.36.• Az $\overrightarrow{AB}$ vektort fejezzétek ki az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorokon keresztül (14.14. ábra)!

14.37.• Az $ABCD$ paralelogrammában az M, N és K pontok megfelelően az AB, BC és CD szakaszok felezőpontjai. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat az $\overrightarrow{MN} = \vec{m}$ és $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$ vektorokon keresztül!

14.38.• Az $ABCD$ paralelogrammában az átlók egy O pontban metszik egymást. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat a $\overrightarrow{DO} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!

14.39.• Az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$!

14.40.• Az ABC háromszögben meghúzták a BM oldalfelezőt. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$!

14.41.• Bizonyítsátok be, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem kollineáris vektorokra teljesül az $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ egyenlőtlenség!

14.42.• Bizonyítsátok be, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem kollineáris vektorokra teljesül az $|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ egyenlőtlenség!

14.43.•• Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorokra teljesül az $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ egyenlőség! Bizonyítsátok be, hogy $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$!

14.44.•• Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorokra teljesül az $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ egyenlőség! Bizonyítsátok be, hogy $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$!

14.45.•• Lehet-e nullvektor három olyan vektor összege, melyeknek hosszai:

1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

14.46.•• Az $ABCD$ négyszög átlói az O pontban metszik egymást. Ismert, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

14.47.•• Az $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{EF}$ páronként nem kollineárisak, és $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan háromszög, melynek oldalai az MN, PQ és EF szakaszok hosszaival egyenlők!

14.48.•• Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ paralelogrammára és bármely X pontra teljesül a következő egyenlőség: $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$!

14.49.$^{\bullet\bullet}$ Adott az A és B pont. Határozzátok meg azon X pontok mértani helyét, melyekre teljesül, hogy $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$!

14.50.$^{\bullet\bullet}$ Adott az A és B pont. Határozzátok meg azon X pontok mértani helyét, melyekre teljesül, hogy $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$!

14.51.$^{\bullet\bullet}$ Egy evezős az A pontból 4 perc alatt állandó sebességgel úgy evezett át a 240 m széles folyón, hogy a csónak orrát merőlegesen irányította a szemközti parthoz viszonyítva. A csónak a C pontba ért partot, amely a folyás irányában az A ponttól 48 m-re lejjebb volt. Határozzátok meg a folyó folyásának sebességét, valamint a csónak sebességét a parthoz viszonyítva!

14.52.$^{\bullet\bullet}$ Egy csónak az A pontból állandó sebességgel haladva 100 s alatt kelt át a 300 m széles folyón. A csónak a B pontba éri el a túlsó partot. Az AB egyenes merőleges a folyó mindkét partjára. A folyó folyásának sebessége $\sqrt{3}$ m/s. A folyó partjához képest milyen szög alatt haladt a csónak az átkelés során?

14.53.* Az ABC háromszög súlyvonalai az M pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$!

14.54.* Az ABC háromszög oldalaira kívülről AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A paralelogrammákat szerkesztettek. Az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek páronként nem párhuzamosak. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan háromszög, melynek oldalai megfelelően egyenlők az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 szakaszokkal!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

14.55. Az ABC háromszögbe $CDMK$ paralelogramma van úgy beírva, hogy a C szögük közös, a D, M és K pontok pedig megfelelően a háromszög AC, AB és BC oldalaira illeszkednek. Határozzátok meg a paralelogramma oldalait, ha a kerülete 20 cm, $AC = 12$ cm, $BC = 9$ cm!

14.56. Három kör, melyeknek sugarai 1 cm, 2 cm és 3 cm páronként kívülről érintik egymást. Határozzátok meg annak a körnek a sugarát, melyhez mindhárom kör középpontja illeszkedik!

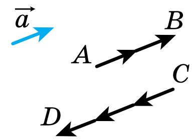
14.57. Bizonyítsátok be, hogy a körbe írt szabályos hatszög területe $\frac{3}{4}$-ed része a kör köré írt hatszög területének!

15. A vektorok számmal való szorzása

Legyen az $\vec{a}$ egy nem nullvektor. A 15.1. ábrán az $\overrightarrow{AB}$ vektor látható, amely $\vec{a}+\vec{a}$, és a $\overrightarrow{CD}$ vektor, amely egyenlő a $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Nyilvánvaló, hogy $|\overrightarrow{AB}|=2|\vec{a}|$ és $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{a}$,

$$|\overrightarrow{CD}|=3|\vec{a}| \text{ és } \overrightarrow{CD}\uparrow\downarrow\vec{a}.$$

Az $\overrightarrow{AB}$ vektort $2\vec{a}$-val jelöljük, és úgy tekintjük, mintha az $\vec{a}$ **-t megszoroznánk 2-vel**. Hasonlóan a $\overrightarrow{CD}$ vektort úgy kapjuk meg, ha az $\vec{a}$-t megszoroznánk –3-mal, és így írjuk: $\overrightarrow{CD}=-3\vec{a}$.



15.1. ábra

Ez a példa megmutatta, hogyan lehet bevezetni a „vektor számmal való szorzását”.

Meghatározás. Az $\vec{a}$ **nem nullvektor és egy** k **szám szorzatának azt a** $\vec{b}$ **vektort nevezzük, melyre teljesülnek a következő feltételek**:

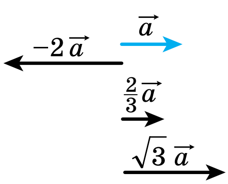
1) $|\vec{b}|=|k|\,|\vec{a}|$;

2) ha $k>0$, **akkor** $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; **ha** $k<0$, **akkor** $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Így írják: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Ha $\vec{a}=\vec{0}$ vagy $k=0$, akkor $k\vec{a}=\vec{0}$.

A 15.2. ábrán az $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$ vektorok láthatók.



15.2. ábra

A meghatározásból következik, hogy $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

A meghatározásból az is következik, ***hogyha*** $\vec{b}=k\vec{a}$, ***akkor az*** $\vec{a}$ ***és*** $\vec{b}$ ***vektorok kollineárisak lesznek.***

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak, akkor a $\vec{b}$ vektort felírhatjuk-e $k\vec{a}$ szorzataként? Erre a kérdésre a következő tétel ad választ.

15.1.tétel. ***Ha az*** $\vec{a}$ és $\vec{b}$ ***vektorok kollineárisak és*** $\vec{a}\neq\vec{0}$, ***akkor létezik egy olyan*** k ***szám, melyre teljesül a következő egyenlőség:*** $\vec{b}=k\vec{a}$.

Bizonyítás. ⊙ Ha $\vec{b}=\vec{0}$, akkor a $k=0$ estén azt kapjuk, hogy $\vec{b}=k\vec{a}$.

Ha $\vec{b} \neq \vec{0}$, akkor $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ vagy $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Legyen $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Vizsgáljuk meg a $\vec{c} = k\vec{a}$ vektort, ahol $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Mivel $k > 0$, ezért $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, tehát $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Ezenkívül $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Vagyis a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok egyirányúak és abszolút értékeik egyenlő. Ebből következik, hogy $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Legyen $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Vizsgáljuk meg a $\vec{c} = k\vec{a}$ vektort, ahol $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Erre az esetre önállóan fejezzétek be a bizonyítást. ◄

15.2. tétel. Ha az $\vec{a}$ koordinátái (a_1, a_2), akkor a $k\vec{a}$ vektornak a koordinátái (ka_1, ka_2) lesznek.

Bizonyítás. ⊛ Ha $\vec{a} = \vec{0}$ vagy $k = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló.

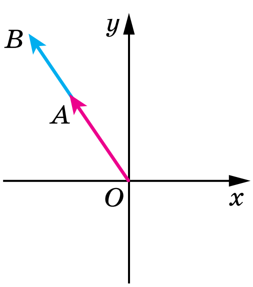
Legyen $\vec{a} \neq \vec{0}$ és $k \neq 0$. Vizsgáljuk meg a $\vec{b}\ (ka_1; ka_2)$ vektort. Bebizonyítjuk, hogy $\vec{b} = k\vec{a}$.

A $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

A koordináta-rendszer kezdőpontjából $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat indítunk, melyek megfelelően egyenlők az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal. Mivel az OA egyenes a koordináta-rendszer kezdőpontjához illeszkedik, ezért egyenlete $ax + by = 0$ alakú.

Ehhez az egyeneshez az $A\ (a_1; a_2)$ pont illeszkedik. Ezért $aa_1 + ba_2 = 0$. Ebből következik, hogy $a\ (ka_1) + b\ (ka_2) = 0$.

Tehát a $B\ (ka_1; ka_2)$ pont is illeszkedni fog az OA egyeneshez, ezért az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok kollineárisak, vagyis $\vec{a} \parallel \vec{b}$.



15.3. ábra

Ha $k > 0$, akkor az a_1 és ka_1 egyforma előjelűek (vagy mindkettő egyenlő nullával). Ugyanilyen tulajdonsággal rendelkeznek a a_2 és ka_2 számok is. Tehát ha $k > 0$, akkor az A és B pontok ugyanahhoz a koordinátanegyedhez tartoznak (vagy ugyanarra a koordináta félegyenesre illeszkednek), ezért az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok egyirányúak (15.3. ábra), vagyis $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Ha $k < 0$, akkor az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok ellentétes irányúak, vagyis $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Tehát megkaptuk, hogy $\vec{b} = k\vec{a}$. ◄

1. következmény. ***Az $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ és $\vec{b}\,(ka_1;\,ka_2)$ vektorok kollineárisak.***

2. következmény. ***Ha az $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ vektorok kollineárisak és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, melyre teljesül, hogy $b_1 = ka_1$ és $b_2 = ka_2$.***

A 15.2. tétel segítségével be lehet bizonyítani a vektor számmal való szorzásának következő tulajdonságait.

Bármilyen k, m számra és bármilyen $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorra igazak a következő azonosságok:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – csoportosítási tulajdonság;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – első széttagolási törvény;

3) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – második széttagolási törvény.

Ezeknek a tulajdonságoknak a bizonyításához elegendő összehasonlítani az egyenlőtlenségek bal és jobb oldalán lévő vektorok megfelelő koordinátáit. Végezzétek el önállóan!

Ezek a tulajdonságok – az algebrai kifejezésekhez hasonlóan – lehetőséget adnak az olyan kifejezések átalakítására, melyek vektorok összegét és különbségét, valamint a vektor számmal való szorzását tartalmazza.

Például: $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

1. feladat. Bizonyítsátok be, ha $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, akkor az O, A és B pontok egy egyeneshez illeszkednek!

Megoldás. A feladat feltételéből következik, hogy $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok kollineárisak. Emellett ezek a vektorok egy pontból, az O pontból indulnak. Tehát az O, A és B pontok egy egyeneshez illeszkednek. ◄

2. feladat. Az M pont az AB szakasz felezőpontja, X pedig egy tetszőleges pont (15.4. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

Megoldás. A háromszög-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy:

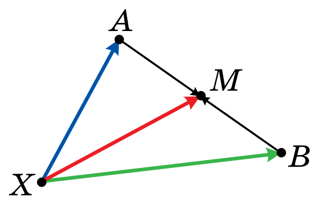
$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

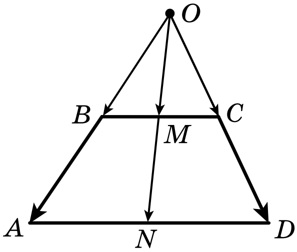
Összeadjuk a két egyenlőséget:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

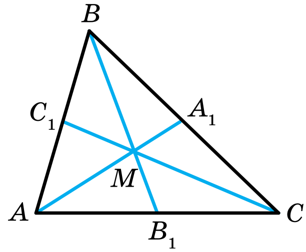
Mivel az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{BM}$ ellentett vektorok, ezért $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ és $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Innen következik, hogy $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$. ◄



15.4. ábra



15.5. ábra



15.6. ábra

3. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz alapjainak felezőpontjai és a szárai meghosszabbításainak metszéspontja egy egyenesen fekszenek!

Megoldás. Legyen az M és N pontok az $ABCD$ trapéz BC és AD oldalainak felezőpontjai, az O pont pedig az AB és CD egyenesek metszéspontja (15.5. ábra).

Alkalmazzuk a 2. feladatot, és felírjuk: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Mivel $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$, ezért $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, ahol k és k_1 valamilyen számok.

Mivel a $BOC\Delta \sim AOD\Delta$, ezért $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Ebből következik, hogy $k = k_1$.

A következőt kapjuk:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = k\overrightarrow{ON}.$$

Az 1. feladatból következik, hogy az O, M és N pontok egy egyeneshez illeszkednek. ◀

4. feladat. Bizonyítsátok be, hogyha az M pont az ABC háromszög súlyvonalainak metszéspontja, akkor $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$!

Megoldás[1]. Legyen az AA_1, BB_1 és CC_1 az ABC háromszög oldalfelezői (15.6. ábra). Ekkor:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right);$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right);$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right).$$

[1] A 14.53. feladat útmutatásában egy másik módszert ajánl a 4. feladat megoldására.

Innen következik, hogy

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}.$$

A háromszög súlyvonalának tulajdonságából következik, hogy $AM=\frac{2}{3}AA_1$. Akkor $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Hasonlóan $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Innen következik, hogy:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}.$$ ◄

?

1. Mit nevezünk az $\vec{a}$ nem nullvektor és a k $(k \neq 0)$ szám szorzatának?
2. Mivel egyenlő a $k\vec{a}$ szorzat, ha $k = 0$ vagy $\vec{a} = \vec{0}$?
3. Mit lehet elmondani az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorokról, ha $\vec{b} = k\vec{a}$, ahol a k egy tetszőleges szám?
4. Adott, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ kollineáris vektorok, és $\vec{a} \neq \vec{0}$. Hogyan lehet a $\vec{b}$ vektort kifejezni az $\vec{a}$ vektoron keresztül?
5. Az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1;\ a_2)$. Mivel lesz egyenlő a $k\vec{a}$ vektor koordinátái!
6. Mit lehet elmondani azokról a vektorokról, melyeknek koordinátái $(a_1;\ a_2)$ és $(ka_1;\ ka_2)$?
7. Milyen összefüggés van az $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ vektorok megfelelő koordinátái között?
8. Írjátok fel a vektor számmal való szorzásának csoportosítási és széttagolási törvényét!

GYAKORLATI FELADATOK

15.1.° Adottak az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok (15.7. ábra). Szerkesszétek meg az alábbi vektort:

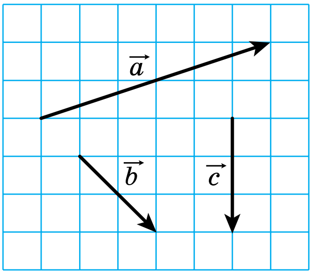
1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$!

15.2.° Adottak az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok (15.7. ábra). Szerkesszétek meg az alábbi vektort:

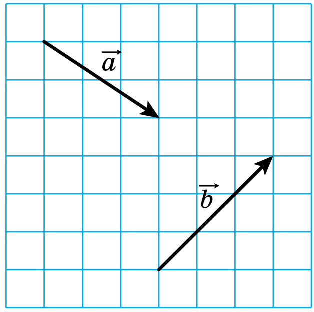
1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$!

15.3.° Adottak az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok (15.8. ábra). Szerkesszétek meg az alábbi vektort:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$!



15.7. ábra



15.8. ábra

15.4.° Szerkesszétek meg az $\vec{x}$ és $\vec{y}$ nem kollineáris vektorokat! Jelöljetek egy tetszőleges O pontot. Az O ponttól kezdődően szerkesszétek meg a következő vektort:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$!

15.5.• Vegyetek fel három, A, B és C pontot úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$!

15.6.• Rajzoljatok egy ABC háromszöget! Jelöljétek meg az AC oldal felezőpontját M-mel!

1) Szerkesszétek meg az M pontból induló $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ vektort!

2) Szerkesszétek meg a B pontból induló $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ vektort!

15.7.• Rajzoljatok egy $ABCD$ ($BC \parallel AD$) trapézt! Jelöljétek az AB oldal felezőpontját M-mel! Szerkesszétek meg az M pontból induló $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ vektort!

15.8.• Rajzoljatok egy ABC háromszöget. Szerkesszétek meg az $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ vektort, melynek a kezdőpontja az AB oldalra illeszkedik, a végpontja pedig a BC oldalra!

GYAKORLATOK

15.9.° Határozzátok meg a $3\vec{m}$ és a $-\frac{1}{2}\vec{m}$ vektor abszolút értékét, ha $|\vec{m}|=4$!

15.10.° A $3\vec{a}$ és $-\frac{1}{3}\vec{a}$ vektorok közül melyik lesz egyirányú az $\vec{a}$ vektorral, ha $\vec{a} \neq \vec{0}$?

15.11.° Állapítsátok meg, hogy egyirányúak vagy ellentétes irányúak-e az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok, ha:

1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$!

Határozzátok meg az $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ arányt!

15.12.° Fejezzétek ki a $\vec{p}$ vektort az egyenlőségekből:

1) $\vec{q} = 3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC} = -2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p} = \vec{q}$; 4) $2\vec{p} = 3\vec{q}$!

15.13.° Az $ABCD$ paralelogrammában az O pont az átlók metszéspontja. Fejezzétek ki:

1) az $\overrightarrow{AO}$ vektort az $\overrightarrow{AC}$ vektoron keresztül;
2) a $\overrightarrow{BD}$ vektort a $\overrightarrow{BO}$ vektoron keresztül;
3) a $\overrightarrow{CO}$ vektort az $\overrightarrow{AC}$ vektoron keresztül!

15.14.° Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja az O pont, és $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AO}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokon keresztül!

15.15.° Az $ABCD$ paralelogramma AC átlóján úgy vettünk fel egy M pontot, hogy $AM : MC = 1 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{MC}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokon keresztül, ha $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$!

15.16.° Az $ABCD$ paralelogrammában az M pont a BC szakasz felezőpontja, az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{MD}$ vektorokat az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokon keresztül!

15.17.° Az ABC háromszögben az M és N pontok megfelelően az AB és BC oldalak felezőpontjai. Fejezzétek ki:

1) az $\overrightarrow{MN}$ vektort a $\overrightarrow{CA}$ vektoron keresztül;
2) az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\overrightarrow{MN}$ vektoron keresztül!

15.18.° A 18 cm hosszú AB szakaszon úgy jelöltek egy C pontot, hogy $BC = 6$ cm. Fejezzétek ki:

1) az $\overrightarrow{AB}$ vektort az $\overrightarrow{AC}$ vektoron keresztül;
2) a $\overrightarrow{BC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ vektoron keresztül;
3) az $\overrightarrow{AC}$ vektort a $\overrightarrow{BC}$ vektoron keresztül!

15.19.° Adott az $\vec{a}$ **(–4; 2)** vektor. Határozzátok meg az alábbi vektorok koordinátáit és abszolút értékeit: $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ és $\frac{3}{2}\vec{a}$!

15.20.° Adott a $\vec{b}$ **(–6; 12)** vektor. Határozzátok meg az alábbi vektorok koordinátáit és abszolút értékeit: $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$ és $\frac{2}{3}\vec{b}$!

15.21.° Adott az $\vec{a}$ **(3; –2)** vektor. A $\vec{b}$ **(–3; –2)**, $\vec{c}$ **(–6; 4)**, $\vec{d}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{e}\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ és $\vec{f}\left(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ vektorok közül melyek lesznek kollineárisak az $\vec{a}$ vektorral?

15.22.° Adottak az $\vec{a}$ **(3; –3)** és $\vec{b}$ **(–16; 8)** vektorok. Határozzátok meg a következő vektorok koordinátáit:

1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$!

15.23.° Adottak az $\vec{m}$ **(–2; 4)** és $\vec{n}$ **(3; –1)** vektorok. Határozzátok meg a következő vektorok koordinátáit:

1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$!

15.24.• Az ABC háromszög AB és AC oldalain megfelelően jelölték az M és N pontokat úgy, hogy $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{MN}$ vektort a $\overrightarrow{CB}$ vektoron keresztül!

15.25.• Az O, A és B pontok egy egyeneshez illeszkednek. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan k szám, melyre teljesül az $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$ egyenlőség!

15.26.• Az $ABCD$ paralelogramma AB és BC oldalain úgy jelöltek megfelelően M és N pontokat, hogy teljesülnek a következő egyenlőségek: $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{NM}$ vektort az $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ vektorokon keresztül!

15.27.• Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalain úgy jelöltek megfelelően E és F pontokat, hogy teljesülnek a következő egyenlőségek: $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ vektorokon keresztül!

15.28.• Bizonyítsátok be, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok kollineárisak, ha A (1; 1), B (3; –2), C (–1; 3), D (5; –6)!

15.29.• Az $\vec{a}$ **(1; –2)**, $\vec{b}$ **(–3; –6)**, $\vec{c}$ **(–4; 8)** és $\vec{d}$ **(–1; –2)** vektorok között keressetek kollineáris párokat!

15.30.• Adott az $\vec{m}$ **(4; –6)**, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ és $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$ vektorok. Nevezzétek meg az egyirányú és az ellentétes irányú vektorokat!

15.31.• Határozzátok meg az x értékét, melynél az $\vec{a}$ **(1;** x**)** és $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ vektorok kollineárisak lesznek!

15.32.• Az y mely értékénél lesznek az $\vec{a}$ **(2; 3)** és $\vec{b}$ **(−1;** y**)** vektorok kollineárisak?

15.33.• Adott a $\vec{b}$ **(−3; 1)** vektor. Határozzátok meg annak a kollineáris vektornak a koordinátáit, amelynek abszolút értéke kétszer nagyobb a $\vec{b}$ vektor abszolút értékénél! Hány megoldása van a feladatnak?

15.34.• Határozzátok meg az $\vec{n}$ **(5; −12)** vektorral ellentétes $\vec{m}$ vektor koordinátáit, ha $\left|\vec{m}\right| = 39$!

15.35.• Határozzátok meg a $\vec{b}$ **(−9; 12)** vektorral egyirányú $\vec{a}$ vektor koordinátáit, ha $\left|\vec{a}\right| = 5$!

15.36.• Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz, ha csúcsai az A (–1; 2), B (3; 5), C (14; 6) és D (2; –3) pontok!

15.37.• Bizonyítsátok be, hogy az A (–1; 3), B (4; –7) és D (–2; 5) pontok egy egyeneshez illeszkednek!

15.38.• Adott az $\vec{a}$ **(1; −4),** $\vec{b}$ **(0; 3)** és $\vec{c}$ **(2; −17)** vektor. Határozzátok meg azokat az x és y számokat, melyekre teljesül a $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ egyenlőség!

15.39.•• Az $ABCD$ paralelogramma átlói az O pontban metszik egymást. A BC oldalán jelöltek egy K pontot úgy, hogy $BK : KC = 2 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{OK}$ vektort az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!

15.40.•• Az $ABCD$ négyszög átlói az O pontban metszik egymást úgy, hogy $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{DA}$ vektorokat az $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!

15.41.•• Az ABC háromszög AB és BC oldalain megfelelően jelölték a K és F pontokat úgy, hogy $AK : KB = 1 : 2$ és $BF : FC = 2 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$ és $\overrightarrow{KF}$ vektorokat a $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$ és $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$ vektorokon keresztül!

15.42.•• Az ABC háromszög AC és BC oldalain megfelelően jelölték az M és N pontokat úgy, hogy $AM : MC = 1 : 3$ és $BN : NC = 4 : 3$. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ és $\overrightarrow{NM}$ vektorokat a $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$ és $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$ vektorokon keresztül!

15.43.•• Az ABC háromszög súlyvonalai az M pontban metszik egymást. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BM}$ vektort a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokon keresztül!

15.44.•• Vektorok segítségével bizonyítsátok be a háromszög középvonaláról szóló tételt!

15.45.•• Az M_1 és M_2 pontok az A_1B_1 és A_2B_2 szakaszok megfelelő felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$!

15.46.•• A 15.45. feladat felhasználásával bizonyítsátok be a trapéz középvonaláról szóló tételt!

15.47.•• Az M és N pontok az $ABCD$ négyszög AC és BD átlóinak a megfelelő felezőpontjai. A 15.45. feladat felhasználásával bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$!

15.48.•• Az M és N pontok az $ABCD$ trapéz ($BC \parallel AD$) AC és BD átlóinak megfelelő felezőpontjai. A 15.45. feladat felhasználásával bizonyítsátok be, hogy $MN \parallel AD$!

15.49.•• Az ABC háromszög AC oldalán úgy jelöltek egy M pontot, hogy $AM : MC = 2 : 3$. Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$!

15.50.•• Az ABC háromszög BC oldalán úgy jelöltek egy D pontot, hogy $BD : DC = 1 : 2$. Bizonyítsátok be, hogy $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$!

15.51.* Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan háromszög, melynek oldalai az adott háromszög súlyvonalaival egyenlők!

15.52.* Az M_1 és M_2 pontok az A_1B_1 és A_2B_2 szakaszok megfelelő felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az A_1A_2, M_1M_2 és B_1B_2 szakaszok felezőpontjai egy egyeneshez illeszkednek!

15.53.* Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalán és az AC átlóján megfelelően jelöltek egy M és N pontot úgy, hogy $AM = \frac{1}{5}AD$ és $AN = \frac{1}{6}AC$. Bizonyítsátok be, hogy az M, N és B pontok egy egyeneshez illeszkednek!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

15.54. Az egyenlő szárú trapéz kisebbik alapja és szára is egyaránt 12 cm, egyik szöge pedig 60°-os. Mivel egyenlő a trapéz középvonala?

15.55. A paralelogramma átlói 6 cm és 16 cm, az egyik oldala pedig 7 cm. Határozzátok meg a trapéz átlói közötti szögét és a területét!

15.56. Egy húr az R sugarú körvonalat olyan ívekre osztja, melyek aránya 2 : 1! Határozzátok meg a húr hosszát!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

15.57. Adott egy 101×101 négyzetrácsos négyzet. A négyzet kis négyzeteit úgy festették sorba feketére és fehérre, hogy a középső négyzet fekete lett. Minden különböző színű négyzetpárra egy vektort fektettek úgy, hogy a kezdőpontja a fekete négyzet középpontja, végpontja pedig a fehér négyzet középpontja legyen. Bizonyítsátok be, hogy az összes így keletkezett vektor összege nullvektor!

A VEKTOROK ALKALMAZÁSA

A feladatok megoldását gyakran vektorok alkalmazásával végzik, és eközben a következő lemmát is használják:

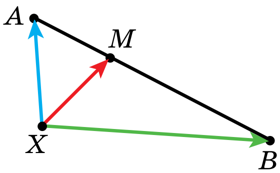
Lemma. ***Legyen az M pont az AB szakasz olyan pontja, melyre teljesül az*** $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ ***egyenlőség*** (15.9. ábra). ***Ekkor bármilyen X pontra igaz lesz a következő egyenlőség:***

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Bizonyítás. Mivel $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$,

és $AM = \frac{m}{m+n}AB$, ezért $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Felírjuk, hogy $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.



15.9. ábra

Mivel az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, ebből azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right);$$

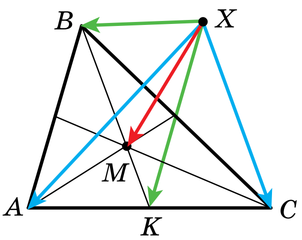
$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangleleft$$

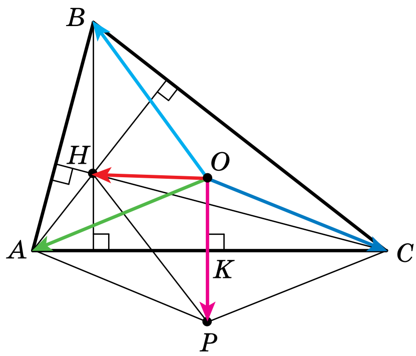
Megjegyezzük, hogy ez a lemma a 15. pont 2. feladatának általánosítása.

Feladat. Legyen az M pont az ABC háromszög oldalfelezőinek a metszéspontja és X egy tetszőleges pont (15.10. ábra). Bizonyítsátok be, hogy

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$$



15.10. ábra



15.11. ábra

Megoldás. Legyen a K pont az AC szakasz felezőpontja. Ez azt jelenti, hogy $BM : MK = 2 : 1$. Ekkor, felhasználva az előbbi lemmát, fel lehet írni: $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$ ◀

Bebizonyítjuk a vektoregyenlőséget, amely összeköti a háromszög két nevezetes[1] pontját.

Tétel. ***Ha az ABC háromszögben a H a háromszög ortocentruma, O pedig a köré írt körvonal középpontja, akkor igaz a következő egyenlőség***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Bizonyítás. A (*) egyenlőség a derékszögű háromszög esetén szemmel látható.

Legyen az ABC háromszög nem derékszögű. Az O pontból OK merőlegest bocsátunk az ABC háromszög AC oldalára (15.11. ábra). A 8. osztályban bebizonyítottuk, hogy $BH = 2OK$.

Az OK félegyenesen úgy jelölünk egy P pontot, hogy $OK = KP$. Ekkor $BH = OP$. Mivel a $BH \parallel OP$, ezért a $HBOP$ négyszög paralelogramma lesz.

A paralelogramma-szabály alapján $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Mivel a K pont az AC szakasz felezőpontja, ezért az $AOCP$ négyszög átlói metszik és metszéspontjukban felezik egymást. Ebből következik, hogy $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

A következőt kaptuk: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◀

Térjünk vissza az $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$ vektoregyenlőséghez,

[1] A háromszög nevezetes pontjairól bővebben a 8. osztályos mértankönyvben olvashattok.

ahol az M pont az ABC háromszög súlyvonalainak metszéspontja. Mivel X egy tetszőleges pont, ezért az egyenlőség akkor is teljesül, ha az X pontnak az O pontot fogjuk venni, ahol az O az ABC háromszög köré írt körvonal középpontja.

Ebből azt kapjuk, hogy: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$

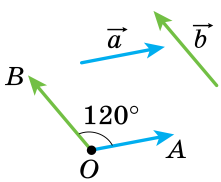
Figyelembe véve a (*) egyenlőséget: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}.$

Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy az O, M és H pontok egy egyeneshez illeszkednek, ezt az egyenest pedig **Euler-egyenesnek** nevezzük. Emlékeztetünk arra, hogy ezt a nevezetes tulajdonságot a 8. osztályban egy másik módszerrel már bebizonyítottuk.

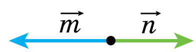
16. A vektorok skaláris szorzata

Legyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ két nem nullvektor és nem egyirányú vektorok (16.1. ábra). Indítsunk egy tetszőleges O pontból olyan $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorokat, melyek megfelelően egyenlők az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal. Az AOB szöget az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ **vektorok közötti szögnek** nevezzük.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöget $(\vec{a}, \vec{b})\angle$ jelöljük. Például a 16.1. ábrán $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 120°$, a 16.2. ábrán pedig $(\vec{m}, \vec{n})\angle = 180°$.



16.1. ábra



16.2. ábra

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egyirányúak, akkor úgy tekintjük, hogy az $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 0°$. Ha legalább az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ közül az egyik nullvektor, akkor szintén úgy tekintjük, hogy $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 0°$.

