A. H. Merzljak
V. B. Polonszkij
M. Sz. Jakir

ALGEBRA

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 8. osztálya számára

Ajánlotta
Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
М52

Перекладено за виданням :
Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 10.05.2016 № 491)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

В. В. Вдовенко, доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, кандидат педагогічних наук

І. В. Мадей, методист Козятинського міського методичного кабінету Вінницької області, учитель-методист

О. А. Барановська, учитель Острозької загальноосвітньої школи I–III ступенів № 1 Рівненської області, старший учитель

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. угорською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. : пер. Ю. І. Кулін. – Львів : Світ, 2016. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-914-010-4

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-966-914-010-4 (угор.)
ISBN 978-966-474-273-0 (укр.)

© Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., 2016
© ТОВ ТО „Гімназія”, оригінал-макет, художнє оформлення, 2016
© Кулін Ю. І., переклад угорською мовою, 2016

A szerzőktől

A TANULÓKNAK

KEDVES NYOLCADIKOSOK!

Ebben a tanévben tovább folytatjátok az algebra tanulását. Reméljük, hogy a 7. osztályban megszerettétek ezt a fontos és szép tantárgyat, és ezért fokozott érdeklődéssel fogtok hozzá az új ismeretek elsajátításához. Bízunk benne, hogy a kezetekben tartott tankönyv segítségetekre lesz ebben.

Ismerkedjetek meg a tankönyv felépítésével!

A tankönyv három paragrafusból áll, amelyek pontokra tagozódnak. Itt ismerkedhettek meg a tananyag elméleti részével. Fordítsatok különös figyelmet a **félkövér** betűkkel szedett szövegrészekre. Jól jegyezzétek meg a *dőlt* betűkkel kiemelt szavakat is.

A hagyományoknak megfelelően az elméleti anyagot gyakorlópéldák és feladatok követik. Ezeket a feladatmegoldás egyik lehetséges változatának tekinthetitek. Minden pontban önálló munkára kijelölt feladatok vannak, amelyek megoldásához csak az elméleti rész elsajátítása után fogjatok hozzá. A gyakorlatok között vannak könnyűek, közepesek és nehezek (különösen a *-gal jelöltek). Tudásotokat az *Ellenőrizzétek magatokat!* című rubrikában található tesztfeladatok megoldásával ellenőrizhetitek. Minden pont egy különleges rubrikával fejeződik be, melynek a *Nem hagyományos módszerek használata* címet adtuk. Ezekben olyan feladatok szerepelnek, amelyek megoldásához legtöbbször nem matematikai tudásra van szükség, hanem csak a józan eszeteket, találékonyságotokat, felfogóképességeteket kell használni. E feladatokkal problémamegoldó gondolkodás fejlesztését tűztük ki célul, hogy ne csak a matematikai feladatok elvégzésekor kerüljétek a szokványos megoldásokat, hanem az élet minden területén.

Ha a házi feladat megoldása után még marad szabad időtök, és szeretnétek többet tudni, akkor ismerkedjetek meg a *Többletfeladatok* című rubrikában leírt feladatokkal. Az ebben közölt tananyag nem tartozik az egyszerűek közzé, de itt aztán igazán kipróbálhatjátok képességeiteket.

Sok sikert és kitartást kívánunk!

A TANÁROKNAK

TISZTELT KOLLÉGÁK!

Őszintén reméljük, hogy e tankönyv megbízható segítségül szolgál egy nemes cél érdekében végzett áldozatos munkájukhoz. Szeretnénk, ha a könyv elnyerné tetszésüket.

A tankönyv széles körű és változatos didaktikai anyagot tartalmaz. Egy tanév alatt a tankönyvben található valamennyi feladatot lehetetlen megoldani, de erre nincs is szükség. Sokkal kényelmesebb úgy dolgozni, hogy bőségesen válogathatunk a feladatokból. Ez az egyénre szabott fejlesztési módszerek alkalmazását teszi lehetővé az oktatásban.

A *Többletfeladatok*ban olyan példák találhatók, amelyeket matematikai körökre, illetve fakultatív foglalkozásokra javaslunk.

Az alkotó munkához erőt, kedvet és sok sikert kívánunk!

Egyezményes jelek:

$\boldsymbol{n}^{\circ}$ alacsony és közepes felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;

$\boldsymbol{n}^{\bullet}$ megfelelő felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;

$\boldsymbol{n}^{\bullet\bullet}$ kiváló felkészültségű tanulók részére ajánlott feladatok;

$\boldsymbol{n}^{*}$ matematikai szakkörök részére és fakultatív foglalkozásokra ajánlott feladatok;

▲ vége a tétel bizonyításának;

 számítógéppel elvégezhető feladatok;

 többletfeladatok.

A **zöld** számozású példákat házi feladatra, a **kék** számozásúakat pedig szóbeli feladatként ajánljuk.

1.§. RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEK

- Ebben a paragrafusban olyan törtekkel ismerkedünk meg, amelyek nevezőiben és számlálóiban változókat tartalmazó kifejezések vannak; megtanuljuk összeadni, kivonni, megszorozni és elosztani az ilyen törteket; megismerkedünk az ilyen törtekből álló egyenletekkel.
- Megismerkedünk azokkal a szabályokkal, amelyek segítségével az adott egyenlet egyszerűbb alakra hozható.
- Bővítjük a *hatvány* fogalmát. Megtanuljuk a számokat negatív egész kitevőjű hatványra emelni.
- Megtanuljuk azon folyamatok matematikai modellezését, amelyekben az egyik mennyiség néhányszoros növelése (csökkenése) egy másik mennyiség néhányszoros csökkenését (növekedését) vonja maga után.

1. Racionális törtek

Mielőtt hozzáfognátok e pont tanulásához, ismételjétek át a 216. oldalon található 1-es, és a 218. oldalon lévő 6-os pontokat.

A 7. osztályos tananyagban egész kifejezések átalakításával foglalkoztunk. Ez alatt olyan kifejezéseket értettünk, amelyekben számok és változók összeadása, kivonása, szorzása és nullától különböző számmal való osztása szerepel.

Egész kifejezések például:

$$x - y,\ \frac{a+b}{5},\ m^2 + 2m + n^2,\ \frac{1}{3}x - 4,\ \frac{c}{4} + \frac{d}{7},\ x : 5,\ y,\ 7.$$

A 8. osztályban a **törtkifejezésekkel** fogunk megismerkedni.

A törtkifejezések abban különböznek az egész kifejezésektől, hogy bennük *változót tartalmazó kifejezéssel való osztás is előfordul.*

Törtkifejezések például:

$$2x + \frac{a}{b},\ (x - y) : (x + y),\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\ \frac{5}{x}.$$

Az egész és törtkifejezéseket együtt **racionális kifejezéseknek** nevezzük.

Ha a racionális kifejezésekben a változókat számokkal helyettesítjük, akkor számkifejezést kapunk. *A helyettesítést csak akkor szabad elvégezni, ha az nem vezet nullával való osztáshoz.*

Például a $2+\dfrac{a+2}{a-1}$ kifejezésnek nincs értelme, ha $a = 1$, azaz a kifejezésnek nincs helyettesítési értéke. Az a összes többi értékére a kifejezés értelmezve van.

Meghatározás. A változók azon értékeit, amelyekkel a racionális kifejezés értelmezve van, a változók megengedett értékeinek nevezzük.

A fenti kifejezésben például az a változó megengedett értéke az 1 kivételével bármely szám.

Az egész kifejezésekben szereplő változók megengedett értékei bármely szám.

A racionális kifejezések részesete a **racionális tört,** amelyekben a számláló és a nevező is többtagú kifejezés[1]**.** Például:

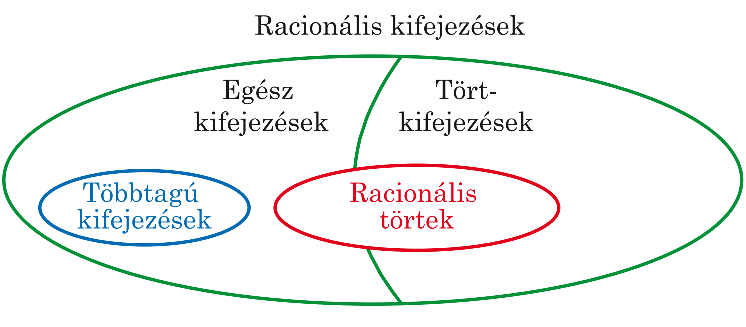
$$\frac{x}{7},\ \frac{x^2-2xy}{x+y},\ \frac{12}{a},\ \frac{a+b}{5}$$

Megjegyezzük, hogy a racionális tört lehet mind egész, mind törtkifejezés.

A racionális tört nevezője nem lehet olyan többtagú kifejezés, amely **azonosan egyenlő nullával**.

A racionális törtekben a változók megengedett értékei azok, amelyeknél a nevező helyettesítési értéke nem nulla.

Az 1. ábrán látható vázlatrajz ebben a pontban megtalálható fogalmak közötti kapcsolatot szemlélteti.



1. ábra

PÉLDA. Határozzátok meg az $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-5}$ kifejezésben a változó megengedett értékeit!

[1] Emlékeztetünk rá, hogy a számok és az egytagú kifejezések a többtagú kifejezések részesetei (lásd 218. oldal 6. pont).

Megoldás. Az $\frac{1}{x}$ tört nincs értelmezve, ha $x = 0$. Az összes többi szám esetén értelmezve van. $\frac{3}{x-5}$ tört az $x = 5$ értékén kívül az összes számra értelmezve van.

Tehát az x megengedett értékei a 0 és 5 kivételével valamennyi szám. Vagy másképpen fogalmazva: a kifejezés nincs értelmezve, ha $x = 0$ vagy $x = 5$. ▲

?

1. Miben különböznek a törtkifejezések az egész kifejezésektől?
2. Hogyan nevezzük az egész és törtkifejezéseket együtt?
3. A változók mely értékeit nevezzük megengedett értéknek?
4. Milyen törteket nevezünk racionálisaknak?
5. Milyen kifejezések részesete a racionális tört?
6. Milyen többtagú kifejezés nem lehet egy racionális tört nevezője?

GYAKORLATOK

1.° A $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ kifejezések közül melyek:

1) egész kifejezések; 2) törtkifejezések; 3) racionális törtek?

2.° Mennyi a $\frac{c^2-4c}{2c+1}$ tört helyettesítési értéke, ha:

1) $c = -3$; 2) $c = 0$?

3.° Határozzátok meg a $\frac{2m-n}{3m+2n}$ kifejezés helyettesítési értékét, ha:

1) $m = -1$, $n = 1$; 2) $m = 4$, $n = -5$.

4.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$, ha $a = -4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$, ha $x = -5$, $y = 6$.

5.° Határozzátok meg a kifejezésben szereplő változó megengedett értékeit:

1) $2x - 5$; 3) $\frac{9}{x-5}$; 5) $\frac{2+y}{1+y}$;

2) $\frac{18}{m}$; 4) $\frac{x-5}{9}$; 6) $\frac{1}{x^2+4}$;

7) $\frac{5}{x^2-4}$; 9) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$; 11) $\frac{x}{|x|+1}$;

8) $\frac{5}{|x|-4}$; 10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$; 12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

6.° A változó mely értékére van értelmezve a

1) $\frac{9}{y}$; 3) $\frac{m-1}{m^2-9}$; 5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$; 4) $\frac{x}{|x|-3}$; 6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$

kifejezés?

7.• Írjatok fel olyan x változót tartalmazó racionális törtet, amely

1) $x = 7$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$ és $x = 4$

értékeinél nincs értelmezve!

8.• Írjatok fel olyan y változót tartalmazó racionális törtet, amelynek megengedett értékei:

1) 5 kivételével minden szám;
2) –2 és 0 kivételével minden szám;
3) 3, –3 és 6 kivételével minden szám;
4) bármely szám!

9.• Egy gépkocsi 75 km/h sebességgel a km-t tett meg műúton, és 40 km/h sebességgel b kilométert földúton. Mennyi idő alatt tette meg a teljes utat a gépkocsi? Adjátok meg a feladat megoldását kifejezéssel, majd határozzátok meg az értéket, ha $a = 150$, $b = 20$!

10.• Egy tanuló m hrivnyáért 8 hrivnyás, n hrivnyáért pedig 14 hrivnyás füzeteket vásárolt. Hány füzetet vásárolt a tanuló? Állítsatok fel kifejezést, majd határozzátok meg az értékét, ha $m = 24$, $n = 56$!

11.• Bizonyítsátok be, hogy az x valamennyi megengedett értékénél a tört értéke:

1) $\frac{1}{x^2}$ pozitív; 2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ negatív!

12.• Bizonyítsátok be, hogy az x valamennyi megengedett értékénél a tört értéke:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ nem pozitív; 2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ nem negatív!

13.• Ismeretes, hogy $5x - 15y = 1$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $x - 3y$; 3) $\frac{18y-6x}{9}$;

2) $\frac{8}{2x-6y}$; 4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

14.• Tudjuk, hogy $4a + 8b = 10$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $2b + a$; 2) $\frac{5}{a+2b}$; 3) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$.

15.•• Határozzátok meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \dfrac{1}{4 - \dfrac{4}{x}}$; 2) $y = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$.

16.•• A változó mely értékeinél van értelmezve az alábbi kifejezés?

1) $\dfrac{x}{x - \dfrac{9}{x}}$; 2) $\dfrac{10}{2 + \dfrac{6}{x}}$.

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

17. Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\frac{5}{15}$; 2) $\frac{12}{18}$; 3) $\frac{27}{45}$; 4) $\frac{30}{48}$.

18. Bővítsétek:

1) a $\frac{3}{7}$ törtet úgy, hogy a nevezője 14 legyen;

2) a $\frac{8}{15}$ törtet úgy, hogy a nevezője 60 legyen!

19. Adjátok meg a következő kifejezéseket hatványalakban:

1) a^5a^3; 2) $(a^5)^3$; 3) $a^5 : a^3$; 4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

20. Bontsátok tényezőkre az alábbi kifejezéseket:

1) $6a - 15b$; 5) $a^6 + a^2$;
2) $2a + ab$; 6) $12m^2n - 4mn$;
3) $7am + 7bn$; 7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;
4) $4x^2 - 12xy$; 8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

21. Bontsátok tényezőkre az alábbi kifejezéseket:

1) $ab - ac + bd - cd$; 3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
2) $3m + 3n - mx - nx$; 4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

22. Adjátok meg azokat a kéttagú kifejezéseket, amelyek négyzete:

1) $a^2 - 8a + 16$; 3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
2) $9x^2 + 6x + 1$; 4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

23. Bontsátok tényezőkre az alábbi kifejezéseket:

1) $x^2 - 9$; 4) $a^2b^2 - 81$; 7) $c^3 - d^3$;
2) $25 - 4y^2$; 5) $100m^6 - 1$; 8) $a^3 + 8$;
3) $36m^2 - 49n^2$; 6) $a^{10} - b^6$; 9) $27m^6 - n^9$.

24. Bontsátok tényezőkre a következő kifejezéseket:

1) $7a^2 - 7$; 4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
2) $3b^3 - 3b$; 5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
3) $2x^3 - 2xy^2$; 6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

25. Melyik azonosság az alábbi egyenlőségek közül:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3\,(x - 6y)^2$;
2) $4m^3 - 500n^6 = 4\,(m - 5n)\,(m - 5mn + 25n^2)$?

Frissítsétek fel a 2. pontban tanultakat (216. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

26. Adott az $a = \underbrace{44\ldots4}_{m \text{ számjegy}}$, $b = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ számjegy}}$ szám. Az a szám m számjegyű, a b szám n számjegyű. Megválaszthatók-e úgy az m és az n értékei, hogy:
1) az a szám osztható legyen b-vel;
2) a b szám osztható legyen a-val?

2. A racionális törtek alaptulajdonsága

A $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ egyenlőség azonosság, mivel az a minden értékére teljesül.

A $\frac{3a-1+2a+5}{a+1} = \frac{5a+4}{a+1}$ egyenlőség első ránézésre ugyancsak azonosságnak tűnik, de az egyenlőség nem teljesül az a minden értékére. Az $a = -1$ esetén kapott racionális tört nincs értelmezve. Vagyis a 7. osztályban bevezetett azonosan egyenlő kifejezések és az azonosság meghatározásait pontosítani kell.

Meghatározás. Két kifejezést azonosan egyenlőnek nevezünk, ha a változók minden megengedett értékénél a megfelelő helyettesítési értékeik egyenlők.

Meghatározás. Azonosságnak nevezzük az olyan egyenlőséget, amely a változó minden megengedett értékével teljesül.

Például az $\frac{a-2}{a-2} = 1$ egyenlőség azonosság, mivel az $a = 2$ kivételével a változó minden értékére igaz.

A 7. osztályban tanultuk az egész kifejezések azonos átalakításait. Most pedig a törtkifejezések azonos átalakításával fogunk foglalkozni.

Az arány alaptulajdonsága szerint az

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

egyenlőség teljesül a, b és m bármely értékeivel, ahol $b \neq 0$ és $m \neq 0$.

A racionális törtek az arány alaptulajdonságához hasonló tulajdonsággal rendelkeznek:

ha a racionális tört számlálóját és nevezőjét megszorozzuk ugyanazzal a nullától különböző többtagú kifejezéssel, akkor az adottal azonosan egyenlő törtet kapunk.

A fenti tulajdonságot a **racionális tört alaptulajdonságának** nevezzük és így írhatjuk le:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},$$

ahol A, B és C többtagú kifejezések, s emellett B és C nem egyenlő nullával.