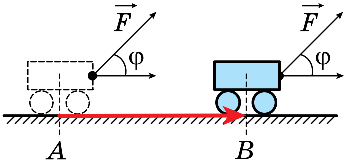
Tehát tetszőleges $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra igaz a következő egyenlőség:

$$0° \leqslant (\vec{a}, \vec{b})\angle \leqslant 180°.$$

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat **merőlegeseknek** nevezzük, ha a köztük lévő szög 90°. Ezt így írjuk: $\vec{a} \perp \vec{b}.$

Már ismeritek a vektorok összeadásának és kivonásának, valamint a vektorok számmal való szorzásának szabályát. Fizikából már tudjátok, hogyha állandó $\vec{F}$ erő hatására a test A pontból B pontba jut

(16.3. ábra), akkor mechanikai munkavégzés történik, amely egyenlő $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, ahol a $\varphi = (\vec{F}, \overrightarrow{AB})\angle$.



16.3. ábra

A fentiek alapján célszerű lenne bevezetni egy újabb műveletet a vektorokkal.

Meghatározás. Két vektor skaláris szorzatának e vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát nevezzük.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\vec{a}\cdot\vec{b}$-vel jelöljük.

Tehát:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})\angle}$$

Ha az $\vec{a}$ vagy a $\vec{b}$ vektorok közül legalább az egyik nullvektor, akkor természetesen az $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Legyen $\vec{a} = \vec{b}$. Akkor $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Az $\vec{a}\cdot\vec{a}$ skaláris szorzatot az $\vec{a}$ **vektor skaláris négyzetének** nevezzük, és $\vec{a}^2$-nek jelöljük.

Így azt kaptuk, hogy $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, vagyis ***a vektor skaláris négyzete az abszolút értékének négyzetével egyenlő***.

16.1. tétel. ***Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha a két vektor merőleges egymásra***.

Bizonyítás. ⊙ Legyen $\vec{a}\perp\vec{b}$. Bebizonyítjuk, hogy $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Adott: $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 90°$. Ebből következik, hogy

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Legyen $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Bebizonyítjuk, hogy $\vec{a}\perp\vec{b}$.

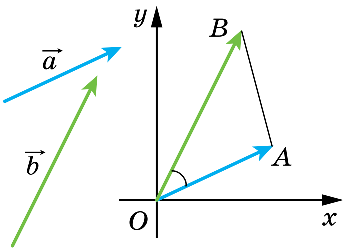
Felírjuk, hogy $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})\angle = 0$. Mivel $|\vec{a}| \neq 0$ és $|\vec{b}| \neq 0$, ezért a $\cos(\vec{a}, \vec{b})\angle = 0$. Ebből következik, hogy $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 90°$, vagyis $\vec{a}\perp\vec{b}$. ◄

16.2. tétel. ***Az $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ vektorok skaláris szorzatát a következő képlettel lehet kiszámítani:***

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Bizonyítás. Először megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem kollineárisak.

A közös O kezdőpontból indított $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok megfelelően egyenlők az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal (16.4. ábra). Ekkor az $(\vec{a},\, \vec{b})\angle = AOB\angle$.



16.4. ábra

Az AOB háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cdot\cos AOB\angle.$

Innen

$$OA\cdot OB\cdot\cos AOB\angle = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Mivel $|\vec{a}| = OA$ és $|\vec{b}| = OB$, ezért $OA\cdot OB\cdot\cos AOB\angle = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ezenkívül az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Tehát $\overrightarrow{AB}\,(b_1 - a_1;\, b_2 - a_2)$.

Ezekből következik, hogy $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Felhasználva a vektor abszolút értékének koordinátái alapján történő meghatározásának képletét, azt kapjuk, hogy

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

A jobb oldal egyszerűsítése után a következőt kapjuk:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak.

Ha $\vec{a} = \vec{0}$ vagy $\vec{b} = \vec{0}$, akkor természetesen teljesül az $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Ha $\vec{a} \neq \vec{0}$ vagy $\vec{b} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, hogy $\vec{b} = k\vec{a}$, vagyis $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Ha $k > 0$, akkor $(\vec{a},\, \vec{b})\angle = 0°$. Ekkor:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{a}) = |\vec{a}|\,|k\vec{a}|\cos 0° = |k|\,|\vec{a}|^2 = k\left(a_1^2 + a_2^2\right) =$$

$$= a_1\cdot ka_1 + a_2\cdot ka_2 = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Azt az esetet, amikor $k < 0$, önállóan vizsgáljátok meg. ◀

Következmény. ***Két, $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ nem nullvektor közötti szög koszinuszát a következő képlettel lehet kiszámítani:***

$$\boxed{\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\angle = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \qquad (*)$$

Bizonyítás. ⊙ Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatának meghatározásából következik, hogy $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\angle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. A 16.2. tétel és a vektor abszolút értékének képlete felhasználásával megkapjuk a (*). ◀

A 16.2. tétel segítségével könnyen bebizonyíthatjuk a skaláris szorzat következő tulajdonságait.

Bármilyen $\vec{a}$, $\vec{b}$ *és* $\vec{c}$ vektorra és bármilyen k számra teljesülnek a következő egyenlőségek:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – felcserélhetőségi törvény;

2) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ – csoportosítási törvény;

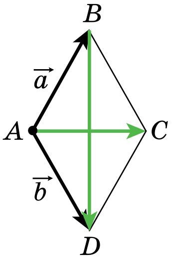
3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ – széttagolási törvény.

A fenti egyenlőségek bizonyításához elegendő a skaláris szorzatokat koordinátás alakban felírni, majd összehasonlítani az egyenlőségek bal és jobb oldalát. Végezzétek el ezt önállóan.

Ezek, valamint a vektor összeadásának és a vektorok számmal való szorzásának tulajdonságai – az algebrai kifejezések átalakításához hasonlóan – lehetőséget adnak az olyan kifejezések átalakítására, melyek skaláris szorzást is tartalmaznak.

Például: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{a} + \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{b} =$

$= \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$



16.5. ábra

1. feladat. Vektorok segítségével, bizonyítsátok be, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

Megoldás. A 16.5. ábrán az $ABCD$ rombusz látható. Legyen $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Nyilvánvaló, hogy $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. A paralelogramma-szabály alapján: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ és $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$. Ebből következik, hogy

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0.$$

Tehát $AC \perp BD$. ◀

2. feladat. Adott, hogy $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\vec{b})\angle=120°$. Határozzátok meg a $|2\vec{a}-3\vec{b}|$ értékét!

Megoldás. Mivel a vektor skaláris négyzete egyenlő abszolút értékének négyzetével, ezért $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})^2$. Innen:

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=$$

$$=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\angle+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{36+18+9}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

Felelet: $3\sqrt{7}$. ◀

3. feladat. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB=4$ cm, $BC=6\sqrt{3}$ cm, $ABC\angle=30°$. Határozzátok meg a BM súlyvonal hosszát!

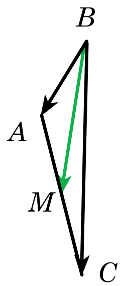
Megoldás. A 15. pont 2. feladatának felhasználásával felírjuk: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ (16.6. ábra). Innen,

$$\overrightarrow{BM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2)=$$

$$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos ABC\angle+|\overrightarrow{BC}|^2)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(16+48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+108\right)=49.$$



16.6. ábra

Tehát $BM^2=49$; $BM=7$ cm.

Felelet: 7 cm. ◀

?

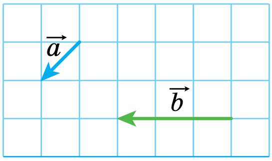
1. Magyarázzátok el, hogyan lehet megszerkeszteni két nem nullvektor és nem egyirányú vektor közötti szöget?
2. Mivel egyenlő két egyirányú vektor közötti szög?
3. Mivel egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szög, ha legalább az egyik nullvektor?
4. Hogyan jelölik az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöget?
5. Milyen határok közzé esik bármilyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor közötti szög értéke?
6. Milyenek a merőleges vektorok?
7. Mit nevezünk két vektor skaláris szorzatának?
8. Mit nevezünk a vektor skaláris négyzetének?

9. Mivel egyenlő a vektor skaláris négyzete?
10. Fogalmazzátok meg két nem nullvektor merőlegességének feltételét!
11. Mi következik az $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ egyenlőségből, ha $\vec{a} \neq \vec{0}$ és $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. Hogyan határozzuk meg a vektorok skaláris szorzatát, ha adottak a koordinátáik?
13. Hogyan határozzuk meg két nem nullvektor közötti szög koszinuszát, ha adottak a koordinátáik?
14. Írjátok fel a vektorok skaláris szorzatának tulajdonságait!

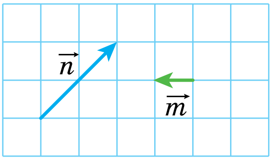
GYAKORLATI FELADATOK

16.1.° Szerkesszétek meg azt a szöget, amely egyenlő az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöggel (16.7. ábra)!

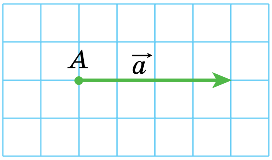
16.2.° Szerkesszétek meg azt a szöget, amely egyenlő az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok közötti szöggel (16.8. ábra)!



16.7. ábra



16.8. ábra



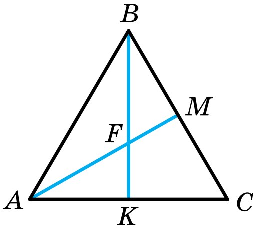
16.9. ábra

16.3.° A 16.9. ábrán az $\vec{a}$ vektor látható (egy négyzetrács mérete 0,5 cm). Az A ponttól mérjétek fel a $\vec{b}$ vektort, ha $|\vec{b}| = 3$ cm és $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 120°$! Hány megoldása van a feladatnak?

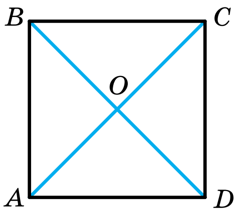
GYAKORLATOK

16.4.° A 16.10. ábrán az ABC egyenlő oldalú háromszög látható, az AM és a BK súlyvonalak az F pontban metszik egymást. Határozzátok meg a vektorok közötti szöget:

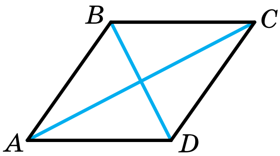
1) $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$;
2) $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{AC}$;
3) $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AM}$;
4) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AM}$;
5) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BK}$;
6) $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{BK}$;
7) $\overrightarrow{CF}$ és $\overrightarrow{AB}$!



16.10. ábra



16.11. ábra



16.12. ábra

16.5.° A 16.11. ábrán az $ABCD$ négyzet látható, melynek átlói az O pontban metszik egymást. Határozzátok meg a vektorok közötti szöget:

1) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CA}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ és $\overrightarrow{CD}$!

2) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{CB}$;

16.6.° Határozzátok meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5,\ (\vec{a}, \vec{b})\angle = 60°$;

2) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2\sqrt{2},\ (\vec{a}, \vec{b})\angle = 135°$;

3) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 1,\ (\vec{a}, \vec{b})\angle = 0°$;

4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2},\ |\vec{b}| = 6,\ (\vec{a}, \vec{b})\angle = 180°$;

5) $|\vec{a}| = 0{,}3,\ |\vec{b}| = 0,\ (\vec{a}, \vec{b})\angle = 137°$!

16.7.° Határozzátok meg az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2},\ |\vec{n}| = 4,\ (\vec{m}, \vec{n})\angle = 45°$;

2) $|\vec{m}| = 8,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ (\vec{m}, \vec{n})\angle = 150°$!

16.8.° Határozzátok meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $\vec{a}\,(2; -1),\ \vec{b}\,(1; -3)$; 3) $\vec{a}\,(1; -4),\ \vec{b}\,(8; 2)$!

2) $\vec{a}\,(-5; 1),\ \vec{b}\,(2; 7)$;

16.9.° Határozzátok meg az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $\vec{m}\,(3; -2),\ \vec{n}\,(1; 0)$; 2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right),\ \vec{n}\,(6; 9)$!

16.10.° A 16.12. ábrán az $ABCD$ rombusz látható, melyben $AB = 6$, $ABC\angle = 120°$. Határozzátok meg a következő vektorok skaláris szorzatát:

1) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{AC}$; 7) $\overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{AD}$!

2) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{DA}$; 6) $\overrightarrow{DB}$ és $\overrightarrow{DC}$;

16.11.° Az ABC háromszögben adott, hogy $C\angle = 90°$, $A\angle = 30°$, $CB = 2$. Határozzátok meg a következő vektorok skaláris szorzatát:
1) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ és $\overrightarrow{BA}$!

16.12.° Mekkora a 6 N mértékű erő munkavégzése, amely 7 m távolságra elmozdítja a testet, ha az erő és az elmozdulás iránya közötti szög 60°!

16.13.° Határozzátok meg az $\vec{a}\,(1;\,-2)$ és $\vec{b}\,(2;\,-3)$ vektorok közötti szög koszinuszát!

16.14.° Milyen előjelű lesz a vektorok skaláris szorzata, ha a köztük lévő szög:
1) hegyes; 2) tompa?

16.15.° Ismert, hogy a vektorok skaláris szorzata:
1) pozitív szám; 2) negatív szám.
Állapítsátok meg a köztük lévő szög típusát!

16.16.• Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala 1 egység, az AA_1 és BB_1 súlyvonalai az M pontban metszik egymást. Számítsátok ki:
1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$!

16.17.• Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldala 1 egység, középpontja az O pont. Számítsátok ki:
1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$!

16.18.• Az x mely értékénél lesznek az $\vec{a}\,(3;\,x)$ és $\vec{b}\,(1;\,9)$ vektorok merőlegesek?

16.19.• Adott, hogy $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Bizonyítsátok be, hogy az $\vec{a}\,(-x;\,y)$ és $\vec{b}\,(y;\,x)$ vektorok merőlegesek!

16.20.• Az x mely értékénél lesznek $\vec{a}\,(2x;\,-3)$ és $\vec{b}\,(x;\,6)$ vektorok merőlegesek?

16.21.• Az y mely értékénél lesz az $\vec{a}\,(4;\,y)$ és $\vec{b}\,(3;\,-2)$ vektorok skaláris szorzata 14?

16.22.• Az x mely értékeinél lesz az $\vec{a}\,(2;\,5)$ és $\vec{b}\,(x;\,4)$ vektorok közötti szög
1) hegyes; 2) tompa?

16.23.• Határozzátok meg a $\vec{b}$ vektor koordinátáit, amely kollineáris az $\vec{a}\,(3;\,-4)$ vektorral, ha $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$!

16.24.• Adott, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem kollineáris vektorok és $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. Az x mely értékeinél lesznek az $\vec{a} + x\vec{b}$ és az $\vec{a} - x\vec{b}$ vektorok merőlegesek?

16.25.• Az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektorok merőlegesek. Bizonyítsátok be, hogy $|\vec{a}|=|\vec{b}|$!

16.26.• Adott, hogy $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b})\angle=45°$. Határozzátok meg a $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$ skaláris szorzatot!

16.27.• Határozzátok meg az $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ kaláris szorzatot, ha

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ (\vec{a}, \vec{b})\angle=120°!$$

16.28.• Adott, hogy $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a}, \vec{b})\angle=150°$. Határozzátok meg a $|2\vec{a}+5\vec{b}|$ értékét!

16.29.• Adott, hogy $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $(\vec{m}, \vec{n})\angle=60°$. Határozzátok meg a $|2\vec{m}-3\vec{n}|$ értékét!

16.30.• Az $ABCD$ négyszög csúcsai A (3; –2), B (4; 0), C (2; 1) és D (1; –1). Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap!

16.31.• Az $ABCD$ négyszög csúcsai A (–1; 4), B (–2; 5), C (–1; 6) és D (0; 5). Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet!

16.32.• Határozzátok meg a háromszög szögeinek koszinuszait, ha csúcsai az A (1; 6), B (–2; 3) és C (2; –1) pontok!

16.33.• Határozzátok meg annak a háromszögnek a szögeit, melynek csúcsai az A (0; 6), $B(4\sqrt{3}; 6)$ és $C(3\sqrt{3}; 3)$pontok!

16.34.• Bizonyítsátok be, hogy bármilyen $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorra teljesül a következő egyenlőtlenség: $-|\vec{a}||\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$!

16.35.• Állapítsátok meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorok kölcsönös helyzetét, ha:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$!

16.36.•• Határozzátok meg az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok közötti szöget, ha:

$$(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11,\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3!$$

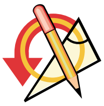
16.37.•• Határozzátok meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöget, ha: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$!

16.38.•• Az ABC háromszögben $C\angle=90°$, $AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Bizonyítsátok be, hogy az AK és CM súlyvonalak merőlegesek egymásra!

16.39.•• Az $ABCD$ négyszögben az AC és BD átlók merőlegesek, és az O pontban metszik egymást. Adott, hogy $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Határozzátok meg az AB és DC egyenesek közötti szöget!

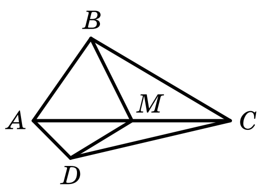
16.40.•• Az ABC háromszögben meghúztuk a BD súlyvonalat. Adott, hogy $DBC\angle = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Határozzátok meg az ABD szöget!

16.41.* Az ABC háromszög AB és BC oldalára kívülről $ABMN$ és $BCKF$ négyzeteket szerkesztettek. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög BD súlyvonala merőleges az MF egyenesre!



ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

16.42. Az M pont az $ABCD$ négyszög AC átlójának felezőpontja (16.13. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $ABMD$ és $CBMD$ négyszögek területei egyenlők!



16.13. ábra

16.43. A rombusz átlóinak metszéspontjából bocsátott merőleges a rombusz oldalát olyan szakaszokra osztja, melyek közül az egyik 7 cm-rel hosszabb, mint a másik. Határozzátok meg a rombusz kerületét, ha magassága 24 cm!

16.44. A szabályos háromszög oldala $6\sqrt{3}$ cm, magasságára, mint átmérőre körvonalat szerkesztünk. Határozzátok meg a háromszögön kívüli körív hosszát!

4. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Melyik lesz vektormennyiség az alábbi mennyiségek közül?
A) tömeg; C) sebesség;
B) térfogat; D) idő.

2. Mivel egyenlő annak a vektornak az abszolút értéke, melynek a kezdő- és végpontja egybeesik?
A) 1; C) 5;
B) –1; D) 0.

3. Adott az $ABCD$ paralelogramma. Melyik egyenlőség igaz?
A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; C) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;
B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; D) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

4. Adott, hogy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Melyik állítás igaz?
A) a B pont az AM szakasz felezőpontja;
B) az A pont az MB szakasz felezőpontja;
C) az M pont az AB szakasz felezőpontja;
D) az M pont az AMB egyenlő szárú háromszög csúcsa.

5. Adott az A (–3; 4) és B (1; –8) pont. Az M pont az AB szakasz felezőpontja. Határozzátok meg az $\overrightarrow{AM}$ vektor koordinátáit!
A) (2; –6); C) (–2; –6);
B) (–2; 6); D) (6; –2).

6. Az x mely értékénél lesznek az $\vec{a}\,(x;\,2)$ és $\vec{b}\,(-4;\,8)$ vektorok kollineárisak?
A) –1; C) 0;
B) 1; D) $\frac{1}{2}$.

7. Melyik igaz az alábbi egyenlőségek közül?
A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$;
B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
C) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$;
D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

8. Adott az $\vec{a}\left(\sqrt{3};\,-2\right)$ vektor. Az alábbi vektorok közül melyik egyenlő a $\sqrt{3}\vec{a}$ vektorral?
A) $\vec{m}\left(1;\,-2\sqrt{3}\right)$; C) $\vec{p}\,(3;-2)$;
B) $\vec{n}\left(-3;\,-2\sqrt{3}\right)$; D) $\vec{q}\left(3;\,-2\sqrt{3}\right)$.

9. Az M pont az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja. Melyik igaz az alábbi egyenlőségek közül?

A) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

B) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Határozzátok meg az $\vec{a}\,(2; -3)$ és $\vec{b}\,(3; -2)$ vektorok skaláris szorzatát!

A) 12; C) 0;
B) –12; D) 6.

11. Az x mely értékénél lesznek merőlegesek egymásra az $\vec{a}\,(2x; -3)$ és a $\vec{b}\,(1; 4)$ vektorok?

A) –6; C) 12;
B) 3; D) 6.

12. Határozzátok meg az $\vec{a}\,(5; -12)$ és a $\vec{b}\,(-3; 4)$ vektorok közötti szög koszinuszát!

A) $\frac{63}{65}$; C) $-\frac{63}{65}$;

B) $\frac{65}{63}$; D) $\frac{1}{2}$.

A 4. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Vektor

Ha ismerjük a szakasz kezdőpontját és végpontját, akkor az ilyen szakaszt vektornak nevezzük.

Kollineáris vektorok

A nem nullvektorokat kollineárisnak nevezzük, ha ezek a vektorok párhuzamos egyeneseken vagy egy egyenesen fekszenek. A nullvektor bármely vektorral kollineáris.

Egyenlő vektorok

A nem nullvektorokat egyenlőknek nevezzük, ha abszolút értékük egyenlő és azonos irányúak. Bármilyen két nullvektor egyenlő.
Az egyenlő vektoroknak koordinátái is egyenlők. Ha a vektorok koordinátái egyenlők, akkor maguk a vektorok is egyenlők lesznek.

A vektor koordinátái

Ha az $A\,(x_1; y_1)$ és $B\,(x_2; y_2)$ megfelelően az $\vec{a}$ vektor kezdő- és végpontja, akkor az $x_2 - x_1$ és az $y_2 - y_1$ számok megfelelően az $\vec{a}$ vektor első és második koordinátája lesz.

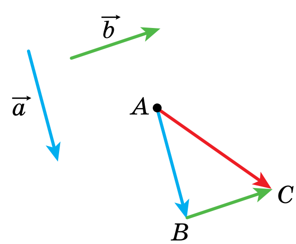
A vektor abszolút értéke

Ha az $\vec{a}$ vektor koordinátái $(a_1; a_2)$, akkor $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

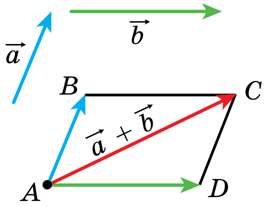
A vektorok összeadásának szabályai

Háromszög-szabály

Az A pontból vegyük fel az $\vec{a}$-ral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort, majd a B pontból vegyük fel a $\vec{b}$-ral egyenlő $\overrightarrow{BC}$ vektort. Az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összegének nevezzük. Bármely három, A, B és C pontra teljesül a következő egyenlőség: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Paralelogramma-szabály



Az A pontból vegyük fel az $\vec{a}$-ral egyenlő $\overrightarrow{AB}$ vektort, majd ugyanebből a pontból a $\vec{b}$-ral egyenlő $\overrightarrow{AD}$ vektort. Megszerkesztjük az $ABCD$ paralelogrammát. Ekkor az $\overrightarrow{AC}$ vektor az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor összege.

A vektorok összegének koordinátái

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok megfelelő koordinátái $(a_1; a_2)$ és $(b_1; b_2)$, akkor az $\vec{a}+\vec{b}$ koordinátái $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ lesznek.

A vektorok összeadásának tulajdonságai

Tetszőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra teljesülnek az alábbi azonosságok:
1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – felcserélhetőségi tulajdonság;
3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – csoportosítási tulajdonság.

A vektorok kivonása

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor különbségének azt a $\vec{c}$ vektor nevezzük, amelynek a $\vec{b}$ vektorral való összege megadja az $\vec{a}$ vektort.
Bármely O, A és B három pontra teljesül a következő egyenlőség:
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

A vektorok különbségének koordinátái

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok koordinátái megfelelően $(a_1; a_2)$ és $(b_1; b_2)$, akkor az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor koordinátái $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Ellentett vektorok

Két nem nullvektort ellentett vektoroknak nevezünk, ha az abszolút értékük egyenlő, az irányuk pedig ellentétes.
Bármilyen A és B pontra teljesül az $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ egyenlőség.

A vektor számmal való szorzása

Az $\vec{a}$ nem nullvektor és egy k nullától különböző szám szorzatának azt a $\vec{b}$ vektort nevezzük, melyre teljesülnek a következő feltételek:
1) $|\vec{b}| = |k|\,|\vec{a}|$;
2) ha $k > 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; ha $k < 0$, akkor $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Ha $\vec{a} = \vec{0}$ vagy $k = 0$, akkor $k\vec{a} = \vec{0}$.

Ha az $\vec{a}$ koordinátái $(a_1,\ a_2)$, akkor a $k\vec{a}$ vektor koordinátái $(ka_1;\ ka_2)$.

A kollineáris vektorok tulajdonságai

Ha az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok kollineárisak és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, melyre teljesül a $\vec{b} = k\vec{a}$ egyenlőség.

Ha az $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ vektorok kollineárisak és $\vec{a} \neq \vec{0}$, akkor létezik egy olyan k szám, melyre teljesülnek a $b_1 = ka_1$ és $b_2 = ka_2$ egyenlőségek.

A vektor számmal való szorzásának tulajdonságai

Bármely k, m számra és bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorra igazak a következő azonosságok:
1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ – csoportosítási tulajdonság;
2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ – első széttagolási tulajdonság;
3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ – második széttagolási tulajdonság.

A vektorok skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzatának e vektorok abszolút értékeinek és a köztük lévő szög koszinuszának szorzatát nevezzük:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})\angle$.

Az $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ vektorok skaláris szorzatát a következő képlettel lehet kiszámítani: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

A vektorok skaláris szorzatának tulajdonságai

Bármely $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorra és bármely k számra teljesülnek a következő egyenlőségek:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – felcserélhetőségi tulajdonság;

2) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ – csoportosítási tulajdonság;

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ – széttagolási tulajdonság.

Két vektor merőlegességének feltétele

Két nem nullvektor skaláris szorzata akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha ezek a vektorok merőlegesek egymásra.

Két vektor közötti szög koszinusza

Két, $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ és $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ nem nullvektor közötti szög koszinusza a következő képlettel számítható ki

$$\cos\left(\vec{a},\, \vec{b}\right)\angle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

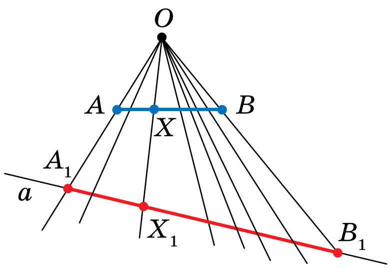
GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK 5.§.

Ebben a paragrafusban megismerkedtek az alakzatok transzformációival. A transzformáció olyan típusaival, mint a párhuzamos eltolás, középpontos tükrözés, tengelyes tükrözés, elforgatás, homotécia és hasonlóság fogtok megismerkedni.

Megtanuljátok a transzformációk tulajdonságait alkalmazni a feladatok megoldása és a tételek bizonyítása során.

17. Az alakzatok mozgatása (eltolása). Párhuzamos eltolás

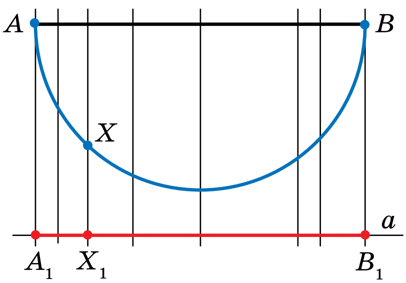
1. példa. A 17.1. ábrán az AB szakasz, az a egyenes és egy O pont látható, mely nem illeszkedik sem az a, sem az AB egyeneshez. Az AB szakasz minden X pontjának megfeleltetünk az a egyenes egy X pontját úgy, hogy az O, X, X_1 pontok egy egyeneshez illeszkednek. Ekkor az A pontnak meg fog felelni az A_1 pont, a B pontnak pedig a B_1. Nyilvánvaló, hogy az A_1B_1 szakaszt az így keletkezett X_1 pontok alkotják.



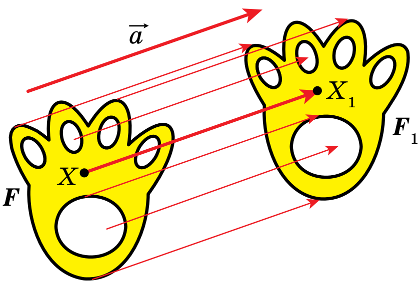
17.1. ábra

Így felállítottunk egy olyan szabályt, amely segítségével az AB szakasz minden X pontjának megfeleltettünk egy X_1 pontot az A_1B_1 szakaszról. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az A_1B_1 szakaszt az AB szakasz **transzformációja** által kapjuk meg.

2. példa. A 17.2. ábrán az AB félkör és egy a egyenes látható, amely párhuzamos az AB átmérővel. A félkör minden X pontjának megfeleltetünk egy X_1 pontot az a egyenesen úgy, hogy az XX_1 egyenes merőleges legyen az a egyenesre. Nyilvánvaló, hogy az A_1B_1 szakaszt az így keletkezett X_1 pontok alkotják. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az A_1B_1 szakaszt az AB félkör transzformációja által kapjuk meg.



17.2. ábra



17.3. ábra

3. példa. Legyen adott egy F alakzat és egy $\vec{a}$ vektor (17.3. ábra). Az F alakzat minden X pontjának megfeleltetünk egy olyan X_1 pontot, melyre teljesül az $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Ennek következtében az F alakzatból kapunk egy F_1 alakzatot (17.3. ábra). Az F alakzatnak ezt a transzformációját **az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnak** nevezzük.

Általánosítjuk a fenti példákat.

Legyen adott az F alakzat. Az F alakzat minden pontjához valamilyen szabály szerint hozzárendelünk egy pontot. Az összes így kapott pontok alkotják majd az F_1 alakzatot. Az **F_1 alakzatot az F alakzat transzformációja** révén kaptuk. Ekkor az F_1 alakzatot az F alakzat **képének** szokás nevezni, az F alakzatot pedig az F_1 alakzat **eredőjének** (vagy kiinduló alakzatnak).

Így az első példában az A_1B_1 szakasz lesz az AB szakasz képe, Az X_1 pont az X pont képe, az AB szakasz pedig az A_1B_1 szakasz eredője.

Figyeljük meg, hogy a 3. példában az F alakzat egybevágó lesz az F_1 alakzattal. Az 1. és 2. példákban leírt transzformációknak nincs ilyen tulajdonsága.

Milyen tulajdonsággal kell rendelkezni az olyan transzformációnak, hogy a kiinduló alakzat és a képe egybevágó legyen? Ehhez egy tulajdonság is elegendő: a transzformációnak távolságtartó leképezésnek kell lennie, vagyis ha az F alakzat bármilyen A és B pontjának képei az A_1 és B_1 pontok, akkor teljesülnie kell az $AB = A_1B_1$ egyenlőségnek.

Meghatározás. **Azt a transzformációt, amely az *F* alakzat pontjai közötti távolságot megtartja, az *F* alakzat mozgatásának vagy eltolásának nevezzük**.

Ha az *F* alakzat minden *X* pontjának ugyanaz az *X* pont felel meg, akkor az ilyen transzformációt **invariánsnak** nevezzük.

Az *F* alakzat invariáns átalakítása során ugyanazt az *F* alakzatot kapjuk. Az invariáns átalakítás szintén mozgatás.

Korábban már alkalmaztuk az „alakzatok egybevágóságát", de nem adtunk meg szigorú meghatározást.

Az, hogy a mozgatás az alakzatok egybevágóságával kapcsolatban van, a következő tulajdonságai tanúsítják.

Ha a transzformáció mozgás, akkor:

- *az egyenes képe is egyenes lesz;*
- *a szakasz képe is vele azonos hosszúságú szakasz lesz;*
- *a szög képe is vele egyenlő nagyságú szög lesz;*
- *a háromszög képe is vele egybevágó háromszög lesz.*

Ezeknek a tulajdonságoknak a bizonyítása nem tartozik az iskolai tananyag keretébe.

A mozgatás tulajdonságaiból az alábbi meghatározás adódik.

Meghatározás. **Két alakzatot egybevágónak mondunk, ha létezik olyan transzformáció, mely során az egyik alakzat a másik képe lesz.**

Az $F = F_1$ felírás azt jelenti, hogy az *F* és F_1 alakzatok egybevágók.

Ha létezik olyan mozgási transzformáció, mely során az F_1 az *F* alakzat képe, akkor feltétlen létezik olyan transzformáció, amelyben az *F* képe az F_1-nek. Az ilyen mozgásokat **kölcsönösen fordítottnak** nevezzük.

Megjegyzés. Korábban egybevágó alakzatoknak azokat az alakzatokat neveztük, amelyek egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók. Az „egymásra helyezés" ösztönösen érthető, és valós testek egymásra tevését értjük alatta. Azonban a mértani alakzatokat nem lehet egymásra pakolni a szó szoros értelmében. Az újabb meghatározás szerint az *F*-nek az F_1 alakzatra való helyezése azt jelenti, hogy az *F* alakzat képe az elmozdulás során az F_1 alakzat lett.

A „mozgás" kifejezés a fizikából ismert fogalom, amely a testek deformáció nélküli helyváltoztatását jelenti. A matematika innen vette át ezt a fogalmat. A mértanban nem az időben lezajló folyamatot vizsgáljuk, hanem csak az alakzat és annak képének tulajdonságait.

A 17.3. ábrán lévő *F* és F_1 alakzatok egybevágóságát csak vizuálisan észleljük. Ennek a ténynek a szigorú magyarázatát a következő tétel adja.

17.1. tétel (a párhuzamos eltolás tulajdonsága). ***A párhuzamos eltolás az mozgás.***

Bizonyítás. ⍟ Legyen az $A\ (x_1;\ y_1)$ és $B\ (x_2;\ y_2)$ az F alakzat tetszőleges pontjai (17.4. ábra), az A_1 és B_1 pontok pedig ezeknek a pontoknak a képei $\vec{a}\ (m;\ n)$ vektorral való párhuzamos eltolás után. Bebizonyítjuk, hogy $AB = A_1B_1$.

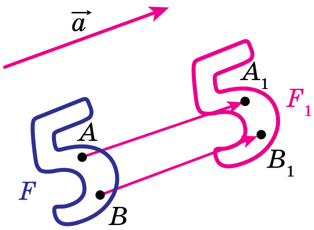


Рис. 17.4

Adott: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$. Az $\overrightarrow{AA_1}$ és $\overrightarrow{BB_1}$ koordinátái $(m;\ n)$. Tehát az A_1 és B_1 pontok megfelelő koordinátái $(x_1 + m;\ y_1 + n)$ és $(x_2 + m;\ y_2 + n)$. Meghatározzuk az A és B pontok közötti távolságot:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Meghatározzuk az A_1 és B_1 pontok közötti távolságot:

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

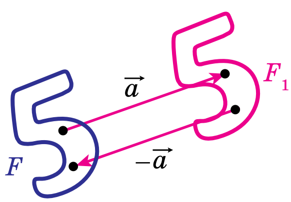
Tehát az $AB = A_1B_1$, vagyis a párhuzamos eltolás távolságtartó. ◀

Következmény. ***Ha a párhuzamos eltolás során az F alakzatnak az F_1 alakzat a képe, akkor $F_1 = F$.***

Ezt a tulajdonságot alkalmazzák a szövetek, tapéták, csempék mintázatának elkészítése során (17.5. ábra).

17.5. ábra

Ha F_1 az F alakzat képe az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál, akkor az F alakzat képe lesz az F_1 alakzat a $-\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolás során (17.6. ábra). Az $\vec{a}$ és $-\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolások kölcsönösen fordított mozgási transzformációk lesznek.



17.6. ábra

1. feladat. Az F alakzat minden egyes $X\,(x;\,y)$ pontjának megfelel $X_1\,(x+m;\,y+n)$ pont, ahol az m és n adott számok. Bizonyítsátok be, hogy az ilyen transzformáció az F alakzat $\vec{a}\,(m;\,n)$ vektorral történő párhuzamos eltolása lesz!

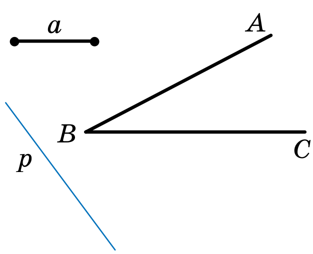
Megoldás. Vizsgáljuk meg az $\vec{a}\,(m;\,n)$. vektort. Megjegyezzük, hogy az $\overrightarrow{XX_1}$ vektor koordinátái $(m;\,n)$-nel egyenlő, vagyis $\overrightarrow{XX_1}=\vec{a}$. Tehát az F alakzat transzformációja $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolás lesz. ◀

2. feladat. Az $A_1\,(2;\,3)$ pont az $A\,(–1;\,2)$ pont képe lesz az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál. Határozzátok meg az $\vec{a}$ vektor koordinátáit, és a $B\,(–7;\,–3)$ pont képét ennél a párhuzamos eltolásnál!

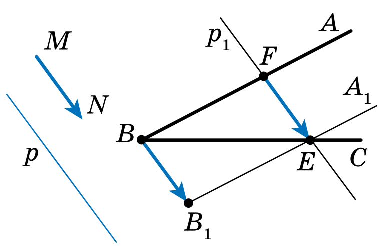
Megoldás. Az adatokból következik, hogy $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$. Ebből adódik, hogy $\vec{a}\,(–1;\,1)$. Legyen a $B_1\,(x;\,y)$ a $B\,(–7;\,–3)$ pont képe. Ekkor $\overrightarrow{BB_1}=\vec{a}$, vagyis $x+7=–1$ és $y+3=1$. Innen $x=–8$, $y=–2$.

Felelet: $\vec{a}\,(–1;\,1)$, $B_1\,(–8;\,–2)$. ◀

3. feladat. Adott az ABC szög és egy p egyenes, amely nem párhuzamos a szög egyik szárával sem (17.7. ábra). Szerkesszetek egy olyan p_1 egyenest, amely párhuzamos az adott p egyenessel, és a szög szárai egy adott a hosszúságú szakaszt metszenek ki belőle!



17.7. ábra



17.8. ábra

Megoldás. Vizsgáljuk meg az $\overrightarrow{MN}$ vektort, amelyre igaz, hogy $MN \parallel p$ és $\left|\overrightarrow{MN}\right|=a$ (17.8. ábra). Megszerkesszük a B_1A_1 félegyenest, amely a BA félegyenesnek a képe az $\overrightarrow{MN}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál. Jelöljük E-vel a BC és B_1A_1 félegyenesek metszéspontját. Legyen az adott párhuzamos eltolásnál az F pont az E pontnak az eredője. Ekkor $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{MN}$, vagyis $\left|\overrightarrow{FE}\right|=a$ és $FE \parallel p$.

A fenti gondolatmenetből az alábbi szerkesztési algoritmus adódik:

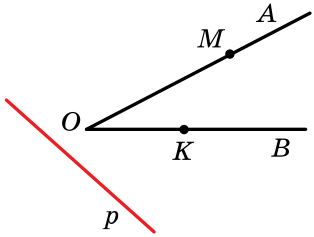
1) határozzátok meg az $\overrightarrow{MN}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál a BA félegyenes képét;
2) jelöljétek meg a BC félegyenes és a megszerkesztett kép metszéspontját;
3) a kapott ponton keresztül fektessetek egy a p egyenessel párhuzamos p_1 egyenest. A p_1 lesz a keresett egyenes. ◄

?

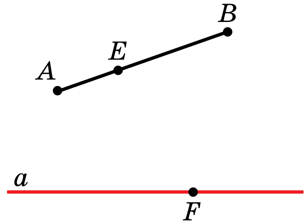
1. Ismertessétek az alakzatok transzformációját?
2. Hozzatok fel példákat az alakzatok transzformációjára!
3. Írjátok le azt a transzformációt, amely párhuzamosan eltolja $\vec{a}$ vektorral az F alakzatot!
4. Milyen esetben lesz az F_1 alakzat az F alakzat képe, és az F az F_1 alakzat eredője?
5. Az alakzatok milyen transzformációját nevezzük mozgásnak?
6. Az alakzatok milyen transzformációját nevezzük invariánsnak?
7. Fogalmazzátok meg a mozgás tulajdonságait!
8. Milyen alakzatokat nevezünk egybevágóknak?
9. Írjátok le azokat a mozgásokat, melyek kölcsönösen inverzek!
10. Fogalmazzátok meg a párhuzamos eltolás tulajdonságait!
11. Milyen mozgások lesznek az $\vec{a}$ és a $-\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolások?

GYAKORLATI FELADATOK

17.1.° A 17.9. ábrán az AOB szög és egy olyan p egyenes látható, amely nem párhuzamos a szög száraival. Az OA szár minden X pontjának az OB szár X_1 pontja felel meg úgy, hogy $XX_1 \parallel p$ (az O pontnak maga az O pont fog megfelelni). Szerkesszétek meg az M pont képét és a K pont eredőjét az OA félegyenes adott transzformációjánál! Milyen alakzat lesz az OA félegyenes képe?



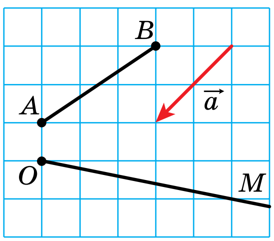
17.9. ábra



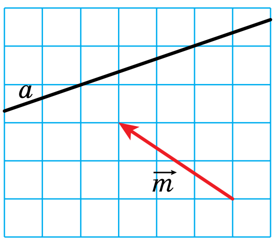
17.10. ábra

17.2.° A 17.10. ábrán egy AB szakasz és egy a egyenes látható. Az AB szakasz minden X pontjának megfelel az adott pontból az a egyenesre bocsátott merőleges talppontja. Szerkesszétek meg az E pont képét és az F pont eredőjét az AB szakasz adott transzformációjánál! Létezik-e az a egyenesen olyan pont, melynek nincs eredője? Szerkesszétek meg az AB szakasz képét!

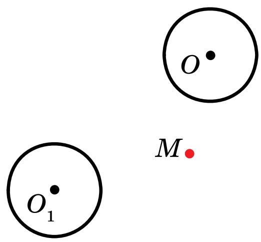
17.3.° Szerkesszétek meg az AB szakasz és az OM félegyenes képét az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltoláskor (17.11. ábra)!



17.11. ábra



17.12. ábra



17.13. ábra

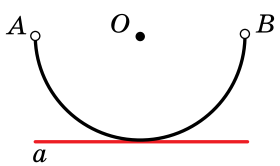
17.4.° A 17.12. ábrán az a egyenes képét egy másik egyenes $\vec{m}$ vektorral történő párhuzamos eltolásával kaptuk. Szerkesszétek meg az a egyenes eredőjét!

17.5.° Az O_1 középpontú körvonalat az O középpontú körvonalból az $\vec{a}$ vektor szerinti párhuzamos eltolással kaptuk (17.13. ábra). Jelöljétek az $\vec{a}$ vektort úgy, hogy az M pontból induljon!

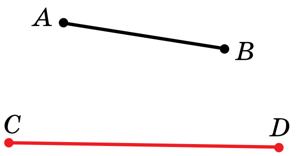
17.6.• Rajzoljátok meg az $y = x^2$ parabola: 1) $\vec{a}$ **(0; 2)**; 2) $\vec{b}$ **(–1; 0)**; 3) $\vec{c}$ **(–1; 2)** vektor szerinti eltolással kapott képét! Írjátok fel az $y = x^2$ parabola párhuzamos eltolás utáni képének egyenletét!

17.7.• Rajzoljátok meg az $x^2 + y^2 = 4$ körvonal: 1) $\vec{a}$ **(2; 0)**; 2) $\vec{b}$ **(0; –1)**; 3) $\vec{c}$ **(2; –1)** vektor szerinti eltolással kapott képét! Írjátok fel az $x^2 + y^2 = 4$ körvonal párhuzamos eltolás utáni képének egyenletét!

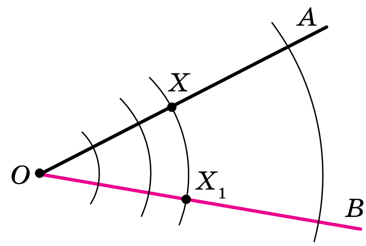
17.8.• Az a egyenes az O középpontú AB félkör érintője (17.14. ábra). Adjatok meg egy olyan transzformációt, melynél az a egyenes lesz a képe az A és B pontban „lyukas” AB félkörnek!



17.14. ábra



17.15. ábra



17.16. ábra

17.9.• Adjatok meg egy olyan transzformációt, amelynél a CD szakasz az AB szakasznak a képe lesz (17.15. ábra)!

GYAKORLATOK

17.10.° Vizsgáljuk meg az r sugarú és O középpontú kört. A körvonal minden X pontjához rendelünk egy X_1 pontot, amely az OX sugárra illeszkedik, olyat, hogy $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Milyen alakzat lesz a körvonal képe? Mozgás lesz-e ez a transzformáció?

17.11.° Adott egy AOB szög (17.16. ábra). Az OA szár minden X pontjához hozzárendelünk egy X_1 pontot, amely az OB szárra és az OX sugarú körre is illeszkedik (az O pontnak megfeleltetjük az O pontot). Milyen alakzat lesz az OA szár képe? Bizonyítsátok be, hogy a leírt transzformáció mozgás lesz!

17.12.° Adott egy MON szög. Az OM szár minden X pontjához hozzárendelünk egy X_1 pontot, amely az ON szárra illeszkedik úgy, hogy az XX_1 egyenes merőleges az MON szög szögfelezőjére (az O pontnak megfeleltetjük az O pontot). Bizonyítsátok be, hogy a leírt transzformáció mozgás lesz!

17.13.° Adott egy a egyenes és egy AB szakasz, melyeknek nincs közös pontjuk. Az AB szakasz minden X pontjához hozzárendeljük az X pontból bocsátott, az a egyenesre merőlegesnek a talppontját. Az a egyenes és az AB szakasz milyen kölcsönös helyzete esetén lesz ez a transzformáció mozgás?

17.14.° Az A_1 és B_1 pontok nem illeszkednek az AB egyenesre, és ezek a pontok az egyenes A és B pontjainak a képei lesznek az AB egyenes párhuzamos eltolása során. Bizonyítsátok be, hogy az AA_1B_1B négyszög paralelogramma!

17.15.° Az A_1 és B_1 pontok az A és B pontok megfelelő képei lesznek az AB szakasz párhuzamos eltolásánál. Határozzátok meg az A_1B_1 szakasz hosszát, ha $AB = 5$ cm!

17.16.° Az $\vec{m}$ vektor párhuzamos az a egyenessel. Milyen alakzat lesz az a egyenes képe az $\vec{m}$ vektorral történő párhuzamos eltolás során?

17.17.° Adott az $ABCD$ paralelogramma. Milyen vektor adja meg azt a párhuzamos eltolást, amely során az AD oldal a BC oldal képe lesz?

17.18.° Létezik-e olyan párhuzamos eltolás, amelynél az ABC egyenlő oldalú háromszög AB oldala a BC oldal képe lesz?

17.19.° Határozzátok meg azokat a pontokat melyek az A (–2; 3) és B (1; –4) pontok képei lesznek az $\vec{a}$ **(–1; –3)** vektorú párhuzamos eltolás során?

17.20.° Létezik-e olyan párhuzamos eltolás, amely során az A (1; 3) pont képe az A_1 (4; 0) pont lesz, a B (–2; 1) pontnak pedig a B_1 (1; 4) pont?

17.21.° Az $\vec{a}$ **(2; –1)** vektorú párhuzamos eltolás során az A pontnak a képe az A_1(–3; 4) pont lesz. Határozzátok meg az A pont koordinátáit!

17.22.° A párhuzamos eltolás következtében az M_1 (x; 2) pont az M (3; y) pontnak a képe lesz, és az A (2; 3) pont pedig a koordináta-rendszer kezdőpontjának a képe. Határozzátok meg az x és y értékeit!

17.23.• Hány olyan párhuzamos eltolás létezik, amely során az a egyenesnek a képe is az a egyenes lesz?

17.24.• Vizsgáljuk meg azt az alakzatot, amely a téglalap oldalaira illeszkedő pontokból áll. Írjátok le egy olyan transzformációját, amely során az alakzatból körvonal lesz!

17.25.• Vizsgáljuk meg azt az alakzatot, amely a téglalap oldalaira illeszkedő pontokból áll. Írjátok le egy olyan transzformációját, amely során az alakzatból, olyan alakzat lesz, amely egy rombusz oldalainak pontjaiból áll!

17.26.• Adott, hogy az F alakzat transzformációjának a képe is az F alakzat lesz. Ki lehet-e jelenteni, hogy ez a transzformáció invariáns?

17.27.• Adott az A (3; –2) és B (5; –4) pont. Az AB szakasz párhuzamos eltolása során a kapott szakasz felezőpontja M_1 (–4; 3). Határozzátok meg ennél a párhuzamos eltolásnál az A és B pontok képeit?

17.28.• Az A (1; 3), B (2; 6) C (–3; 1) pontok az $ABCD$ paralelogramma csúcsai. Az átlóinak felezőpontja a párhuzamos eltolás során az O_1 (–2; –4) pontba megy át. Határozzátok meg az A, B, C és D pontok képeit ennél a párhuzamos eltolásnál!

17.29.• Írjátok fel az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal $\vec{a}$ **(–3; 4)** vektorral történő párhuzamos eltolás utáni képének egyenletét!

17.30.• Írjátok fel az $y = x^2$ parabola $\vec{a}$ **(2; −3)** vektorral történő párhuzamos eltolás utáni képének egyenletét!

17.31.•• Szerkesszetek trapézt az alapjai és az átlói alapján!

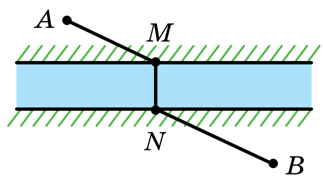
17.32.•• Szerkesszetek trapézt a négy oldala alapján!

17.33.•• Szerkesszetek az AB szakasszal egyenlő és párhuzamos szakaszt úgy, hogy az egyik vége az adott egyeneshez illeszkedik, a másik pedig az adott körhöz!

17.34.•• Szerkesszétek meg az adott kör húrját, amely egyenlő és párhuzamos az adott AB szakasszal!

17.35.* Szerkesszetek négyszöget négy szöge és két szemben fekvő oldala alapján, ha a szemben fekvő oldalai páronként nem párhuzamosak!

17.36.* Az A és B településeket egy folyó választja el. Hol kell megépíteni az MN hidat (17.17. ábra), ha azt akarjuk, hogy az $AMNB$ út a legrövidebb legyen (a folyó partjait párhuzamos egyeneseknek tekintjük, és a híd merőleges a partra)?



17.17. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

17.37. A háromszög minden csúcsán át párhuzamos egyeneseket fektettek a szemközti oldalakkal. Mekkora a keletkezett háromszög kerülete, ha az eredeti háromszög kerülete 18 cm?

17.38. Egy négyszög csúcsainak koordinátái A (–3; –4), B (0; 3), C (7, 6) és D (4; –1). Bizonyítsátok be, hogy az ilyen négyszög rombusz, és határozzátok meg a területét!

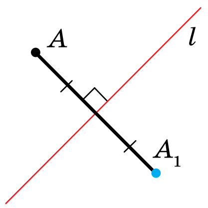
17.39. A derékszögű trapézba kör van írva. Az érintési pont a trapéz nagyobbik szárát 4 cm-es és 25 cm-es szakaszokra osztja. Határozzátok meg a trapéz területét!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

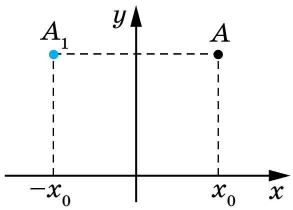
17.40. A 1 m oldalhosszúságú szabályos hatszög belsejében 7 pontot jelöltek. Bizonyítsátok be, hogy van köztük két olyan pont, melyek között a távolság legfeljebb 1 m!

18. Tengelyes szimmetria

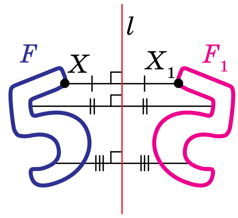
Meghatározás. **Az A és A_1 pontokat az** ***l* egyeneshez viszonyítva szimmetrikusnak** **nevezzük, ha az *l* egyenes az AA_1 szakasznak a felezőmerőlegese** (18.1. ábra). **Ha az A pont illeszkedik az *l* egyeneshez, akkor az *l* egyeneshez viszonyítva önmagával lesz szimmetrikus.**



18.1. ábra



18.2. ábra



18.3. ábra

Ha például az A és A_1 pontok ordinátái egyenlők, az abszcisszái pedig ellentett számok, akkor ezek a pontok szimmetrikusak az ordinátatengelyhez viszonyítva (18.2. ábra).

Vizsgáljuk meg az F alakzatot és az l egyenest. Az F alakzat mindegyik X pontjának megfeleltetünk az F alakzat X_1 pontját szimmetrikusan az l egyeneshez képest. A megfeleltetés következtében az F alakzatból megkapjuk az F_1 alakzatot (18.3. ábra). Az F alakzat ilyen transzformációját ***l* egyeneshez viszonyított tengelyes szimmetriának** nevezzük. Az l egyenest **szimmetriatengelynek** nevezzük. Az F és az F_1 alakzatokat ***l* egyeneshez viszonyítva szimmetrikusnak (egymás tükörképének)** nevezzük.

18.1. tétel (a tengelyes szimmetria tulajdonsága). ***A tengelyes szimmetria mozgás.***

Bizonyítás. Úgy válasszuk ki a koordináta-rendszert, hogy a szimmetriatengely egybeessen az ordinátatengellyel. Legyen $A\,(x_1;\ y_1)$ és $B\,(x_2;\ y_2)$ az F alakzat tetszőleges pontja. Ekkor az $A_1\,(-x_1;\ y_1)$ és $B_1\,(-x_2;\ y_2)$ pontok az előbbiek tükörképei az ordinátatengelyhez viszonyítva. Ekkor:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Megkaptuk, hogy $AB = A_1B_1$, vagyis a tengelyes szimmetria megtartja a pontok közötti távolságot. Tehát a tengelyes szimmetria mozgás lesz. ◄

Következmény. ***Ha az F és az F_1 alakzatok szimmetrikusak az egyeneshez viszonyítva, akkor $F = F_1$.***

Meghatározás. **Az F alakzatot az** ***l* egyeneshez képest szimmetrikusnak** **nevezzük, ha az alakzat mindegyik pontjának az *l* egyeneshez viszonyított szimmetrikus pontja szintén ehhez az alakzathoz illeszkedik.**

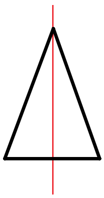
Az l egyenest az alakzat **szimmetriatengelyének** nevezzük. Ilyenkor azt mondják, hogy az **alakzatnak van szimmetriatengelye**.

Bemutatunk néhány szimmetriatengellyel rendelkező alakzatot.

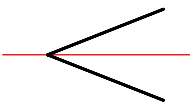
A 18.4. ábrán egy egyenlő szárú háromszög látható. Az alapra bocsátott magasságot tartalmazó egyenes a háromszög szimmetriatengelye.

Minden szögnek van szimmetriatengelye – ez a szögfelezőt tartalmazó egyenes (18.5. ábra).

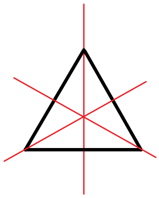
Az egyenlő oldalú háromszögnek három szimmetriatengelye van (18.6. ábra).



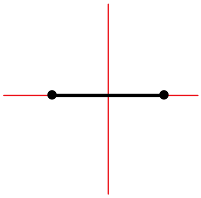
18.4. ábra



18.5. ábra



18.6. ábra



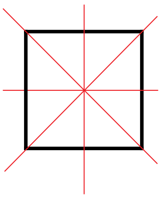
18.7. ábra

A szakasznak két szimmetriatengelye van: a felezőmerőlegese és az az egyenes, amely tartalmazza ezt a szakaszt (18.7. ábra).

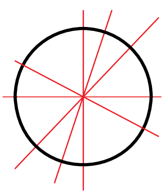
A négyzetnek négy szimmetriatengelye van (18.8. ábra).

Léteznek olyan alakzatok, amelyeknek számtalan szimmetriatengelye van, például ilyen a kör is. Bármilyen, a kör középpontjához illeszkedő egyenes a kör szimmetriatengelye is egyben (18.9. ábra).

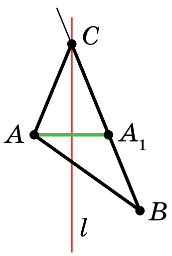
Számtalan szimmetriatengelye van az egyenesnek is: maga az egyenes, és az egyenesre bocsátott bármely merőleges is szimmetriatengelye lesz.



18.8. ábra



18.9. ábra



18.10. ábra

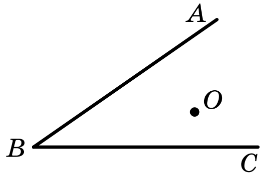
1. feladat. Rajzoltak egy ABC egyenlő szárú háromszöget, majd meghúztak egy olyan l egyenest, amely tartalmazza a C szög szögfelezőjét. Ezután a rajz egy részét letörölték, és csak az A és B pont valamint az l egyenes maradt meg. Újítsátok fel az ABC háromszöget!

Megoldás. Mivel az l egyenes az ACB szög szimmetriatengelye, ezért az A_1 pont, amely az l szimmetriatengelyhez viszonyítva a A pont tükörképe, a CB félegyeneshez illeszkedik. Ekkor az l és a

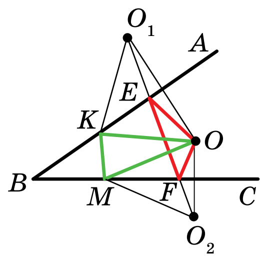
BA_1 egyenesek metszéspontja lesz az ABC háromszög keresett C csúcsa (18.10. ábra).

A fenti gondolatmenet alapján tudjuk megszerkeszteni a keresett háromszöget: megszerkesztjük az A_1 pontot, amely az l egyeneshez képest szimmetrikus az A ponttal. Meghatározzuk a C csúcsot, mint az l és a BA_1 egyenesek metszéspontját.◄

2. feladat. Az O pont az ABC hegyesszöghöz illeszkedik (18.11. ábra). A BA és BC szárain úgy határozzátok meg az E és F pontokat, hogy az OEF háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!



18.11. ábra



18.12. ábra

Megoldás. Legyen az O_1 és az O_2 az O pont képei megfelelően a BA és BC egyenesekhez történő tengelyes szimmetriánál (18.2. ábra), és metssze az O_1O_2 egyenes a BA és BC szárakat megfelelően az E és F pontokban. Bebizonyítjuk, hogy az E és F pontok lesznek a keresett pontok.

Megjegyezzük, hogy az EO_1 és EO szakaszok szimmetrikusak a BA egyeneshez viszonyítva. Tehát $EO_1 = EO$. Hasonlóan az $FO = FO_2$. Ekkor az OEF háromszög kerülete egyenlő lesz O_1O_2 szakasz hosszával.

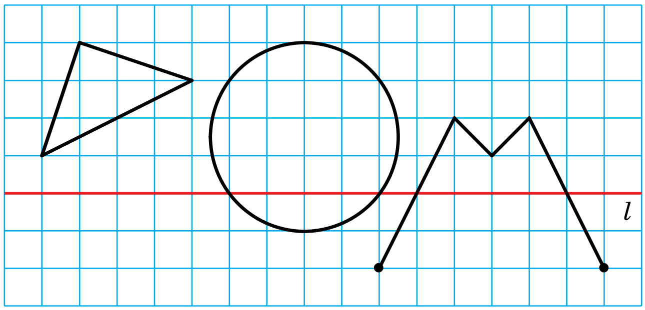
Bebizonyítjuk, hogy a megszerkesztett háromszög kerülete a legkisebb. Vizsgáljuk meg a KOM háromszöget, ahol a K és M pontok a BA és BC megfelelő félegyenesek tetszőleges pontjai, és a K pont nem esik egybe az E ponttal vagy az M pont nem esik egybe az F ponttal. Nyilvánvaló, hogy $KO = KO_1$ és $MO = MO_2$. Ekkor a KOM háromszög kerülete egyenlő $O_1K + KM + MO_2$ összeggel. Viszont az $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$ ◄

?

1. Milyen pontokat nevezünk szimmetrikusoknak az l egyeneshez viszonyítva? Hogy nevezzük az l egyenest?
2. Milyen alakzatokat nevezünk szimmetrikusnak az l egyeneshez viszonyítva?
3. Fogalmazzátok meg a tengelyes szimmetria tulajdonságait!
4. Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek azok az alakzatok, melyek szimmetrikusak az egyeneshez képest?
5. Milyen alakzatról állítható, hogy van szimmetriatengelye?
6. Mondjatok példákat a szimmetriatengellyel rendelkező alakzatokra!

GYAKORLATI FELADATOK

18.1.° Szerkesszétek meg a 18.13. ábrán látható alakzatokkal az l szimmetriatengelyhez képest szimmetrikus alakzatokat!

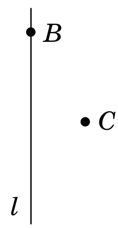


18.13. ábra

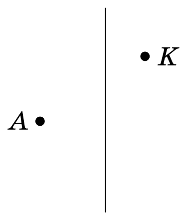
18.2.° Rajzoljatok egy háromszöget! Szerkesszetek egy olyan háromszöget, amely az egyik középvonalához képest szimmetrikus lesz az eredeti háromszöggel!

18.3.° Az A és B pontok szimmetrikusak az l egyeneshez képest (18.14. ábra). Szerkesszétek meg az l egyenest!

18.14. ábra



18.15. ábra



18.16. ábra

СЕЗОН ДОЩІВ

18.17. ábra

18.4.• Rajzoljatok két egymást metsző a és a_1 egyenest! Szerkesszétek meg azt az egyenest, amelyhez viszonyítva az a egyenes szimmetrikus az a_1 egyenessel! Hány megoldása van a feladatnak?