A fenti tulajdonság felhasználásával az $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ kifejezést helyettesíthetjük a vele azonosan egyenlő $\frac{A}{B}$ törttel. Az ilyen azonos átalakításokat a törtnek C tényezővel való **egyszerűsítésének** nevezzük.

1. PÉLDA. Egyszerűsítsük a 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$ törteket.

Megoldás. 1) A $6a^3b^2$ és $24a^2b^4$ egytagú kifejezéseknek van közös $6a^2b^2$ tényezőjük. Ezért:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}=\frac{a\cdot 6a^2b^2}{4b^2\cdot 6a^2b^2}=\frac{a}{4b^2}.$$

2) A tört számlálóját tényezőkre bontjuk:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}.$$

A kapott tört számlálójának és nevezőjének közös tényezője 3, amivel egyszerűsíthetünk:

$$\frac{3(x+5y)}{3x}=\frac{x+5y}{x}.$$

3) Először a tört számlálóját és nevezőjét tényezőkre bontjuk, majd a kapott törtet a $y+2$ tényezővel egyszerűsítjük:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}=\frac{(y+2)^2}{y(y+2)}=\frac{y+2}{y}. \blacktriangle$$

A tört alaptulajdonságából következik, hogy

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B} \text{ és } \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

A $\frac{-A}{B}$ és $\frac{A}{-B}$ törtek mindegyikét felírhatjuk $-\frac{A}{B}$ alakban is, vagyis $\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$.

2. PÉLDA. Egyszerűsítsük a $\frac{4a-20}{5a-a^2}$ törtet.

Megoldás.

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}. \blacktriangle$$

3. PÉLDA. Hozzuk:

1) az $\dfrac{a^2}{5bc^3}$ törtet $15ab^3c^5$ nevezőre;

2) az $\dfrac{a}{a+2b}$ törtet $a^2 - 4b^2$ nevezőre;

3) az $\dfrac{a-b}{2a-3b}$ törtet $3b - 2a$ nevezőre.

Megoldás. 1) Mivel $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$, ezért az új nevező a $3ab^2c^2$ tényezővel különbözik az adott tört nevezőjétől. Tehát az adott tört számlálóját és nevezőjét a $3ab^2c^2$ **pótszorzóval** kell megszoroznunk:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2 \cdot 3ab^2c^2}{5bc^3 \cdot 3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) $$\frac{a}{a+2b} = \frac{a\,(a-2b)}{(a+2b)\,(a-2b)} = \frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}.$$

3) Az adott tört számlálóját és nevezőjét is szorozzuk meg –1-gyel:

$$\frac{a-b}{2a-3b} = \frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)} = \frac{b-a}{3b-2a}. \ \blacktriangle$$

4. PÉLDA. Hozzuk közös nevezőre a következő törteket:

1) $\dfrac{2m}{9a^2b^6}$ és $\dfrac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\dfrac{1}{a+b}$ és $\dfrac{1}{a-b}$; 3) $\dfrac{4a^2}{a^2-36}$ és $\dfrac{6}{a^2+6a}$.

Megoldás. 1) Az adott tört nevezőinek szorzata $9a^2b^6 \cdot 6a^4b^3 = 54a^6b^9$ egyúttal közös nevezőjük is. Azonban célszerűbb közös nevezőnek a $18a^4b^6$ egytagú kifejezést választani, amelynek együtthatója 18, ami az adott nevezők együtthatóinak, a 9-nek és a 6-nak, a legkisebb közös többszöröse; az a és b változókat pedig a törtek nevezőiben szereplő legnagyobb kitevőkkel vesszük.

Mivel $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, ezért a $\dfrac{2m}{9a^2b^6}$ tört pótszorzója a $2a^2$ egytagú kifejezés. Figyelembe véve, hogy $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, ezért az $\dfrac{5n^2}{6a^4b^3}$ tört pótszorzója a $3b^3$ egytagú kifejezés.

Tehát, azt kapjuk, hogy

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Az adott törtek közös nevezője nevezőik szorzatával egyenlő. Így:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) A racionális törtek közös nevezőjének meghatározásánál hasznos lehet nevezőik tényezőkre bontása:

$$a^2-36=(a+6)(a-6),\ a^2+6a=a(a+6).$$

Tehát az adott törtek közös nevezője lehet az $a(a+6)(a-6)$ kifejezés. Ekkor

$$\frac{4a^2}{a^2-36}=\frac{{}^{a/}\,4a^2}{(a+6)(a-6)}=\frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)}=\frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a}=\frac{{}^{a-6/}\,6}{a(a+6)}=\frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)}=\frac{6a-36}{a^3-36a}.$$ ▲

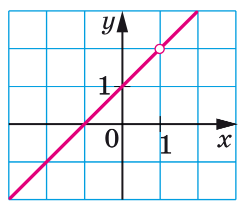
5. PÉLDA. Ábrázoljuk az $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ függvényt.

Megoldás. Az adott függvény értelmezési tartománya az $x=1$ kivételével bármely szám. Így:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,$$

tehát $y=x+1$, ha $x\neq 1$.

Tehát az adott függvény grafikonja – az 1 abszcisszájú pont kivételével – az $y=x+1$ egyenes (2. ábra). ▲



2. ábra

6. PÉLDA. Oldjuk meg a $(a^2-9)x=a+3$ egyenletet az a paraméter bármely értékére.

Megoldás. Felírjuk az adott egyenletet $(a+3)(a-3)x$ alakban, és három esetet vizsgálunk meg.

1) $a=3$.

Ebben az esetben a $0x=6$ egyenletet kapjuk, amelynek nincs megoldása.

2) $a=-3$.

Az így kapott $0x=0$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.

3) $a\neq 3$ és $a\neq -3$.

Ekkor $x=\dfrac{a+3}{(a+3)(a-3)}=\dfrac{1}{a-3}$.

Felelet: ha $a=3$, akkor az egyenletnek nincs gyöke; ha $a=-3$, akkor az egyenletnek bármely szám a gyöke; ha $a\neq 3$ és $a\neq -3$, akkor $x=\dfrac{1}{a-3}$. ▲

1. Milyen kifejezéseket nevezünk azonosan egyenlőknek?
2. Mit nevezünk azonosságnak?
3. Fogalmazzátok meg a racionális törtek alaptulajdonságát!

GYAKORLATOK

27.° Az alábbi kifejezések közül melyikkel azonosan egyenlő a $\frac{6a^2}{24a}$ tört:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

28.° Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek:

1) $\frac{3m^2}{7m}=\frac{3m}{7}$; 3) $\frac{2b}{5c^3}=\frac{8b}{20c^5}$;

2) $\frac{4x^8}{16x^4}=\frac{x^2}{4}$; 4) $\frac{8m^2}{9n}=\frac{8m^5}{9nm^3}$?

29.° Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{5x}{20x}$; 5) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

30.° Adjátok meg a hányadosokat tört alakban, majd egyszerűsítsétek azokat:

1) $6a : (18a^5)$; 2) $16b^7 : (48b^4)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$!

31.° Egyszerűsítsétek a törteket:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

32.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

33.° Pótoljátok a hiányzó kifejezéseket az egyenlőségekben:

1) $\frac{a}{3}=\frac{}{6a}=\frac{}{9a^3}=\frac{}{5b}=\frac{4a^2c^3}{}$; 2) $\frac{m}{n}=\frac{4m}{}=\frac{}{2n^2}=\frac{}{mnp}=\frac{3m^4n^3}{}$.

34.° Alakítsátok át:

1) az $\frac{a}{b^3}$ kifejezést b^5 nevezőjű törtté;

2) az $\frac{m}{9n}$ kifejezést $27n^4$ nevezőjű törtté;

3) a $\frac{6}{7x^2y}$ kifejezést $35x^3y^2$ nevezőjű törtté;

4) az $\frac{5k}{6p^5}$ kifejezést $24p^9c$ nevezőjű törtté!

35.° Alakítsátok át:

1) az $\frac{x}{y^2}$ alakú törtet y^8 nevezőjűvé;

2) az $\frac{a}{3b}$ alakú törtet $6b^3$ nevezőjűvé;

3) a $\frac{9}{4m^2n}$ alakú törtet $12m^3n^2$ nevezőjűvé;

4) a $\frac{11c}{15d^6}$ alakú törtet $30bd^7$ nevezőjűvé!

36.° Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$; 5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 6) $\frac{4a-20b}{12ab}$; 10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$; 7) $\frac{6x+12}{6x}$; 11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

37.° Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$; 3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$; 5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;

2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; 4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$; 6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

38.° Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

39.° Alakítsátok át:

1) az $\frac{a}{a+2}$ törtet $4a+8$ nevezőjű törtté;

2) az $\frac{m}{m-3n}$ törtet m^2-9n^2 nevezőjű törtté;

3) az $\frac{x}{2x-y}$ törtet $7y-14x$ nevezőjű törtté;

4) az $\frac{5b}{2a+3b}$ törtet $4a^2+12ab+9b^2$ nevezőjű törtté;

5) az $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ törtet x^3-1 nevezőjű törtté!

40.° Írjátok fel át az $x-5y$ kifejezést:

1) 2; 2) x; 3) $4y^3$; 4) x^2-25y^2 nevezőjű tört alakban!

41.° Hozzátok a $\frac{6}{b-4}$ törtet:

1) $5b-20$; 2) $12-3b$; 3) b^2-4b; 4) b^2-16 nevezőre!

42.° Alakítsátok át az alábbi törtpárokat azonos nevezőjű törtekké:

1) $\frac{1}{8ab}$ és $\frac{1}{2a^3}$;
2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ és $\frac{4y}{3m^2n^4}$;
3) $\frac{a+b}{a-b}$ és $\frac{2}{a^2-b^2}$;
4) $\frac{3d}{m-n}$ és $\frac{8p}{(m-n)^2}$;
5) $\frac{x}{2x+1}$ és $\frac{x}{3x-2}$;
6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ és $\frac{a}{a^2-b^2}$;
7) $\frac{3a}{4a-4}$ és $\frac{2a}{5-5a}$;
8) $\frac{7a}{b-3}$ és $\frac{c}{9-b^2}$.

43.° Hozzátok közös nevezőre a következő törteket:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ és $\frac{1}{10x^3y}$;
2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ és $\frac{d}{9ab^2}$;
3) $\frac{x}{y-5}$ és $\frac{z}{y^2-25}$;
4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ és $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;
5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ és $\frac{y-1}{xy-y^2}$;
6) $\frac{6a}{a-2b}$ és $\frac{3a}{a+b}$;
7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ és $\frac{c}{4-c}$;
8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ és $\frac{m}{m-5}$.

44.• Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;
2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;
3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;
4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

45.• Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$; 2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$; 3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

46.• Egyszerűsítsétek a törtkifejezéseket, majd határozzátok meg a helyettesítési értéküket:

1) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$, ha $a=-2$, $b=0{,}4$;
2) $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$, ha $b=\frac{1}{3}$, $c=-6$;
3) $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$, ha $x=1{,}2$, $y=-3$;
4) $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$, ha $a=-0{,}1$!

47.• Határozzátok meg az alábbi kifejezés helyettesítési értékét:

1) $\frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$, ha $x=2{,}5$, $y=-2$; 2) $\frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$, ha $c=-4$!

48.• Hozzátok közös nevezőre a következő törteket:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ és $\frac{1}{p^3-27}$;
4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ és $\frac{4}{x^2+2x+1}$;
2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ és $\frac{a-2}{9a^2-1}$;
5) $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\frac{b}{2a-2b}$ és $\frac{ab}{4a-4c}$.
3) $\frac{a}{a^2-7a}$ és $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

49.• Írjátok fel a törtkifejezéseket azonos nevezőjű törtek alakjában:

1) $\frac{3a}{3a-2}$, $\frac{a}{9a+6}$ és $\frac{a^2}{9a^2b-4b}$;
2) $\frac{1}{a-5b}$, $\frac{1}{a^2+7ac}$ és $\frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

50.•• Határozzátok meg a $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$ kifejezés értékét, ha $\frac{x}{y}=2$.

51.•• Határozzátok meg a $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$ kifejezés értékét, ha $\frac{a}{b}=5$.

52.•• Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét, ha tudjuk, hogy $2a - 6b = 1$:

1) $\frac{8}{a-3b}$;
2) $\frac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

53.•• Határozzátok meg a $\frac{2m-1{,}5n}{32m^2-18n^2}$ kifejezés értékét, ha $4m + 3n = 8$!

54.•• Létezik-e az a-nak olyan értéke, amelynél az $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ tört helyettesítési értéke negatív?

55.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$;
3) $y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x^2-4x}{x}$;
2) $y=\frac{x-3}{3-x}$;
4) $y=\frac{2}{x+4}-\frac{2}{x+4}$.

56.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y=\frac{x^2-8x+16}{x-4}$;
2) $y=x-\frac{x}{x}$;
3) $y=\frac{x^2-3x}{x}-\frac{2x^2-2}{x^2-1}$.

57.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y=\frac{|x|}{x}$;
2) $y=\frac{x^2-1}{|x|-1}$.

58.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x+1}{x+1}=1$;
2) $\frac{x^2-25}{x-5}=10$;
3) $\frac{x+6}{|x|-6}=0$.

59.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8$;
2) $\frac{|x|-7}{x-7}=0$.

60.* Az a valamennyi értékére oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $ax = 1$;
2) $ax = a$;
3) $(a - 6)\,x = a^2 - 12a + 36$;
4) $(a^2 - 4)\,x = a - 2$!

61.* Az a valamennyi értékére oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $(a + 3)\,x = 3$;
2) $(a^2 - 9a)\,x = a^2 - 18a + 81$!

ISMÉTLŐ FELADATOK

62. Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $(x + 2)\,(x - 9) - 3x\,(3 - 2x)$;
2) $(a + 5)\,(a - 2) + (a + 4)\,(a - 5)$;
3) $(y - 8)\,(2y + 1) - (3y + 1)\,(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)\,(2x + 3y) + (3x + 2y)\,(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)\,(x + 3)$;
6) $(y - 4)\,(y + 3) - (y - 6)^2$.

63. Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y = 2$;
2) $y = 2x$;
3) $y = 2x - 1$.

64. Milyen a és b értékeknél lesz az $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$ kifejezés értéke a legkisebb? Mennyi ez a legkisebb érték?

65. Meggyes faluhoz a vasútállomás 14 kilométerrel közelebb van, mint Almáshoz. Autóbusszal Meggyestől az állomásig 45 percig tart az út. Személygépkocsival az út Almásról az állomásra 5 perccel tovább tartott. A személygépkocsi sebessége 12 km/h-val nagyobb az autóbusz sebességénél. Határozzátok meg mindegyik gépjármű sebességét!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

66. Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

1) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18}$;
2) $\frac{9}{16} + \frac{7}{16}$;
3) $\frac{23}{32} - \frac{15}{32}$;
4) $4 - 1\frac{3}{11}$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

67. A négyzet oldalaira 4 természetes számot írtak. A négyzet mindegyik csúcsában pedig olyan szám szerepel, amely egyenlő a csúcsot alkotó oldalakra írt számok szorzatával. A csúcsokban szereplő számok összege 55. Határozzátok meg az oldalakra írt számok összegét!

3. Egyenlő nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

Már tudtok egyenlő nevezőjű közönséges törteket összeadni és kivonni. Az ide vonatkozó szabályok rövid matematikai felírása:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

E szabály szerint adjuk össze, illetve vonjuk ki egymásból az egyenlő nevezőjű racionális törteket is.

Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze, hogy számlálóikat összeadjuk, a nevezőt pedig változatlanul hagyjuk.

Egyenlő nevezőjű törteket úgy vonunk ki, hogy az első tört számlálójából kivonjuk a második tört számlálóját, a nevezőt pedig változatlanul hagyjuk.

1. PÉLDA. Végezzétek el a kivonást.

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Megoldás

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}.$

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}.$

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}.$ ▲

2. PÉLDA. Ismeretes, hogy $\frac{m}{n}=-3$. Határozzuk meg a $\frac{2m+n}{m}$ kifejezés helyettesítési értékét.

Megoldás. Felírjuk a törtet egy egész és egy törtkifejezés összegeként:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Ha $\frac{m}{n}=-3$, akkor $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Tehát $\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$. ▲

3. PÉLDA. Határozzuk meg az n összes olyan természetes értékét, amely mellett a $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ kifejezés helyettesítési értéke is egész szám lesz.

Megoldás. Felírjuk a törtet egy egész és egy törtkifejezés különbségeként:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

A $2n+3$ kifejezés minden természetes n számra természetes értéket vesz fel. A $2n+3-\frac{15}{n}$ kifejezés akkor vesz fel egész értéket, ha a $\frac{15}{n}$ kifejezés értéke is egész szám lesz. Ez csak a következő természetes n értékek esetén lehetséges: 1, 3, 5, 15.

Felelet: $n = 1$, vagy $n = 3$, vagy $n = 5$, vagy $n = 15$. ▲

?

1. Hogyan adunk össze egyenlő nevezőjű racionális törteket?
2. Hogyan vonunk ki egymásból egyenlő nevezőjű racionális törteket?

GYAKORLATOK

68.° Végezzétek el a műveleteket:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;
5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;
8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

69.° Írjátok fel tört alakban a kifejezéseket:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;
2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;
5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

70.° Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;

5) $\dfrac{b^2}{b+10}+\dfrac{20b+100}{b+10}$; 6) $\dfrac{c^2}{c-7}-\dfrac{14c-49}{c-7}$.