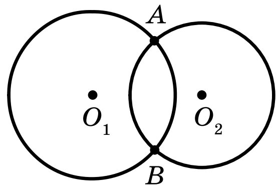
18.5.• Rajzoljatok két párhuzamos a és a_1 egyenest! Szerkesszétek meg azt az egyenest, amelyhez viszonyítva az a egyenes szimmetrikus az a_1 egyenessel!

18.6.• Szerkesszetek egy $ABCD$ rombuszt, ha adott a B és C csúcsa és a BD átlót tartalmazó l egyenes (18.15. ábra)!

18.7.• Szerkesszetek egy ABC egyenlő szárú háromszöget, ha adott az A csúcsa, a BC oldalhoz illeszkedő K pont és egy, az AB alapra bocsátott magasságot tartalmazó egyenes (18.16. ábra)!

18.8.• Egy vízzel töltött kémcsőn keresztül nézzétek meg a 18.17. ábrát! Miért látjátok a második szóban az egyes betűket fordítva, és az elsőben pedig nem?

18.9.•• Az O_1 és O_2 középpontú körvonalaknak két közös pontjuk van (18.18. ábra). Csak körző alkalmazásával szerkesszetek körvonalakat, melyek az AB egyeneshez viszonyítva szimmetrikusak lesznek ezekkel!



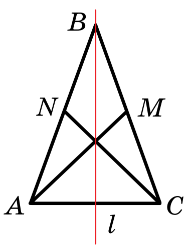
18.18. ábra

GYAKORLATOK

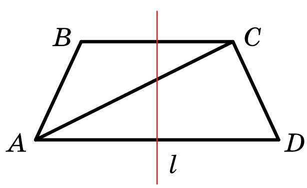
18.10.° Az l egyenes az AB szakasz felezőpontjához illeszkedik. Minden esetben szimmetrikusak lesznek-e az A és B pontok az l egyeneshez képest?

18.11.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjához húzott oldalfelezőt tartalmazó egyenes a háromszög szimmetriatengelye lesz!

18.12.° A 18.19. ábrán az ABC egyenlő szárú háromszög és egy l egyenes látható, amely tartalmazza az AC alapra bocsátott magasságot. Az AM és CN szakaszok a háromszög súlyvonalai. Nevezzétek meg az A és B pontok, valamint a CN és AC oldal képeit az l egyeneshez viszonyított szimmetriánál!



18.19. ábra



18.20. ábra

18.13.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenes, amely az egyenlő szárú trapéz alapjai felezőpontjaihoz illeszkedik, annak szimmetriatengelye lesz!

18.14.° A 18.20. ábrán az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz látható, és egy olyan l egyenes, amely az alapjainak felezőpontjaihoz illeszkedik. Nevezzétek meg a B és D pontok, az AC átló és a BC alap képét az l egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözésnél!

18.15.° Bizonyítsátok be, hogy a rombusz átlóit tartalmazó egyenesek a mértani alakzat szimmetriatengelyei!

18.16.° Bizonyítsátok be, hogy a téglalap szemközti oldalainak felezőpontjaira illeszkedő egyenesek a téglalap szimmetriatengelyei lesznek!

18.17.° Az A_1 és B_1 pontok tengelyes tükrözésnél az A és B pontok megfelelő képei. Határozzátok meg az A_1B_1 szakasz hosszát, ha AB = 5 cm!

18.18.° Bizonyítsátok be, hogy a szögfelezőt tartalmazó egyenes a szög szimmetriatengelye is egyben!

18.19.° Határozzátok meg az A (–2; 1) és B (0; –4) pontok koordinátatengelyekre vonatkozó tükörképeit!

18.20.° Az A (x; 3) és B (–2; y) szimmetrikusak az:
1) abszcisszatengelyhez;
2) ordinátatengelyhez.
Határozzátok meg az x és y értékeit!

18.21.• Az a egyenes l egyenesre vonatkozó tükörképe az a egyenes. Milyen lesz az a és l egyenesek kölcsönös helyzete?

18.22.• Bizonyítsátok be, hogy egyenlő szárú lesz!

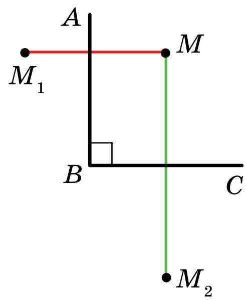
18.23.• Bizonyítsátok be, hogy két szimmetriatengellyel rendelkező háromszög egyenlő oldalú lesz! Lehet-e a háromszögnek pontosan két szimmetriatengelye?

18.24.• Bizonyítsátok be, hogyha a paralelogrammának pontosan két szimmetriatengelye van, akkor ez vagy téglalap vagy rombusz!

18.25.• Bizonyítsátok be, hogyha a négyszögnek négy szimmetriatengelye van, akkor ez négyzet lesz!

18.26.• Az O_1 és O_2 középpontú körvonalak az A és B pontokban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az A és B pontok szimmetrikusak az O_1O_2 egyeneshez viszonyítva!

18.27.• Az M pont az ABC derékszög belső pontja (18.21. ábra). Az M_1 és M_2 pontok az M pont BA és BC egyenesekre vonatkozó megfelelő tükörképei. Bizonyítsátok be, hogy az M_1, B és M_2 pontok egy egyeneshez illeszkednek!



18.21. ábra

18.28.• Határozzátok meg az A (–2; 0) és B (3; –1) pontokkal szimmetrikus pontok koordinátáit, ha a szimmetriatengely az: 1) első és harmadik koordinátanegyed; 2) a második és negyedik koordinátanegyed szögfelezője!

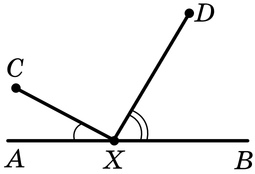
18.29.• Az A (x; –1) és a B (y; 2) pontok szimmetrikusak arra az egyenesre, amely az első és a harmadik koordinátanegyed szögfelezőjét tartalmazza. Határozzátok meg az x és y értékét!

18.30.•• Az A és B pontok az a egyeneshez viszonyítva különböző félsíkhoz illeszkednek. Határozzátok meg az a egyenesen az X pontot, ha tudjuk, hogy az a egyenes az AXB szög szögfelezője!

18.31.•• Az A és B pontok az a egyeneshez viszonyítva egy félsíkhoz illeszkednek. Határozzátok meg az a egyenesen az X pontot, ha tudjuk, hogy az XA és XB félegyenesek az adott egyenessel egyenlő szöget alkotnak!

18.32.•• Az A és B pontok az a egyeneshez viszonyítva egy félsíkhoz illeszkednek. Az a egyenesen úgy vették fel az X pontot, hogy az $AX + XB$ összeg a lehető legkisebb legyen. Határozzátok meg az X pontot!

18.33.* Szerkesszetek egy ABC háromszöget két AB és az AC oldala ($AB < AC$) és a B és C szögének különbsége alapján!



18.22. ábra

18.34.* A C és D pontok az AB egyeneshez viszonyítva egy félsíkhoz illeszkednek (18.22. ábra). Az AB egyenesen úgy vettek fel egy X pontot, hogy $AXC\angle = \frac{1}{2} DXB\angle$. Határozzátok meg az X pontot!

18.35.* Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ domború négyszög területe nem nagyobb, mint $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$!

18.36.* Adott az ABC háromszög. Határozzátok meg azt a pontot, melynek szimmetriaképe a háromszög bármelyik oldalához képest a háromszög köré írt körvonalra illeszkedik!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

18.37. Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 48 cm, $AD = 7$ cm. A paralelogramma melyik oldalát metszi a B szögének szögfelezője? Határozzátok meg azokat a szakaszokat, melyekre a szögfelező osztja az oldalát!

18.38. Két háromszögnek két oldala megfelelően egyenlő, és a megfelelő egyenlő oldalak közötti szögek összege 180°. Bizonyítsátok be, hogy az adott háromszögek egyenlő nagyságúak lesznek!

18.39. Adottak a következő pontok: A (5; 2), B (–7; 1) és C (1; –5), az AM szakasz pedig az ABC háromszög oldalfelezője. Írjátok fel az AM egyenes egyenletét!

AZ ÖSSZUKRAJNAI IFJÚ MATEMATIKUSOK ELSŐ OLIMPIÁJA

Nagyon reméljük, hogy a 18.36. feladat tetszett nektek, és átéreztétek a megoldásával járó örömet. Ez a feladat azért is figyelmet érdemel, mert 1961-ben ezzel a feladattal kezdődött országunk ifjú matematikusainak első olimpiája.

Ukrajnában a matematikaversenyeknek már régi tradíciója van. Az első városi ifjú matematikusok versenyét 1935-ben Kijevben rendezték meg. Több mint 80 éven keresztül a sok tehetséges iskolásnak a matematikai olimpiák voltak az első lépései a tudományos életben. Ma O. V. Pohorelov, Sz. H. Krejn, M. O. Krasznoszelszkij, V. H. Drinfeld neve az egész tudományos világ számára ismertek. Ők mindannyian, különböző években, Ukrajna matematikai olimpiáinak a győztesei voltak.

Nagy megelégedésünkre szolgál, hogy ma is nagyon népszerűek a matematikaversenyek Ukrajnában. Országunkban több tízezer iskolás vesz részt különböző szintű matematikai megmérettetésen. A versenyek szervezésében a legjobb tudósok, módszertanosok, tanárok vesznek részt. Az ők lelkesedésének és professzionalizmusának köszönhetően Ukrajna csapata megfelelően képviseli országunkat a nemzetközi matematikai diákolimpiákon.

Kedves kilencedikesek, azt ajánljuk nektek, hogy ti is vegyetek részt a matematikai olimpiákon. Most bemutatunk néhány feladatot az összukrajnai ifjú matematikusok első olimpiájának feladatai közül. Próbáljátok ki magatokat.

1. Az ABC háromszögbe írt kör annak oldalait a K, L, M pontokban érinti. Legyen O_1, O_2, O_3 azoknak a körvonalaknak a középpontjai, melyek kívülről érintik a háromszöget. Bizonyítsátok be, hogy a KLM és $O_1O_2O_3$ háromszögek hasonlók!

2. A 4 m^2 területű téglalap belsejébe 7 db egyenként 1 m^2 területű téglalapot rajzoltak. Bizonyítsátok be, hogy legalább két téglalapnak van olyan közös része, melyek területe legalább $\frac{1}{7}$ m^2!

3. Legyenek a négyszög oldalai a, b, c, d, területe pedig S. Bizonyítsátok be, hogy $S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$!

Olekszij Vasziljovics Pohorelov
(1919–2002)

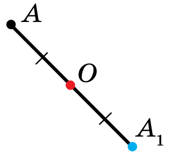
Szelim Hrihorovics Krejn
(1917–1999)

Mark Olekszandrovics Krasznoszelszkij
(1920–1997)

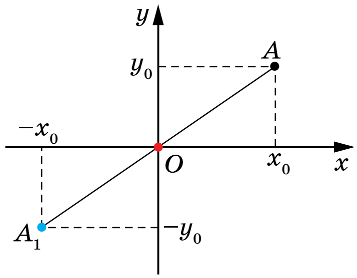
Volodimir Hersovics Drinfeld
(sz.:1954)

19. Középpontos szimmetria. Elforgatás

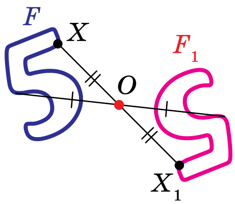
Meghatározás. **Az A és A_1 pontok az O pontra nézve szimmetrikusak, ha az O pont az AA_1 szakasz felezőpontja** (19.1. ábra). **Az O pont önmagával szimmetrikus.**



19.1. ábra



19.2. ábra



19.3. ábra

Például mivel az A és az A_1 pontok abszcisszái és az ordinátái is ellentett számok, ezért a koordináta-rendszer kezdőpontjára nézve szimmetrikusak (19.2. ábra).

Vizsgáljuk meg az F alakzatot és az O pontot. Az F alakzat minden X pontjának az O pontra nézve szimmetrikusan megfeleltetünk egy X_1 pontot. Az F alakzat ilyen átalakítása során kapunk egy F_1 alakzatot (19.3. ábra). Az F alakzat ilyen átalakítását **O pontra vonatkozó tükrözésnek** nevezzük. Az O pont az alakzat **szimmetria-középpontja**. Azt is szokták ilyenkor mondani, hogy az F és F_1 alakzatok **középpontosan szimmetrikusak az O ponthoz képest**.

19.1.tétel (a középpontos szimmetria tulajdonsága). ***A középpontos szimmetria mozgás lesz.***

Bizonyítás. Úgy válasszuk meg a koordináta-rendszert, hogy a szimmetria-középpont egybeessen a koordináta-rendszer kezdőpontjával. Legyen $A\ (x_1; y_1)$ és $B\ (x_2; y_2)$ az F alakzat tetszőleges pontjai. Ekkor az $A_1(-x_1; -y_1)$ és $B_1(-x_2; -y_2)$ pontok az $A\ (x_1; y_1)$ és $B\ (x_2; y_2)$ pontok origóra vonatkozó tükörképei lesznek. Ekkor:

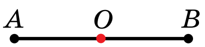
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Megkaptuk, hogy $AB = A_1B_1$, vagyis a középpontos szimmetria megtartja a pontok közötti távolságot. Tehát a középpontos szimmetria mozgás. ◄

Következmény. ***Ha az F és F_1 alakzatok egymással középpontosan szimmetrikusak, akkor $F = F_1$.***

Meghatározás. Az alakzatot az *O* ponthoz képest középpontosan szimmetrikusnak nevezzük, ha az adott alakzat minden pontjának az *O* ponthoz képest szimmetrikus pontja is az adott alakzat pontja lesz.



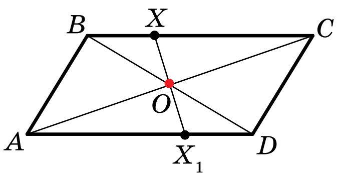
19.4. ábra

Az *O* pontot **szimmetria-középpontnak** nevezzük. Ilyenkor azt is mondják, hogy az **alakzat középpontosan szimmetrikus.**

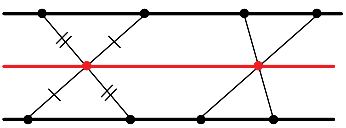
Lássunk néhány középpontosan szimmetrikus alakzatot.

A szakasz szimmetria-középpontja a felezőpontja is egyben (19.4. ábra).

A paralelogramma átlóinak felezőpontja a szimmetria-középpontja is egyben (19.5. ábra).



19.5. ábra



19.6. ábra

Léteznek olyan alakzatok, melyeknek végtelen sok szimmetria-középpontja van. Például az egyenes bármely pontja szimmetria-középpont is egyben.

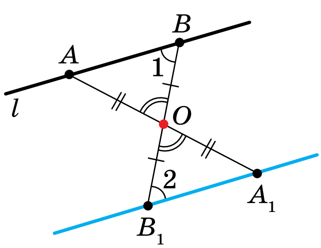
Szintén végtelen sok szimmetria-középpontja van, annak az alakzatnak, amely két párhuzamos egyenesből áll (19.6. ábra).

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az l egyeneshez nem tartozó O pontra vonatkozó tükrözésnél kapott egyenes képe párhuzamos az l egyenessel!

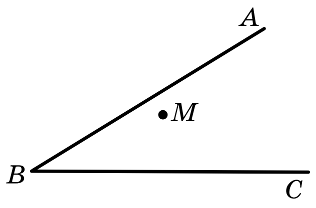
Megoldás. Mivel a középpontos szimmetria mozgás, ezért az l egyenes képe egyenes lesz. Az egyenes megszerkesztéséhez elegendő bármely két pontját ismerni.

Az l egyenesen választunk bármely két A és B pontot (19.7. ábra). Legyenek e pontoknak az O pontra vonatkozó tükörképei megfelelően az A_1 és B_1 pontok. Ekkor az A_1B_1 egyenes lesz az l egyenes képe.

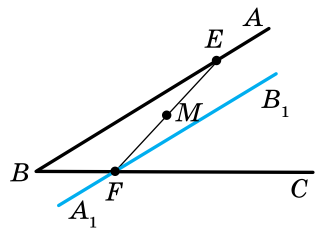
Mivel $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, az AOB és A_1OB_1 szögek mint csúcsszögek egyenlők, ezért az AOB és az A_1OB_1 háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy $1\angle = 2\angle$ (19.7. ábra). Tehát a párhuzamos egyenesek ismertetőjele alapján $l \parallel A_1B_1$.◄



19.7. ábra



19.8. ábra



19.9. ábra

2. feladat. Az M pont az ABC szöghöz illeszkedik (19.8. ábra). A szög BA és BC szárán szerkesszetek olyan E és F pontokat, hogy az M pont az EF szakasz felezőpontja legyen!

Megoldás. Legyen az A_1B_1 egyenes az AB egyenes M pontra vonatkozó tükörképe (19.9. ábra). Jelöljük F-fel az A_1B_1 és BC egyenesek metszéspontját.

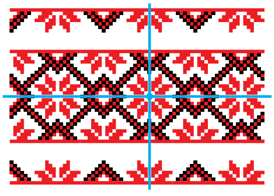
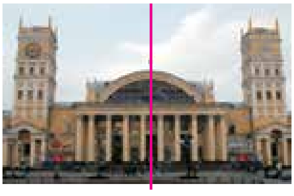
Meghatározzuk az F pont tükörképét. Természetesen ez a pont az AB egyenesre fog illeszkedni. Ezért elegendő meghatározni az FM és az AB egyenesek metszéspontját. Jelöljük ezt a pontot E betűvel. Ekkor az E és F pontok lesznek a keresett pontok. ◀

Környezetünkben gyakran látunk példát a szimmetriára (19.10. ábra). A szimmetriatengellyel vagy szimmetria-középponttal rendelkező objektumok látványa megérintenek bennünket, és emellett kellemesek a szemnek. Ezért az ókori Görögországban a *szimmetria* szó szinonimája volt a *harmónia*, a *szépség* szavaknak.

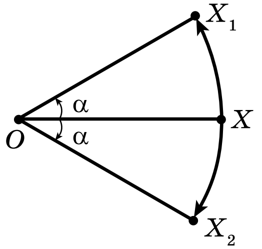


19.10. ábra

A szimmetriát gyakran alkalmazzák a művészetben, építészetben és az iparban (19.11. ábra).


19.11. ábra

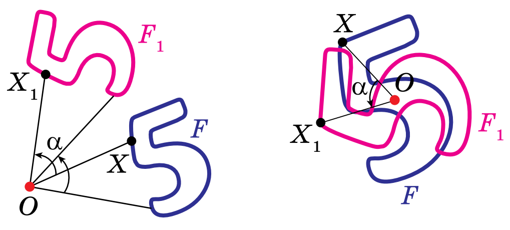


19.12. ábra

A 19.12. ábrán az O, X, X_1 és X_2 pontok láthatók, melyekre teljesül: $OX_1 = OX_2 = OX$, $X_1OX\angle = X_2OX\angle = \alpha$. Ekkor azt mondják, hogy az X_1 pont a tükörképe az X pontnak, **az *O* pont körüli óramutató járásával ellentétes** α **szögű elforgatásnál**. Az X_2 szintén tükörképe az X pontnak, **az *O* pont körüli – az óramutató járásával megegyez**ő α **szögű – elforgatásnál**.

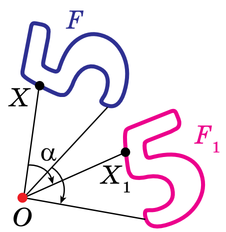
Az O pontot az **elforgatás középpontjának**, az α szöget pedig az **elforgatás szögének** nevezzük.

Vizsgáljuk meg az F alakzatot, az O pontot és az α szöget. Az F alakzat minden X pontját az O pont körül az óramutató járásával ellentétes irányba elforgatjuk α szöggel (ha az O pont az F alakzathoz illeszkedik, akkor ennek a képe önmaga lesz). Az elforgatás következtében az F alakzatból egy F_1 alakzatot kapunk (19.13. ábra). Az ilyen transzformációt az F alakzat **az *O* pont körüli, az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatásának** nevezzük. Az O pont **az elforgatás középpontja lesz.**



а *б*

19.13. ábra



19.14. ábra

Hasonlóan adjuk meg az F alakzat O pont körüli óramutató járásával megegyező α szögű elforgatását (19.14. ábra).

Megjegyezzük, hogy az O pont körüli 180°-os elforgatás egyenértékű az O pontra vonatkozó középpontos tükrözéssel.

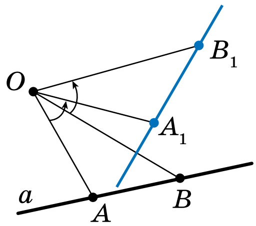
19.2.tétel (az elforgatás tulajdonsága). ***Az elforgatás az mozgatás.***

Bizonyítsátok be önállóan ezt a tételt.

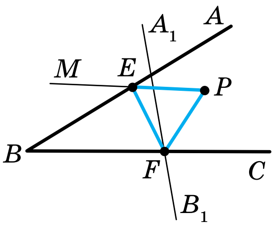
Következmény. Ha az F_1 alakzat az elforgatással kapott *F* alakzat képe, akkor $F = F_1$.

3.feladat. Adott az a egyenes és a hozzá nem illeszkedő O pont. Szerkesszétek meg az a egyenes képét az O pont körüli, az óramutató járásával ellentétes irányú 45°-os elforgatásnál!

Megoldás. Mivel az elforgatás mozgás, ezért az a egyenes képe is egyenes lesz. Az egyenes megrajzolásához elegendő két pontját meghatározni. Az a egyenesen választunk két tetszőleges A és B pontot (19.15. ábra). Megszerkesszük az A_1 és B_1 pontokat, amelyek ezeknek a pontoknak a képei lesznek az O pont körüli, az óramutató járásával ellentétes irányú 45°-os elforgatásnál. Ekkor az A_1B_1 egyenes lesz az a egyenes képe. ◀



19.15. ábra



19.16. ábra

4. feladat. A P pont az ABC szöghöz illeszkedik, de nem illeszkedik a szög száraihoz. Szerkesszetek egy olyan egyenlő oldalú háromszöget, melynek egyik csúcsa a P pont, a másik kettő pedig az ABC szög BA és BC száraira illeszkedik!

Megoldás. Legyen az A_1B_1 egyenes az AB egyenes képe a P pont körüli, az óramutató járásával ellentétes irányú 60°-os elforgatásnál (19.16. ábra). Jelöljük F-fel az A_1B_1 és BC egyenesek metszéspontját.

Legyen az E pont az F pont eredője az adott elforgatásnál. Az E pont illeszkedik az ABC szög BA szárához.

A fenti gondolatmenet segítséget nyújt a keresett háromszög megszerkesztéséhez.

Megszerkesztjük az A_1B_1 egyenest, amely az AB egyenes képe a P pont körüli, az óramutató járásával ellentétes irányú 60°-os elforgatásnál. Legyen F az A_1B_1 és BC egyenesek metszéspontja.

Megszerkesszük az MPF 60°-os szöget. Legyen az MP és AB egyenesek metszéspontja az E pont. Ez a pont az F pont eredője.

Megkaptuk, hogy $PF = PE$ és $FPE\angle = 60°$. Tehát az EPF egyenlő oldalú lesz. ◀

?

1. Milyen pontokat nevezünk szimmetrikusnak az O ponthoz viszonyítva? Hogyan nevezzük az O pontot?
2. Milyen alakzatokat nevezünk szimmetrikusnak az O ponthoz képest?
3. Fogalmazzátok meg a középponti szimmetria tulajdonságát!
4. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a középpontosan szimmetrikus alakzatok?
5. Milyen alakzatról mondják azt, hogy van szimmetria-középpontja?

6. Hozzatok fel példákat középpontosan szimmetrikus alakzatokra!
7. Ismertessétek a pont körüli elforgatás menetét!
8. Fogalmazzátok meg az elforgatás tulajdonságát!
9. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek azok az alakzatok, melyek elforgatással egymásba vihetők át?

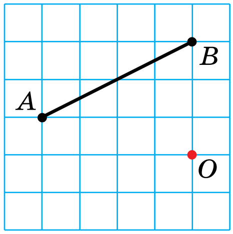
GYAKORLATI FELADATOK

19.1.° Rajzoljatok egy ABC háromszöget, és jelöljetek egy O pontot, amely nem illeszkedik a háromszögre! Szerkesszétek meg a háromszög O pontra vonatkozó tükörképét!

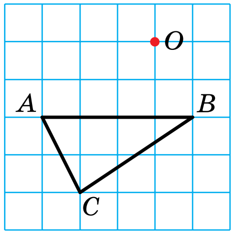
19.2.° Rajzoljatok egy ABC háromszöget, majd szerkesszétek meg az adott háromszögnek az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképét!

19.3.° Rajzoljatok egy körvonalat, és jelöljetek rajta egy pontot! Szerkesszetek egy kört, mely szimmetrikus lesz az adott körrel, a jelölt ponthoz képest!

19.4.° Szerkesszétek meg az AB szakasz képét, amelyet az O pont körüli, az óramutató járásával ellentétes irányú 45°-os elforgatásával kapunk (19.17. ábra)!



19.17. ábra



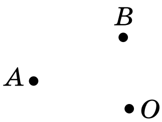
19.18. ábra

19.5.° Szerkesszétek meg az ABC háromszög képét, amelyet az O pont körüli, az óramutató járásával megegyező irányú 90°-os elforgatásával kapunk (19.18. ábra)!

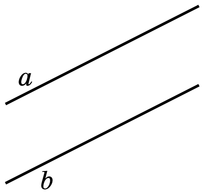
19.6.• Szerkesszétek meg az $ABCD$ paralelogrammát az A és B csúcsai, valamint átlóinak O metszéspontja alapján (19.19. ábra)!

19.7.• Adott az a és b párhuzamos egyenes (19.20. ábra). Határozzátok meg azt a pontot, amelyhez viszonyítva az a egyenes szimmetrikus lesz a b-vel!

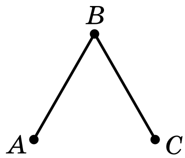
19.8.• A 19.21. ábrán két egyenlő AB és BC szakasz látható, az $ABC\angle = 60°$. Határozzátok meg az O pontot úgy, hogy az AB szakasz a BC szakasz képe legyen az O pont körüli, az óramutató járásával ellenkező irányú 120°-os elforgatásnál!



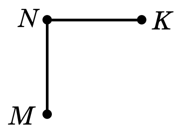
19.19. ábra



19.20. ábra



19.21. ábra



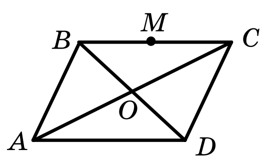
19.22. ábra

19.9.• A 19.22. ábrán két egyenlő és merőleges MN és NK szakasz látható. Határozzátok meg azt az O pontot, hogy az NK szakasz az MN szakasz képe legyen az O pont körüli, az óramutató járásával megegyező irányú 90°-os elforgatásnál!

19.10.* Szerkesszetek egy olyan alakzatot, amelynek nincs szimmetriatengelye és a képe az eredetivel megegyező alakzat lesz egy adott pont körüli 1) 90°-os; 2) 120°-os elforgatásnál!

GYAKORLATOK

19.11.° Az $ABCD$ paralelogramma átlói az O pontban metszik egymást (19.23. ábra). Az M pont a BC szakasz felezőpontja. Nevezzétek meg az A, D és M pontok, a CD oldal, a BD átló képeit az O pontra vonatkozó tükrözésnél!



19.23. ábra

19.12.° Bizonyítsátok be, hogy a paralelogramma átlóinak metszéspontja a szimmetria-középpontja is egyben!

19.13.° Bizonyítsátok be, hogy a körnek van szimmetria-középpontja!

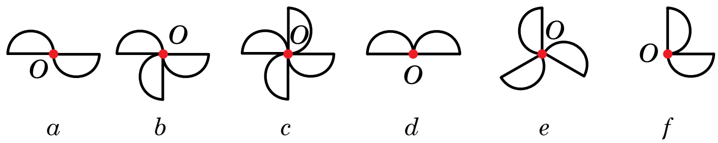
19.14.° Az A_1 és B_1 pontok az A és B pontok képei az AB egyeneshez nem illeszkedő pontra vonatkozó tükrözésnél. Bizonyítsátok be, hogy az ABA_1B_1 négyszög paralelogramma!

19.15.° Határozzátok meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, melyek az A (3; –1) és B (0; –2) pontok tükörképei, ha a szimmetria-középpont: 1) a koordináta-rendszer kezdőpontja; 2) az M (2; –3) pont lesz!

19.16.° Bizonyítsátok be, hogy annak az egyenesnek a képe, amelyhez a szimmetria-középpont illeszkedik, ugyanaz az egyenes lesz!

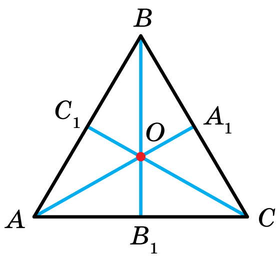
19.17.° A: 1) koordináta-rendszer kezdőpontjára;
2) az M (1; –3) pontra vonatkozó tükrözésnél az A (x; –2) pont a B (1; y) pont képe. Határozzátok meg az x és y értékeit!

19.18.° A 19.24. ábrán egyenlő félkörlapokból álló alakzatok láthatók. Az alakzatok közül melyek lesznek egybevágók az O középpontú α szögű elforgatással kapott képükkel, ahol $0° < \alpha \leqslant 180°$?

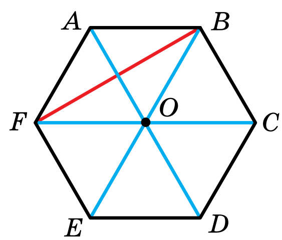


19.24. ábra

19.19.° Az ABC egyenlő oldalú háromszög súlyvonalai az O pontban metszik egymást (19.25. ábra). Mik lesznek a képei a C, C_1 és O pontoknak, a BC oldalnak, a BB_1 súlyvonalnak, az OC_1 szakasznak, az $A_1B_1C_1$ háromszögnek az O pont körüli, az óramutató járásával ellenkező irányú 120°-os elforgatásnál!



19.25. ábra

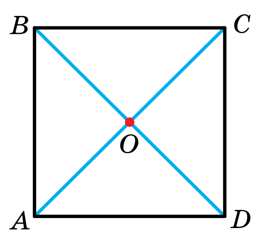


19.26. ábra

19.20.° Az O pont az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja (19.26. ábra). Nevezzétek meg az $ABCDEF$ hatszög AF oldalának, BF átlójának, AD átlójának képét az O pont körüli, az óramutató járásával megegyező irányú:

1) 60°-os; 2) 120°-os elforgatásnál!

19.21.° Az $ABCD$ négyzet átlói az O pontban metszik egymást (19.27. ábra). Nevezzétek meg az A, O és C pontoknak, az AD oldalnak, a BD átlónak a képét az O pont körüli, az óramutató járásával megegyező irányú 90°-os elforgatásnál!