71.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{c^2}{c-9}-\dfrac{81}{c-9}$; 3) $\dfrac{3x+5}{x^2-4}-\dfrac{2x+7}{x^2-4}$;

2) $\dfrac{a^2}{(a-6)^2}-\dfrac{36}{(a-6)^2}$; 4) $\dfrac{y^2}{y-2}-\dfrac{4y-4}{y-2}$.

72.° Végezzétek el az alábbi műveleteket:

1) $\dfrac{a+b}{c-7}+\dfrac{a}{7-c}$; 4) $\dfrac{81b^2}{9b-a}+\dfrac{a^2}{a-9b}$;

2) $\dfrac{5m}{m-n}+\dfrac{5n}{n-m}$; 5) $\dfrac{t^2}{3t-6}+\dfrac{4}{6-3t}$;

3) $\dfrac{2x-4y}{x-3y}-\dfrac{4x-14y}{3y-x}$; 6) $\dfrac{y^2}{y-1}-\dfrac{1-2y}{1-y}$.

73.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{x}{y-1}+\dfrac{2}{1-y}$; 3) $\dfrac{3m+2n}{2m-3n}-\dfrac{m-8n}{3n-2m}$;

2) $\dfrac{3c}{c-d}+\dfrac{3d}{d-c}$; 4) $\dfrac{b^2}{2b-14}+\dfrac{49}{14-2b}$.

74.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét:

1) $\dfrac{a^2-48}{a-8}-\dfrac{16}{a-8}$, ha $a=32$; 2) $\dfrac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\dfrac{c+3}{8-c^3}$, ha $c=-3$.

75.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékét:

1) $\dfrac{5x+3}{x^2-16}+\dfrac{6x-1}{16-x^2}$, ha $x=-4{,}1$; 2) $\dfrac{a^2+a}{a^2-9}-\dfrac{7a-9}{a^2-9}$, ha $a=7$.

76.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{5n-1}{20n}-\dfrac{7n-8}{20n}-\dfrac{8n+7}{20n}$; 3) $\dfrac{3k}{k^3-1}+\dfrac{4k+1}{1-k^3}+\dfrac{k^2}{1-k^3}$.

2) $\dfrac{9m+2}{m^2-4}-\dfrac{m-9}{4-m^2}+\dfrac{1-7m}{m^2-4}$;

77.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{6a-1}{16a-8}+\dfrac{4a-7}{16a-8}+\dfrac{-2a-2}{8-16a}$; 2) $\dfrac{2a^2+12a}{a^2-25}+\dfrac{8a-9}{25-a^2}-\dfrac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

78.• Adjátok meg tört alakban a kifejezést:

1) $\dfrac{15-8a}{(a-1)^2}-\dfrac{14-7a}{(1-a)^2}$; 3) $\dfrac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\dfrac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

2) $\dfrac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\dfrac{12b}{(2-b)^3}$;

79.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\dfrac{2x+49}{(7-x)^4}$; 2) $\dfrac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\dfrac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

80.• Bizonyítsátok be az alábbi azonosságokat:

1) $\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-\dfrac{(a-b)^2}{4ab}=1;$ 2) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2.$

81.• Bizonyítsátok be, hogy a $\dfrac{12x-25}{20x-15}+\dfrac{8x+10}{20x-15}$ kifejezés helyettesítési értéke nem függ az x értékétől az x változó minden megengedett értékére!

82.• Bizonyítsátok be, hogy a $\dfrac{17y+5}{21y-3}-\dfrac{9-11y}{21y-3}$ kifejezés helyettesítési értéke nem függ az y értékétől az y változó minden megengedett értékére!

83.• Bizonyítsátok be, hogy a változó minden megengedett értékénél a $\dfrac{a^2-6}{(a-2)^4}-\dfrac{7a-4}{(a-2)^4}+\dfrac{3a+6}{(a-2)^4}$ kifejezés helyettesítési értéke pozitív!

84.• Bizonyítsátok be, hogy a változó minden megengedett értékénél a $\dfrac{2-b^2}{(b-5)^6}-\dfrac{7-3b}{(b-5)^6}+\dfrac{7b-20}{(b-5)^6}$ kifejezés helyettesítési értéke negatív!

85.•• Adjátok meg az adott törtet egy egész és egy törtkifejezés összegeként vagy különbségeként:

1) $\dfrac{x+3}{x};$ 2) $\dfrac{a^2-2a-5}{a-2}.$

86.•• Adjátok meg az adott törtet egy egész és egy törtkifejezés összegeként vagy különbségeként:

1) $\dfrac{4a-b}{a};$ 2) $\dfrac{b^2+7b+3}{b+7}.$

87.•• Határozzátok meg a kifejezés értékét, ha $\dfrac{x}{y}=4$:

1) $\dfrac{y}{x};$ 2) $\dfrac{2x-3y}{y};$ 3) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}.$

88.•• Határozzátok meg a kifejezés értékét, ha $\dfrac{a}{b}=-2$:

1) $\dfrac{a-b}{a};$ 2) $\dfrac{4a+5b}{b};$ 3) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{ab}.$

89.•• Határozzátok meg az n összes olyan természetes értékét, amelynél az alábbi kifejezés helyettesítési értéke pozitív szám:

1) $\dfrac{n+6}{n};$ 2) $\dfrac{3n^2-4n-14}{n};$ 3) $\dfrac{4n+7}{2n-3}.$

90.•• Határozzátok meg az n összes olyan természetes értékét, amelynél az alábbi kifejezés helyettesítési értéke pozitív szám:

1) $\dfrac{8n-9}{n};$ 2) $\dfrac{n^2+2n-8}{n};$ 3) $\dfrac{9n-4}{3n-5}.$

ISMÉTLŐ FELADATOK

91. Az egymástól 9 km távolságra lévő két faluból egyszerre, egymással szemben két kerékpáros indult el. 20 perc múlva találkoztak. Ha a kerékpárosok azonos irányba haladnának, akkor az egyik a másikat 3 óra múlva érné utol. Határozzátok meg a kerékpárosok sebességét!

92. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $1 - 4(x + 1) = 1{,}8 - 1{,}6x$;

2) $3(0{,}5x - 4) + 8{,}5x = 10x - 11$!

93. Bizonyítsátok be, hogy az a változó minden megengedett értékénél a $(a + 4)(a - 8) + 4(2a + 9)$ kifejezés helyettesítési értéke nem negatív!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

94. A csillagot helyettesítsétek olyan egytagú kifejezéssel, hogy az egyenlőség igaz legyen:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$;

2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$;

3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

95. A csillagot helyettesítsétek olyan többtagú kifejezéssel, hogy az egyenlőség igaz legyen:

1) $* \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)^2$;

2) $(a + 10b) \cdot * = a^3 - 10ab^2$.

96. Hozzátok közös nevezőre a következő törteket:

1) $\dfrac{1}{3a}$ és $\dfrac{2}{3b}$;

2) $\dfrac{4m}{p^3q^2}$ és $\dfrac{3n}{p^2q^3}$;

3) $\dfrac{5}{m-n}$ és $\dfrac{6}{m+n}$;

4) $\dfrac{6x}{x-2y}$ és $\dfrac{y}{x+y}$;

5) $\dfrac{y}{6y-36}$ és $\dfrac{1}{y^2-6y}$;

6) $\dfrac{1}{a^2-1}$ és $\dfrac{1}{a^2+a}$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

97. Előfordulhat-e, hogy egy páros számnak több páratlan osztója legyen, mint páros?

4. Különböző nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

A különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása a törtek alaptulajdonságának alkalmazásával egyenlő nevezőjű törtek összeadására és kivonására vezethető vissza.

Adjuk össze $\frac{A}{B}$ és $\frac{C}{D}$ racionális törteket!

Felírhatjuk, hogy: $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}$, $\frac{C}{D}=\frac{C\cdot B}{D\cdot B}$.

Akkor $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}+\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}$.

Ebben az esetben közös nevezőül a törtek nevezőinek szorzatát választottuk.

Megjegyezzük, hogy a nevezők szorzata nem mindig a legalkalmasabb közös nevező.

A közönséges törtek közös nevezőjének meghatározásakor először a nevezőket prímtényezőkre bontjuk, majd megkeressük legkisebb közös többszörösüket. Hasonlóképpen ahhoz, hogy meghatározzuk a racionális törtek közös nevezőjét, célszerű a nevezőket tényezőkre bontani.

Nyilvánvaló, hogy két racionális tört összege, illetve különbsége szintén racionális tört lesz.

1. PÉLDA. Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

Megoldás. 1) A törtek közös nevezője az a^2bc egytagú kifejezés. Vagyis

$$\frac{^{a/}\,b+1}{abc}+\frac{^{b/}\,1-a}{a^2c}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) A törtek nevezőit tényezőkre bontjuk, így kapjuk:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\frac{^{m-n/}\,m}{7\,(m+n)}-\frac{^{m+n/}\,n}{7\,(m-n)}=$$

$$=\frac{m\,(m-n)-n\,(m+n)}{7\,(m+n)\,(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7\,(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7\,(m^2-n^2)}.$$

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)\,(n+7)}-\frac{^{n+7/}\,6}{n-7}=\frac{10n+14-6\,(n+7)}{(n-7)\,(n+7)}=$

$$= \frac{10n + 14 - 6n - 42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n - 28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}.$$

4) $$\frac{2a}{25 - 10a + a^2} - \frac{1}{3a - 15} = \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} =$$

$$= {}^{3/}\frac{2a}{(a-5)^2} - {}^{a-5/}\frac{1}{3(a-5)} = \frac{6a - a + 5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) Ebben az esetben a közös nevező a törtek nevezőinek szorzata lesz. Ekkor

$${}^{x-2/}\frac{x}{x-4} - {}^{x-4/}\frac{x+2}{x-2} = \frac{x(x-2) - (x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x - x^2 + 4x - 2x + 8}{(x-4)(x-2)} =$$

$$= \frac{8}{(x-4)(x-2)}. \blacktriangle$$

2. PÉLDA. Adjuk meg tört alakban a $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$ kifejezést.

Megoldás. A $3c$ kifejezést 1 nevezőjű tört alakban megadva azt kapjuk, hogy:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - {}^{7c-2/}\frac{3c}{1} = \frac{21c^2 - 21c^2 + 6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}. \blacktriangle$$

Megjegyezzük, hogy két racionális tört összege és különbsége szintén racionális tört.

?

1. Hogyan adunk össze, illetve vonunk ki egymásból különböző nevezőjű racionális törteket?

2. Milyen kifejezés lesz két racionális tört összege, illetve különbsége?

GYAKORLATOK

98.° Végezzétek el az alábbi műveleteket:

1) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3}$;
4) $\frac{4}{x} - \frac{3}{y}$;
7) $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{ab^4}$;
2) $\frac{5b}{14} - \frac{b}{7}$;
5) $\frac{m}{4n} + \frac{m}{6n}$;
8) $\frac{11}{5a} - \frac{2c}{15ab}$;
3) $\frac{m}{8} - \frac{n}{6}$;
6) $\frac{c}{b} - \frac{d}{3b}$;
9) $\frac{m}{abc} + \frac{c}{abm}$.

99.° Adjátok meg tört alakban a következő kifejezéseket:

1) $\frac{x}{8} - \frac{y}{12}$;
3) $\frac{m}{n} - \frac{n}{m}$;
5) $\frac{7}{cd} + \frac{k}{cp}$;
2) $\frac{4a}{7} + \frac{a}{4}$;
4) $\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{8x}$;
6) $\frac{6a}{35c^5} - \frac{9b}{14c^2}$.

100.° Hozzátok egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$;
2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$;
3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$;
4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$;
5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;
6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$;
7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;
8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$;
9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;
10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;
11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;
12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

101.° Végezzétek el az alábbi törtek kivonását:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;
2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;
3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$;
4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;
5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;
6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;
7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;
8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

102.° Végezzétek el a következő műveleteket:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$;
2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;
3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;
4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;
5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;
6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

103.° Alakítsátok át a kifejezéseket törtekké:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;
2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;
3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

104.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;
2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;
3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;
4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;
5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;
6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

105.° Végezzétek el a következő műveleteket:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;
2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;
3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;
4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

106.° Végezzétek el a törtek összeadását vagy kivonását:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;
2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;
5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;
6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;
7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;
8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

107.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;
2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;
3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;
4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;
5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;
6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

108.° Végezzétek el a következő műveleteket:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;
2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;
3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;
4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;
5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;
6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

109.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;
2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;
3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;
4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

110.° Írjátok fel tört alakban a következő kifejezéseket:

1) $\frac{a}{b}+1$;
2) $\frac{x}{y}-x$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;
4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;
5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;
6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;
7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;
8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

111.° Végezzétek el az alábbi műveleteket:

1) $a-\frac{4}{a}$;
2) $\frac{1}{x}+x-2$;
3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;
4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;
5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;
6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

112.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

113.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

114.• Bizonyítsátok be, hogy az adott kifejezés helyettesítési értéke nem függ a változó értékétől a változó minden megengedett értékére:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;

2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

115.• Írjátok fel tört alakban a következő kifejezéseket:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;

4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

116.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;

2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

117.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket, majd határozzátok meg az értéküket:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, ha $a=5$;

2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, ha $c=-0{,}8$;

3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, ha $m=3$, $n=0{,}5$.

118.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékeit:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, ha $x=5$;

2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, ha $y=-2\frac{3}{7}$.

119.• Bizonyítsátok be az alábbi azonosságokat:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0;$

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1};$

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}.$

120.• Bizonyítsátok be az alábbi azonosságokat:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b};$

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0.$

121.• Határozzátok meg a törtek különbségét:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1};$ 2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}.$

122.• Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n};$ 2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}.$

123.• Bizonyítsátok be a $\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}$ azonosságot!

124.•• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab};$ 3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2};$

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3};$ 4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}.$

125.•• Bizonyítsátok be az alábbi azonosságokat:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a};$ 2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}.$

126.•• Bizonyítsátok be az

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0 \text{ azonosságot!}$$

127.•• Bizonyítsátok be a

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1 \text{ azonosságot!}$$

128.* Egyszerűsítsétek az

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)} \text{ kifejezést!}$$

129.* Egyszerűsítsétek az

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)} \text{ kifejezést!}$$

130.* Bizonyítsátok be az

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}$$ azonosságot!

131.* Bizonyítsátok be a

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}$$ azonosságot!

132.* Bizonyítsátok be, ha $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, akkor $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4$.

ISMÉTLŐ FELADATOK

133. Határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$; 2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

134. Oldjátok meg a következő egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

135. A háromnapos kerékpárverseny első napján a versenyzők a teljes út $\frac{4}{15}$ részét, a másodikon $\frac{2}{5}$ részét, a harmadikon pedig a hátralévő 90 km-t tették meg. Mekkora távolságot tettek meg a kerékpárosok 3 nap alatt?

136. (*Bolgár népi feladat.*) Öt testvér úgy akart elosztani egymás között 20 bárányt, hogy mindegyiküknek páratlan számú állat jusson. Lehetséges-e így osztozkodni?

137. Igaz-e az alábbi állítás: az n bármely természetes értékénél a $(5n+7)^2-(n-1)^2$ kifejezés maradék nélkül osztható 48-cal?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

138. Adjátok meg az alábbi számok reciprok értékét:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

139. Határozzátok meg a következő szorzatokat:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

140. Végezzétek el az alábbi osztásokat:

1) $\frac{5}{18}:\left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8:\frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15}:(-24)$; 4) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$.

141. Határozzátok meg a hatvány értékét:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

142. Egy folyó szemközti partjaitól a partokra merőlegesen két komp indult el egymással szemben különböző, de állandó sebességgel. A kompok 720 méterre az egyik parttól találkoztak, majd partot érés után rögtön megfordultak, és elindulnak visszafelé. Ezúttal 400 méterre találkoztak a másik parttól. Mekkora a folyó szélessége?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 1. SZ. TESZTFELADAT

1. Melyik kifejezés egész az alábbiak közül?

A) $\frac{m+n}{m}$; B) $\frac{m+n}{7}$; C) $\frac{m+n}{7m}$; D) $m+\frac{n}{7m}$.

2. A változó mely értékeire nincs értelmezve a $\frac{3a}{2a-10}$ kifejezés?

A) 0; B) 10; C) 5; D) 0; 5.

3. Az argumentum mely értékeire nem értelmezhető az $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ függvény?

A) –1; 1; B) 1; C) –2; –1; 1; D) –2; 1.

4. Egyszerűsítsétek a $\frac{21a^6}{14a^3}$ törtet!

A) $\frac{3a^3}{2}$; B) $\frac{3a^2}{2}$; C) $\frac{3}{2a^3}$; D) $\frac{3}{2a^2}$.

5. Az $\frac{5b-15}{b^2-9}$ tört az alábbi törtek közül melyikkel azonosan egyenlő?

A) $\frac{b-3}{5}$; B) $\frac{b+3}{5}$; C) $\frac{5}{b-3}$; D) $\frac{5}{b+3}$.

6. Egyszerűsítsétek a $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$ törtet!

A) $4c$; B) $-4c$; C) $\frac{1}{4c}$; D) $-\frac{1}{4c}$.

7. Végezzétek el az $\frac{5x}{x-2}-\frac{10}{x-2}$ kivonást!

A) $\frac{x+2}{x-2}$; B) $\frac{5x+10}{x-2}$; C) 5; D) –5.

8. Végezzétek el a $\dfrac{4-m}{m-3}+\dfrac{2m-5}{3-m}$ összeadást!

A) $\dfrac{m-1}{m-3}$; B) $\dfrac{1-3m}{m-3}$; C) 3; D) –3.