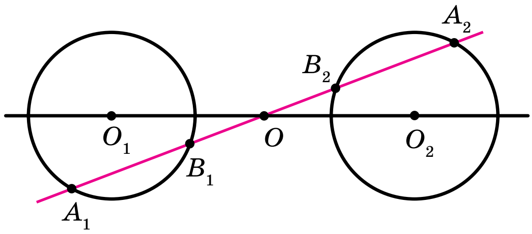
19.27. ábra

19.22.• Bizonyítsátok be, hogy a háromszögnek nincs szimmetria-középpontja!

19.23.• Bizonyítsátok be, hogy a félegyenesnek nincs szimmetria-középpontja!

19.24.• Bizonyítsátok be, hogyha a négyszögnek van szimmetria-középpontja, akkor az paralelogramma lesz!

19.25.• Az O_1 középpontú körvonal O pontra vonatkozó tükörképe az O_2 középpontú körvonal (19.28. ábra). A szimmetria-középponthoz illeszkedő egyenes az első kört az A_1 és B_1 pontokban, a másikat pedig az A_2 és B_2 pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az $A_1B_1 = A_2B_2$!



19.28. ábra

19.26.• Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsa a 120°-os elforgatás középpontja. Határozzátok meg a BC_1 szakasz hosszát, ha a C_1 pont a C pont képe az adott elforgatásnál, és AB = 1 cm! Hány megoldása van a feladatnak?

19.27.• Az $ABCD$ négyzet A csúcsa az óramutató járásával ellenkező irányú 90°-os elforgatás középpontja. Határozzátok meg a CC_1 szakasz hosszát, ha a C_1 pont a C pont képe az adott elforgatásnál, és AB = 1 cm!

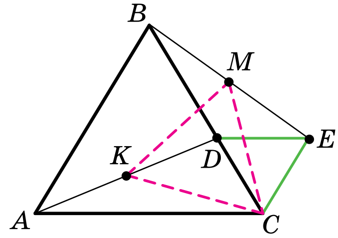
19.28.•• Az egyik paralelogramma csúcsai a másik paralelogramma oldalaira illeszkednek, mindegyik oldalra egy-egy csúcs. Bizonyítsátok be, hogy az így kapott paralelogrammák átlóinak metszéspontjai egybeesnek!

19.29.•• Az A és C pontok egy hegyesszöghöz illeszkednek, de nem a szárakra. Szerkesszetek egy $ABCD$ paralelogrammát úgy, hogy a B és D pontok a szög száraihoz illeszkedjenek!

19.30.•• Szerkesszetek egy olyan szakaszt, melynek felezőpontja az adott pont lesz, és a végpontjai pedig a nem párhuzamos egyenesekhez illeszkednek!

19.31.•• Az M pont illeszkedik az ABC szöghöz, de nem a szög száraihoz. Szerkesszetek egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha derékszögének csúcsa az M pont lesz, a másik két csúcs pedig a BA és BC szárakra illeszkedik!

19.32.* Az ABC egyenlő oldalú háromszög BC oldalán jelöltek egy D pontot. Az ABC háromszögön kívül jelöltek egy olyan E pontot, hogy a DEC háromszög is egyenlő oldalú lesz (19.29. ábra). Bizonyítsátok be, hogy a C pont valamint a BE és AD szakaszok megfelelő M és K felezőpontjai egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai lesznek!



19.29. ábra

19.33.* Szerkesszetek egyenlő oldalú háromszöget, ha csúcsai három párhuzamos egyeneshez illeszkednek!

19.34.* Szerkesszetek egy rombuszt, melynek az átlói metszéspontja egy adott pont lesz, és három csúcsa három nem párhuzamos egyeneshez illeszkedik!

19.35.* Az $ABCD$ négyzet CD oldalán jelöltek egy E pontot. A BAE szög szögfelezője a BC oldalt egy F pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy $AE = BF + ED$!

19.36.* Az ABC egyenlő oldalú háromszögben úgy jelöltek egy P pontot, hogy az $APB\angle = 150°$. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan derékszögű háromszög, melynek oldalai a PA, PB és PC szakaszokkal egyenlők!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

19.37. Határozzátok meg az ABC háromszög oldalait, ha $A\angle = 30°$, $B\angle = 45°$, a C csúcsból bocsátott magassága pedig 4 cm!

19.38. Az abszcisszatengelyen határozzátok meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra van az A (–2; 4) és B (6; 8) pontoktól!

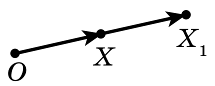
19.39. Az egyenlő szárú háromszögbe kör van írva. Az érintési pont a szárat 25 : 12 arányban osztja a háromszög csúcsától számítva. Határozzátok meg a beírt kör sugarát, ha a háromszög területe 1680 cm^2!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

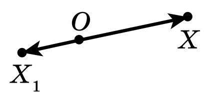
19.40. Jelöljetek a síkon 6 pontot úgy, hogy bármelyik három közülük egy egyenlő szárú háromszög csúcsai legyenek!

20. Az alakzatok hasonlósága[1]

A 20.1. ábrán az O, X és X_1 pontok láthatók, melyekre teljesül az $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$ egyenlőség. Ekkor azt mondjuk, hogy az X_1 pont az X pont képe lesz az ***O* középpontú, 2 együtthatójú homotécia** esetén.



20.1. ábra



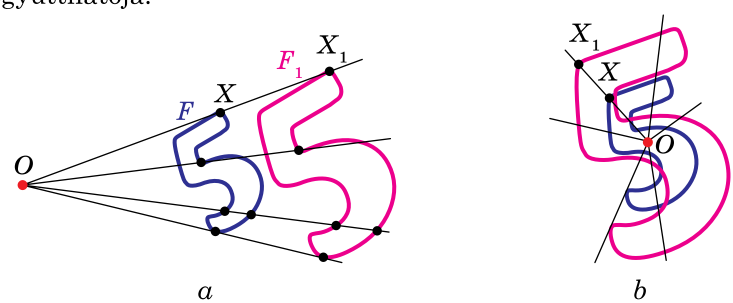
20.2. ábra

A 20.2. ábrán az O, X és X_1 pontok láthatók, melyekre teljesül az $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$ egyenlőség. Ekkor azt mondjuk, hogy az X_1 pont az X pont képe lesz az O középpontú homotécia esetén, melynek arányossági tényezője $-\frac{1}{2}$.

Általános esetben, az O, X és X_1 pontok láthatók, melyekre teljesül az $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, ahol $k \neq 0$, egyenlőség. Ekkor azt mondjuk, hogy az X_1 pont az X pont képe lesz **az *O* középpontú homotécia során, melynek arányossági tényezője** vagy **együtthatója *k***.

Az O pontot a **homotécia középpontjának** a k számot, $k \neq 0$ pedig a **homotécia arányossági tényezőjének** vagy **együtthatójának** nevezzük.

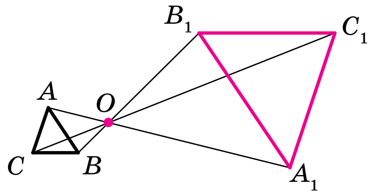
Vizsgáljuk meg az F alakzatot és az O pontot. Az F alakzat minden X pontjának megfeleltetünk egy olyan X_1 pontot, amely az X pont képe az O középpontú k együtthatójú homotécia esetén (ha az O pont az F alakzathoz illeszkedik, akkor ennek a képe önmaga lesz). A transzformáció eredményeképpen az F alakzatból egy F_1 alakzatot kapunk (20.3. ábra). Az F alakzat ilyen transzformációját ***O* középpontú, *k* együtthatójú homotéciának** nevezzük. Úgy is mondhatjuk, hogy az F_1 alakzat **homotetikus** az F alakzattal, ahol O a homotécia középpontja, k pedig együtthatója.



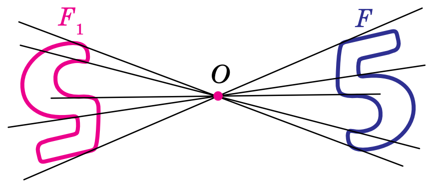
20.3. ábra

[1] Ennek a pontnak az a része, amely a homotéciával foglalkozik, nem kötelező tananyag.

Például a 20.4. ábrán az $A_1B_1C_1$ háromszög homotetikus az ABC háromszöggel, a homotécia középpontja O, együtthatója pedig –3. Vagy másképpen, az ABC háromszög homotetikus az $A_1B_1C_1$ háromszöggel, ugyanazzal a középponttal, de $-\frac{1}{3}$ együtthatóval.



20.4. ábra



20.5. ábra

Megjegyezzük, hogyha k = –1, akkor az O középpontú homotécia O középpontú szimmetria lesz (20.5. ábra). Ha k = 1, akkor a homotécia azonos átalakítás lesz.

Nyilvánvaló, hogy $k \neq 1$ és $k \neq -1$ esetén a homotécia nem lesz mozgás.

20.1. tétel. ***A k együtthatójú homotécia az F alakzat pontjai közötti távolságokat $|k|$ szorosan változtatja, vagyis ha az A és B pontok az F alakzat bármilyen pontjai, azaz ha k együtthatójú homotécia esetén az A_1 és B_1 pontok az A és B pontok megfelelő képei, akkor $A_1B_1 = |k|AB$.***

Bizonyítás. Legyen O a homotécia középpontja. Akkor $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Innen kapjuk, hogy:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB},$$

vagyis $A_1B_1 = |\,k\,|\,AB$. ◀

Következmény. ***Ha az $A_1B_1C_1$ homotetikus az ABC háromszöggel, a homotécia együtthatójú k, akkor $A_1B_1C_1\Delta \sim ABC\Delta$.***

Ennek az állításnak a bizonyításához elegendő alkalmazni a 20.1. tételt, és a háromszögek hasonlóságának harmadik ismertetőjelét.

A homotéciának az alábbi tulajdonságai vannak.

A homotécia esetén:

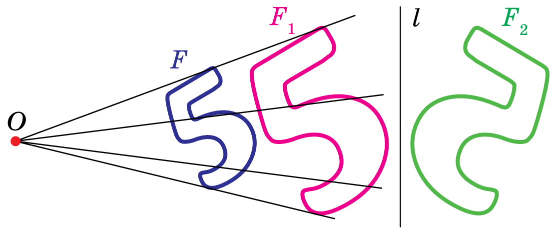
- *az egyenes képe egyenes;*
- *a szakasz képe szakasz;*
- *szög képe vele azonos nagyságú szög;*
- *a háromszög képe az adott háromszöggel hasonló háromszög;*
- *a körvonal képe körvonal;*

- *a sokszög területe k^2-szeresére változik meg, ahol a k a homotécia együtthatója.*

Ezeket a tulajdonságokat a matematika szakkörökön bizonyíthatjátok be.

A homotécia fenti tulajdonságai azt jelentik, hogy ez a transzformáció megváltoztathatja az alakzatok méreteit, de nem változtatja meg az alakjukat, vagyis homotécia során az eredő alakzat és a képe hasonló alakzatok leszek. Megjegyezzük, hogy a 8. osztályban, amikor a hasonlóságról volt szó, akkor csak a hasonló háromszögek meghatározását adtuk meg. Most már megfogalmazhatjuk bármilyen hasonló alakzat meghatározását.

A 20.6. ábrán az F_1 alakzat homotetikus az F alakzattal, és az F_2 alakzat szimmetrikus az F_1-gyel az l egyeneshez viszonyítva.

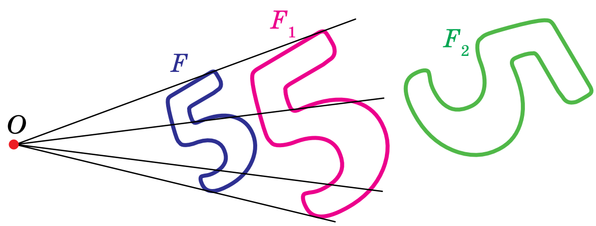


20.6. ábra

Ekkor azt mondjuk, hogy az F_2 alakzatot az F alakzatból a következő transzformációk **kompozíciójából** kapjuk: homotécia és tengelyes tükrözés.

Mivel az $F_1 = F_2$, ezért az F és F_2 alakzatok azonos alakúak, de különböző méretűek, vagyis hasonlók. Az F_2 alakzatot az F alakzatból **hasonlósági transzformációval** kapjuk meg.

A 20.7. ábrán az F_1 alakzat homotetikus az F alakzattal, és az F_2 alakzat az F_1 alakzat képe valamilyen mozgásnál. Itt is állíthatjuk, hogy az F és F_2 alakzatok hasonlók.



20.7. ábra

A fentiekből következik, hogy érdemes megadni a következő meghatározást.

Definíció. **Két alakzatot hasonlónak nevezzük, ha az egyik alakzatból homotécia és mozgás transzformációk segítségével megkapjuk a másik alakzatot.**

Ezt illusztrálja a 20.8. ábra.

Hasonlóság = **Homotécia** + **Mozgás**

20.8. ábra

Az $F \sim F_1$ azt jelenti, hogy az F alakzat hasonló az F_1-gyel. Azt is mondják, hogy az F_1 alakzat az F alakzat **hasonlósági transzformáció** során kapott képe.

A fentiekből következik, hogy *hasonlósági transzformáció során az F alakzat pontjai közötti távolság ugyanannyiszorosára fog megváltozni.*

Mivel az alakzatok azonos átalakítása mozgás, ezért a 20.8. ábrából következik, hogy a homotécia a hasonlósági transzformáció részesete.

Legyen az A és B pont az F alakzat tetszőleges pontja, ezért hasonlósági transzformáció során az A_1 és B_1 pontok ezeknek a képei lesznek. Az A_1 és B_1 pontok illeszkednek az F_1 alakzathoz, amely hasonló az F-hez. A $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ számot **hasonlósági együtthatónak** nevezzük. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az F_1 alakzat hasonló az F-hez, a hasonlósági együttható pedig k lesz, és az F alakzat hasonló az F_1 alakzathoz, melynek hasonlósági együtthatója $\frac{1}{k}$ lesz.

Megjegyezhetjük, hogy a hasonlósági transzformáció a $k = 1$ esetén mozgás lesz. Ebből következik, hogy a mozgás a hasonlósági transzformáció részesete.

Hasonlósági transzformációval gyakran találkozunk a hétköznapi életben is (20.9. ábra). Például a térkép méretarányának megváltoztatásával egy hasonló térképet kapunk. A fénykép egy olyan transzformáció, amely a kép negatívját fényképpapíron ábrázolja. Amikor átrajzoljuk a táblán lévő rajzot a füzetünkbe, az szintén hasonlósági transzformáció lesz.

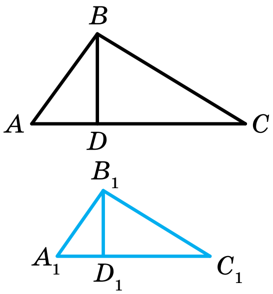
20.9. ábra

20.2. tétel. ***A hasonló alakzatok területeinek aránya a hasonlósági együttható*** **négyzetével egyenlő.**

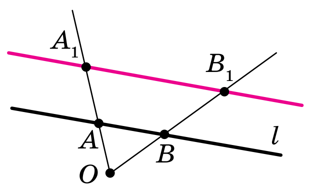
Ennek a tételnek a bizonyítása nem tartozik az iskolai tananyag keretei közé. Ezért mi ennek egy részesetét bizonyítjuk be, a hasonló háromszögek esetét.

Bizonyítás. Legyen az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszög képe a k együtthatójú hasonlósági transzformáció esetén (20.10. ábra). Az A_1C_1 oldal az AC oldal képe lesz. Ezért $A_1C_1 = k \cdot AC$. Meghúzzuk a BD magasságot. Legyen a D_1 pont a D pont képe. Mivel a hasonlósági transzformáció során a szög mértéke nem változik, ezért a B_1D_1 az $A_1B_1C_1$ háromszög magassága lesz. Tehát $B_1D_1 = k \cdot BD$. Vagyis:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2. \blacktriangleleft$$



20.10. ábra



20.11. ábra

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy az l egyenes képe az O középpontú homotécia során, ha az O pont nem illeszkedik l egyeneshez, az adott egyenessel párhuzamos egyenes lesz!

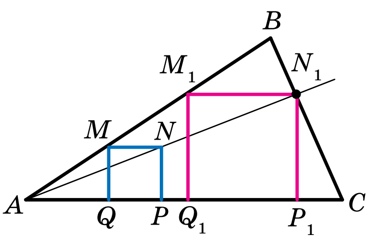
Megoldás. A homotécia tulajdonságaiból következik, hogy az l egyenes képe is egyenes lesz. Kiválasztunk az l egyenesen bármilyen A és B pontokat (20.11. ábra). Legyen az A_1 és B_1 ezeknek a pontoknak a képei az O középpontú és k együtthatójú homotécia során (a 20.11. ábra annak az esetnek felel meg, amikor $k > 1$). Ekkor az A_1B_1 egyenes az AB egyenes képe lesz.

A 20.1. tétel bizonyítása során már igazoltuk, hogy $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Tehát $AB \parallel A_1B_1$. $\blacktriangleleft$

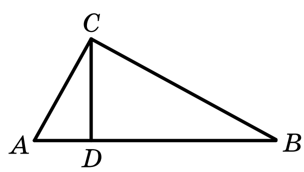
2. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszögbe írjatok úgy egy négyzetet, hogy két csúcsa megfelelően az AB és BC oldalakra illeszkedjen, a másik kettő pedig az AC oldalra!

Megoldás. Az AB oldal bármelyik M pontjából az AC oldalra bocsátunk egy MQ merőlegest (20.12. ábra). Megrajzoljuk az $MQPN$ négyzetet úgy, hogy a P pont a QC félegyenesre illeszkedik. Az AN félegyenes a BC oldalt egy N_1 pontban metszi.

Vizsgáljuk meg az A középpontú és $k = \frac{AN_1}{AN}$ együtthatójú homotéciát. Ekkor a homotécia során az N_1 pont az N pont képe lesz. Az MN szakasz képe az M_1N_1 szakasz, ahol az M_1 pont az AB félegyenesre illeszkedik, $M_1N_1 \parallel MN$. Hasonlóan az N_1P_1 szakasz olyan, hogy P_1 illeszkedik az AC félegyeneshez és $N_1P_1 \parallel NP$, és az NP szakasz képe lesz. Tehát, az M_1N_1 és N_1P_1 szakaszok a keresett négyzet szomszédos oldalai. A szerkesztés befejezéséhez már csak meg kell húznunk az AC oldalra az M_1Q_1 merőlegest. ◀



20.12. ábra



20.13. ábra

3. feladat. A CD szakasz az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) magassága. Határozzátok meg az ABC háromszögbe írt kör r sugarát, ha az ACD és BCD háromszögekbe írt körök sugarai megfelelően r_1 és r_2 lesz!

Megoldás. Mivel az A szög az ACD és ABC háromszögek közös szöge, ezért ezek a háromszögek hasonlók (20.13. ábra). Legyen a hasonlósági együttható k_1. Ebből adódik, hogy $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Hasonlóképpen a $BCD\Delta \sim ABC\Delta$ és a hasonlósági együtthatójuk $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

Jelöljük az ACD, BCD és ABC háromszögek területeit, megfelelően S_1, S_2 és S-sel. Ekkor:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Innen: $\dfrac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=\dfrac{S_1+S_2}{S}=1.$

Ebből azt kapjuk, hogy $r^2=r_1^2+r_2^2$, vagyis $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

Felelet: $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. ◀

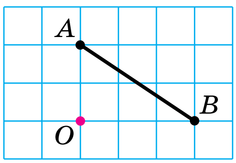
?

1. Milyen esetben mondjuk, hogy az X_1 pont az X pont képe lesz az O középpontú, k együtthatójú homotécia esetén:
2. Magyarázzátok meg az F alakzat transzformációját O középpontú, k együtthatójú homotécia esetén!
3. Hogyan változik a pontok közötti távolság a k együtthatójú homotécia esetén?
4. Fogalmazzátok meg a homotécia tulajdonságait!
5. Milyen alakzatokat nevezünk hasonlóknak?
6. Mivel lesz egyenlő a hasonló sokszögek területeinek aránya?

GYAKORLATI FELADATOK

20.1.° Szerkesszétek meg az AB szakasz (20.14. ábra) képét O középpontú homotécia esetén, ha az együttható:

1) $k=2$; 2) $k=-\dfrac{1}{2}$!



20.14. ábra

20.2.° Rajzoljatok egy AB szakaszt. Szerkesszétek meg ennek a szakasznak a képét annál a homotéciánál, melynek arányossági tényezője k, középpontja pedig:
1) az A pontban lesz, $k=3$;
2) a B pontban lesz, $k=-2$;
3) az AB szakasz felezőpontjában van, $k=2$!

20.3.° Rajzoljatok egy 2 cm-es sugarú körvonalat, és jelöljetek rajta egy A pontot! Szerkesszétek meg ennek a körnek a képét k együtthatójú homotécia esetén, ha középpontja:

1) a kör középpontja, $k=-\dfrac{1}{2}$, $k=2$;

2) az A pont, $k=2$, $k=-\dfrac{1}{2}$!

20.4.° Rajzoljatok egy ABC háromszöget. Szerkesszétek meg ennek a háromszögnek a képét k együtthatójú homotécia esetén, ha középpontja:

1) a B pont, $k = 3$;

2) a C pont, $k = -\frac{1}{2}$;

3) az A pont, $k = \frac{1}{2}$;

4) középpontja az AB szakasz felezőpontja, $k = \frac{1}{2}$;

5) középpontja az AC szakasz felezőpontja, $k = -\frac{1}{3}$!

20.5.° Rajzoljatok egy ABC háromszöget. Határozzátok meg oldalfelezőik metszéspontját! Szerkesszétek meg a háromszög képét k együtthatójú homotécia esetén, ha a homotécia középpontja a súlyvonalak metszéspontja:

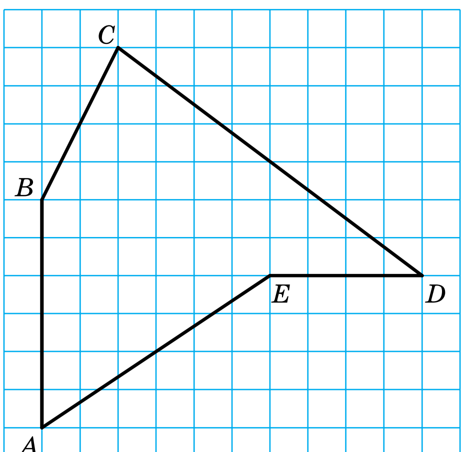
1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$!

20.6.° Rajzoljatok egy $ABCD$ paralelogrammát. Az átlóinak metszéspontját jelöljétek O-val. Szerkesszétek meg ennek a paralelogrammának a képét O középpontú és k együtthatójú homotécia esetén: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$!

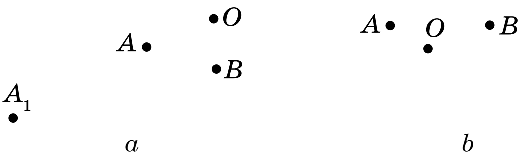
20.7.° Rajzoljatok egy $ABCD$ négyzetet. Szerkesszétek meg ennek a négyzetnek a képét k együtthatójú homotécia esetén, ha középpontja:

1) az A pont, $k = \frac{1}{3}$; 2) a B pont, $k = -2$; 3) a C pont, $k = 2$!

20.8.° Rajzoljátok át az $ABCDE$ ötszöget (20.15. ábra). Szerkesszetek ehhez hasonló $A_1B_1C_1D_1E_1$ ötszöget, ha a hasonlósági arány $\frac{1}{2}$ lesz!



20.15. ábra



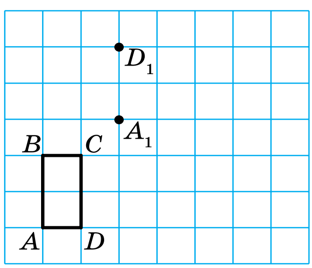
20.16. ábra

20.17. ábra

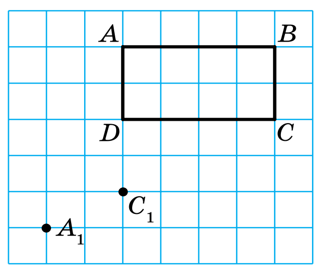
20.9.• A 20.16. ábrán O középpontú homotécia esetén az A_1 pont az A pont képe. Szerkesszétek meg a B pont képét ennél a homotéciánál!

20.10.• A 20.17. ábrán az A_1 pont az A pont képe egy olyan homotécia esetén, melynek együtthatója: 1) $k = 3$; 2) $k = –2$. Szerkesszétek meg a homotécia középpontját!

20.11.• A 20.18. ábrán az $ABCD$ téglalap látható, valamint az A_1 és D_1 pontok, melyek az A és D pontok megfelelő képei a hasonlósági transzformáció esetén. Szerkesszétek meg az $ABCD$ téglalap képét ennél a transzformációnál! Hány megoldása van a feladatnak?



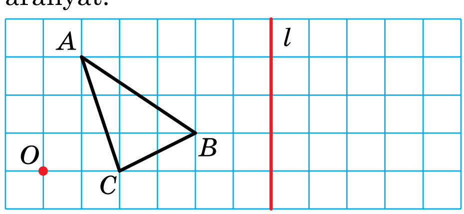
20.18. ábra



20.19. ábra

20.12.• A 20.19. ábrán az $ABCD$ téglalap látható, valamint az A_1 és C_1 pontok, melyek az A és C pontok megfelelő képei a hasonlósági transzformáció esetén. Szerkesszétek meg az $ABCD$ téglalap képét ennél a transzformációnál! Hány megoldása van a feladatnak?

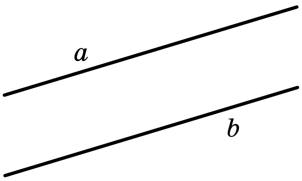
20.13.• Szerkesszétek meg az ABC háromszög képét annál a transzformációnál, amely két transzformáció kompozíciója lesz: az O középpontú és $k = 2$ együtthatójú homotécia, valamint az l egyenesre vonatkoztatott tengelyes tükrözés (20.20. ábra)! Határozzátok meg a hasonlóság arányát!



20.20. ábra

20.14.• Rajzoljatok egy 2 cm sugarú körvonalat. Jelöljetek egy O pontot a középpontjától 4 cm-re. Szerkesszétek meg a hasonlósági transzformáció által kapott képét, amely két transzformáció kompozíciója lesz: az O középpontú és $k = \frac{1}{2}$ együtthatójú homotécia és az O pont körüli, az óramutató járásával megegyező irányú 45°-os elforgatás! Határozzátok meg a hasonlóság arányát!

20.15.• A 20.21. ábrán az a és b párhuzamos egyenesek láthatók. Szerkesszétek meg a homotécia középpontját, ha a b egyenes az a egyenes képe lesz, és az együttható: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$! Hány megoldása van a feladatnak?



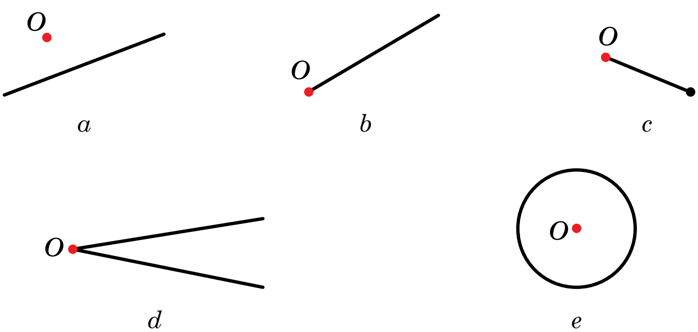
20.21. ábra

20.16.• Rajzoljatok egy $ABCD$ trapézt, melynek BC alapja kétszer kisebb, mint az AD alap! Szerkesszétek meg annak a homotéciának a középpontját, melynél az AD szakasz a BC szakasz képe, a homotécia együtthatója pedig: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$!

GYAKORLATOK

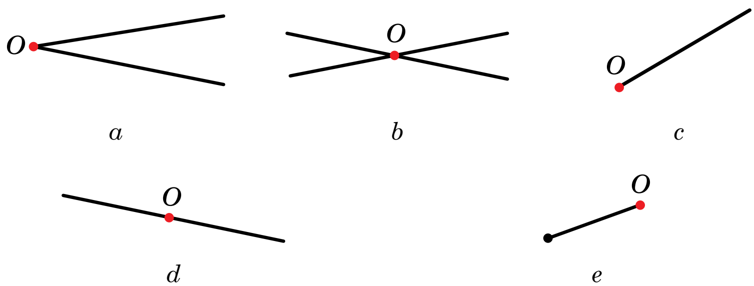
20.17.° Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának felezőpontja D_1. Az A középpontú homotéciánál a D_1 pont a D pont képe. Határozzátok meg a homotécia együtthatóját! Nevezzétek meg a B és C pontok képeit ennél a homotéciánál!

20.18.° A 20.22. ábrán lévő alakzatok közül melyiknek lesz önmaga a képe az O középpontú homotécia esetén, ha $k > 0$ és $k \neq 1$?



20.22. ábra

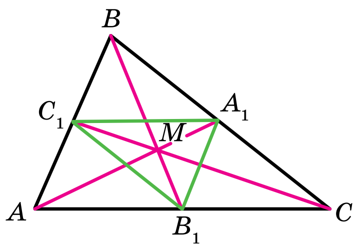
20.19.° A 20.23. ábrán lévő alakzatok közül melyiknek lesz önmaga a képe az O középpontú homotécia esetén, ha $k < 0$?



20.23. ábra

20.20.° Az ABC háromszög súlyvonalai az M pontban metszik egymást (20.24. ábra). Határozzátok meg a homotécia együtthatóját, ha a középpontja:

1) a B pontban lesz, és B_1 az M pont képe;
2) az M pontban lesz, és A_1 az A pont képe;
3) a C pontban lesz, és M a C_1 pont képe;



20.24. ábra

20.21.° Az ABC háromszög súlyvonalai az M pontban metszik egymást (20.24. ábra). Határozzátok meg a homotécia együtthatóját és középpontját, ha az $A_1B_1C_1$ háromszög az ABC háromszög képe lesz!

20.22.° Az ABC háromszög súlyvonalai az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok, melyek az M pontban metszik egymást. A K, F, N az AM, BM és CM szakaszok megfelelő felezőpontjai. Határozzátok meg a homotécia együtthatóját és középpontját, ha az ABC háromszög képe a KFN háromszög!

20.23.° Határozzátok meg az A (–2; 1), B (3; 0) és D (0; –6) pontok képeit az O (0; 0) középpontú homotécia során, ha:

1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$!

20.24.° Origó középpontú homotéciánál az A_1 (–1; 2) pont az A (–3; 6) pont képe. Határozzátok meg a homotécia együtthatóját!

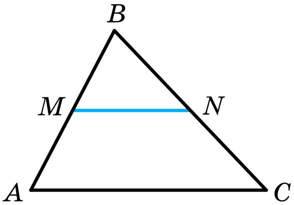
20.25.° Két hasonló háromszög területei 28 cm² és 63 cm². Az egyik háromszögnek egyik oldala 8 cm. Határozzátok meg a másik háromszög megfelelő oldalának hosszát!

20.26.° Két hasonló háromszög megfelelő oldalai 30 cm és 24 cm. A 30 cm-es oldalú háromszög területe 45 cm². Határozzátok meg a másik háromszög területét!

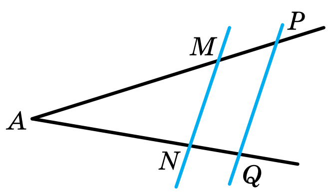
20.27.° A háromszög területe S. Mekkora annak a háromszögnek a területe, melyet a középvonal metsz le ebből a háromszögből?

20.28.° A háromszög területe S. Mekkora annak a háromszögnek a területe, melynek csúcsai az adott háromszög középvonalainak a felezőpontjai?

20.29.• Az MN szakasz az ABC háromszög középvonala (20.25. ábra). Határozzátok meg a homotécia középpontját és együtthatóját, ha:
1) az AC szakasz az MN szakasz képe;
2) az MN szakasz az AC szakasz képe!



20.25. ábra



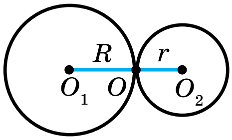
20.26. ábra

20.30.• A párhuzamos egyenesek az A szög szárát az M, N, P és Q pontokban metszik (20.26. ábra). Ismert, hogy $AM : MP = 3 : 1$. Határozzátok meg a homotécia középpontját és együtthatóját, ha:
1) a PQ szakasz az MN szakasz képe;
2) az MN szakasz a PQ szakasz képe!

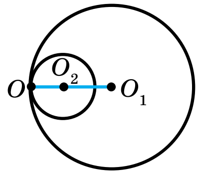
20.31.• A BC és AD párhuzamos szakaszok olyanok, hogy $AD = 3BC$. Hány olyan pont létezik, amely a homotécia középpontja, melynél a BC szakasz képe az AD szakasz? Minden ilyen pontra határozzátok meg a homotécia együtthatóját is!

20.32.• Az O_1 és O_2 középpontú és megfelelően R és r sugarú körök közös külső érintési pontja az O pont (20.27. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az O középpontú és $-\frac{R}{r}$ együtthatójú homotécia esetén az O_1 középpontú kör az O_2 középpontú kör képe lesz!

20.33.• Az O_1 és O_2 középpontú és megfelelően R és r sugarú körök közös külső érintési pontja az O pont (20.28. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az O középpontú és $\frac{R}{r}$ együtthatójú homotécia esetén az O_1 középpontú kör az O_2 középpontú kör képe lesz!

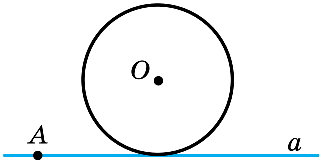


20.27. ábra



20.28. ábra

20.34.• Az O középpontú kör érinti az a egyenest. Bizonyítsátok be, hogy A középpontú homotécia esetén ennek a körnek a képe szintén érinteni fogja az a egyenest, ha A az a egyenes tetszőleges pontja (20.29. ábra)!



20.29. ábra

20.35.• Az A (2; –3) pont a B (8; 6) pont képe az M (4; 0) középpontú homotécia esetén. Határozzátok meg a homotécia együtthatóját!

20.36.• Az A (–7; 10) pont a B (–1; –2) pont képe a –2 együtthatójú homotécia esetén. Határozzátok meg a homotécia középpontját!

20.37.• Az A_1 (x; 4) pont az A (–6; y) pont képe annál a homotéciánál, melynek középpontja az origó, együtthatója pedig:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

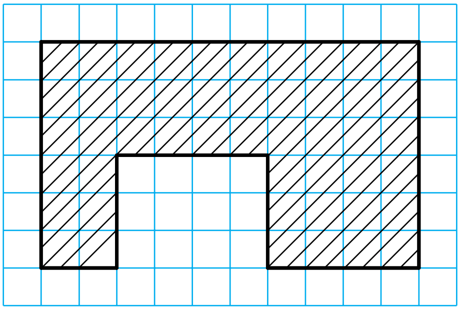
Határozzátok meg az x és y értékeit!

20.38.• Az A_1(4; y) pont az A (x; –4) pont képe lesz annál a homotéciánál, melynek középpontja a B (1; –1) pont, együtthatója pedig: $k = -3$. Határozzátok meg az x és y értékeit!

20.39.• A háromszög középvonala egy 21 cm²-es területű trapézt metsz le a háromszögből. Határozzátok meg az eredeti háromszög területét!

20.40.• Az ABC háromszögben az AC oldallal párhuzamos egyenes az AB oldalt az M pontban, a BC oldalt pedig a K pontban metszi. Határozzátok meg az ABC háromszög területét, ha $BM = 4$ cm, $AC = 8$ cm, $AM = MK$, az MBK háromszög területe pedig 5 cm²!

20.41.• Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az E pontban metszik egymást. Határozzátok meg a trapéz területét, ha $BC : AD = 3 : 5$, és az AED háromszög területe 175 cm²!



20.30. ábra

20.42.• A 20.30. ábrán egy iskola tervrajza látható. Határozzátok meg az iskola területét, ha a tervrajz méretaránya 1 : 2000! A négyzetrács oldala 0,5 cm.

20.43.•• Határozzátok meg az $y = 2x + 1$ egyenes képét annál a homotéciánál, melynek középpontja az origó, együtthatója pedig:

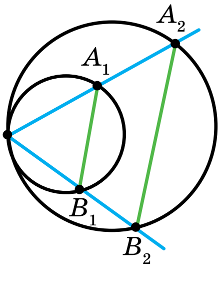
1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$!

20.44.•• Határozzátok meg az $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ körvonal képét annál a homotéciánál, melynek középpontja az origó, együtthatója pedig:

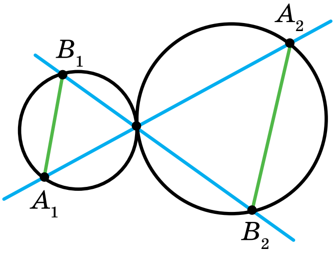
1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

20.45.•• Két kör belülről érinti egymást. Az érintési ponton keresztül két egyenest húztak, amely a köröket A_1, A_2, B_1, B_2 pontokban metszik (20.31. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $A_1B_1 \parallel A_2B_2$!

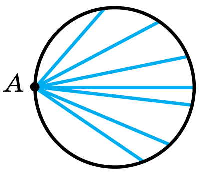
20.46.•• Két kör kívülről érinti egymást. Az érintési ponton keresztül két egyenest húztak, amely a köröket A_1, A_2, B_1, B_2 pontokban metszik (20.32. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $A_1B_1 \parallel A_2B_2$!



20.31. ábra



20.32. ábra



20.33. ábra

20.47.•• Az A pont illeszkedik a körhöz (20.33. ábra). Határozzátok meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, melyek az adott kör azon húrjainak a felezőpontjai, melyeknek egyik végpontja az A pont lesz!

20.48.•• Két körvonal belülről érinti egymást, és a kisebbik körvonalhoz illeszkedik a nagyobbik középpontja. Bizonyítsátok be, hogy a kisebbik kör felezi bármelyik húrt, amely a két körvonal érintési pontjához illeszkedik!

20.49.•• Adott az ABC háromszög és egy tetszőleges M pont. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög oldalainak felezőpontjaira az M ponttal szimmetrikus pontok, egy olyan háromszögnek lesznek a csúcsai, amely az adottal egybevágó lesz!

20.50.•• Szerkesszetek háromszöget két szöge és a körülírt körének sugara alapján!

20.51.•• Szerkesszetek háromszöget két szöge és a beírt körének sugara alapján!

20.52.•• Az AC szakasz az ABC háromszög legnagyobb oldala. Írjatok az ABC háromszögbe egy olyan téglalapot, hogy oldalainak aránya $2:1$ legyen, és a nagyobbik oldala a háromszög AC oldalának csúcsaira illeszkedjenek, és a másik két csúcsa pedig az AB és BC oldalakon helyezkedjenek el!

20.53.* Az AB szakasz az adott körvonal húrja, a C pont pedig ennek a körnek tetszőleges pontja. Határozzátok meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az ABC háromszögek súlyvonalainak metszéspontjai lesznek!

20.54.* Adott az A és a B pont, valamint egy l egyenes. Határozzátok meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az ABC háromszögek súlyvonalainak metszéspontjai lesznek, ha a C pont az l egyenes tetszőleges pontja!

20.55.* Az M pont az ABC szöghöz illeszkedik, de a száraira nem illeszkedik. Szerkesszetek egy körvonalat, amely érinti a szög szárait és az M pontot is!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

20.56. Határozzátok meg a rombusz területét és a beírt körvonal sugarát, ha a rombusz átlói 12 cm és 16 cm!

20.57. Határozzátok meg annak a háromszögnek a kerületét, amelyet a $3x + 4y = 24$ egyenletű egyenes és a koordinátatengelyek határolnak!

20.58. Két körvonalnak a közös külső érintési pontja az A pont lesz, a közös érintőjük pedig a B és C pontokban érinti őket. Bizonyítsátok be, hogy a BAC szög derékszög!

AZ ALAKZATOK TRANSZFORMÁCIÓJÁNAK ALKALMAZÁSA A FELADATOK MEGOLDÁSA SORÁN

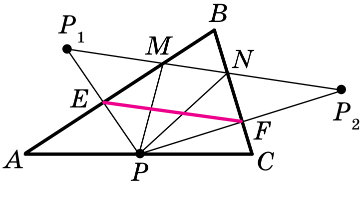
Az alakzatok transzformációja egy hatékony módszer sok feladat megoldásánál. Illusztráljuk ezt néhány példával is.

1. feladat. Az ABC hegyesszögű háromszög AB, BC és CA oldalaira szerkesszetek megfelelően olyan M, N és P pontokat, hogy az MNP háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!

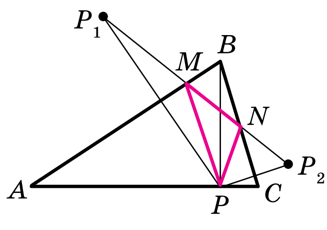
Megoldás. Legyen a P pont az ABC háromszög AC oldalának egy tetszőleges pontja, a P_1 és P_2 pontok pedig ennek a pontnak az AB és BC egyenesre való szimmetriapontjai (20.34. ábra). A P_1P_2 egyenes az AB és BC oldalakat megfelelően az M és N pontokban metszi. A 18. pont 2. feladatának megoldásából következik, hogy az összes háromszög közül, amelynél a P fixpont, az M és N pontok pedig az AB és BC oldalakra illeszkednek, az MNP háromszög kerülete a legkisebb. Ez a kerület a P_1P_2 szakasz hosszával egyenlő.

Megjegyezzük, hogy az EF szakasz a PP_1P_2 háromszög középvonala. Tehát $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Mivel a $BEP\angle + BFP\angle = 180°$, ezért a P, E, B és F pontok a BP átmérőjű körvonalra illeszkednek. Ebből következik, hogy $EF = BP \sin B$. Tehát a legrövidebb BP szakasz esetén az EF szakasz hossza lesz a legrövidebb, vagyis amikor a BP az ABC háromszög magassága.



20.34. ábra



20.35. ábra

A 20.35. ábrán a BP szakasz az ABC háromszög magassága. Az M és N pontok megszerkesztésének algoritmusa a rajz alapján érthető lesz.

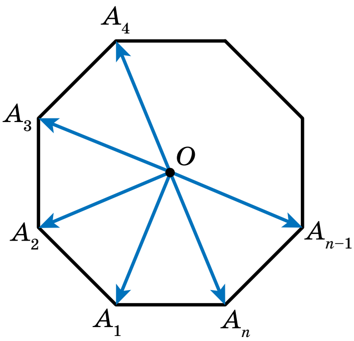
A szerkesztésből az következik, hogy valamennyi olyan háromszög területe, amelynek csúcsai az ABC háromszög oldalaira illeszkednek, nagyobb az MNP háromszög kerületénél. Ezért csak egyetlen ilyen háromszög szerkeszthető, mégpedig az MNP háromszög.

Be lehet bizonyítani (végezzétek el önállóan), hogy az M és N pontok az ABC háromszög C és A csúcsaiból bocsátott merőlegesek talppontjai lesznek.

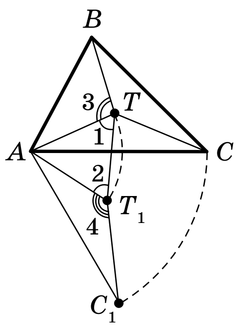
Tehát a keresett háromszög csúcsai az ABC háromszög magasságainak talppontjai. Az ilyen háromszöget **ortocentrikusnak** nevezzük. ◀

2. feladat. Az O pont az $A_1A_2...A_n$ szabályos n szög középpontja (20.36. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

Megoldás. Legyen az $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$. Megvizsgáljuk az O középpontú $\dfrac{360°}{n}$ fokos elforgatást, például az óramutató járásával ellentétes irányban. Ennél a transzformációnál is az adott n-szög képe vele azonos nagyságú n-szög lesz. Tehát a keresett összeg nem változik. Ez csak akkor lehetséges, ha $\vec{a}=\vec{0}$. ◀



20.36. ábra



20.37. ábra

3. feladat. Az ABC háromszög minden szöge kisebb mint 120°. Határozzátok meg azt a T pontot, hogy a $TA + TB + TC$ összeg a lehető legkisebb legyen!

Megoldás. Legyen a T pont az adott ABC háromszög tetszőleges pontja (20.37. ábra). Vizsgáljuk meg egy, az óramutató járásával megegyező irányú A pont körüli 60°-os elforgatást. Legyen a T_1 és C_1 a T és C pontok megfelelő képei (20.37. ábra). Mivel az elforgatás az mozgás, ezért $T_1C_1 = TC$. Ezért az ATT_1 háromszög egyenlő oldalú. Vagyis $AT = TT_1$.

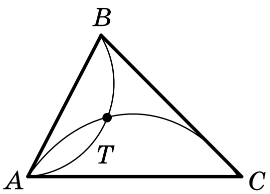
A következőt kaptuk: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Nyilvánvaló, hogy a $TT_1 + TB + T_1C_1$ összeg akkor a legkisebb, ha a B, T, T_1 és C_1 pontok egy egyeneshez illeszkednek. Mivel az $1\angle = 2\angle = 60°$, ezért ez a feltétel akkor teljesül, ha a $3\angle = 4\angle = 120°$.

Mivel az AT_1C_1 szög az ATC szög elforgatással kapott képe, ezért teljesül a következő egyenlőség: $ATC\angle = 120°$.

Tehát a B, T, T_1 és C_1 pontok akkor és csakis akkor illeszkednek egy egyeneshez, ha $ATB\angle = ATC\angle = 120°$. Ebből következik, hogy $BTC\angle = 120°$.

Tehát a $TA + TB + TC$ összeg akkor lesz a legkisebb, ha $ATB\angle = BTC\angle = ATC\angle = 120°$.



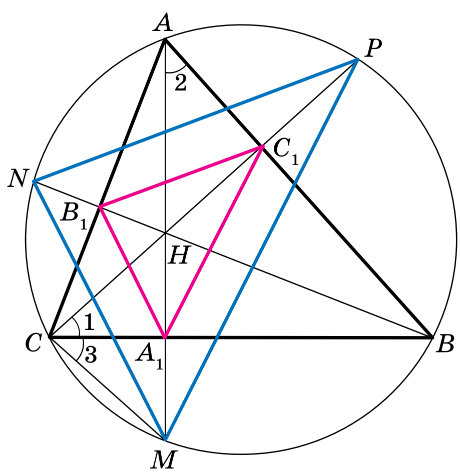
20.38. ábra

A T pontot úgy lehet meghatározni, hogy megszerkesztjük azon pontok mértani helyét, melyekből az AB és AC szakaszok 120°-os szög alatt láthatók (20.38. ábra).

Nyilvánvaló, hogyha az ABC háromszög egyik szöge 120°-nál nem kisebb, akkor a megszerkesztett ívek metszéspontja nem a háromszög belsejében van. Be lehet bizonyítani, hogy az olyan háromszögben, melynek egyik szöge nem kisebb mint 120°, az a T pont, melytől a csúcsokig való távolságok összege a legkisebb, egybeesik a tompaszög csúcsával. ◀

4. feladat. Az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok az ABC hegyesszögű háromszög magasságai. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög köré írt kör sugara kétszer nagyobb az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt kör sugaránál!

Megoldás. Az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek az ABC háromszög köré írt körét megfelelően az M, N és P pontokban metszik (20.39. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $HA_1 = A_1M$, ahol a H pont az ABC háromszög ortocentruma.



20.39. ábra

Adott: $1\angle = 2\angle = 90° - ABC\angle$.

A 2. és 3. szögek, mint kerületi szögek az MB ívre támaszkodnak. Tehát $1\angle = 3\angle$.

Ezért a HCM háromszögben a CA_1 szakasz szögfelező és magasság, tehát súlyvonal is egyben. Innen következik, hogy $HA_1 = A_1M$.

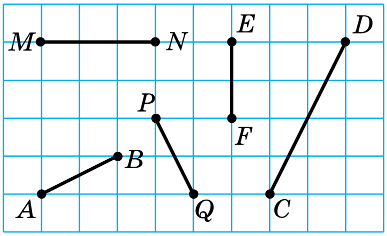
Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

Most már érthető, hogy az MNP háromszög homotetikus az $A_1B_1C_1$ háromszöggel és a homotécia együtthatója 2. Ezért az MNP háromszög köré írt kör sugara kétszer nagyobb az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt kör sugaránál. Most már csak azt kell megjegyezni, hogy az MNP és az ABC háromszögek ugyanabba a körbe vannak írva. ◀

5. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. A rajzon melyik szakasz lehet az AB szakasz képe mozgási transzformációnál?

A) MN; B) PQ; C) EF; D) DC.

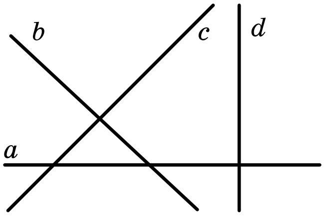


2. Nevezzétek meg az $y = 2x$ egyenes képét az $\vec{a}$ **(0; 1)** vektorú párhuzamos eltolásnál!

A) $y = 2x + 1$; C) $y = x + 1$;
B) $y = 2x - 1$; D) $y = x - 1$.

3. A rajzon látható egyenesek közül melyik lesz az a egyenes képe a párhuzamos eltolásnál?

A) b; B) c; C) d; D) a.



4. A következő alakzatok közül melyiknek van csak egy szimmetriatengelye?

A) négyzet; C) parabola;
B) körvonal; D) szakasz.

5. Az x és y mely értékénél lesznek az A (–1; y) és B (x; 6) pontok egymás tükörképei az abszcisszatengelyre vonatkozóan?

A) $x = -1$, $y = 6$; C) $x = -1$, $y = -6$;
B) $x = 1$, $y = -6$; D) $x = 1$, $y = 6$.

6. A következő alakzatok közül melyiknek van szimmetria-középpontja?

A) háromszög; C) trapéz;
B) szakasz; D) szög.

7. A következő alakzatok közül melyiknek van szimmetria-középpontja és szimmetriatengelye?

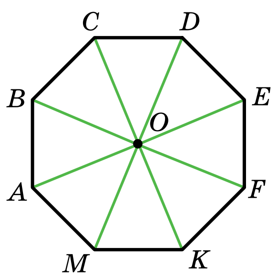
A) egyenlő oldalú háromszög;
B) paralelogramma;
C) egyenlő szárú trapéz;
D) egyenes.

8. Az x és y mely értékénél lesznek az A (x; 7) és B (–4; y) pontok egymás tükörképei az origóra vonatkozóan?

A) $x = 4$, $y = -7$;
B) $x = 4$, $y = 7$;
C) $x = -4$, $y = 7$;
D) $x = -4$, $y = -7$.

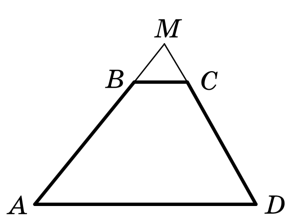
9. Az O pont az $ABCDEFKM$ szabályos nyolcszög középpontja (lásd a rajzot). Nevezd meg az EF szakasz képét az O középpontú, az óramutató járásával megegyező irányú 135°-os elforgatásnál!

A) AB; B) BC; C) AM; D) CD.



10. Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást (lásd a rajzot). Nevezzétek meg az M középpontú homotécia együtthatóját, mely során a BC szakasz az AD szakasz képe lesz, ha $AB : BM = 7 : 2$!

A) $\frac{2}{7}$; B) $\frac{7}{2}$; C) $\frac{2}{9}$; D) $\frac{9}{2}$.



11. Az M (6; –3) pont az N (2; 1) pont képe a $-\frac{1}{3}$ együtthatójú homotécia során. Nevezzétek meg a homotécia középpontját!

A) (5; –2); C) (–5; 2);
B) (8; –1); D) (–8; 1).

12. Az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos egyenes az AC oldalt egy E pontban, a BC-t pedig egy F pontban metszi. Határozzátok meg a CEF háromszög területét, ha $AE : EC = 3 : 2$, az ABC háromszög területe pedig 75 cm^2!

A) 36 cm^2; C) 30 cm^2;
B) 50 cm^2; D) 12 cm^2.

AZ 5. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Mozgás

Azt a transzformációt, amely az F alakzat pontjai közötti távolságot megtartja, az F alakzat mozgásának nevezzük.

Egyenlő alakzatok

Két alakzatot egyenlőnek nevezünk, ha létezik olyan mozgási transzformáció, amely során az egyik alakzat a másik képe lesz.

Párhuzamos eltolás

Ha az X és X_1 pontok olyanok, hogy $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, akkor azt mondják, hogy az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál az X_1 képe az X pontnak.

A párhuzamos eltolás tulajdonságai

A párhuzamos eltolás mozgás.
Ha a párhuzamos eltolás során az F alakzatnak az F_1 alakzat a képe, akkor $F_1 = F$.

Tengelyes szimmetria

Az A és A_1 pontokat az l egyeneshez viszonyítva szimmetrikusnak nevezzük, ha az l egyenes az AA_1 szakasznak a felezőmerőlegese. Ha az A pont illeszkedik az l egyeneshez, akkor az l egyeneshez viszonyítva önmagával lesz szimmetrikus.

A tengelyes szimmetria tulajdonságai

A tengelyes szimmetria mozgás.
Ha az F és az F_1 alakzatok szimmetrikusak az egyeneshez viszonyítva, akkor $F = F_1$.

Szimmetriatengellyel rendelkező alakzatok

Az F alakzatot az l egyeneshez képest szimmetrikusnak nevezzük, ha az alakzat mindegyik pontjának az l egyeneshez viszonyított szimmetrikus pontja szintén ehhez az alakzathoz illeszkedik. Az l egyenest az alakzat szimmetriatengelyének nevezzük.

Középpontos szimmetria

Az A és A_1 pontok az O pontra nézve szimmetrikusak, ha az O pont az AA_1 szakasz felezőpontja (19.1. ábra). Az O pont önmagával szimmetrikus.

A középpontos szimmetria tulajdonságai

A középpontos szimmetria mozgás.
Ha az F és F_1 alakzatok egymással középpontosan szimmetrikusak, akkor $F = F_1$.

Szimmetria-középponttal rendelkező alakzatok

Az alakzatot az O ponthoz képest középpontosan szimmetrikusnak nevezzük, ha az adott alakzat minden pontjának az O ponthoz képest szimmetrikus pontja is az adott alakzat pontja lesz. Az O pontot az alakzat szimmetria-középpontjának nevezzük.

Az elforgatás tulajdonságai

Az elforgatás az mozgás.
Ha az F_1 alakzat az elforgatásnál az F alakzat képe, akkor $F = F_1$.

Homotécia

Ha az O, X és X_1 pontokra teljesül az $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, ahol $k \neq 0$ egyenlőség, akkor azt mondjuk, hogy az X_1 pont az X pont képe lesz az O középpontú, k együtthatójú homotécia során.

A homotécia tulajdonságai

A k együtthatójú homotécia az F alakzat pontjai közötti távolságokat $|k|$-szorosan változtatja, vagyis ha az A és B pontok az F alakzat tetszőleges pontjai, és k együtthatójú homotécia esetén az A_1 és B_1 pontok az A és B pontok megfelelő képei, akkor $A_1B_1 = |k|AB$.

Hasonlóság

Két alakzatot hasonlónak nevezzük, ha az egyik alakzatból homotécia és mozgás transzformációk segítségével megkapjuk a másik alakzatot.

A hasonló alakzatok területei

A hasonló alakzatok területeinek aránya a hasonlósági együttható négyzetével egyenlő.

21. A 9. osztályos tananyag ismétlő gyakorlatai

1. Háromszögek megoldása

21.1. A háromszög két oldala 4 cm és 10 cm, a köztük lévő szög szinusza $\frac{4}{5}$. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalát!

21.2. Az $ABCD$ paralelogrammában adott, hogy $AB = 2$ cm, $AD = 4$ cm, $BAD\angle = 60°$. Határozzátok meg az AC és BD egyenesek közötti szög koszinuszát!

21.3. Állapítsátok meg, hogy hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű-e az a háromszög, melynek oldalai: 1) 4 cm, 4 cm, 5 cm; 2) 5 cm, 6 cm, 9 cm; 3) 5 cm, 12 cm, 13 cm!

21.4. A háromszög egyik oldala 21 cm, a másik két oldal aránya pedig 3 : 8. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait, ha a köztük lévő szög 60°!

21.5. A háromszög egyik oldala 3 cm, a másik $\sqrt{7}$ cm, a második oldallal szemközti szöge pedig 60°. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait!

21.6. A paralelogramma egyik oldala 4 cm-rel hosszabb, mint a másik, átlói pedig 12 cm és 14 cm. Határozzátok meg a paralelogramma kerületét!

21.7. Az $ABCD$ trapézban adott, hogy $BC \parallel AD$, $AD = 8$ cm, $CD = 4\sqrt{3}$ cm. Az A, B és C pontokhoz illeszkedő körvonal az AD egyenest egy K pontban metszi, $AKB\angle = 60°$. Határozzátok meg a BK szakasz hosszát!

21.8. A trapéz alapjai 3 cm és 7 cm, a szárai pedig 6 cm és 5 cm. Határozzátok meg a trapéz szögeinek koszinuszait!

21.9. Az ABC háromszögbe írt körvonal az AB oldalt egy D pontban érinti, $BD = 1$ cm, $AD = 5$ cm, $ABC\angle = 120°$. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát!

21.10. A háromszög oldalai 11 cm, 12 cm és 13 cm. Határozzátok meg a legnagyobb oldalhoz húzott oldalfelező hosszát!

21.11. Határozzátok meg a háromszög szögfelezőjét, amely a szemközti oldalt 3 cm és 4 cm-es szakaszokra osztja, és ezzel az oldallal 60°-os szöget zár be!

21.12. A BD szakasz az ABC háromszög szögfelezője, $BD = a$, $A\angle = 45°$, $C\angle = 75°$. Határozzátok meg az AD szakasz hosszát!

21.13. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalainak arányát, ha az egyik szöge 120°!

21.14. Az ABC háromszögben adott, hogy $AC = 6\sqrt{3}$ cm, $ABC\angle = 60°$. Határozzátok meg annak a körvonalnak a sugarát, amely illeszkedik az ABC háromszögbe írt kör középpontjához, valamint az A és C pontokhoz!

21.15. A háromszög két oldala 5 cm és 8 cm, a köztük lévő szöge 60°. Határozzátok meg az adott háromszög köré írt kör sugarát!

21.16. Határozzátok meg az ABC háromszög A csúcsából húzott szögfelező hosszát, ha $BAC\angle = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$!

21.17. Az $ABCD$ paralelogramma BAD szögének szögfelezője a BC oldalt az M pontban metszi. Határozzátok meg az ABM háromszög területét, ha $AB = 4$ cm, $BAD\angle = 60°$!

21.18. Határozzátok meg a háromszög legnagyobb magasságát, ha a beírt körének, a körülírt körének és az oldalának hosszai megfelelően 4 cm, 13 cm, 15 cm!

21.19. Két körvonal sugara 17 cm és 39 cm, a középpontjai közötti távolság pedig 44 cm. Határozzátok meg az adott körök közös húrját!

21.20. Számítsátok ki annak a paralelogrammának a területét, melynek egyik oldala 15 cm, és átlói 11 cm és 25 cm!

21.21. A trapéz alapjai 16 cm és 44 cm, szárai pedig 17 cm és 25 cm. Határozzátok meg a trapéz területét!

21.22. A trapéz alapjai 5 cm és 12 cm, átlói 9 cm és 10 cm. Határozzátok meg a trapéz területét!

2. Szabályos sokszögek

21.23. Határozzátok meg a szabályos n-szög területét, ha a beírt kör sugara 6 cm, és n egyenlő: 1) 3; 2) 4; 3) 6!

21.24. A körbe egy 4 cm-es oldalú négyzet van írva. Határozzátok meg az ebbe a körbe írt szabályos háromszög területét!

21.25. Határozzátok meg az ugyanabba a körbe írt szabályos háromszög és hatszög területének arányát!

21.26. A szabályos tizenkét szög oldalainak felezőpontjai közül minden másodikat összekötötték, és a kapott alakzat szabályos hatszög lett. Határozzátok meg az adott tizenkétszög oldalát, ha a kapott hatszög oldala a!

21.27. A kör ívének hossza 6π cm, a fokmértéke 24°. Határozzátok meg a kör sugarát!

21.28. Az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) AC befogójára, mint átmérőre körvonalat szerkesztettek. Határozzátok meg a körvonal ívének hosszát, amely a háromszögen kívül lesz és az AB átfogó végpontjait köti össze, ha $A\angle = 24°$, $AC = 8$ cm!

21.29. A négyzet oldala $2\sqrt{2}$ cm. Határozzátok meg a köré írt körvonal azon ívének hosszát, amely két szomszédos csúcsát köti össze!

21.30. Két R sugarú kör középpontja közötti távolság R. Határozzátok meg a két kör közös részének területét, és ezt az alakzatot határoló vonal hosszát!

21.31. A körcikk területe $2{,}4\pi$ cm^2. Határozzátok meg a körcikk ívének fokmértékét, ha a kör sugara 4 cm!

21.32. A vonat kerekének átmérője 78 cm. A 2,5 perc alatt a kerék 1000 fordulatot tesz meg. Határozzátok meg a vonat sebességét kilométer per órában! Az eredményt tizedekre kerekítsétek!

21.33. Határozzátok meg annak a körszeletbe írt körvonalnak a hosszát, melynek ívhossza m, a fokmértéke pedig 120°!

21.34. Az R sugarú körhöz két érintő van húzva, melyek közötti szög 60°. Határozzátok meg annak az alakzatnak a területét, melyet az érintők és a kisebbik körív határol, melynek a végpontjai az érintési pontok lesznek!

3. Descartes-féle koordinátasík

21.35. A háromszög csúcsai az A (–4; 1), B (–2; 4) és C (0; 1) pontok. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú, és határozzátok meg a területét!