9. Adjátok meg tört alakban a $\dfrac{3n^2}{n-6}-3n$ kifejezést!

A) $\dfrac{3n}{n-4}$; B) $\dfrac{3n}{4-n}$; C) $\dfrac{18n}{n-6}$; D) $\dfrac{18}{6-n}$.

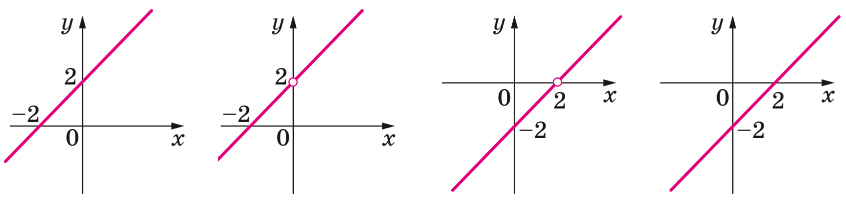
10. Hozzátok egyszerűbb alakra a $\dfrac{2m+1}{3m-2}-\dfrac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$ kifejezést!

A) $\dfrac{1}{(3m-2)^2}$; B) $\dfrac{1}{3m-2}$; C) $\dfrac{m}{(3m-2)^2}$; D) $\dfrac{m}{3m-2}$.

11. Egyszerűsítsétek az $\dfrac{a-12}{a^2+4a}-\dfrac{a-4}{a}+\dfrac{a}{a+4}$ kifejezést!

A) $\dfrac{4}{a}$; B) $\dfrac{1}{a}$; C) a; D) $a + 4$.

12. Melyik grafikon ábrázolja az $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$ függvényt?



A) B) C) D)

5. Racionális törtek szorzása és osztása. Racionális törtek hatványozása

Már ismerjük a közönséges törtek szorzásának és osztásának szabályát, ami így írható fel: $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$, $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$.

Hasonló szabály szerint végezzük el a racionális törtek szorzását és osztását.

Két racionális tört szorzata olyan tört, amelynek számlálója egyenlő e törtek számlálóinak szorzatával, nevezője pedig e törtek nevezőinek szorzatával.

Két racionális tört hányadosa olyan tört, amelynek számlálója egyenlő az első tört számlálójának és a második tört nevezőjének szorzatával, nevezője pedig az első tört nevezőjének és a második tört számlálójának szorzatával.

1. PÉLDA. Végezzük el az alábbi műveleteket:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36}$;

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7)$.

Megoldás. 1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}$.

2) Felírjuk a $2x-12$ többtagú kifejezést olyan tört alakban, amelynek nevezője 1. Akkor:

$$(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2x-12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2(x-6) \cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x-6};$$

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27} = \frac{a(a+2b)}{a+9} \cdot \frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3a}{a-2b}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7) = \frac{5c^2-35c}{c+2} : \frac{c-7}{1} = \frac{5c(c-7)}{c+2} \cdot \frac{1}{c-7} = \frac{5c}{c+2}$. ▲

Két racionális tört szorzásának szabálya kiterjeszthető három vagy több racionális törtből álló szorzatra is. Három tört esetén például:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

2. PÉLDA. Egyszerűsítsük a $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$ kifejezést.

Megoldás.

$$\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5b^3c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2b^3c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \ ▲$$

A törtek szorzási szabályának alkalmazásával meghatározható a racionális törtek hatványozásának szabálya. Ha n természetes szám, és $n > 1$, akkor:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ tényező}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ tényező}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ tényező}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Megállapodás szerint $n = 1$ esetén $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Tehát

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

ahol n természetes szám.

Racionális törtet hatványra úgy emelünk, hogy az adott hatványra emeljük mind a számlálót, mind a nevezőt, majd az első eredményt számlálóként, a másikat pedig nevezőként írjuk fel.

3. PÉLDA. Adjuk meg tört alakban a $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$ kifejezést.

Megoldás. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}$. ▲

?

1. Mi lesz két racionális tört szorzata?
2. Mi lesz két racionális tört hányadosa?
3. Hogyan emelünk racionális törtet hatványra?

GYAKORLATOK

143.° Az alábbi kifejezések közül melyikkel egyenlő az $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$ szorzat?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

144.° Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; 7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;

2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

145.° Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;

2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

146.° Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$; 3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$;

2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$; 4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$;

5) $\frac{c-1}{c+6}\cdot\frac{c+6}{c^2-2c+1}$;

6) $\frac{m-2}{m^2-49}\cdot\frac{m+7}{m-2}$;

7) $(a+4)\cdot\frac{a}{2a+8}$;

8) $\frac{x-9}{4x+8}\cdot\frac{x^2+2x}{x-9}$;

9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3}\cdot\frac{a+1}{2a-1}$;

10) $\frac{a^2-25}{4a}\cdot\frac{4a^2}{a^2-5a}$.

147.° Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

1) $\frac{3a+b}{4c}\cdot\frac{c}{3a+b}$;

2) $\frac{ab-b^2}{8}\cdot\frac{4a}{b^4}$;

3) $\frac{5x-5y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x-y}$;

4) $\frac{18b}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{3b}$;

5) $\frac{6}{m^2-9n^2}\cdot(m-3n)$;

6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1}\cdot\frac{3c+1}{c-3}$.

148.° Az alábbi kifejezések melyikével egyenlő a $\frac{3}{c^3}:\frac{12}{c^9}$ hányados?

1) $\frac{c^3}{4}$; 2) $\frac{c^6}{4}$; 3) $4c^3$; 4) $4c^6$.

149.° Végezzétek el az alábbi osztásokat:

1) $\frac{8m}{n}:\frac{4m}{n}$;

2) $\frac{3b}{8}:b$;

3) $\frac{7c^2}{d}:\frac{c}{d^3}$;

4) $\frac{6a}{5b}:\frac{3a^2}{20b^2}$;

5) $-\frac{9a}{b^5}:\frac{18a^4}{b^3}$;

6) $a^2:\frac{a}{b^2c}$;

7) $24a^3:\frac{12a^2}{b}$;

8) $\frac{36a}{c^3}:(4a^2c)$.

150.° Határozzátok meg a következő hányadosokat:

1) $\frac{7}{a^2}:\frac{28}{a^8}$;

2) $\frac{b^9}{8}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{27}{m^6}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^{10}}{y^8}:(30x^5y^2)$;

5) $49m^4:\frac{21m}{n^2}$;

6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5}:\left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

151.° Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{a-b}{7a}:\frac{a-b}{7b}$;

2) $\frac{x^2-y^2}{x^2}:\frac{6x+6y}{x^5}$;

3) $\frac{c-5}{c^2-4c}:\frac{c-5}{5c-20}$;

4) $\frac{x-y}{xy}:\frac{x^2-y^2}{3xy}$;

5) $\frac{a^2-25}{a+7}:\frac{a-5}{a+7}$;

6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

7) $(p^2-16k^2):\frac{p+4k}{p}$;

8) $\frac{a^2-ab}{a^2}:\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

152.° Végezzétek el az alábbi osztásokat:

1) $\frac{5m-2n}{10k}:\frac{5m-2n}{10k^2}$;

2) $\frac{p+3}{p^2-2p}:\frac{p+3}{4p-8}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab}:\frac{a+b}{ab}$;

4) $\frac{a^2-16}{a-3}:\frac{a+4}{a-3}$;

5) $\frac{y-9}{y-8}:\frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$; 6) $(x^2-49y^2):\frac{x-7y}{x}$.

153.° Emeljétek hatványra az alábbi törteket:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$; 3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$; 5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$; 4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

154.° Adjátok meg tört alakban az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$; 2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

155.• Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3}\cdot\frac{14b^2}{a^7c^5}\cdot\frac{5a^3c^8}{18b^4}$; 4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3:\frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8}:\frac{88m^4}{51n^4}:\frac{21m^6}{16n^2}$; 5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4:\left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5}:\frac{24x^9}{25y^4}\cdot\frac{7x^2}{30y}$; 6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2\cdot\left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

156.• Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7}:\frac{5b^7}{9a^3c^3}$; 3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2}:\frac{7c^8}{6b^3}:\frac{9ab}{14c^{12}}$; 4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

157.• Helyettesítsétek az x változót olyan kifejezéssel, hogy azonosságot kapjunk:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\frac{6a}{b^2}$; 2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\frac{b^6}{12}$.

158.• Végezzétek el a törtek osztását és szorzását:

1) $\frac{4-a}{8a^3}\cdot\frac{12a^5}{a^2-16}$; 6) $\frac{x^2-9}{x+y}\cdot\frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$; 7) $\frac{m+2n}{2-3m}:\frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\frac{b^3+27}{5b-15}$; 8) $\frac{a^3+8}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\frac{12ab^2}{4a+16}$; 9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\frac{x^2-49}{4x-24}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$; 10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2}:\frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

159.• Hozzátok egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25}\cdot\frac{5-a}{a}$; 2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8}:\frac{2n+12}{6m-12}$;

7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1}:\frac{a-1}{a^3+1}$;

8) $\frac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

160.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést, majd határozzátok meg helyettesítési értékét:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a}:\frac{a-9}{a^2-64}$, ha $a=-4$;

2) $\frac{x}{4x^2-4y^2}:\frac{1}{6x+6y}$, ha $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\frac{3a-9}{4a}$, ha $a=0{,}5$; 4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, ha $a=0{,}8$.

161.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{b^2-a^2}$, ha $a=2\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\frac{3a+6b}{2a-6b}$, ha $a=4$, $b=-5$.

162.•• Határozzátok meg az $x-\frac{1}{x}=9$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x^2+\frac{1}{x^2}$.

163.•• Határozzátok meg a $3x+\frac{1}{x}=-4$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

164.•• Határozzátok meg az $x^2+\frac{16}{x^2}=41$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x+\frac{4}{x}$.

165.•• Határozzátok meg az $x^2+\frac{1}{x^2}=6$ kifejezés értékét, ha tudjuk, hogy $x-\frac{1}{x}$.

166.•• Hozzátok egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$; 2) $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

167.•• Végezzétek el az alábbi műveleteket:

1) $\frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab}\cdot\frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$; 2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b}:\frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

168.•• Bizonyítsátok be a $\frac{8a^2}{a-3b}:\frac{6a^3}{a^2-9b^2}\cdot\frac{3a}{4a+12b}=1$ azonosságot!

169.•• Bizonyítsátok be az $\frac{a^2+a}{2a-12}\cdot\frac{6a+6}{2a+12}:\frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36}=\frac{1}{6}$ azonosságot!

ISMÉTLŐ FELADATOK

170. Oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $(2x + 3)^2 - 2x(5 + 2x) = 10$;
2) $(x - 2)(x - 3) - (x - 6)(x + 1) = 12$.

171. Bizonyítsátok be, hogy a $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$ egyenletnek nincsenek gyökei!

172. Az A és a B helységek közötti távolság 192 km. Az A-ból a B-be egy motorkerékpáros indult el 60 km/h sebességgel. 30 perccel később a B-ből az A-ba egy másik motorkerékpáros indult el 75 km/h sebességgel. Mennyi ideig volt úton a második motoros a találkozásig?

173. Két kannában összesen 80 l tej van. Ha az első kannából áttöltjük a tej 20%-át a másikba, akkor a két edényben azonos mennyiségű tej lesz. Hány liter tej volt a kannákban külön-külön?

174. (*Magnyickij*[1] *Aritmetika című könyvéből.*) 12 embernél 12 kenyér van. Minden férfinál 2 kenyér, nőnél fél kenyér, gyereknél pedig negyed kenyér van. Határozzátok meg a férfiak, nők és gyerekek számát!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

175. Péter és László felváltva az $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ egyenletben a csillagokat számokra cserélik, mindig csak egyet. Az első lépést László teszi meg. Péter arra törekszik, hogy a kapott egyenletnek legyen gyöke. Megakadályozhatja-e ebben László?

6. Racionális kifejezések azonos átalakításai

A racionális törtekkel végzett műveletek segítségével bármely racionális kifejezés átalakítható racionális törtté.

Figyeljük meg példákon.

---

[1] L. F. Magnyickij (1669–1739) – orosz pedagógus, matematikus, szerzője a híres *Aritmetika* című tankönyvnek (1703), amiből számos nemzedék sajátította el a matematikát. Maga M. V. Lomonoszov is tudósi munkássága kapujának tekinti az *Aritmetika* tankönyvet.

1. PÉLDA. Egyszerűsítsétek a $\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}$ kifejezést.

Megoldás. A többműveletes számkifejezésekhez hasonlóan a racionális kifejezéseket is lehet műveletenként egyszerűsíteni. A műveletek sorrendje is megegyezik: először a zárójelben lévő kivonást végezzük el, majd az osztást és a végén a második kivonást:

1) $\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{^{a-2/}3a}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$

2) $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a\,(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)\,(a+2)}{a-4}=$

$=\frac{3a\,(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2};$

3) $\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a\,(a-2)}{a-2}=a.$

Felelet: a. ▲

A racionális kifejezést nemcsak külön műveletekre bontva végezhetjük el, hanem úgynevezett „lánc” módszerrel. A következő példa ezt a módszert szemlélteti.

2. PÉLDA. Igazoljátok, hogy a $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ kifejezés értéke nem függ a változó megengedett értékétől!

Megoldás. Egyszerűsítjük az adott kifejezést:

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6\,(3-a)}\cdot\frac{54a}{a\,(5+a)}=$$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3\,(a-3)}{a-3}=3.$$

Tehát a változó bármely megengedett értékénél a kifejezés értéke 3. ▲

3. PÉLDA. Igazoljátok a $\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}$ azonosságot.

Megoldás. Alakítsuk át a bizonyítandó azonosság bal oldalát. Célszerűbb a zárójel felbontásával kezdeni, alkalmazzuk a szorzás széttagolási törvényét:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$

$$=\frac{^{a+1/}1}{a}+\frac{3a-1}{a\,(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a\,(a+1)}=\frac{4a}{a\,(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Az azonosságot igazoltuk. ▲

4. PÉLDA. Egyszerűsítsétek az $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$ kifejezést.

Megoldás. Írjuk fel az adott kifejezést a számláló és a nevező hányadosaként:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Az adott kifejezést másképpen is egyszerűsíthetjük. Alkalmazzuk a tört alaptulajdonságát, szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is az abc egytaggal:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Felelet: $\dfrac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ▲

GYAKORLATOK

176.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

177.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

178.• Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

1) $\dfrac{a+2}{a^2-2a+1} : \dfrac{a^2-4}{3a-3} - \dfrac{3}{a-2}$;

2) $\dfrac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\dfrac{b-3}{b+3} + \dfrac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{3c+1}{3c-1} - \dfrac{3c-1}{3c+1}\right) : \dfrac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\dfrac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \dfrac{1}{4b^2-a^2}\right) : \dfrac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\dfrac{a-8}{a^2-10a+25} - \dfrac{a}{a^2-25}\right) : \dfrac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+6x+9} - \dfrac{x-2}{x^2+3x}\right) : \dfrac{x^2+6}{x^3-9x}$.

179.• Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

1) $\dfrac{b+4}{b^2-6b+9} : \dfrac{b^2-16}{2b-6} - \dfrac{2}{b-4}$;

2) $\left(\dfrac{m-1}{m+1} - \dfrac{m+1}{m-1}\right) : \dfrac{4m}{m^2-1}$;

3) $\dfrac{2x}{x^2-y^2} : \left(\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2} - \dfrac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\dfrac{2a-3}{a^2-4a+4} - \dfrac{a-1}{a^2-2a}\right) : \dfrac{a^2-2}{a^3-4a}$.

180.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(\dfrac{15}{x-7} - x - 7\right) \cdot \dfrac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a - \dfrac{5a-16}{a-3}\right) : \left(2a - \dfrac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{a}{b^2}\right) \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2} + \dfrac{2}{b-a}$;

4) $\left(\dfrac{a}{a-1} - \dfrac{a}{a+1} - \dfrac{a^2+1}{1-a^2}\right) : \dfrac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\dfrac{x+2y}{x-2y} - \dfrac{x-2y}{x+2y} - \dfrac{16y^2}{x^2-4y^2}\right) : \dfrac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\dfrac{3a-8}{a^2-2a+4} + \dfrac{1}{a+2} - \dfrac{4a-28}{a^3+8}\right) \cdot \dfrac{a^2-4}{4}$.

181.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{x^2+14x+49}{x+6} : \left(\dfrac{13}{x+6} - x + 6\right)$;

2) $\left(c - \dfrac{2c-9}{c+8}\right) : \dfrac{c^2+3c}{c^2-64} + \dfrac{24}{c}$;

3) $\left(\dfrac{36}{x^2-9} - \dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{3+x}{3-x}\right) : \dfrac{6}{3-x}$;

4) $\left(\dfrac{2y-1}{y^2+2y+4} + \dfrac{9y+6}{y^3-8} + \dfrac{1}{y-2}\right) \cdot \dfrac{y^2-4}{18}$.

182.• Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

1) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{2b-2a}\right) : \dfrac{2b}{a^2-b^2} = \dfrac{a-b}{4}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{4-a^2} - \dfrac{a-2}{a+2}\right) : \dfrac{a+2}{a} + \dfrac{2}{a-2} = -1$;

3) $\left(\frac{3}{36-c^2}+\frac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\frac{(c-6)^2}{2}+\frac{3c}{c+6}=2.$

183.• Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{a}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{4}{a+b};$

2) $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}=3.$

184.• Függ-e az alábbi kifejezés értéke a változó megengedett értékétől?