21.36. Határozzátok meg az AB szakasz felezőmerőlegese és az abszcisszatengely metszéspontjának koordinátáit, ha A (5; –3), B (4; 6)!

21.37. Határozzátok meg a CD szakasz felezőmerőlegese és az ordinátatengely metszéspontjának koordinátáit, ha C (2; 1), B (4;–3)!

21.38. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet, ha a négyszög csúcsai az A (–12; 6), B (0; 11), C (5; –1) és D (–7; –6) pontok!

21.39. Az M (5; –2) pont a körvonal átmérőjének egyik végpontja, az N (2; 0) pont a körvonal középpontja. Határozzátok meg az átmérő másik végpontjának koordinátáit!

21.40. Állapítsátok meg, hogy egy egyeneshez illeszkednek-e az A (–4; –3), B (26; 7) és C (2; –1) pontok! Ha igaz az állítás, akkor melyik pont lesz a másik kettő között?

21.41. Bizonyítsátok be, hogy az A (5; 1), B (9; –2) és C (7; 2) pontok egy derékszögű háromszög csúcsai, és írjátok fel e háromszög köré írt körvonal egyenletét!

21.42. Állapítsátok meg, hogy a CD szakasz az átmérője-e az $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$ körvonalnak, ha a C (–8; 7), D (4; –1)!

21.43. Az ordinátatengelyhez középpontjával illeszkedő körvonalhoz az A (1; 2) és a B (3; 6) pont illeszkedik. Illeszkedik-e ehhez a körvonalhoz a C (–3; 4) pont?

21.44. Az M (–5; 3) középpontú kör érinti az ordinátatengelyt. Határozzátok meg a kör és az abszcisszatengely metszéspontjait!

21.45. Határozzátok meg a következő egyenlettel megadott vonal hosszát:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0!$$

21.46. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a P (–3; 5) ponthoz illeszkedik, és az iránytényezője 6-tal egyenlő!

21.47. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az S (–1; 4) ponthoz illeszkedik, és az abszcisszatengely pozitív irányával 135°-os szöget alkot!

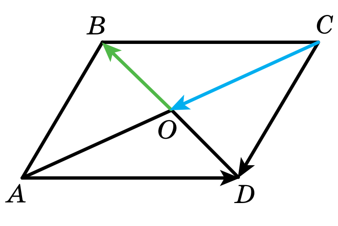
21.48. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az A (–3; 1) ponthoz illeszkedik, és párhuzamos az $5x + 3y = 6$ egyenessel!

21.49. Határozzátok meg azon a körök középpontjai mértani helyeinek egyenletét, melyekhez az A (–3; –2) és a B (2; 5) pontok illeszkednek!

4. Vektorok a síkon

21.50. Az $ABCD$ téglalap két csúcsa az A (3; 2) és a B (3; –4) pont. A $\overrightarrow{BD}$ vektor abszolút értéke 10 egység. Határozzátok meg a C és D pontok koordinátáit!

21.51. Az $ABCD$ paralelogramma átlói az O pontban metszik egymást (21.1. ábra). Fejezzétek ki a $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat a $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!



21.1. ábra

21.52. Az $ABCD$ négyszög egy paralelogramma. Határozzátok meg:

1) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$;

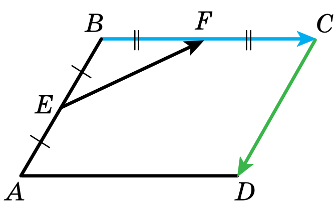
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$!

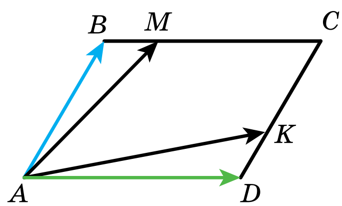
21.53. Határozzátok meg a következő vektor abszolút értékét: $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, ha $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-1; 3)$!

21.54. Az E és F pontok az $ABCD$ paralelogramma AB és BC oldalainak felezőpontjai (21.2. ábra). Fejezzétek ki az $\overrightarrow{EF}$ vektort a $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!

21.55. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalain megfelelően jelölték az M és K pontokat úgy, hogy $BM = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ (21.3. ábra). Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{AK}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!



21.2. ábra



21.3. ábra

21.56. Az ABC háromszög AB és BC oldalain úgy jelölték megfelelően a D és E pontokat, hogy $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokat a $\overrightarrow{BE} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorokon keresztül!

21.57. Kollineárisak-e az $\overrightarrow{MN}$ és $\overrightarrow{KP}$ vektorok, ha $M\,(4; -1)$, $N\,(-6; 5)$; $K\,(7; -2)$, $P\,(2; 1)$?

21.58. Határozzátok meg a k értékét, melynél az $\vec{a}\,(k; -2)$ és $\vec{b}\,(6; 3)$ vektorok kollineárisak?

21.59. Adott az $\vec{a}\,(3; -2)$ és a $\vec{b}\,(x; 4)$ vektor. Az x mely értékénél teljesül az $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ egyenlőség?

21.60. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeinek koszinuszait, ha $A\,(-3; -4)$, $B\,(2; -3)$, $C\,(3; 5)$! Állapítsátok meg a háromszög típusát!

21.61. Adott az $\vec{a}\,(2; -1)$ és $\vec{b}\,(1; -2)$ vektor. Határozzátok meg az m értékét, ha az $\vec{a} + m\vec{b}$ és $\vec{b}$ vektorok merőlegesek egymásra!

21.62. Határozzátok meg az $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ vektorok közötti szög koszinuszát, ha $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ és $\vec{m} \perp \vec{n}$!

21.63. Adott az $\vec{a}$ **(2; −4)** és $\vec{b}$ **(−1; 1)** vektor. Határozzátok meg:
1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$!

21.64. Írjátok fel annak az egyenesnek egyenletét, amely az *A* (5; –3) pontban érinti az *M* (0; –4) középpontú körvonalat!

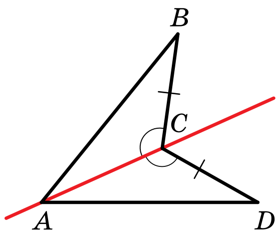
5. Geometriai transzformációk

21.65. A párhuzamos eltolásnál az *A* (3; –2) pont képe a *B* (5; –3) pont lesz. Melyik pont lesz a *C* (–3; 4) pont képe ennél a párhuzamos eltolásnál?

21.66. Szerkesszétek meg az *A* (1; –3), *B* (0; –5) és *C* (2; 1) pontok képét az $\vec{a}$ **(–2; 1)** vektorú párhuzamos eltolásnál! Írjátok fel az így kapott pontok koordinátáit!

21.67. Adott a *C* (7; –4) és *D* (–1; 8) pontok. A párhuzamos eltolásnál a *CD* szakasz felezőpontjának képe a *P* (–1; –3) pont lesz. Határozzátok meg a *C* és *D* pontok képeinek koordinátáit!

21.68. A 21.4. ábrán *CB* = *CD*, *ACB*∠ = *ACD*∠. Bizonyítsátok be, hogy a *B* és *D* pontok szimmetrikusak az *AC* egyenesre!



21.4. ábra

21.69. Határozzátok meg a *K* (4; –2) pont képeit a koordinátatengelyekre és az origóra vonatkozó tükrözésnél!

21.70. Határozzátok meg az *x* és *y* értékeit, ha az *A* (*x*; –2) pont tükörképe az abszcisszatengelyre a *B* (3; *y*) pont!

21.71. Adott az *OA* félegyenes és a *B* pont, amely nem illeszkedik rá. Szerkesszétek meg az *OA* félegyenes *B* pontra vonatkozó tükörképét!

21.72. Szimmetrikusak-e az *M* (–3; 10) és *N* (–1; 6) pontok a *K* (1; 4) ponthoz viszonyítva?

21.73. Írjátok fel annak a körnek az egyenletét, amely szimmetrikus az $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ körrel
1) az origóra vonatkoztatva; 2) az *M* (–3; 3) pontra vonatkoztatva!

21.74. Adott a *K* és *O* pont. Szerkesszétek meg a K_1 pontot, amely a *K* pont képe, az *O* pont körüli elforgatásnál: 1) az óramutató járásával ellentétes irányú 130°-os elforgatásnál; 2) az óramutató járásával megegyező irányú 40°-os elforgatásnál!

21.75. Adott az AB szakasz és az O pont, amely nem illeszkedik rá. Szerkesszétek meg az A_1B_1 szakaszt, amely az AB-nek a képe az O pont körüli az óramutató járásával megegyező irányú 50°-os elforgatásnál!

21.76. Milyen szöggel kell elforgatni azt a téglalapot, amely nem négyzet, a szimmetria-középpontja körül, hogy ugyanazt a téglalapot kapjuk meg!

21.77. Szerkesszetek egy olyan háromszöget, amely homotetikus az adott tompaszögű háromszöggel, ha a homotécia középpontja a köré írt körvonal középpontja, a homotécia együtthatója pedig $k = -2$!

21.78. Origó középpontú homotécia esetén az A (8; –2) pont képe a B (4; –1) pont lesz. Határozzátok meg a homotécia együtthatóját!

21.79. Két szabályos háromszög oldalai 8 cm és 28 cm. Mennyi ezen két háromszög területének aránya?

21.80. Az F_1 sokszög hasonló az F_2 sokszöghöz, a hasonlósági arányuk k. P_1, P_2, S_1, S_2 betűkkel jelöltük a megfelelő kerületeiket és területeiket. Töltsétek ki a táblázat üres celláit!

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

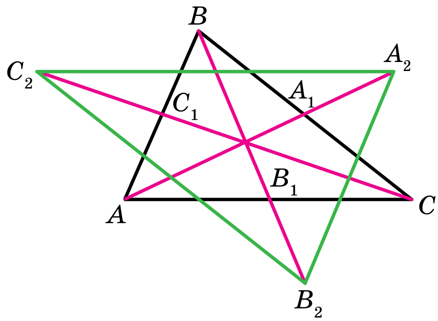
21.81. Az egyenes, amely párhuzamos a háromszög 6 cm-es oldalával, olyan két alakzatra osztja a háromszöget, melyek területeinek aránya 1 : 3. Határozzátok meg ennek az egyenesnek, a háromszög oldalai közzé eső szakaszának hosszát!

21.82. Az $ABCD$ négyzet BC oldalán jelöltek egy M pontot úgy, hogy $BM : MC = 1 : 2$. Az AM és BD szakaszok a P pontban metszik egymást. Határozzátok meg a BPM háromszög területét, ha az APD háromszög területe 27 cm^2!

21.83. Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. Határozzátok meg a trapéz területét, ha $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, és az AMD háromszög területe 32 cm^2!

21.84. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = BC = 13$ cm, $AC = 10$ cm. A háromszögbe írt körhöz olyan érintőt húztak, amely párhuzamos az AC alappal, és az AB és BC oldalakat megfelelően az M és K pontokban metszi. Számítsátok ki az MBK háromszög kerületét!

21.85. Az ABC háromszög AA_1, BB_1 és CC_1 súlyvonalainak meghosszabbítására megfelelően felvették az A_2, B_2 és C_2 pontokat úgy, hogy $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (21.5. ábra). Határozzátok meg az $A_2B_2C_2$ háromszög területét, ha az ABC háromszög területe 1 cm^2!



21.5. ábra

Barátkozzunk a számítógéppel

Tovább folytatjuk a 7. és 8. osztályban már elkezdett ismeretek bővítését, amelynek során számítógépes eszközöket és programokat használtunk a mértani feladatok megoldása során. Az ebben a részben lévő feladatokon kívül az iskolai geometria elsajátítását elősegítő egyéb programokat is alkalmazhattok. Ehhez hasonló programokat és a tananyaghoz kapcsolódó információt a világhálón is találtok.

A tankönyvben rövid történelmi áttekintés van azokról a tudósokról, akiknek a munkássága szorosan kötődik az adott témához. Az internet segítségével több információt szerezhettek ezeknek a tudósoknak az életéről és a tudományos munkásságukról is.

Ha olyan szakmát szeretnétek választani, ami mélyebb matematikai ismereteket igényel, akkor itt az ideje néhány matematikai programmal (*Mathcad*, *MATLAB*, *Geogebra* stb.) megismerni. Ezek a programok tartalmazzák a matematikai számításokat segítő és a mértani szerkesztéseket elvégző eszközöket is. A jövő mérnökének fokozott rálátással kell lennie a mérnöki grafikára és azokra a programokra, amelyekkel bonyolult műszaki rajzokat tud készíteni (ilyen például az *AutoCAD* programcsomag). Ezeket a programokat könnyen elsajátíthatjátok a mértani feladatok megoldásai során.

A fejezetben olyan számítógépen megoldható feladatokat találtok, melyeket az adott téma elsajátítása közben tudtok megoldani. A feladatok többsége szerkesztési feladat, melyek megoldásához az adott grafikus szerkesztő programot kell alkalmazni. Vannak még számítási feladatok is, melyeket számológéppel vagy valamilyen matematikai programmal végezhettek el.

Arra biztatunk benneteket, hogy a *Gyakorlati feladatok*at ne csak hagyományos módszerekkel oldjátok meg, de grafikai szerkesztővel is.

A 9. osztályos mértan nagy része a Descartes-féle koordinátákkal és az alakzatok egyenleteivel foglalkozik. Attól függően, hogy milyen programozási nyelvet tanultok az informatikaórán, vagy önállóan, azt ajánljuk, készítsetek olyan programot, amely alkalmazásával tudtok a számítógép képernyőjén adott koordinátájú pontokat, egyeneseket és körvonalakat ábrázolni. Ezeket a feladatokat akár informatikaórákon vagy szakkörökön elkészíthetitek. A következőkben olyan egyszerű feladatokat mutatunk be, melyekhez hasonlókat ti is kitalálhattok, és megfelelő programot is tudtok készíteni hozzá.

A 0°-tól 180°-ig terjedő szögek szinusza, koszinusza és tangense

1. Számológép segítségével tanuljátok meg kiszámítani a szögek trigonometrikus függvényeit, és meghatározni a szög értékét a megfelelő trigonometrikus függvény értékének ismeretében!

A koszinusztétel

2. Illusztráljátok grafikus szerkesztő program segítségével a koszinusztétel következményét! E célból:
   válasszatok olyan pozitív számokat, melyekre teljesül az $a^2 < b^2 + c^2$ egyenlőtlenség, ahol az a a legnagyobb! Szerkesszetek a, b, c hosszúságú szakaszokat! Ezekből a szakaszokból készítsetek háromszöget! Hegyesszögű lesz-e ez a háromszög? Végezzétek el ugyanezt az $a^2 > b^2 + c^2$, illetve $a^2 = b^2 + c^2$ estekre is. Az a, b és c számoknak meg kell felelniük az $a < b + c$ feltételnek.

A szinusztétel

3. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget, és a grafikai program eszközeinek alkalmazásával mérjétek meg a szögeit és oldalait! Ellenőrizzétek, hogy teljesül-e a szinusztétel? A számításokat a számítógép segítségével végezzétek el!

A háromszögek megoldása. A háromszög területképletei

4. A 4., 5. pont feladataiban a trigonometrikus függvények értékeinek meghatározását és a bonyolult számítások elvégzését számítógép segítségével végezzétek el!

Szabályos sokszögek és ezek tulajdonságai

5. Találjátok ki, hogyan kell szabályos sokszögeket szerkeszteni! Vizsgáljatok meg két esetet: 1) alkalmazzátok a 6.2. tételt és a beírt sokszög középponti szögének kiszámítására szolgáló képletet; 2) alkalmazzátok azokat az ismereteket, melyeket a szabályos sokszög szögéről és az oldalának hosszáról tudtok!
6. Szerkesszetek néhány szabályos sokszöget, ha adott az oldalainak a száma!

A körvonal hossza. A kör területe

7. Számítsátok ki néhányszor a körvonal hosszát és a körlap területét, a π különböző értékével!
   Van-e a számológépeteken vagy abban a matematikai programban, melyet a számítógépen használtok a π normálalakú megadására szolgáló eszköz? Milyen pontossággal adja ez meg a π értékét?

Két pont közötti távolság, ha ismeretesek a pontok koordinátái. A szakasz felezőpontjának koordinátái

8. A grafikai szerkesztő programok többsége a rajzterületet koordinátasíkként adja meg. Vizsgáljátok meg, hogyan adhatók meg a pontok koordinátái ezen a síkon! Gondoljátok meg, hogyan használhatók az eszköztárak elemei a szerkesztések során!

Az alakzat egyenletei

9. A matematikai szerkesztő programok eszközeivel bármilyen alakzatot le tudtok rajzolni, ha adott az egyenlete.
10. Az informatikaórákon a programozás segítségével olyan programokat tudtok készíteni, amely a számítógép képernyőjén ábrázolja a megadott egyenletű alakzatot.
11. Keressetek olyan információt az interneten, amely a szerkesztési feladatok automatizálásáról szól (plotterekről, az angol *plotter* szóból)! Miben hasonlítanak, és miben különböznek az alakzatok szerkesztési elvei a számítógép képernyőjén és a papíron készített ábrák esetén? Ismerkedjetek meg a *teknőcgrafika* fogalmával!
12. Írjatok olyan programot, amely az adott a, b és c értékekre megadja, hogy milyen alakzat lesz az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja, majd ezt a számítógép képernyőjén megjeleníti, végül a grafikont is megrajzolja!

Az egyenes iránytényezője

13. A grafikai szerkesztő programcsomagok milyen eszközeit lehet alkalmazni az egyenes megszerkesztéséhez, melynek az iránytényezős alakja adott?
14. Írjatok olyan programot, amely a k és b értékei alapján megrajzolja a komputer képernyőjére az $y = kx + b$ egyenes grafikonját!

A vektor fogalma

15. A grafikai szerkesztőprogram segítségével ábrázoljatok néhány vektort a 12. pontban lévők közül! Milyen eszközöket alkalmazhattok a kollineáris; az azonos irányú; az ellentétes irányú vektorok ábrázolására? Határozzátok meg a megszerkesztett vektorok abszolút értékeit! Hogyan lehet ezt a legegyszerűbben meghatározni?

A vektor koordinátái

16. Ábrázoljátok a számítógép képernyőjén a Descartes-féle koordináta-rendszert! Válasszatok megfelelő egységszakaszokat! Adjátok meg a vektor és néhány pont koordinátáit! Ezek a pontok legyenek az adott vektorok kezdőpontjai!

A vektorok összeadása és kivonása

17. Rajzoljatok néhány vektort! A grafikai szerkesztő programcsomagok milyen eszközeit lehet alkalmazni a vektorok összegének, illetve különbségének meghatározására?

A vektorok számmal való szorzása

18. Rajzoljatok egy vektort, és adjatok meg tetszőlegesen néhány (természetes, egész és racionális) számot! Szerkesszetek olyan vektorokat, melyek az adott vektor és az adott számok szorzatai lesznek!

A vektorok skaláris szorzata

19. Szerkesszetek a koordinátasíkon két tetszőleges vektort! Határozzátok meg a köztük lévő szöget a 16.2. tétel következménye alapján! Ellenőrizzétek a kapott eredményt a grafikai szerkesztő eszközeinek alkalmazásával!

Geometriai transzformációk

20. Állapítsátok meg, hogy a grafikai szerkesztő programok milyen kellékeivel lehet az alakzatok eltolását elvégezni! Milyen típusú transzformációkat lehet ezekkel végrehajtani?
21. Keressétek meg azokat a rajzeszközöket, melyek segítségével meg lehet szerkeszteni: 1) az adott alakzatnak adott egyenesre vonatkozó tükörképét; 2) az adott alakzatnak adott pontra vonatkozó tükörképét; 3) az adott alakzattal homotetikus alakzatot!
22. Keressétek meg azokat a rajzeszközöket, melyek segítségével meg lehet szerkeszteni bármilyen alakzattal hasonló alakzatot! Milyen eszközt kell alkalmazni ahhoz, hogy az alakzatok között egy adott arányú hasonlóság legyen?

Feleletek és útmutatások

1. §. Háromszögek megoldása

1. A 0°-tól 180°-ig terjedő szögek szinusza, koszinusza és tangense

1.11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ vagy $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **1.12.** 1) $\frac{12}{13}$ vagy $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **1.15.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-1{,}5$; 3) $-\sqrt{3}-2$. **1.16.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **1.21.** $-\frac{1}{2}$. **1.22.** 120°. **1.23.** 10 cm, 30°, 120°. **1.26.** $5\sqrt{6}$ cm.

2. A koszinusztétel

2.3. 120°. **2.4.** 45°. **2.10.** $2\sqrt{7}$ cm. **2.11.** $\sqrt{10}$ cm. **2.12.** $\sqrt{21}$ cm vagy $\sqrt{29}$ cm. **2.13.** 13 cm. **2.14.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.15.** $3\sqrt{89}$ cm. **2.16.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **2.17.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **2.18.** 15 cm, 24 cm. **2.19.** 2 cm, $4\sqrt{3}$ cm. **2.20.** 3 cm, 5 cm. **2.21.** 10 cm, 6 cm, 14 cm. **2.22.** 6 cm vagy 10 cm. **2.23.** 75 cm. **2.24.** 13 cm. **2.25.** $\sqrt{79}$ cm. **2.29.** 14 cm. **2.30.** 34 cm. **2.31.** 7 cm, 9 cm. **2.32.** 20 cm, 30 cm. **2.33.** 8 cm. *Útmutatás.* Húzzatok a B ponthoz illeszkedő, a CD oldallal párhuzamos egyenest, és vizsgáljátok az így keletkezett háromszöget! **2.34.** $\frac{13}{20}$. **2.35.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ cm. **2.36.** Nem. **2.38.** 10 cm. **2.39.** 6 cm. **2.40.** 11 cm. **2.41.** 6 cm. **2.42.** 22 cm. **2.47.** 4 cm, 6 cm.

3. A szinusztétel

3.14. $2\sqrt{6}$ cm. **3.15.** 6 cm. **3.16.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **3.17.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **3.18.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **3.19.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **3.21.** 9 cm. **3.22.** $\frac{25}{3}$ cm. **3.23.** 60° vagy 120°. **3.24.** 4,5 óra. **3.25.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **3.26.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **3.28.** $\frac{85}{8}$ cm. *Útmutatás.* A keresett sugarat meg lehet határozni, mint a háromszög köré írt körvonal sugarát, amely olyan háromszög köré van írva, melynek oldalai: a trapéz egyik alapja, szára és átlója lesz **3.29.** $\frac{a \sin \alpha}{\sin \beta}$. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a $CE = DE$! **3.30.** $\frac{2m \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$, $\frac{2m \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$. *Útmutatás.* Az AM súlyvonal M utáni meghosszabbítására jelöljetek egy olyan K pontot, melyre teljesül, hogy $AM = MK$, és alkalmazzátok az ACK vagy ABK háromszögre a szinusztételt! **3.31.** $\frac{a \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}$. **3.32.** *Útmutatás.* Fejezzétek ki az AHB, BHC és AHC szögeket az ABC háromszög szögein keresztül! **3.33.** Gyorsabban odaér a C falun keresztül. *Útmutatás.* Jelöljétek a tetszőleges két falu közötti távolságot a-val, és az a-n keresztül fejezzétek ki a többi település közötti távolságokat! **3.34.** Az autóbusz. **3.37.** 12 cm.

4. A háromszögek megoldása

4.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Útmutatás.* A trapéz kisebbik alapjának egyik csúcsából húzzatok egy egyenest, amely párhuzamos a trapéz szárával, és vizsgáljátok meg az így keletkezett háromszöget! **4.13.** 9 cm. **4.14.** 30 cm, 48 cm.

5. A háromszög területének meghatározására szolgáló képletek

5.4. 1) 60° vagy 120°; 2) 90°. **5.5.** 30° vagy 150°. **5.9.** 12 cm. **5.10.** 24 cm. **5.11.** 24 cm². **5.12.** $\frac{7}{3}$ cm. **5.13.** 1) $\frac{3}{2}$ cm, $\frac{25}{8}$ cm; 2) 8 cm, $\frac{145}{8}$ cm. **5.14.** 2 cm, $\frac{145}{8}$ cm. **5.25.** 3 : 5. **5.26.** $\frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$. **5.27.** $2R^2 \times \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha + \beta)$. **5.28.** $\frac{b^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}$. **5.29.** $\frac{h_1 h_2}{2 \sin \alpha}$. **5.30.** $\frac{h^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}$. **5.31.** 51 cm², 75 cm², 84 cm². **5.32.** $\frac{24}{7}$ cm. *Útmutatás.* Használjátok fel, hogy $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$! **5.33.** 360 cm². *Útmutatás.* A trapéz kisebbik alapjának egyik csúcsán húzzatok egy egyenest, amely párhuzamos a trapéz szárával, és határozzátok meg a háromszög magasságát, melyet ez az egyenes vág le a trapézból! **5.34.** $12\sqrt{5}$ cm². *Útmutatás.* Legyen az $ABCD$ az adott trapéz, $BC \parallel AD$. Húzzatok a C ponton keresztül egy olyan egyenest, amely párhuzamos a BD egyenessel és az AD egyenest egy E pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az ACE háromszög és az adott trapéz egyenlő nagyságú lesz.

5.35. 1 : 2. *Útmutatás.* $\dfrac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A$. **5.36.** 19,5 cm.

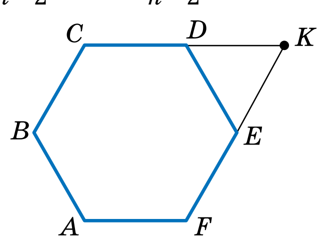
5.37. 13 cm, 14 cm, 15 cm. **5.39.** 10°. **5.40.** 91 cm, 21 cm. **5.41.** 9,6 cm.

2. §. Szabályos sokszögek

6. Szabályos sokszögek és ezek tulajdonságai

6.20. $\sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$. **6.21.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **6.22.** $\sqrt{r^2 + \dfrac{a^2}{4}}$. **6.26.** ≈ 17,4 cm. **6.27.** ≈ 19,8 cm. **6.28.** 5 oldalú. **6.29.** 18 oldalú. **6.32.** 1) $\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$; 2) $\dfrac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$. **6.33.** 1) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **6.34.** 1 : 2. **6.35.** $\sqrt{3} : 2$. **6.38.** 4,4 cm. **6.39.** $2R^2\sqrt{2}$. **6.40.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **6.41.** $6\left(\sqrt{2}-1\right)$ cm. **6.42.** 8 cm. **6.43.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **6.44.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. **6.45.** $\dfrac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$. **6.46.** Háromszög vagy négyzet vagy hatszög. *Útmutatás.* Egy pont köré annyi darab parkettát lehet rakni, ahányszor a parketta csúcsnál lévő $\dfrac{180°\,(n-2)}{n}$ szöge kisebb 360°-nál, vagyis $360° : \dfrac{180°\,(n-2)}{n} = \dfrac{2n}{n-2}$ darab parkettát. A $\dfrac{2n}{n-2}$ természetes szám kell hogy legyen. Mivel $\dfrac{2n}{n-2} = \dfrac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \dfrac{4}{n-2}$, ezért a $\dfrac{4}{n-2}$ természetes szám kell hogy legyen.

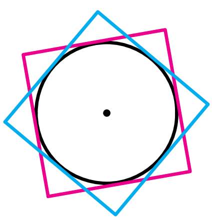
6.47. *Útmutatás.* Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög (lásd a rajzot), K pedig a CD és EF egyenesek metszéspontja. Ekkor az AK a keresett szakasz lesz. **6.49.** 18 cm. **6.50.** 96 cm². **6.51.** 9 cm.



A 6.47. feladathoz

7. A körvonal hossza. A körlap területe

7.25. 22,5°. **7.30.** $\sqrt{6}$ cm. **7.32.** 1) $\frac{25\left(\pi-2\sqrt{2}\right)}{8}$ cm^2; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ cm^2; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ cm^2. **7.33.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ cm^2; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ cm^2. **7.38.** 2π cm, $\frac{10\pi}{3}$ cm, $\frac{20\pi}{3}$ cm. **7.39.** $\frac{25\pi}{18}$ cm, $\frac{35\pi}{18}$ cm, $\frac{20\pi}{3}$ cm. **7.40.** $\frac{8\pi}{3}$ cm. **7.41.** 6π cm. **7.42.** 1 : 1. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy mindkét esetben a félkörök összege $\frac{1}{2}\pi AB$ lesz. **7.44.** 50 cm. **7.46.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **7.47.** ≈ 17,3%. **7.48.** $\frac{a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{36}$. **7.49.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **7.50.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **7.51.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Útmutatás*. Vizsgáljátok meg az AND háromszöget, és bizonyítsátok be, hogy ez egyenlő oldalú lesz! **7.52.** *Útmutatás*. A befestett és a nem befestett részek területe megadja annak a két körlapnak a területét, amelyeket a téglalap szomszédos oldalaira, mint átmérőkre rajzolunk, és a körlap nem befestett részeinek területei és a téglalap területe annak a körlapnak a területével lesz egyenlő, melynek az átmérője a téglalap átlója lesz. Bizonyítsátok be, hogy ezek az összegek egyenlők! **7.53.** *Útmutatás*. A négyzetek közös része egy körlapot tartalmaz, melynek sugara $\frac{1}{2}$ cm (lásd a rajzot). **7.55.** $\frac{130}{17}$ cm, $\frac{312}{17}$ cm. **7.56.** *Útmutatás*. A kisebbik alap felezőpontján át húzzatok egy egyenest, amely párhuzamos a trapéz szárával!



A 7.53. feladathoz

3. §. Descartes-féle koordináták a síkon

8. Két pont közötti távolság, ha ismeretesek a pontok koordinátái. A szakasz felezőpontjának koordinátái

8.13. 1) Igen a B pont az A és C pontok között helyezkedik el; 2) nem. **8.15.** $x = 7$ vagy $x = -1$. **8.16.** (3; 0). **8.17.** (0; 0,5). **8.18.** (3; –0,5). **8.19.** (–2; 2). **8.20.** (3; –2). **8.24.** A (–5; 3), C (7; 5). **8.25.** $2\sqrt{73}$. **8.26.** $\left(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$ vagy $\left(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right)$. **8.27.** $\left(-2; 4\sqrt{3}\right)$ vagy $\left(-2; -4\sqrt{3}\right)$. **8.28.** (3; 3) vagy (–6; 6). *Útmutatás*. Vizsgáljátok meg a következő két esetet: B (a; a) vagy B (a; $-a$). **8.29.** (5,5; 0), (3; 0), (–1; 0). *Útmutatás*. Vizsgáljátok meg a következő három esetet: $AC = BC$, $AC = AB$ és $BC = AB$. **8.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Útmutatás*. Vizsgáljátok meg a következő három esetet: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **8.31.** $\sqrt{33}$ cm. **8.32.** 56°, 124°. **8.33.** 8 cm és 16 cm.