1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a};$

2) $\left(\frac{a}{a^2-49}-\frac{1}{a+7}\right):\frac{7a}{a^2+14a+49}-\frac{2}{a-7}.$

185.• Igazoljátok, hogy a kifejezés értéke nem függ a változó értékétől:

1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\frac{6x+1}{x-3}+\frac{6x-1}{x+3}\right);$

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right).$

186.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}};$ 2) $\dfrac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}};$ 3) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}};$ 4) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\frac{b}{a}}{\frac{3a}{b}-1}.$

187.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}};$ 2) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a+1}}}.$

188.•• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\left(\frac{a^2}{b^3-ab^2}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{a+b}{b-a}-\frac{b-a}{a+b}+\frac{6a^2}{a^2-b^2}\right);$

2) $\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2-\frac{8a-1}{2a^2+a}.$

189.•• Egyszerűsítsétek a $\left(\frac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\frac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\frac{3y-1}{y}-\frac{5-6y}{3y-1}\right)$ kifejezést!

190.•• Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

1) $\frac{16}{(a-2)^4}:\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)-\frac{8a}{(a-2)^2}=1;$

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1.$

191.•• Igazoljátok, hogy a $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ kifejezés a változó bármely értékénél pozitív!

192.•• Helyettesítsétek az x változó értékét az adott kifejezésbe, majd egyszerűsítsétek az így kapott kifejezéseket:

1) $\dfrac{x-a}{x-b}$, ha $x=\dfrac{ab}{a+b}$; 2) $\dfrac{a-bx}{b+ax}$, ha $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

ISMÉTLŐ FELADATOK

193. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $(3x-1)(4x+5)-(2x+3)(6x+1)=4$;

2) $8x(2x+7)-(4x+3)^2=15$.

194. Bizonyítsátok be, hogy a $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ kifejezés maradék nélkül osztható 11-gyel!

195. Bizonyítsátok be, hogy n bármely természetes értékénél a $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ kifejezés osztható 10-zel!

196. Az egyik raktárban 3-szor annyi burgonyát tároltak, mint a másikban. Miután az első raktárból elszállítottak 400 kg-ot, 2-szer kevesebb burgonya maradt, mint a másik raktárban. Mennyi burgonyát tároltak az első raktárban?

197. A dzseki 200 hrivnyával olcsóbb volt az öltönynél. Az őszi árleszállításkor a dzseki 10%-kal, az öltöny 20%-kal került kevesebbe. Így a dzsekit és az öltönyt együtt 1010 hrivnyáért lehetett megvásárolni. Mennyibe került a dzseki és az öltöny eredetileg?

198. Egy személygépkocsi az A helység és a B helység közötti utat 60 km/h sebességgel tette meg. Visszafelé másik útvonalat választott, mely 15 km-rel rövidebb volt, és mivel 70 km/órás sebességgel haladt, így 30 perccel rövidebb idő alatt ért vissza az A helységbe. Mennyi idő alatt ért el az A helységből a B helységbe?

199. Egy munkásnak napi 10 alkatrészt kellett legyártania. Mivel minden nap 12 alkatrészt készített el, így két nappal a határidő letelte előtt már csak 6 alkatrész legyártása maradt a számára. Mennyi alkatrészt kellett elkészítenie?

200. (*Ukrán népi feladat.*) 30 pénzérméért 30 madarat vásároltak. Hány madarat vettek a különböző fajtákból, ha 3 veréb ára 1 érme volt, 2 galambért is 1 érmét kellett fizetni és egy pacsirta 2 érmébe került? Minden madárfajból legalább egyet vettek.

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

201. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{2x+7}{4}=\frac{x+5}{3}$;
2) $x^2 + 6x = 0$;
3) $0{,}21x - 0{,}7x = 0$;
4) $x^2 - 16 = 0$;
5) $25x^2 - 36 = 0$;
6) $x^2 + 4 = 0$.

202. A változó mely értékeinél nincs értelmezve az alábbi kifejezés?

1) $\frac{6}{3x-9}$;
2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$;
3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$;
4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$;
5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;
6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$.

203. Az alábbi kifejezések értéke a változó mely értékénél lesz nulla?

1) $\frac{x-8}{9}$;
2) $\frac{x-2}{x+2}$;
3) $\frac{4}{x-5}$.

Frissítsétek fel a 14., 15. pontokban tanultakat (220. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

204. A táblára az $x + 2$ és $2x + 1$ többtagú kifejezéseket írták fel. Felírható-e ezen többtagok összege, különbsége és szorzata. Lehetséges-e, hogy a táblán megjelenjen a $2x^3 + x + 5$ többtagú kifejezés?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 2. SZ. TESZTFELADAT

1. Adjátok meg a $\frac{12m^4}{n^{10}}\cdot\frac{n^5}{36m^8}$ szorzatot tört alakban!

A) $\frac{1}{3m^2n^2}$; B) $\frac{1}{3m^4n^5}$; C) $\frac{3}{m^2n^2}$; D) $\frac{3}{m^4n^5}$.

2. Végezzétek el az $(a+5b)\cdot\frac{8}{a^2-25b^2}$ szorzást!

A) $8(a - 5b)$; B) $8(a + 5b)$; C) $\frac{8}{a+5b}$; D) $\frac{8}{a-5b}$.

3. Egyszerűsítsétek a $\frac{b^2-6b+9}{b-7}\cdot\frac{b-7}{b-3}$ kifejezést!

A) $b + 3$; B) $b - 3$; C) $\frac{1}{b-3}$; D) $\frac{1}{b+3}$.

4. Végezzétek el a kijelölt osztást: $\frac{5a^6}{b^8}:(10a^3b^2)$!

A) $\frac{2a^9}{b^6}$; B) $\frac{b^6}{2a^9}$; C) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; D) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

5. Egyszerűsítsétek a $\frac{3x+9}{x^2-2x}:\frac{x+3}{4x-8}$ kifejezést!

A) $\frac{12}{x}$; B) $\frac{x}{12}$; C) 12; D) x.

6. Adjátok meg az $\frac{n^2-3n}{64n^2-1}:\frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$. kifejezést tört alakban!

A) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; C) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

B) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; D) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

7. Végezzétek el a $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$ hatványra emelést!

A) $\frac{8a^8}{b^{12}}$; B) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$; C) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; D) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

8. Egyszerűsítsétek a $\left(\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a+6}\right):\frac{2}{a+6}$ kifejezést!

A) $\frac{6}{a+6}$; B) $\frac{6}{a-6}$; C) 6 (a – 6); D) 6 (a + 6).

9. Az a bármely megengedett értékére mennyi a $\left(\frac{30a}{9a^2-25}+\frac{5}{5-3a}\right):$ $:\left(\frac{3a-5}{3a+5}-1\right)$ kifejezés értéke?

A) $\frac{1}{2}$; B) 2; C) $-\frac{1}{2}$; D) –2.

10. Mivel egyenlő az $\frac{a^2-4ab}{b^2}$ kifejezés értéke, ha $3a - 5b = 0{,}2\ (2a + b)$?

A) 4; B) –4; C) 3; D) –3.

11. Ismeretes, hogy $x+\frac{1}{x}=6$. Határozzátok meg az $x^2+\frac{1}{x^2}$ kifejezés értékét!

A) 36; B) 38; C) 34; D) 35.

12. Egyszerűsítsétek az $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$ kifejezést!

A) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; B) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; C) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$; D) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

7. Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek

Figyeljük meg az $x^2 = 4$ és $|x| = 2$ egyenleteket!

Könnyen beláthatjuk, hogy mind a két egyenletnek ugyanazok a gyökei, a 2 és a –2.

Ezekben az esetekben azt mondjuk, hogy az $x^2 = 4$ és $|x| = 2$ egyenletek **ekvivalensek (egyenértékűek).**

Nézzünk még néhány példát ekvivalens egyenletekre:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ és } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ és } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ és } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Vegyük észre, hogy az $x^2 = -5$ és $|x| = -3$ egyenleteknek nincs megoldásuk. Ezeket az egyenleteket is egyenértékűeknek tekintjük.

Meghatározás. Két egyenlet ekvivalens, ha gyökeik azonosak, vagy ha nincs megoldásuk.

A 2 az $(x - 2)(x + 1) = 0$ és $x - 2= 0$ egyenletnek is gyöke. Ezek az egyenletek mégse ekvivalensek, mert az első egyenletnek még gyöke a –1 is, míg ez az érték nem megoldása a második egyenletnek.

A 7. osztályban tanultátok már az egyváltozós (egyismeretlenes) egyenletek tulajdonságait. Ezeket a tulajdonságokat az ekvivalens egyenletek fogalmával így is meghatározhatjuk:

- ***Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.***
- ***Ha az egyik tagot ellenkező előjellel átvisszük az egyenlet egyik oldaláról a másikra, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.***
- ***Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.***

Figyeljük meg a következő feladatot: Egy személygépkocsi miután megtett 180 km-t, a sebességét 10 km/h-val növelte. Így a maradék 210 km-es utat ugyanannyi idő alatt tette meg, mint az út első részét. Határozzátok meg a személygépkocsi kezdeti sebességét!

Jelöljük x km/h-val a személygépkocsi kezdeti sebességét, akkor az út második részén a sebessége $(x + 10)$ km/h. Az első részt $\frac{180}{x}$ óra alatt tette meg, a második részt pedig $\frac{210}{x+10}$ óra alatt.

A $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$ egyenlet az adott feladat matematikai modellje. Az egyenlet mindkét oldala racionális kifejezés.

Meghatározás. Azokat az egyenleteket, melyek mindkét oldala racionális kifejezés, racionális egyenleteknek nevezzük.

Az előző meghatározás alapján a feladat megoldása egy racionális egyenlet megoldásához vezet.

Megjegyezzük, hogy az egyismeretlenes lineáris egyenlet, vagyis az $ax = b$ alakú egyenlet is racionális egyenlet.

Vizsgáljuk meg az $\frac{A}{B}=0$ alakú racionális egyenletet, ahol A és B többtagú kifejezés.

Már tudjátok, hogy *a tört értéke csak akkor nulla, ha számlálója nullával egyenlő, a nevezője viszont nem.* Tehát ahhoz, hogy megoldjuk az $\frac{A}{B}=0$ alakú egyenletet, egyszerre két feltételnek kell teljesülnie: $A = 0$ és $B \neq 0$. Ez azt jelenti, ahhoz hogy megoldjunk egy $\frac{A}{B}=0$ alakú egyenletet, az alábbi algoritmust kell követni:

- megoldjuk az $A = 0$ egyenletet;
- leellenőrizzük, hogy a kapott gyökök megfelelnek-e a $B \neq 0$ kitételnek;
- a megoldásban csak azokat az értékeket tüntetjük fel, melyek kielégítették a $B \neq 0$ feltételt is.

1. PÉLDA. Oldjuk meg az $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ egyenletet.

Megoldás. A bal oldalon lévő tört számlálóját a nullához egyenlítjük: $(x - 1)(x + 1) = 0$. Ennek az egyenletnek két gyöke van: az 1 és a –1.

Ellenőrizzük le, hogy a kapott értékek megfelelnek-e az $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ feltételnek.

Ha $x = -1$, akkor $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$.

Ha $x = 1$, akkor $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Tehát az $x = -1$ megoldása az egyenletnek, míg az $x = 1$ nem.

Felelet: –1. ▲

Tehát az $\frac{A}{B}=0$ alakú egyenletek megoldását visszavezetjük az $A = 0$ egyenlet megoldására és a $B \neq 0$ feltétel leellenőrzésére. Ebben az esetben úgy is szoktak fogalmazni, hogy $\frac{A}{B}=0$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{cases} A=0, \\ B\neq 0 \end{cases}$$

rendszerrel.

Például az $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{cases}(x-1)(x+1)=0,\\ x^2-4x+3\neq 0\end{cases}$$

rendszerrel.

Mint ahogy már láttátok, ennek a rendszernek az $x=-1$ a megoldása.

Térjünk vissza az eredeti, a személygépkocsiról szóló feladatunk megoldásához.

Rendezzük a $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$ egyenletet.

Végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$\frac{180}{x}-\frac{210}{x+10}=0.$

Hozzuk közös nevezőre a törteket:

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)}=0;$$

$$\frac{1800-30x}{x(x+10)}=0.$$

Az utolsó egyenlet egyenértékű az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases}1800-30x=0,\\ x(x+10)\neq 0.\end{cases}$$

Az egyenlet megoldása 60. Könnyen belátható, hogy ez az érték kielégíti az $x(x+10)\neq 0$ feltételt.

Felelet: 60 km/h.

Ismeretes, hogy bármely racionális kifejezés felírható tört alakban, ezért bármilyen racionális egyenlet is megadható $\frac{A}{B}=0$ alakban. Ezt alkalmaztuk a $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$ egyenlet megoldásánál is.

2. PÉLDA. Oldjuk meg a $\frac{3x+5}{6x+3}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x-1}$ egyenletet.

Megoldás. Rendezzük az egyenletet:

$$\frac{3x+5}{3(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{x}{2x-1}=0.$$

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)}=0.$$

A kapott egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel: $\begin{cases}4x-2=0,\\ 3(2x-1)(2x+1)\neq 0.\end{cases}$

A kapott egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel: $\begin{cases}4x-2=0,\\ x\neq 0{,}5,\\ x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Innen $\begin{cases} x=0{,}5, \\ x\neq 0{,}5, \\ x\neq -0{,}5. \end{cases}$

Tehát az adott egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: nincs megoldás. ▲

3. PÉLDA. Oldjuk meg a $\dfrac{2x^2-4x-16}{x-4}-x=0$ egyenletet.

Megoldás. Hozzuk közös nevezőre a bal oldalt:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4}=0;$$

$$\frac{x^2-16}{x-4}=0.$$

A kapott egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} x^2-16=0, \\ x-4\neq 0. \end{cases}$$

Tehát

$$\begin{cases} x=4 \quad \text{vagy} \quad x=-4, \\ x\neq 4; \end{cases}$$

$$x=-4.$$

Felelet: –4. ▲

Most nézzünk egy olyan feladatot, ahol egy valós helyzet matematikai modellje egy racionális egyenlet.

4. PÉLDA. Egy turista csónakkal a folyón lefelé 3 km-t tett meg, felfelé pedig 2 km-t, összesen 30 perc alatt. Határozzuk meg a csónak sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 2 km/h!

Megoldás. Jelöljük a csónak sebességét állóvízben x km/h-val. Akkor a csónak sebessége a vízfolyás irányában $(x + 2)$ km/h, a vízfolyással szemben pedig $(x – 2)$ km/h. A turista 3 km-t tett meg a folyón lefelé $\dfrac{3}{x+2}$ óra alatt, felfelé pedig 2 km-t $\dfrac{2}{x-2}$ óra alatt. Mivel az egész utat 30 perc = $\dfrac{1}{2}$ óra alatt tette meg, ezért $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{2}$.

Oldjuk meg a kapott egyenletet:

$$\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{3x-6+2x+4}{x^2-4}-\frac{1}{2}=0;$$

$$\frac{10x-4-x^2+4}{2\,(x^2-4)}=0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ vagy } x = 10.$$

Az $x = 0$ nem felel meg a feladat feltételeinek, ezért a csónak sebessége állóvízben 10 km/h.

Felelet: 10 km/h. ▲

?

1. Mely egyenletek ekvivalenseknek?
2. Az adott egyenlet mely átalakításaival kaphatunk az adottal ekvivalens egyenletet?
3. Mely egyenletek racionálisak?
4. Mondd ki, mely feltételnél nulla egy tört értéke!
5. Mondjátok el az $\frac{A}{B} = 0$ alakú egyenlet, ahol *A* és *B* többtagú kifejezés, megoldásának algoritmusát!

GYAKORLATOK

205.° Ekvivalensek-e az alábbi egyenletek?

1) $x + 2 = 10$ és $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ és $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ és $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ és $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ és $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ és $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$.

206.° Adjátok meg az alábbi egyenletekkel egyenértékű egyenletet:

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

207.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{x - 6}{x - 4} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$;
2) $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = 0$;
4) $\frac{x - 2}{x - 2} = 1$;

5) $\dfrac{2x^2+18}{x^2+9}=2;$

6) $\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{2x-9}{x-5}=0;$

7) $\dfrac{5x-7}{x+1}-\dfrac{x-5}{x+1}=0;$

8) $\dfrac{2x+16}{x+3}-\dfrac{1-3x}{x+3}=0;$

9) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=0;$

10) $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{4}{x+3};$

11) $\dfrac{x}{x-6}=2;$

12) $\dfrac{x-4}{x-3}=\dfrac{2x+1}{2x-1};$

13) $\dfrac{x+8}{x}-\dfrac{6}{x-2}=0;$

14) $\dfrac{2x}{x-5}-\dfrac{x^2+15x}{x^2-25}=0;$

15) $3-\dfrac{2x^2-5x}{x^2-3x}=0.$

208.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0;$

2) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0;$

3) $\dfrac{x+7}{x-7}-\dfrac{2x-3}{x-7}=0;$

4) $\dfrac{10-3x}{x+8}+\dfrac{5x+6}{x+8}=0;$

5) $\dfrac{x-6}{x-2}-\dfrac{x-8}{x}=0;$

6) $\dfrac{2x-4}{x}-\dfrac{3x+1}{x}+\dfrac{x+5}{x}=0;$

7) $\dfrac{x}{x+6}-\dfrac{36}{x^2+6x}=0;$

8) $\dfrac{2x^2+3x+1}{2x+1}-x=1;$

9) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}=1.$

209.° Melyik számot kell kivonni a $\dfrac{15}{19}$ tört számlálójából és nevezőjéből is, hogy a kapott tört értéke $\dfrac{2}{3}$ legyen?

210.° Melyik számot kell hozzáadni a $\dfrac{25}{32}$ tört számlálójához és nevezőjéhez is, hogy a kapott tört értéke $\dfrac{5}{6}$ legyen?

211.• Adjatok meg olyan ekvivalens egyenlet-párokat, melyeknek:

1) egy gyökük van;
2) két gyökük van;
3) végtelen sok megoldásuk van;
4) nincs megoldásuk!

212.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\dfrac{5}{x^2-4}+\dfrac{2x}{x+2}=2;$

2) $\dfrac{2}{6x+1}+\dfrac{3}{6x-1}=\dfrac{30x+9}{36x^2-1};$

3) $\dfrac{6x+14}{x^2-9}+\dfrac{7}{x^2+3x}=\dfrac{6}{x-3};$

4) $\dfrac{2y^2+5}{1-y^2}+\dfrac{y+1}{y-1}=\dfrac{4}{y+1};$

5) $\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{2x+1}{2x-1}+\dfrac{4}{1-4x^2};$

6) $\dfrac{7}{(x+2)(x-3)}-\dfrac{4}{(x-3)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2};$

7) $\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}=\dfrac{6x+64}{x^2-16}+4;$

8) $\dfrac{2x-6}{x^2-36}-\dfrac{x-3}{x^2-6x}-\dfrac{x-1}{x^2+6x}=0.$

213.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\dfrac{x-2}{x+1}-\dfrac{5}{1-x}=\dfrac{x^2+27}{x^2-1};$

2) $\dfrac{3x+1}{3x-1}-\dfrac{3x-1}{3x+1}=\dfrac{6}{1-9x^2};$

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}$;

4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$;

5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4}$;

6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}$.

214.• Egy motorcsónak 8 km-es utat tett meg a folyón lefelé, majd megállás nélkül visszafordult. Az egész utat 54 perc alatt tette meg. Határozzátok meg a folyó sebességét, ha a csónak sebessége állóvízben 18 km/h!

215.• Egy gőzös 28 km-t tett meg a folyón a vízfolyással szemben, majd megállás nélkül visszafordult. Visszafelé az út 4 perccel rövidebb ideig tartott. Határozzátok meg a gőzös sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 1 km/h!

216.• Egy csónak 2 óra alatt 6 km-t tett meg a vízfolyással szemben és 12 km-t a vízfolyás irányába. Határozzátok meg a csónak sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 3 km/h!

217.•• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{2x^2-12x+18}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

218.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

219.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket! Vegyétek figyelembe az a paraméter lehetséges értékeit!

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x+5}=0$;

3) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

220.* Az a mely értékei mellett nincs az $\frac{x+a}{x^2-4}=0$ egyenletnek gyöke?

221.* Az a mely értékei mellett van egy gyöke az $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ egyenletnek?

ISMÉTLŐ FELADATOK

222. Év végére egy város lakossága 72 100 lett. Mennyi volt a lakosság év elején, ha 3%-os volt a népességnövekedés?

223. Két állomás között az utat egy vonat 45 perc alatt teszi meg. Ha a vonat növelné sebességét 10 km/h-val, akkor 40 perc is elég lenne, hogy megtegye a két állomás közötti utat. Milyen messze van a két állomás egymástól?

224. Igazoljátok, hogy a változó bármely értékével az alábbi kifejezések csak nemnegatív értéket vesznek fel:
1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

225. Határozzátok meg az $f(x)=3x-7$ függvény helyettesítési értékét, ha 1) $x=-3$;
2) $x=2\frac{1}{3}$! Az argumentum mely értékénél lesz a függvény értéke 0,2?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

226. Számítsátok ki a következő kifejezések értékét:
1) 4^3+3^4; 3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;
2) $(-8)^2-(-1)^{12}$; 4) $(2{,}8-3{,}1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

227. Számítások nélkül hasonlítsátok össze az alábbi kifejezéseket:
1) $(-5{,}7)^2$ és 0; 2) 0 és $(-6{,}9)^3$; 3) $(-23)^5$ és $(-2)^4$; 4) -8^8 és $(-8)^8$.

228. Adjátok meg:
1) a 4; 8; 16; 32; 64 2-es alapú hatvány alakját;
2) a 100, 1000, 10 000, 1 000 000 10-es alapú hatvány alakját!

229. Számítsátok ki:
1) a $18a^2$ kifejezés értékét, ha $a=-\frac{1}{6}$;
2) a $(18a)^2$ kifejezés értékét, ha $a=-\frac{1}{6}$;
3) a $16+b^4$ kifejezés értékét, ha $b=-2$;
4) a $(16+b)^4$ kifejezés értékét, ha $b=-2$!

Frissítsétek fel a 3. pontban tanultakat (216. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

230. Létezik-e olyan természetes szám, amelyet ha 2-vel szorzunk, a természetes szám négyzetét, ha hárommal, akkor a természetes szám köbét kapjuk?

8. Negatív egész kitevőjű hatvány

Gyakran a nagy számok felírása helyett egy rövidebb alakot használnak, a természetes kitevőjű hatványt. Például

$$129\,140\,163 = 3^{17},$$
$$282\,475\,249 = 7^{10}.$$

A tudományban és a gyakorlatban a nagy számok felírására a 10 különböző hatványait alkalmazzák.

Például a Föld és a Sarkcsillag között a távolság megközelítőleg 4 470 000 000 000 000 km vagy $4{,}47 \cdot 10^{15}$ km. A Nap tömege 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg vagy $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Ezeket az adatokat a makrovilágból vettük, vagyis a nagyon nagy fizikai mennyiségek világából.

Lássunk néhány példát a mikrovilágból, vagyis a nagyon kis fizikai mennyiségek világából.

A hidrogénatom tömege

0,000000000000000000000000001661 kg.

Az oxigénatom átmérője 0,0000000066 cm.

Ezeket a mennyiségeket is fel lehet írni10 hatványai segítségével.

$$0{,}000000000000000000000000001661\ \text{kg} = \frac{1{,}661}{10^{27}}\ \text{kg},$$

$$0{,}0000000066\ \text{cm} = \frac{6{,}6}{10^{9}}\ \text{cm}.$$

Ha elfogadjuk az $\frac{1}{10^{27}}$ és az $\frac{1}{10^{9}}$ törtek jelölésére a 10^{-27} és 10^{-9} jelölést, akkor az adott mennyiségeket úgynevezett *egyszintes* alakban is felírhatjuk: $\frac{1{,}661}{10^{27}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}$, $\frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Hasonlóképpen elfogadhatjuk, hogy $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Meghatározás. Bármely, nullától különböző *a* számra és természetes *n*-re

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

A meghatározás értelmében $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

Tehát bármely szám bármilyen nullától különböző egész hatványára emelhető. Jegyezzük meg ezt a következtetést!

Meghatározás. Bármely, nullától különböző *a* szám nulladik hatványa 1-gyel egyenlő: $a^0 = 1$.

Például $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

A 0^n *hatványa nem értelmezhető, ha n nulla vagy negatív egész szám.*

A felsorolt meghatározások alapján, bármely $a \neq 0$ és egész n-re a^n és a^{-n} reciprok értékű számok. Ezért az

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

egyenlőség bármely egész n-re teljesül.

Például, ha $n = 2$, akkor $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

A tudományos irodalomban az alábbi adatokkal találkozhatsz:

„A Vénusz bolygó tömege $4{,}9 \cdot 10^{24}$ kg. A Mars tömege $6{,}423 \cdot 10^{23}$ kg. A Hold felszíne $3{,}8 \cdot 10^7$ km^2."

A szövegben szereplő adatok úgynevezett **normálalakban** vannak megadva.

Meghatározás. **Egy** **szám normálalakjának** **nevezzük az $a \cdot 10^n$ szorzatot, ahol $1 \leqslant a < 10$ és n természetes szám.**

A szám normálalakjában az n számot, a 10 hatványkitevőjét **nagyságrendnek (karakterisztikának)** nevezzük. Például a Nap kg-ban kifejezett tömegének karakterisztikája 30, a hidrogénatom kg-ban kifejezett tömegének pedig –27.

Bármely pozitív számot megadhatunk normálalakban. Például: $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. A gyakorlatban a szám normálalakját igen kis és igen nagy számokra használják. Ebben az esetben a karakterisztika utal a szám nagyságára. Ha az m szám nagyságrendje egyenlő 3-mal, azaz $m = a \cdot 10^3$, akkor figyelembe véve, hogy $1 \leqslant a < 10$, azt kapjuk, hogy $10^3 \leqslant m < 10^4$.

1. PÉLDA. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Megoldás. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

Általánosan, **ha $a \neq 0 =$ és $b \neq 0$, akkor** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ▲

2. PÉLDA. Adjátok meg az $(a-b)^{-2}\cdot(a^{-2}-b^{-2})$ kifejezést tört alakban.

Megoldás. $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}=\frac{b+a}{a^2b^3-a^3b^2}.$$ ▲

3. PÉLDA. Írjuk fel a következő számok normálalakját:

1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Megoldás. 1) $564\,000\,000=5{,}64\cdot100\,000\,000 = 5{,}64\cdot10^8.$

2) $0{,}0036=3{,}6\cdot0{,}001=3{,}6\cdot\frac{1}{1000}=3{,}6\cdot\frac{1}{10^3}=3{,}6\cdot10^{-3}.$ ▲

?

1. Mivel egyenlő bármely nullával nem egyenlő a-ra és természetes n-re az a^{-n} kifejezés?
2. Mivel egyenlő egy nullától különböző szám nulladik hatványa?
3. Mi a szám normálalakja?
4. Hogyan nevezzük az n számot egy szám $a\cdot10^n$ normálalakjában?

GYAKORLATOK

231.° Az alábbi kifejezések közül melyikkel egyenlő az a^{-6} hatvány?

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$.

232.° Adjátok meg az alábbi hatványokat tört alakban:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

233.° Helyettesítsd a következő hatványokat törttel:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

234.° Írjátok fel a törtet egész negatív kitevőjű hatvány alakjában vagy hatványok szorzataként:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

235.° Írjátok fel a törtet egész negatív kitevőjű hatvány alakjában vagy hatványok szorzataként:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

236.° Írjátok fel az 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$-et olyan hatványalakban, melynek az alapja 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

237.° Adjátok meg az alábbi törteket olyan hatványként, melynek az alapja egyjegyű szám:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

238.° Írjátok fel az alábbi számokat 10-es alapú hatványként:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

239.° Írjátok fel az 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$-et olyan hatványként, melynek az alapja 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

240.° Számítsátok ki:

1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

241.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) 20^{-2}; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

242.° Számítsátok ki az alábbi kifejezések értékét:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

243.° Mennyi a következő kifejezések értéke?

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^0 + 0{,}7^0$;

2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$.

244.° Az alábbi szorzatok közül melyik egy szám normálalakja?

1) $12 \cdot 10^4$; 2) $1{,}2 \cdot 10^4$; 3) $0{,}12 \cdot 10^4$.

245.° Írjátok le a következő számok normálalakját, nevezzétek meg a karakterisztikáját:

1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86 \cdot 10^3$;

2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23 \cdot 10^4$;

3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^2$; 9) $9300 \cdot 10^5$.

246.° Az alábbi adatokat írjátok le normálalakban:
1) vákuumban a fény sebessége 300 000 km/s;
2) Ukrajna legmagasabb csúcsa, a Hoverla 2061 m;
3) Ukrajna területe 603 700 km^2;
4) a Föld és a Nap átlagos távolsága 149,6 millió km;
5) 100 km magasságban a légnyomás 0,032 Pa;
6) egy vízmolekula átmérője 0,00000028 mm!

247.° Írjátok le a következő számok normálalakját, nevezzétek meg a karakterisztikáját:
1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0{,}059 \cdot 10^8$;
2) 260; 4) 0,032; 6) $526 \cdot 10^4$.

248.° Adjátok meg az alábbi normálalakú számok természetes számalakját vagy tizedes tört alakját:
1) $1{,}6 \cdot 10^3$; 2) $5{,}7 \cdot 10^6$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$!

249.° Adjátok meg az alábbi normálalakú számok természetes számalakját vagy tizedes tört alakját:
1) $2{,}4 \cdot 10^2$; 2) $4{,}8 \cdot 10^5$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$!

250.• Igazoljátok, hogy $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$!

251.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1{,}5)^{-3}$;

2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

252.• Rendezzétek a következő számokat csökkenő sorrendbe:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}, \left(\frac{1}{2}\right)^{0}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) $4^{-1}, 4^3, 4^0, 4^{-2}$.

253.• Rendezzétek a következő számokat növekvő sorrendbe:

1) $7^{-2}, 7^2, 7^{-1}, 7^0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{0}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

254.• Hasonlítsátok össze a következő kifejezések értékét:
1) 12^0 és $(-6)^0$; 4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ és 21^{-1};
2) $0{,}2^3$ és $0{,}2^{-3}$; 5) $5^{-1} - 7^{-1}$ és 2^{-1};
3) 4^6 és $0{,}25^{-6}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ és $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

255.• Hasonlítsátok össze a következő kifejezések értékét:

1) 3^{-2} és $(-3)^0$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ és $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

2) $3^{-1} + 2^{-1}$ és 5^{-1};

256.• Adjátok meg törtalakban a következő kifejezéseket:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
3) $m^2n^2\,(m^{-3} - n^{-3})$;
4) $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;
6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

257.• Írjátok fel az alábbi kifejezések törtalakját:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$!

258.• Egy természetes szám karakterisztikája 4. Hány számjegy van e szám tízes alapú számrendszerben felírt alakjában?

259.• Egy természetes szám hét számjegyből áll. Mennyi e szám normálalakban felírt karakterisztikája?

260.• Melyik szám nagyobb?

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ vagy $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ vagy $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^{6}$ vagy $0{,}23 \cdot 10^{7}$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ vagy $0{,}072 \cdot 10^{-7}$.

261.• Melyik szám kisebb?

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ vagy $6{,}15 \cdot 10^{18}$;
2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ vagy $0{,}9 \cdot 10^{-8}$.

262.• A táblázat a Nap és a Naprendszer bolygói közötti távolságokat tartalmazza.

A bolygó neve	Távolság, km
Vénusz	$1{,}082 \cdot 10^8$
Föld	$1{,}495 \cdot 10^8$
Mars	$2{,}280 \cdot 10^8$
Merkúr	$5{,}790 \cdot 10^7$
Neptunusz	$4{,}497 \cdot 10^9$
Szaturnusz	$1{,}427 \cdot 10^9$
Uránusz	$2{,}871 \cdot 10^9$
Jupiter	$7{,}781 \cdot 10^8$

1) Melyik bolygó van a legközelebb, illetve a legmesszebb a Naptól?
2) A Szaturnusz vagy a Mars van messzebb a Naptól?
3) Készítsetek olyan táblázatot, ahol a bal oszlopban a bolygók nevét tüntetitek fel a Naptól mért távolságuk növekvő sorrendjében, a jobb oszlopban pedig a távolságot millió km-ben!

263.• Az alábbi táblázat néhány kémia elem atomtömegét tartalmazza.

Kémiai elem	Atomtömeg, kg	Kémiai elem	Atomtömeg, kg
Nitrogén	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Arany	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Alumínium	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Réz	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Hidrogén	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	Nátrium	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Hélium	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Ón	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Vas	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Urán	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

1) A táblázatban feltüntetett kémiai elemek közül melyik atomtömege a legkisebb; legnagyobb?
2) A nátrium vagy a réz atomtömege több?
3) Készíts táblázatot, melyben a kémiai elemeket atomtömegük csökkenésében tünteted fel!

264.• A következő táblázat a Föld ásványkincs-készleteit tartalmazza.

Anyagnév	**Készlet, t**	**Anyag-név**	**Készlet, t**
Alumínium	$1{,}1 \cdot 10^{9}$	Nikkel	$6{,}8 \cdot 10^{7}$
Volfram	$1{,}3 \cdot 10^{6}$	Ón	$4{,}76 \cdot 10^{6}$
Vas	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Higany	$1{,}15 \cdot 10^{5}$
Arany	$1{,}1 \cdot 10^{4}$	Foszfát	$1{,}98 \cdot 10^{10}$
Mangán	$6{,}35 \cdot 10^{8}$	Króm	$4{,}4 \cdot 10^{9}$
Réz	$2{,}8 \cdot 10^{9}$	Cink	$1{,}12 \cdot 10^{8}$

1) Melyik ásványi anyagból legtöbb; legkevesebb a Föld tartaléka?
2) Nikkelből vagy cinkből van több a Földön?
3) Készítsetek táblázatot az ásványkincs-készlet csökkenése szerint!

ISMÉTLŐ FELADATOK

265. Egy vastömb tömege 16 kg. Legalább hány darab ilyen vastömbre van szükség 41 db 12 kg-os alkatrész legyártásához?

266. Egy városnak jelenleg 88 200 polgára van. Hány lakosa volt ennek a városnak 2 évvel ezelőtt, ha lakossága évente 5%-kal gyarapodott?

267. Dénes otthonról a sportpályára gyalog szokott járni, 4 km/h-s sebességgel. Ha kerékpárral megy, akkor 20 perccel hamarabb ér oda. Milyen messze van Dénes házától a pálya, ha sebessége kerékpárral 12 km/h?