9. Az alakzat egyenletei. A kör egyenlete.

9.16. Két körvonal: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ és $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **9.17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **9.19.** 1) Igen, a (–1; 5) pont a körvonal középpontja $R = 7$; 2; 2) nem; 3) nem; 4) igen, a (2; 7) pont a körvonal középpontja, $R = \sqrt{2}$. **9.20.** 1) A (0; –8) a körvonal középpontja, $R = 2$; 2) a (4; –2) a körvonal középpontja, $R = \sqrt{5}$. **9.21.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **9.22.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ vagy $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **9.23.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ vagy $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **9.24.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ vagy $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Útmutatás*. A keresett körvonal átmérője egyenlő az abszciszszatengely és az $y = -4$ egyenes közötti távolsággal, a középpontja pedig a harmadik vagy a negyedik koordinátanegyed szögfelezőjére illeszkedik. **9.25.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ vagy $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **9.26.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **9.27.** $180\sqrt{3}$ cm². **9.28.** 70 cm. **9.29.** 600 cm².

10. Az egyenes egyenlete

10.7. 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **10.8.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **10.9.** 1) (–8; –31); 2) (–1; 2). **10.10.** 1) (2; –7); 2) (4; –1). **10.11.** $y = -0{,}5x - 4$. **10.12.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$. **10.14.** 12. **10.15.** 28. **10.16.** 6. **10.17.** (2; 5), (5; 2). **10.18.** (5; 0).

10.20. $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Útmutatás.* A keresett távolság egyenlő annak a háromszögnek a magasságával, amelyet a koordinátatengelyek és az adott egyenes határol. **10.21.** $4\sqrt{2}$. **10.22.** $3\sqrt{10}$. **10.23.** $x - 3y = 2$. **10.24.** $7x + 5y = -8$. **10.25.** (3; 3) vagy (15; 15). **10.26.** (–2; 2) vagy (–10; 10). **10.27.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **10.28.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **10.29.** $\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{58}$ cm. **10.30.** 104 cm. **10.31.** 12,5 cm.

11. Az egyenes iránytényezője

11.5. 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 3) $y = 7$. **11.6.** $y = -0{,}5x - 4$. **11.7.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **11.8.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **11.9.** 1) $y = x\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3}$; 2) $y = -x\sqrt{3} + 6 + 2\sqrt{3}$. **11.10.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **11.11.** *a*) $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + 3$; *b*) $y = -\frac{x\sqrt{3}}{3} + 2$. **11.12.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **11.14.** $y = 4x + 9$. **11.15.** $y = 3x - 12$. **11.16.** $y = x + 4$. **11.18.** 30 cm, 40 cm. **11.19.** 144 cm^2.

4. §. Vektorok

12. A vektor fogalma

12.26. Téglalap vagy egyenlő szárú trapéz. **12.34.** 60°, 120°. **12.35.** 4 cm, 12 cm. **12.36.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Útmutatás.* A *B* csúcson keresztül húzzatok egy egyenest, amely párhuzamos az *MK* egyenessel.

13. A vektor koordinátái

13.16. $\overrightarrow{AF}(-2; 2)$, $\overrightarrow{FD}(2; 4)$. **13.17.** $\overrightarrow{DE}(-4; 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4; -6)$. **13.18.** $\vec{a}\,(-6; -8)$ vagy $\vec{a}\,(8; 6)$. **13.19.** $\vec{c}\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ vagy $\vec{c}\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$. **13.20.** *C* (7; 17), *D* (2; 17) vagy *C* (7; –7), *D* (2; –7). **13.21.** *B* (16; 2), *C* (16; –6) vagy *B* (–14; 2), *C* (–14; –6). **13.23.** 20 cm, 7 cm, 21 cm. **13.24.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

14. A vektorok összeadása és kivonása

14.45. 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **14.46.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy mindkét $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ vektor nullvektor lesz. **14.48.** *Útmutatás.* Elegendő bebizonyítani, hogy $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$.

14.49. Az AB sugarú és A középpontú körvonal. **14.50.** Az AB szakasz felezőmerőlegese. **14.51.** 0,2 m/s, $\sqrt{1{,}04}$ m/s. **14.52.** 60°. **14.53.** *Útmutatás*. Legyen az AA_1 szakasz az ABC háromszög súlyvonala. Az AA_1 szakasz A_1 utáni meghosszabbítására mérjétek fel az A_1D-t, amely az MA_1 szakasszal egyenlő. **14.54.** *Útmutatás*. Adott: $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, ebből kapjuk, hogy $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. **14.55.** 4 cm, 6 cm. **14.56.** 2,5 cm.

15. A vektor számmal való szorzása

15.31. –4; 4. **15.32.** –1,5. **15.34.** $\vec{m}\,(-15;\,36)$. **15.35.** $\vec{a}\,(-3;\,4)$. **15.38.** $x=2$, $y=-3$. **15.39.** $\overrightarrow{OK}=0{,}5\vec{a}-0{,}1\vec{b}$. **15.43.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **15.45.** *Útmutatás*. Az egyik oldalról, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. A másik oldalról viszont $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Adjátok össze ezeket az egyenlőségeket! **15.51.** *Útmutatás*. Legyen az AA_1, BB_1 és CC_1 az ABC háromszög súlyvonalai! Alkalmazzátok, hogy $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **15.52.** *Útmutatás*. Alkalmazzátok a 15.45. feladat és a 15. pont 1. kulcsos feladatának megoldásait! **15.53.** *Útmutatás*. Fejezzétek ki a $\overrightarrow{BM}$ és $\overrightarrow{BN}$ vektorokat a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok által. **15.54.** 18 cm. **15.55.** 60°; $24\sqrt{3}$ cm². **15.56.** $R\sqrt{3}$.

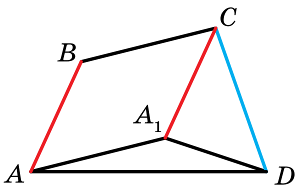
16. A vektorok skaláris szorzata

16.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **16.20.** –3 és 3. **16.21.** –1. **16.23.** $\vec{b}\,(-12;\,16)$. **16.24.** –1 és 1. **16.26.** 4. **16.27.** –0,5. **16.28.** $\sqrt{7}$. **16.29.** $2\sqrt{7}$. **16.32.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **16.33.** 30°, 60°, 90°. **16.36.** 0°. **16.37.** 120°. **16.38.** *Útmutatás*. Legyen a $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Ekkor a $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Határozzátok meg a $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AK}$! **16.39.** 45°. *Útmutatás*. Legyen az $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorokat a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokon keresztül! **16.40.** 30°. *Útmutatás*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Innen $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\cos ABD\angle$. **16.41.** *Útmutatás*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Azt kell még bebizonyítani, hogy $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **16.43.** 100 cm. **16.44.** 6π cm.

5. §. Geometriai transzformációk

17. Az alakzatok mozgása (elmozdulása). Párhuzamos eltolás

17.13. Ha $AB \parallel a$. **17.23.** Végtelen sok. **17.29.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **17.30.** $y = x^2 - 4x + 1$. **17.31.** *Útmutatás.* Legyen az $ABCD$ a keresett trapéz ($BC \parallel AD$). Szerkesszétek meg a BD átló képét, a $\overrightarrow{BC}$ vektorral történő párhuzamos eltolás során! **17.33.** *Útmutatás.* Szerkesszétek meg az adott egyenes képét az $\overrightarrow{AB}$ (vagy $\overrightarrow{BA}$) vektorral történő párhuzamos eltolás során! Vizsgáljátok meg a megfelelő kép és az adott kör metszéspontjait! Megjegyezzük, hogy amikor a képnek és az adott körnek nincs közös pontja, akkor a feladatnak nem lesz megoldása. **17.35.** *Útmutatás.* Legyen az $ABCD$ a keresett négyszög, melynek az AB és CD oldalai adottak (lásd a rajzot). Vizsgáljuk meg az AB oldal párhuzamos eltolását a $\overrightarrow{BC}$ vektorral. Az A_1CD háromszöget meg lehet szerkeszteni két oldala, a CD és $CA_1 = BA$, valamint az A_1CD szöge alapján, amely $BCD\angle - (180° - ABC\angle)$ -gel egyenlő. Az AA_1D háromszöget meg lehet szerkeszteni az A_1D oldala és a rajta fekvő AA_1D és ADA_1 szögek alapján. **17.36.** *Útmutatás.* Legyen az A_1 pont az A pont képe az $\overrightarrow{MN}$ vektorral történő párhuzamos eltolás során. Kössétek össze az A_1 és B pontokat! **17.37.** 36 cm. **17.38.** 40. **17.39.** 490 cm².

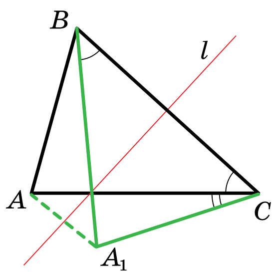


A 17.35. feladathoz

18. Tengelyes szimmetria

18.21. $a \perp l$ vagy az a és l egyenesek egybeesnek. **18.24.** *Útmutatás.* Ha a négyszögnek van szimmetriatengelye, akkor bármilyen csúcsának a képe egyben csúcsa ennek a négyszögnek is. Válasszátok ki a paralelogramma egyik csúcsát, és vizsgáljatok meg két esetet: ennek a képe vagy a szomszédos csúcs lesz, vagy a szemközti csúcs! **18.27.** *Útmutatás.* Az M_1BA és MBA szögek szimmetrikusak az AB egyeneshez képest. Tehát $M_1BA\angle = MBA\angle$. Hasonlóképpen

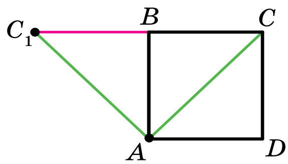
$M_2BC\angle = MBC\angle$. Most már csak azt kell bebizonyítani, hogy az $M_1BM_2\angle = 180°$. **18.28.** 1) A_1 (0; –2), B_1 (–1; 3); 2) A_2 (0; 2), B_2(1; –3). **18.29.** $x = 2$, $y = -1$. **18.30.** *Útmutatás.* Legyen az A_1 pont az A pont képe az a egyeneshez viszonyított szimmetriánál. Ekkor az a és az A_1B egyenes metszéspontja lesz a keresett pont. Megjegyezzük, hogyha az A és B pontok szimmetrikusak az a egyeneshez viszonyítva, akkor a feladatnak végtelen sok megoldása lesz. Ha az A és a B pontok egyenlő távolságra vannak, de nem szimmetrikusak az a egyenesre, akkor a feladatnak nincs megoldása. **18.32.** *Útmutatás.* Legyen az A_1 pont az A pont képe az a egyeneshez viszonyított szimmetriánál. Akkor az a és A_1B egyenes metszéspontja lesz a keresett pont. **18.33.** *Útmutatás.* Legyen az A_1BC háromszög az ABC háromszög képe a BC felezőmerőlegeshez viszonyított szimmetriánál (lásd a rajzot). Az ACA_1 háromszöget meg lehet szerkeszteni az AC és A_1C ($A_1C = AB$) ismert oldalak és az ACA_1 szög alapján, amely egyenlő a B és C szögek különbségével. **18.34.** *Útmutatás.* Legyen a C_1 pont az AB egyeneshez viszonyítva szimmetrikus a C ponttal. Szerkesszetek egy olyan körvonalat, melynek középpontja a C_1 pont, és érinti az AB egyenest! Fektessetek érintőt a körvonalhoz a D ponton keresztül! Ez az érintő az AB egyenest a keresett pontban fogja metszeni. **18.35.** *Útmutatás.* Legyen az l egyenes az AC átló felezőmerőlegese. A B_1 pont szimmetrikus a B ponttal az l egyeneshez viszonyítva. Alkalmazzátok azt a tényt, hogy az $ABCD$ és AB_1CD négyszögek egyenlők! **18.36.** Az ABC háromszög magasságainak metszéspontja. **18.37.** CD; 7 cm, 10 cm. **18.39.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$.



A 18.33. feladathoz

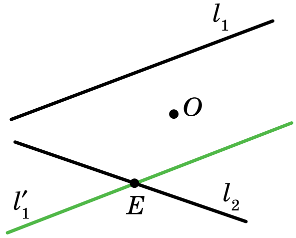
19. Középpontos szimmetria. Elforgatás

19.22. *Útmutatás.* Feltételezzük, hogy az ABC háromszögnek van szimmetriaközéppontja. Ekkor például az A pont képe a B pont lesz. Tehát a szimmetriaközéppont az AB szakasz felezőpontja lesz. De ebben az esetben a C pont képe nem illeszkedne az ABC háromszöghöz. **19.24.** *Útmutatás.* A középpontos szimmetria esetén az adott négyszög oldalának képe ugyanennek a négyszögnek az oldala. Ezek után alkalmazzátok a19. pont 1. kulcsos feladatát! **19.25.** *Útmutatás.* Az O középpontú szimmetria esetén az A_1 és B_1 pontok képei az O_2 középpontú körvonalhoz illeszkednek. Mivel annak az egyenesnek a képe, amely a szimmetriaközéppontra illeszkedik, ugyanaz az egyenes lesz, ezért az A_1 és B_1 pontok képei az A_1B_1 egyeneshez fognak illeszkedni. Tehát az A_2B_2 szakasz lesz az A_1B_1 szakasz képe. **19.26.** 2 cm vagy 1 cm. **19.27.** 2 cm. *Útmutatás.* Az adott elforgatásnál a B pont a D pont képe, a C_1 pont a C ponté, az A pont pedig az A pont képe lesz (lásd a rajzot). Tehát az ABC_1 háromszög az ADC háromszög képe lesz. Ebből következik, hogy $ABC_1\angle = ADC\angle = 90°$. Tehát a C_1, B és C pontok egy egyeneshez illeszkednek.



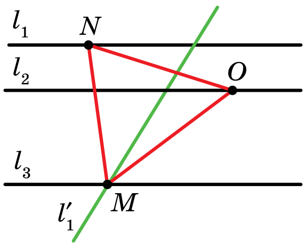
A 19.27. feladathoz

19.28. *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg azt a középpontos szimmetriát, melynek középpontja az egyik paralelogramma átlóinak metszéspontja lesz! **19.29.** *Útmutatás.* Határozzátok meg az AC szakasz felezőpontját, majd alkalmazzátok a 19. pont 2. feladatát! **19.30.** *Útmutatás.* Legyen az O az adott pont, l_1 és l_2 az adott egyenesek. Megszerkesztjük az l_1 egyenes képét az O középpontú szimmetria esetén. Ekkor egy olyan l_1' egyenest kapunk (lásd a rajzot), amely az l_2 egyenest egy E pontban metszi. Meghatározzuk az E pont eredőjét az adott szimmetriánál. Nyilvánvaló, hogy ez a pont az l_1 egyeneshez illeszkedik. Tehát az a pont, amely O ponthoz képest szimmetrikus az E ponttal, az l_1 egyeneshez fog illeszkedni.



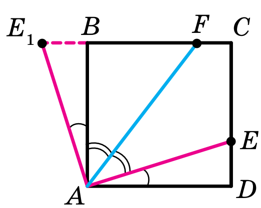
A 19.30. feladathoz

19.31. *Útmutatás.* Alkalmazzátok a 4. feladat megoldásának elvét a 19. pontból! **19.32.** *Útmutatás.* Vizsgáljuk meg a C középpontú, az óramutató járással ellentétes irányú 60°-os elforgatást! Ennél az elforgatásnál az E és B pont megfelelő képei a D és A pont lesz. Tehát az AD szakasznak és a K felezőpontjának képe a BE szakasz és annak az M felezőpontja lesz. **19.33.** *Útmutatás.* Legyenek l_1, l_2 és l_3 az adott párhuzamos egyenesek, O pedig az l_2 egyenes tetszőleges pontja (lásd a rajzot). Az l_1' egyenes lesz az l_1 egyenesnek a képe az O pont körüli, az óramutató járással ellentétes irányú 60°-os elforgatásnál, amely az l_3 egyenest az M pontban metszi. Meghatározzuk az M pont eredőjét az adott elforgatásnál. Nyilvánvaló, hogy ez az l_1 egyeneshez fog illeszkedni. Ezért elegendő az OM félegyenestől felmérni a 60°-os szöget.



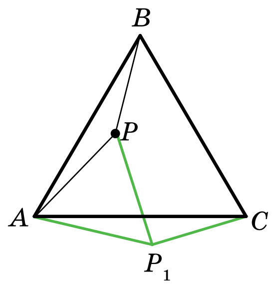
A 19.33. feladathoz

19.34. *Útmutatás.* Legyen O az adott pont, l_1, l_2 és l_3 pedig az adott egyenesek. Szerkesszetek egy olyan AC szakaszt, amelynek az O pont lesz a felezőpontja, végpontjai pedig az l_1 és l_2 egyenesekhez illeszkednek. Ez a szakasz a rombusz egyik átlója lesz. Határozzátok meg az l_3 egyenesnek és az AC szakasz felezőmerőlegesének a metszéspontját! **19.35.** *Útmutatás.* Vizsgáljuk meg az A pont körüli, az óramutató járással ellentétes irányú 90°-os elforgatást! Ennél az elforgatásnál az AD szakasz képe az AB szakasz lesz (lásd a rajzot). Legyen az E_1 pont az E pont képe. Ekkor az ABE_1 háromszög az ADE háromszög képe lesz. Ebből következik, $ABE_1\Delta = ADE\Delta$. Ekkor a $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $E_1AB\angle = EAD\angle$. Innen azt kaptuk, hogy $E_1AF\angle = E_1AB\angle + BAF\angle = EAD\angle + FAE\angle = FAD\angle$. Viszont $FAD\angle = E_1FA\angle$. Tehát az AE_1F háromszög egyenlő szárú lesz és $AE_1 = E_1F$.



A 19.35. feladathoz

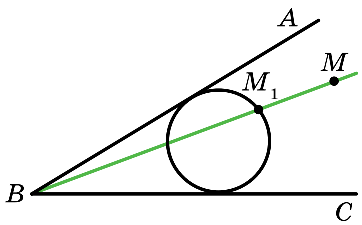
19.36. *Útmutatás.* Vizsgáljuk meg az A pont körüli, az óramutató járással megegyező irányú 60°-os elforgatást (lásd a rajzot)! Ennél az elforgatásnál az ABP háromszög képe az ACP_1 háromszög lesz (a P_1 pont a P pont képe). Ebből következik, hogy $AP_1C\angle = APB\angle = 150°$. Az APP_1 háromszög tehát egyenlő oldalú. Ekkor az $AP_1P\angle = 60°$. Tehát $PP_1C\angle = 90°$. Már csak azt kell megjegyezni, hogy a $P_1C = PB$ és $PP_1 = AP$. **19.39.** $\frac{120}{7}$ cm.



A 19.36. feladathoz

20. Az alakzatok hasonlósága

20.20. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **20.24.** $\frac{1}{3}$. **20.25.** 12 cm. **20.26.** 28,8 cm². **20.28.** $\frac{S}{16}$. **20.29.** 1) $k = 2$ esetén a B pont lesz, ha $k = -2$, akkor az $AMNC$ trapéz átlóinak metszéspontja lesz. **20.34.** *Útmutatás.* Legyen az adott kör és az a egyenes érintési pontja az M pont. Az M_1 pont az M pont képe az A középpontú homotéciánál. Mivel az a egyenes képe ugyanez az egyenes lesz, ezért az M_1 pont illeszkedik az a egyenesre. Mutassátok meg, hogy az adott kör képének és az a egyenesnek csak egy közös pontja lesz, és ez a pont az M_1! **20.35.** $-\frac{1}{2}$. *Útmutatás.* A homotécia meghatározása alapján $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Határozzátok meg az $\overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{MB}$ vektorok koordinátáit! **20.36.** (–3; 2). **20.37.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **20.38.** $x = 0$, $y = 8$. **20.39.** 28 cm². **20.40.** 20 cm². **20.41.** 112 cm². **20.43.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Útmutatás.* Alkalmazzátok azt a feltételt, hogy a keresett egyenes iránytényezője 2! **20.44.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **20.45.** *Útmutatás.* Az A_2B_2 egyenes az A_1B_1 egyenes képe lesz az érintési pont középpontú homotéciánál, melynek az együtthatója egyenlő a nagyobbik kör és a kisebbik kör sugarainak arányával. **20.47.** Az a kör, amely az A pont kivételével képe az adott körnek az A középpontú és $\frac{1}{2}$ együtthatójú homotécia esetén. **20.49.** *Útmutatás.* A kapott pontok lesznek annak a háromszögnek a csúcsai, amely a háromszög oldalfelező pontjai csúcsokkal rendelkező háromszögnek a képe az M középpontú és 2 együtthatójú homotécia esetén. **20.50**. *Útmutatás.* Szerkesszetek tetszőleges háromszöget, melynek két szöge egyenlő az adott két szöggel! Írjatok köré körvonalat! A keresett háromszög lesz a képe a megszerkesztett háromszögnek annál a homotéciánál, melynek középpontja bármilyen pont, együtthatója pedig az adott kör sugarának és a megszerkesztett kör sugarának az aránya. **20.52.** *Útmutatás.* Lásd a 20. pont 2. feladatának megoldását! **20.53**. *Útmutatás.* Vizsgáljatok meg egy olyan homotéciát, melynek a középpontja az AB szakasz felezőpontja, együtthatója pedig $\frac{1}{3}$. **20.54.** Az az egyenes, amely az l egyenes képe annál a homotéciánál, melynek középpontja az AB szakasz felezőpontja és együtthatója $\frac{1}{3}$, kivéve az AB és az l egyenesek metszéspontját (ha ilyen pont létezik). **20.55.** *Útmutatás.* Szerkesszetek egy tetszőleges körvonalat, amely érinti a szög szárait (lásd a rajzot)! Legyen az M_1 pont a BM egyenes és a körvonal egyik metszéspontja. Vizsgáljátok meg azt a homotéciát, melynek középpontja B, együtthatója pedig a $\frac{BM}{BM_1}$ arány lesz! A feladatnak két megoldása van. **20.56.** 96 cm^2, 4,8 cm. **20.57.** 24.



A 20.55. feladathoz

21. A 9. osztályos tananyag ismétlő gyakorlatai

21.1. $2\sqrt{17}$ cm vagy $2\sqrt{41}$ cm. **21.2.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **21.4.** 9 cm, 24 cm. **21.5.** 1 cm vagy 2 cm. **21.6.** 36 cm. **21.7.** 4 cm. *Útmutatás.*

Mivel az $ABCK$ trapéz körbe írt, ezért $AB = CK$. Ekkor $KAC\angle = AKB\angle$, $AC = BK$. **21.8.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **21.9.** $\sqrt{111}$ cm. **21.10.** 9,5 cm. **21.11.** 12 cm. **21.12.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **21.13.** $1:1:\sqrt{3}$. **21.14.** 6 cm. **21.15.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm. **21.16.** $\dfrac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Útmutatás.* Alkalmazzátok a háromszög területének kiszámítására szolgáló képletét, amelyben két oldala és az általuk közbezárt szög szerepel! **21.17.** $4\sqrt{3}$ cm². **21.18.** 12 cm, $\frac{3}{2}$ cm, $\frac{65}{8}$ cm. **21.19.** 15 cm. **21.20.** 132 cm². **21.21.** 450 cm². **21.22.** 36 cm². **21.24.** $6\sqrt{3}$ cm². **21.25.** 1 : 2. **21.26.** $2a\left(2-\sqrt{3}\right)$. **21.27.** 45 cm. **21.28.** $\frac{32\pi}{15}$ cm. **21.30.** $\dfrac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **21.31.** 54°. **21.33.** $\frac{3m}{4}$. **21.34.** $\dfrac{R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3}$. **21.36.** (–9; 0). **21.37.** (0; –2,5). **21.41.** $(x-7)^2 + (y+0{,}5)^2 = 6{,}25$. **21.42.** Igen. **21.43.** Igen. **21.44.** (–1; 0), (–9; 0). **21.45.** 10π. **21.46.** $y = 6x + 23$. **21.47.** $y = -x + 3$. **21.48.** $y = -\frac{5}{3}x - 4$. **21.49.** $5x + 7y = 8$. **21.61.** $-\frac{4}{5}$. **21.62.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **21.64.** $5x + y = 22$. **21.81.** 3 cm vagy $3\sqrt{3}$ cm. **21.82.** 3 cm². **21.83.** 27,5 cm². **21.84.** $\frac{320}{27}$ cm². **21.85.** $\frac{25}{16}$ cm². *Útmutatás.* Az $A_2B_2C_2$ háromszög az ABC háromszög képe lesz annál a homotéciánál, melynek együtthatója $-\frac{5}{4}$, középpontja pedig az ABC háromszög súlyvonalainak metszéspontja lesz.

Az *Önellenőrzés teszt formájában* feladatainak helyes feleletei

A feladat sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	D	C	A	B	A	D	A	C	B	B	D	B
2	C	B	B	A	A	D	D	C	D	C	B	A
3	B	B	A	C	B	D	C	D	B	C	B	A
4	C	D	A	C	A	A	B	D	C	A	D	C
5	B	A	D	C	C	B	D	A	C	C	A	D

Tárgymutató

Adott pontból induló vektor 108
Alakzat egyenlete 83
– eredője 158
– képe 158
– szimmetriaközéppontja 176
– szimmetriatengelye 168
Alakzatok transzformációja 158

Descartes-féle koordináta-rendszer a síkon 78

Egyenes egyenlete 90
– és az abszcisszatengely pozitív iránya közötti szög 95
– iránytényezője 96
Egyeneshez képest szimmetrikus alakzatok 167
– szimmetrikus pontok 167
Egyenesre szimmetrikus alakzatok 167
Egyenlő alakzatok 159
– vektorok 108
Egyirányú vektorok 107
Egységnyi félkör 5
Elforgatás 178
– középpontja 178
– szöge 178
Ellentett irányú vektorok 108
– vektorok 122
Elmozdulás 159

Félkör 65

Háromszög köré írt körvonal sugarának képlete 22, 38
– területének képlete 35, 37, 38
Háromszögbe írt kör sugarának képlete 38
Háromszögek megoldása 29
Háromszög-szabály 119
Hasonló alakzatok 188
– – területe 189
Hasonlóság aránya 188
Hasonlósági transzformáció 187, 188
Héron képlete 36
Homotécia 185
– együtthatója 185
– középpontja 185
Homotetikus alakzatok 185

Invariáns transzformáció 159
Irányított szakasz 107

Kollineáris vektorok 107
Koszinusz 6
Koszinusztétel 12
Kölcsönösen fordított mozgások 159
Kör köré írt sokszög területének képlete 38
Körcikk 65
Körcikk területe 65
Körlap területe 64
Körszelet 64
– alapja 65
– területe 65
Körvonal egyenlete 84
– hossza 63
– körívének hossza 63
Középpontos szimmetria 175

Merőleges vektorok 107
Mozgás 159

Nulla vektor 107
Nullvektor 107

Paralelogramma-szabály 120
Párhuzamos eltolás 158
Ponthoz képest szimmetrikus
alakzatok 175
szimmetrikus pontok 175
Pontra szimmetrikus alakzatok
167

Skalár 106
Skalármennyiség 106
Szabályos sokszög 51
– – középponti szöge 53
– – középpontja 52
Szimmetriaközéppont 175
Szimmetriatengely 167
Szinusz 6
Szinusztétel 21

Tangens 8
Tengelyes szimmetria 167
Trigonometrikus alapazonosság
7
– függvények 8

Vektor 106, 107
– abszolút értéke 107
– kezdete 107
– koordinátái 114
– számmal való szorzása 129
– végpontja 107
Vektormennyiségek 106
Vektorok közötti szög 141
– különbsége 121
– összege 119
– skaláris négyzete 142
– skaláris szorzata 142

xy sík 78

TARTALOM

A szerzőktől 3
Egyezményes jelek 4

1. §. Háromszögek megoldása 5
1. A 0°-tól 180°-ig terjedő szögek szinusza, koszinusza és tangense 5
2. A koszinusztétel 12
3. A szinusztétel 21
4. A háromszögek megoldása 29
• A trigonometria a háromszögek mérésével foglalkozó tudomány 33
5. A háromszög területének meghatározására szolgáló képletek 35
• A háromszöget kívülről érintő körvonalak 44
1. sz. feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 47
Az 1. paragrafus összefoglalása 49

2. §. Szabályos sokszögek 51
6. Szabályos sokszögek és ezek tulajdonságai 51
• A szabályos n-szögek szerkesztéséről 60
7. A körvonal hossza. A körlap területe 62
2. sz. feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 74
A 2. paragrafus összefoglalása 76

3. §. Descartes-féle koordináták a síkon 77
8. Két pont közötti távolság, ha ismeretesek a pontok koordinátái. A szakasz felezőpontjának koordinátái 77
9. Az alakzat egyenlete. A körvonal egyenlete 83
10. Az egyenes egyenlete 89
11. Az egyenes iránytényezője 95
• Koordináták módszere 99
• Miként vertek hidat az algebra és a mértan között? 101

3. sz. feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában **102**
A 3. paragrafus összefoglalása **104**

4. §. Vektorok.. 106
12. A vektor fogalma.. 106
13. A vektor koordinátái.. 114
14. A vektorok összeadása és kivonása 118
15. A vektorok számmal való szorzása 129
● A vektorok alkalmazása **139**
16. A vektorok skaláris szorzata.. 141
4. sz. feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában **151**
A 4. paragrafus összefoglalása **153**

5. §. Geometriai transzformációk 157
17. Az alakzatok mozgatása (eltolása). Párhuzamos eltolás 157
18. Tengelyes szimmetria.. 167
● Az összukrajnai ifjú matematikusok első olimpiája **173**
19. Középpontos szimmetria. Elforgatás.............................. 175
20. Az alakzatok hasonlósága 185
● Az alakzatok transzformációjának alkalmazása a feladatok megoldása során **200**
5. sz. feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában **204**
Az 5. paragrafus összefoglalása **207**

21. A 9. osztályos tananyag ismétlő gyakorlatai 209

Barátkozzunk a számítógéppel **217**
Feleletek és útmutatások **221**
Az Önellenőrzés teszt formájában *feladatainak helyes feleletei* **235**
Tárgymutató **236**

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Поллої Дезидер Федорович*

Угорською мовою
Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 15,0. Обл.-вид. арк. 13,88.
Тираж 1864 пр. Зам. № 57/П

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,
svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

УДК 373.167.1:512
М 52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х : Гімназія, 2017.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа „Рекомендовано Міністерством освіти і науки України":

Л. І. Філозоф, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, кандидат фізико-математичних наук;
О. В. Тесленко, методист методичного центру Управління освіти адміністрації Слобідського району Харківської міської ради;
Т. А. Євтушевська, учитель Черкаської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 7, учитель-методист

Експертка з антидискримінації в освіті
Н. М. Дашенкова, доцентка кафедри філософії, співробітниця ЦГО ХНУРЕ

Мерзляк А. Г.
М 52 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої. – Львів : Світ, 2017. – 240 с. : іл.

ISBN 978-966-914-072-2

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-072-2 (угор.)
ISBN 978-966-474-295-2 (укр.)

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Переклад з української мови

Перекладач *Поллої Дезидер Федорович*

Угорською мовою
Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 15,0. Обл.-вид. арк. 13,88.
Додатковий тираж 14 пр. Зам. № 57/1П

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,
svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011