268. Egyszerűsítsétek a

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2} \text{ kifejezést!}$$

269. Igaz-e, hogy bármely természetes n-re az $(5n + 6{,}5)^2 - (2n + 0{,}5)^2$ kifejezés 42 többszöröse?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

270. Adjátok meg az alábbi kifejezéseket a alapú hatvány alakjában:

1) $a^7 \cdot a^5$;
2) $a^7 : a^5$;
3) $(a^7)^5$;
4) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

271. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$;
2) $(-2m^7n^2)^4$;
3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

272. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\dfrac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$;
2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$.

Frissítsétek fel a 4. pont tartalmát (217. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

273. Egy épületben csak olyan házaspárok laknak, akiknek kiskorú gyermekeik vannak. Minden fiúnak van leánytestvére és a fiúk többen vannak. Lakhat-e ebben a házban több felnőtt, mint gyerek?

9. Az egész kitevőjű hatvány tulajdonságai

A 7. osztályban már tanultátok a valós számok természetes kitevőjű hatványainak tulajdonságait. Ezek a tulajdonságok érvényesek az egész kitevőjű hatványokra is.

9.1. tétel. ***Bármely tetszőleges $a \neq 0$ valós számra és bármely egész n és m számra a következő egyenlőségek azonosságok:***

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{1}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{2}$$

9.2. tétel. ***Bármely tetszőleges $a \neq 0$ és $b \neq 0$ valós számra és bármely egész n számra a következő egyenlőség azonosság:***

$$(ab)^n = a^n b^n. \tag{3}$$

Az (1) azonosság a **hatványozás alaptulajdonságát** fejezi ki. Bizonyítsátok be!

Természetes hatványkitevőre ezt az azonosságot a 7. osztályban már igazoltuk.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, ha az m és az n számok negatív egészek.

Ha az m és az n számok negatív egészek, akkor a $-m$ és $-n$ számok természetesek. Vagyis $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Tehát $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m-n}} = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

A teljes bizonyításhoz még azokat az eseteket is figyelembe kell venni, amikor az egyik hatványkitevő, vagy az m vagy az n pozitív, míg a másik kitevő negatív; vagy mind a két kitevő nulla. Ezeknek az eseteknek a vizsgálatát végezzétek el önállóan.

A (2) és (3) azonosság igazolása az előzőhöz hasonló.

9.3. tétel. ***Bármely tetszőleges $a \neq 0$ valós számra és bármely egész n és m számra a következő egyenlőség azonosság:***

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \tag{4}$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \ \blacktriangle$$

A (2) és (3) azonosságok alapján bizonyítható a következő tétel.

9.4. tétel. Bármely tetszőleges $a \neq 0$ és $b \neq 0$ valós számra és bármely n egész számra teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{5}$$

Bizonyítás.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \ \blacktriangle$$

Az (1) – (5) azonosságokat az **egész kitevőjű hatvány tulajdonságainak** nevezzük.

1. PÉLDA. Írjuk fel a alapú hatvány alakjában a következő kifejezéseket:

1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^{6}$.

Megoldás. 1) A hatványozás azonosságai alapján:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Alkalmazva az $a^m : a^n = a^{m-n}$ azonosságot kapjuk, hogy

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^{4}.$$

3) Alkalmazva a hatvány hatványozására (2) és az azonos alapú hatványok szorzására és osztására ((1), (4)) érvényes azonosságokat azt kapjuk, hogy:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^{6} = a^{-4\cdot(-2)} \cdot a^{-7} : a^{6} = a^{8} \cdot a^{-7} : a^{6} = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \blacktriangle$$

2. PÉLDA. Határozzuk meg a következő kifejezések értékeit:

1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$; 2) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 3) $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 4) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5}$.

Megoldás. 1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

2) Felírva a 16-ot és a 8-at 2 hatványaként azt kapjuk, hogy:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^{4})^{-9} \cdot (2^{3})^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^{0} = 1.$$

3) A tört hatványozása alapján (5. azonosság) felírhatjuk, hogy:

$$\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^{3} = 27.$$

4) $$\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$$

$$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \blacktriangle$$

3. PÉLDA. Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

1) $0{,}6m^{2}n^{-6} \cdot \dfrac{1}{3}m^{-4}n^{3}$;

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$.

Megoldás.

1) $$0{,}6m^{2}n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^{3} = \left(0{,}6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^{2} \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^{3}) = 0{,}2m^{-2}n^{-3}.$$

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}$. $\blacktriangle$

4. PÉLDA. Végezzük el a $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ szorzást, és írjuk fel az eredményt normálalakban.

Megoldás. $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) =$
$= 23{,}8 \cdot 10^{6} = 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^{6} = 2{,}38 \cdot 10^{7}$. $\blacktriangle$

? Soroljátok fel az egész kitevőjű hatványozás azonosságait!

GYAKORLATOK

274.° Adjátok meg a következő kifejezéseket hatványalakban vagy hatványok szorzataként:

1) $a^{-6} \cdot a^{9}$; 5) $a^{7} : a^{-3}$; 9) $(a^{-6})^{-8}$;
2) $a^{5} \cdot a^{-8}$; 6) $a^{-3} : a^{-15}$; 10) $(a^{2})^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^{3}$;
3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$; 7) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$; 11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
4) $a^{-2} : a^{6}$; 8) $(a^{-5})^{4}$; 12) $\left(\frac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

275.° Adjátok meg a következő kifejezéseket hatványalakban vagy hatványok szorzataként:

1) $a^{6} \cdot a^{-10}$; 4) $(a^{-2})^{6}$; 7) $a^{-16} \cdot a^{8} : a^{-4}$;
2) $a^{4} : a^{7}$; 5) $(a^{-3}b^{-1}c^{7})^{-4}$; 8) $(a^{-3})^{8} : (a^{-1})^{7} \cdot (a^{-7})^{-4}$.
3) $a^{-5} : a^{-9}$; 6) $\left(\frac{a^{2}}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;

276.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $9^{5} \cdot 9^{-7}$; 4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$; 5) $(17^{4})^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$; 8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$.
3) $3^{-18} : 3^{-21}$; 6) $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^{4}}{(6^{-7})^{2} \cdot 6^{-3}}$;

277.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $6^{-9} \cdot 6^{6}$; 3) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^{3}$; 5) $0{,}8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
2) $7^{-16} : 7^{-18}$; 4) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^{3}}{(4^{-3})^{7}}$; 6) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

278.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$; 5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$; 9) $0{,}2c^{-3}d^{5} \cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$; 6) $\frac{kp^{-6}}{k^{4}p^{4}}$; 10) $4x^{8} \cdot (-3x^{-2}y^{4})^{-2}$;
3) $(2c^{-6})^{4}$; 7) $(c^{-6}d^{2})^{-7}$; 11) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^{2}}$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$; 8) $\frac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \frac{6}{7}a^{7}b^{4}$; 12) $\frac{18p^{-6}k^{2}}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^{6}}$.

279.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^5$; 3) $\dfrac{3{,}6a^2b}{0{,}9a^3b^{-3}}$; 5) $\dfrac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \dfrac{y^4}{5x^{-7}}$;

2) $\left(\dfrac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$; 4) $0{,}8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$; 6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

280.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$; 4) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$; 7) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;

2) $27^{-2} : 9^{-4}$; 5) $25^{-4} : (0{,}2^{-3})^{-2}$; 8) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0{,}01^6$; 6) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

281.• Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$; 3) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$; 5) $\dfrac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;

2) $32^{-5} : 64^{-4}$; 4) $8^{-2} : 0{,}5^4$; 6) $\dfrac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

282.• Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Az eredményt írjátok fel olyan kifejezésként, melyben nincs negatív hatványkitevő:

1) $-2{,}4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$; 4) $\left(-\dfrac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0{,}1yz^{-4})^{-2}$; 5) $\left(\dfrac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;

3) $1\dfrac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\dfrac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$; 6) $\left(\dfrac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

283.• Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Az eredményt írjátok fel olyan kifejezésként, melyben nincs negatív hatványkitevő:

1) $3{,}6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$; 3) $\left(\dfrac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;

2) $1\dfrac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\dfrac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$; 4) $\left(\dfrac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

284.• Emeljétek ki a zárójel elé az a-t az adott kitevők közül a legkisebbiken:

1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

285.• Emeljétek ki a zárójel elé a b-t az adott kitevők közül a legkisebbiken:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

286.• Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

1) $a^{-2} - 4$;
2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;
3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;
4) $a^{-3} + b^{-3}$;
5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

287.• Alakítsátok szorzattá az alábbi kifejezéseket:

1) $x^{-4} - 25$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
4) $a^{-4} - a^{-2}$.

288.• Igazoljátok az alábbi azonosságot:

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

289.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;
2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;
3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;
4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

290.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;
2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;
3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;
4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

291.• Határozzátok meg az alábbi számok karakterisztikáját, ha az a szám karakterisztikája:

1) $10a$;
2) $0{,}1a$;
3) $100a$;
4) $0{,}001a$;
5) $10\,000a$;
6) $1\,000\,000a$.

292.• Határozzátok meg az alábbi számok karakterisztikáját, ha a b szám karakterisztikája 3:

1) $10b$;
2) $0{,}01b$;
3) $0{,}0001b$;
4) $1000b$.

293.• Végezzétek el a kijelölt műveleteket, és írjátok fel az eredmény normálalakját:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;
2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;
3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;
4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

294.• Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Az eredményt írjátok fel normálalakban:

1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$;
2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$;
3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;
4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

295.• A Nap és a Föld közötti távolság $1{,}5 \cdot 10^8$ km, a fény sebessége pedig $3 \cdot 10^8$ m/s. Hány perc alatt ér a napfény a Földre? Az eredményt kerekítsétek egyesekre!

296.• A réz sűrűsége $8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m³. Határozzátok meg annak a rézlemeznek a tömegét, melynek hossza $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ m, szélessége 12 cm, vastagsága pedig 0,02 m!

297.• A Föld tömege $6 \cdot 10^{24}$ kg, a Hold tömege $7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg. Hányszor könnyebb a Hold a Földnél? Az eredményt kerekítsétek egyesekre!

298.•• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket! Az eredményt írjátok fel olyan racionális kifejezésként, mely nem tartalmaz negatív hatványkitevőt:

1) $\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right):\left(\frac{b}{a^2}\right)^{-1}$;

2) $\frac{b^{-2}-2}{b^{-2}}-\frac{b^{-4}-4}{b^{-2}}\cdot\frac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\frac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\frac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\frac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\frac{m^{-4}}{m^{-4}-4}-\frac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right)\cdot\frac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7}+\frac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

299.•• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket! Az eredményt írjátok fel olyan racionális kifejezésként, mely nem tartalmaz negatív hatványkitevőt:

1) $\frac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9}:\frac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12}-\frac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1}-\frac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\frac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

300.•• Az a szám karakterisztikája –4, a b számé pedig 3. Mennyi lehet az alábbi kifejezések értékének a karakterisztikája?

1) ab; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0{,}1b$.

301.•• Az m szám karakterisztikája 2, az n számé pedig 4. Mennyi lehet az alábbi kifejezések értékének karakterisztikája?

1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$.

ISMÉTLŐ FELADATOK

302. Két természetes szám számtani közepe 18. Ha a nagyobbik számot elosztjuk a kisebbikkel, akkor a nem teljes hányados 3, a maradék pedig 4. Határozzátok meg ezeket a számokat!

303. A villamos energiával való takarékosság jegyében meghirdetett akció eredményeképpen az első hónapban 20%-kal csökkent a fogyasztás, a második hónapban az előző hónaphoz képest még 10%-kal és a harmadik hónapban, szintén az előző hónaphoz képest 5%-kal. Összesen hány százalékkal csökkent az energiafogyasztás?

304. A vízzel elöntött helyiségből a víz eltávolítására 3 szivattyút hoztak. Ha csak az első üzemel, akkor annak 12 órára van szüksége a munka elvégzésére, a másodiknak 15 órára, a harmadiknak pedig 20 órára. Az első 3 órában csak az első és a második szivattyú működött, majd bekapcsolták a harmadikat is. Hány óra alatt szivattyúzták ki a vizet a helyiségből?

305. Egy könyv 19 hrivnyába kerül. Sajnos a vásárlónak csak 5 hrivnyás címletei voltak, az eladónak pedig csak 2 hrivnyásai. El tud-e számolni a vásárló a könyvért anélkül, hogy valahol felváltaná a pénzét? Ha igen, akkor legalább hány darab 5 hrivnyással kell rendelkeznie a vásárlónak, és hány darab 2 hrivnyással a vevőnek?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

306. Határozzátok meg az $y=-\dfrac{14}{x}$ függvény helyettesítési értékét a megadott helyen:
1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

307. Egy függvény az $y=\dfrac{x+2}{x-6}$ képlettel van megadva. Mi a függvény értelmezési tartománya? Töltsétek ki a táblázatot, számítsátok ki a függvény értékét a megadott helyeken!

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

308. Ábrázoljátok az $y = 2x - 1$ függvény grafikonját! Hozzá tartozik-e a grafikonhoz az: 1) A (30; 59); 2) B (–15; –29) pont?

309. Rajz nélkül határozzátok meg, metszik-e egymást az $y = 2{,}7x - 8$ és az $y = 1{,}2x + 7$ függvények grafikonjai?

310. Oldjátok meg grafikusan a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Frissítsétek fel a 17., 18. és 19. pontok tartalmát (221–222. oldal)!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

311. Az egyenes kieséses rendszerben lebonyolított teniszbajnokság végén kiderült, hogy csak 32 olyan játékos volt, aki többször nyert, mint veszített. Hány teniszező vett részt a versenyen?

10. Az $y=\dfrac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

Már a 6. osztályban megismerkedtetek olyan hozzárendeléssel, amikor az egyik mennyiség néhányszoros **növekedése** (**csökkenése**) a másik mennyiség ugyanolyan arányú **csökkenését** (**növekedését**) vonja maga után. Ebben az esetben a két mennyiség **fordítottan arányos**.

Nézzünk meg 2 példát!

1. PÉLDA. Van 500 hrivnyánk. Jelöljük x-szel 1 kg termék árát, az egységárat, y-nal azt a mennyiséget, amit ebből a termékből vásárolni tudunk 500 hrivnyáért.

Az y és az x mennyiségek fordítottan arányosak: minél drágább az áru, annál kevesebbet tudunk vásárolni és fordítva, minél olcsóbb, annál többet vehetünk.

Ennek az egyértelmű hozzárendelésnek az $y=\frac{500}{x}$ képlettel megadott függvény felel meg. ▲

2. PÉLDA. Vegyünk egy olyan téglalapot, melynek a területe 18 cm^2, oldalai pedig x és y cm. Akkor

$$y=\frac{18}{x}.$$

A nevezőben lévő x néhányszoros növelése (csökkentése) az y ugyanolyan arányú csökkenését (növelését) eredményezi. Tehát adott terület esetén a téglalap oldalai fordítottan arányosak. ▲

A megvizsgált példákban olyan valós helyzetekkel találkoztunk, melyek matematikai modellje egy függvény, melyet az $y=\frac{k}{x}$ képlettel lehet megadni.

Meghatározás. Az $y=\frac{k}{x}$ képlettel megadott függvényt, ahol $k \neq 0$, fordított arányosságnak nevezzük.

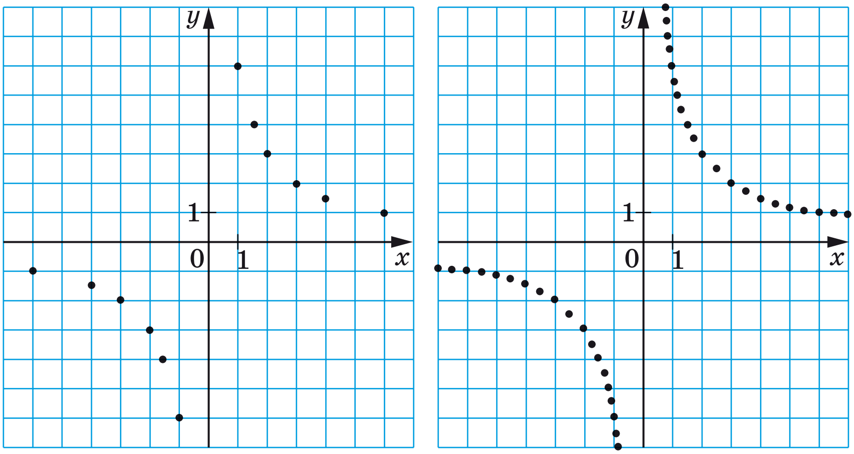
Mivel a $\frac{k}{x}$ kifejezés értelmezhető bármely nullával nem egyenlő számra, így az $y=\frac{k}{x}$ függvény értelmezési tartománya bármely szám, kivéve a 0-t.

Vizsgáljuk meg az $y=\frac{6}{x}$ függvényt! Az alábbi táblázat néhány argumentumértéket és az ezeken a helyeken felvett függvényértéket tartalmaz.

x	–6	–4	–3	–2	–1,5	–1	1	1,5	2	3	4	6
y	–1	–1,5	–2	–3	–4	–6	6	4	3	2	1,5	1

Jelöljük a koordináta-rendszerben azokat a táblázatban feltüntetett (x; y) koordinátájú pontokat (3. ábra).

Minél több olyan pontot tüntetünk fel, amely kielégíti az $y=\frac{6}{x}$ egyenletet (4. ábra), annál kevésbé fog eltérni a rajzunk az $y=\frac{6}{x}$ függvény grafikonjától.



3. ábra 4. ábra

A feltüntetett pontok között nem lehet olyan pont, melynek az abszcisszája 0, mivel a nulla nem tartozik hozzá a függvény értelmezési tartományához. Ezért az $y=\frac{6}{x}$ függvény grafikonjának nincs közös pontja az ordinátatengellyel.

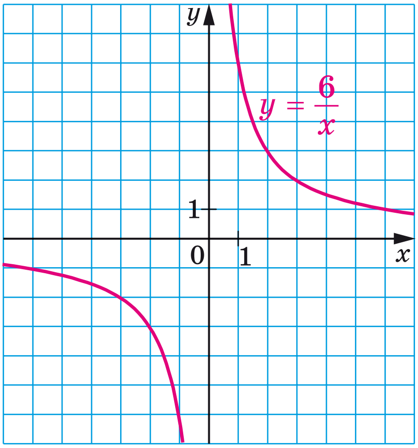
Ezenkívül a függvény grafikonja nem metszi az abszcisszatengelyt sem, mivel a $\frac{6}{x}=0$ egyenletnek nincs megoldása. Tehát a nulla nem tartozik hozzá az értékkészlethez sem.

Ha $x>0$, akkor $\frac{6}{x}>0$, vagyis $y>0$; ha pedig $x<0$, akkor $y<0$. Tehát a függvény grafikonja csak az I. és a III. koordinátanegyedekben helyezkedhet el.

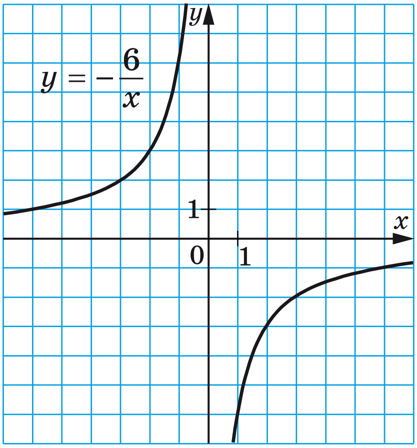
Megjegyezzük, hogyha növeljük az abszcissza abszolút értékét, akkor a grafikon pontjai egyre közelebb kerülnek az abszcisszatengelyhez. Ez a távolság akármilyen kicsi is lehet, de sose lehet nullával egyenlő. Valójában minél nagyobb az argumentum abszolút értéke, annál kisebb a megfelelő függvényérték.

Hasonlóan megállapíthatjuk, hogy az ordináta növekedésével a grafikon és az ordinátatengely közötti távolság lesz egyre kisebb, de sohasem lesz nullával egyenlő.

Ha sikerült volna feltüntetni az összes olyan pontot, amely megfelel az $y=\frac{6}{x}$ egyenletnek, akkor az 5. ábrán látható rajzot kaptuk volna.



5. ábra



6. ábra

Az $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény grafikonját **hiperbolának** nevezzük. A hiperbola grafikonja két részből, az úgynevezett **hiperbola ágakból** áll.

Megjegyezzük, ha teljesül az $y_0=\frac{k}{x_0}$ egyenlőség, akkor teljesülnie kell a $-y_0=\frac{k}{-x_0}$ egyenlőségnek is. Levonhatjuk azt a következtetést, ha az $A\,(x_0;\, y_0)$ pont illeszkedik az $y=\frac{k}{x}$ hiperbolára, akkor $B\,(-x_0;\, -y_0)$ pont is illeszkedik erre a hiperbolára.

Az 5. ábrán az $y=\frac{6}{x}$ hiperbola látható.

Ha $k > 0$, akkor a hiperbola ágai az I. és III. negyedbe esnek, ha $k < 0$, akkor a II. és IV. negyedbe.

A 6. ábrán az $y=-\frac{6}{x}$ függvény grafikonja látható. Az $y=-\frac{6}{x}$ hiperbola ágai a II. és IV. koordinátanegyedekben vannak.

Megjegyezzük, hogy $y=\dfrac{k}{x}$, $k\neq 0$ függvény értékkészlete a nulla kivételével bármely szám.

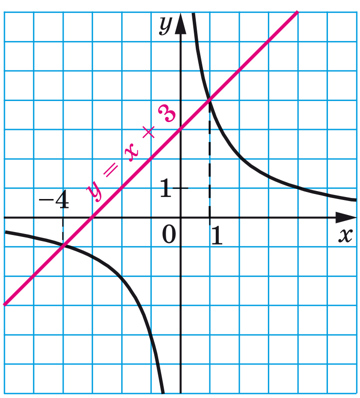
A következő táblázatban összefoglaltuk az $y=\dfrac{k}{x}$ függvény azon tulajdonságait, melyeket ebben a pontban tárgyaltunk.

Értelmezési tartomány	A nulla kivételével bármely szám
Értékkészlet	A nulla kivételével bármely szám
Grafikon	Hiperbola
Zérushely (az argumentum azon értéke, melyre a függvényérték nulla)	Nincs
A grafikon tulajdonságai	Ha az $A(x_0; y_0)$ pont illeszkedik az $y=\dfrac{k}{x}$ hiperbolára, akkor $B(-x_0; -y_0)$ pont is illeszkedik erre a hiperbolára.

Megmutatjuk, hogyan lehet az $y=\dfrac{k}{x}$ függvény grafikonját alkalmazni egyenletek megoldására.

3. PÉLDA. Oldjuk meg a $\dfrac{4}{x}=x+3$ egyenletet.

Megoldás. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y=\dfrac{4}{x}$ és $y=x+3$ függvények grafikonjait (7. ábra). A grafikonok két pontban metszik egymást, melyek abszcisszája 1 és –4. A metszéspontokban a függvények azonos értéket vesznek fel. Vagyis a meghatározott abszcisszák helyén a $\dfrac{4}{x}$ és $x+3$ kifejezések értéke egyenlő, tehát az 1 és a –4 a $\dfrac{4}{x}=x+3$ egyenlet gyökei. Az ellenőrzés ezt igazolja is. Valóban $\dfrac{4}{1}=1+3$ és $\dfrac{4}{-4}=-4+3$. ▲



7. ábra

Az alkalmazott módszer az egyenletek megoldásának **grafikus** módszere. A 7. osztályban már tanultátok az egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszerét, és tudjátok, hogy ez a módszer nem mindig pontos. Ezért a kapott gyökök ellenőrzése kötelező lépés, ha az egyenletet grafikusan oldjuk meg.

A későbbiekben (22. pont) megtanuljátok ezeket az egyenleteket megoldani nem grafikusan is.

?

1. Magyarázzátok meg, mit értünk fordított arányosságon!
2. Melyik függvényt nevezzük fordított arányosságnak?
3. Mi az $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény értelmezési tartománya?
4. Mi a fordított arányosság grafikonja?
5. Hogyan nevezzük a grafikon részeit?
6. Mi az $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény értékkészlete?
7. Hol helyezkedik el az $y=\frac{k}{x}$, $k \neq 0$ függvény grafikonja, ha $k > 0$? Ha $k < 0$?
8. Magyarázzátok meg az egyenletek megoldásának grafikus módszerét!

GYAKORLATOK

312.° Egy személygépkocsi valamilyen útszakaszt 10 óra alatt tesz meg. Mennyi idő alatt teszi meg ugyanezt a távolságot, ha a sebességét:
1) 2-szeresére növeli; 2) 1,2-szeresére csökkenti?

313.° Egy téglalap hossza 30 cm. Mekkora lesz annak az ugyanakkora területű téglalapnak a hossza, melynek a szélessége:
1) 1,5-szer nagyobb; 2) 3,2-szer kisebb?

314.° 40 m anyagot vásároltak. Hány méter anyagot vehettek volna ugyanazért a pénzért, ha az anyag egységára:
1) 2,6-szer olcsóbb; 2) 1,6-szer drágább?

315.° Egy gyalogos 12 km-t tett meg. Töltsétek ki a táblázatot, ha az első sorban a sebessége szerepel, a másodikban pedig az eltelt idő!

v, km/h	5		2,4	
t, h		3		$3\frac{1}{3}$

Adjátok meg képlettel, hogyan függ a t (az idő) a v-től (sebességtől)!

316.° Egy téglatest térfogata 48 cm³. Töltsétek ki a táblázatot, ha az első sorban a téglatest alapterületét tüntettük fel, a második sorban pedig a magasságát!

S, cm²	16		240	
h, cm		8		4,8

Adjátok meg képlettel, hogyan függ a h az S-től!

317.° 7 azonos munkabírású dolgozó a kijelölt feladatot 12 nap alatt végzi el. Hány ugyanilyen tempóban dolgozó munkásra van szükség ahhoz, hogy ezt a feladatot 4 nap alatt végezzék el?

318.° A takarmánykészlet 24 lónak 18 napra elegendő. Hány napra elegendő ez a mennyiség 36 lónak?

319.° Az alábbi függvények közül nevezzétek meg a fordított arányosságot:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

320.° Az $y = \frac{24}{x}$ függvényre határozzátok meg:

1) a függvényértéket, ha az argumentum értéke: –3; 6; 0,2;
2) az argumentum értékét, ha a függvényérték: 12; –6; 100!

321.° Az $y = -\frac{36}{x}$ függvényre határozzátok meg:

1) a függvényértéket, ha az argumentum értéke: –4; 0,9; 18;
2) az argumentum értékét, ha a függvényérték: 6; –0,3; 8!

322.° Ábrázoljátok az $y = -\frac{8}{x}$ függvény grafikonját! Olvassátok le a grafikonról:

1) a függvényértékeket a 4; –1 argumentum helyen;
2) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték 2; –8;
3) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték pozitív!

323.° Ábrázoljátok az $y = \frac{10}{x}$ függvény grafikonját! Olvassátok le a grafikonról:

1) a függvényértékeket a 2; –10 helyen;
2) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték 5; –2;
3) az argumentum azon értékeit, melyek helyén a függvényérték negatív!

324.° Rajz nélkül döntsétek el, hogy a megadott pontok illeszkednek-e az $y = \frac{28}{x}$ függvény grafikonjára:

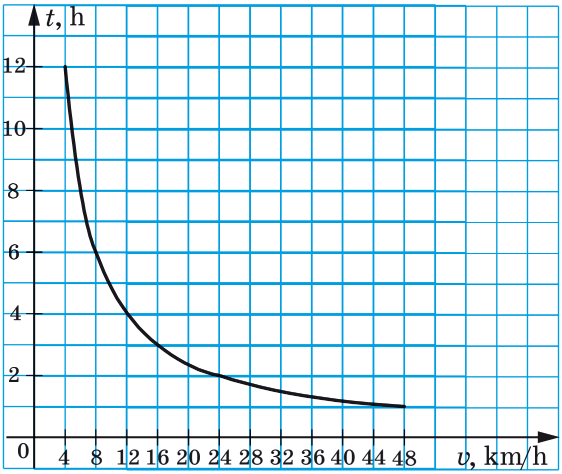
1) A (–4; –7); 2) B (14; –2); 3) C (0,5; 14); 4) D (0,2; 140).

325.° Rajz nélkül döntsétek el, hogy a megadott pontok illeszkednek-e az $y = -\frac{48}{x}$, függvény grafikonjára:

1) A (–6; –8);
2) B (12; –4);
3) C (0,3; –16);
4) D (0,4; –120).

326.• Az A és B helységek közötti távolságot v sebességgel t idő alatt lehet megtenni. Az idő és a sebesség közötti összefüggést a 8. ábra szemlélteti. Olvassátok le a grafikonról:

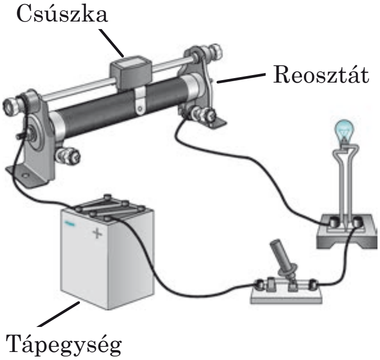
1) hány óra alatt lehet ezt a távolságot 8 km/h sebességgel megtenni; és ha a sebesség 24 km/h?
2) mekkora sebességgel kell haladni, ha 3 óra alatt akarunk az A helységből a B-be eljutni; és ha 4 óra alatt?
3) mekkora a helységek közötti távolság?



8. ábra

327.• Egy huzalos reosztátot tápegységhez kapcsoltak (9. ábra). A reosztát R ellenállása, amely 0 és 6 ohm között változik, függ a csúszka helyzetétől. A reosztát végein a feszültség állandó. Olvassátok le az I áramerősség az R ellenállás közötti összefüggést ábrázoló grafikonról (10. ábra), hogy

1) mennyi az áramerősség, ha az ellenállás 2 Ω?
2) milyen ellenállásnál lesz az áramerősség 3 A?
3) mekkora a reosztát végein a feszültség?



9. ábra

10. ábra

328.• Határozzátok meg a k azon értékeit, amelyek mellett az alábbi pontok illeszkednek az $y=\frac{k}{x}$ függvény grafikonjára:

1) $A\,(-5;\,4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6};-2\right)$; 3) $C\,(1{,}5;\,-8)$.

329.• Az $A(10;\,1{,}6)$ koordinátájú pont az $y=\frac{k}{x}$ függvény grafikonjához tartozik. Illeszkednek-e a következő pontok a függvény grafikonjára:

1) $B\,(-1;\,-16)$; 2) $C\,(-2;\,8)$?

330.• Ábrázoljátok az $y=\frac{4}{x}$ és az $y = x$ függvényeket közös koordináta-rendszerben! Határozzátok meg a grafikonok metszéspontjainak koordinátáit!

331.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket grafikusan:

1) $\frac{4}{x}=4-x$; 2) $x-2=\frac{3}{x}$; 3) $x+2=-\frac{5}{x}$.

332.$^{\bullet}$ Oldjátok meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

333.$^{\bullet}$ Oldjátok meg grafikusan az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

334.$^{\bullet}$ Oldjátok meg grafikusan az $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4 \end{cases}$ egyenletrendszert!

335.$^{\bullet}$ Rajz segítségével állapítsátok meg, hány megoldásuk van az alábbi egyenletrendszereknek:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

336.$^{\bullet}$ Grafikus módszerrel határozzátok meg az $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ egyenletrendszer gyökeinek számát!

337.$^{\bullet\bullet}$ Határozzátok meg az $y = \frac{64}{x}$ függvény grafikonjának azon pontjait, melyek abszcisszája és ordinátája egyenlő!

338.$^{\bullet\bullet}$ Határozzátok meg az $y = -\frac{25}{x}$ függvény grafikonjának azon pontjait, melyek abszcisszája és ordinátája ellentett számok!

339.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázoljátok az $y = \frac{6}{|x|}$ függvényt!

340.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázoljátok a következő függvényeket:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{ha } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{ha } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{ha } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{ha } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{ha } x \geqslant 4. \end{cases}$

341.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázoljátok az $y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{ha } x < -2, \\ 2, & \text{ha } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$ függvényt!

342.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

343.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázoljátok az $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$ függvényt!

ISMÉTLŐ FELADATOK

344. Igazoljátok, hogy az

$$\frac{a^2-b^2}{a+3b}\cdot\left(\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}\right)-\frac{b}{a-b}$$

kifejezés értéke független az a és b változók minden lehetséges értékére!

345. Oldjátok meg a

$$\frac{3}{5x+25}+\frac{1}{2x-10}=\frac{5}{x^2-25}$$

egyenletet!

346. Egy szekrény árát 30%-kal csökkentették, majd később 30%-kal növelték. Hogyan változott a szekrény ára a kezdeti árhoz képest, növekedett-e vagy csökkent, és hány százalékkal?

347. (*Szun-Ce feladata*[1].) Két férfinak a megkeresett pénzérméiket úgy kellett elosztaniuk egymás között, hogy az első pénzének és második pénze felének az összege ugyanannyi legyen, mint a második pénzének és az első pénze a $\frac{2}{3}$-nak az összege. Ez az összeg mindkét esetben 48 pénzérme. Mennyi érmét kaptak a férfiak külön-külön?

348. Ha egy sífutó 10 km/h sebességgel halad, akkor a tervezetnél 1 órával később ér célba, ha 15 km/h-s sebességgel haladna, akkor a tervezetnél 1 órával korábban érkezne meg. Milyen sebességgel kell haladnia, hogy a tervezett időben érkezzen meg?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

349. Három tanuló mindegyike felírt 100 szót. Majd azokat a szavakat, melyeket legalább ketten felírtak, kihúzták. Így az egyik tanuló listájában 45 szó maradt, a másodikéban 68, míg a harmadik tanuló szószedetében 54. Bizonyítsátok be, hogy legalább egy olyan szó volt, amit mind a hárman felírtak!

[1] Szun-Ce kínai matematikus (III–IV. század).

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 3. SZ. TESZTFELADAT

1. Oldjátok meg az $\dfrac{x^2-100}{x-10}=0$ egyenletet!

A) –10; 10; B) 10; C) –10; D) nincs megoldás.

2. Oldjátok meg az $\dfrac{x-10}{x^2-100}=0$ egyenletet!

A) –10; 10; B) 10; C) –10; D) nincs megoldás.

3. Melyik egyenlőség igaz az alábbiak közül?

A) $10^{-3}=-1000$; C) $(-2)^{-3}=-\dfrac{1}{8}$;

B) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=-\dfrac{9}{16}$; D) $\dfrac{1}{7^{-2}}=-49$.

4. Az alábbi kifejezések közül melyik 42 000 normálalakja?

A) $4{,}2\cdot10^3$; B) $4{,}2\cdot10^4$; C) $0{,}42\cdot10^5$; D) $42\cdot10^3$.

5. Az alábbi tizedes törtek közül melyik normálalakja $6{,}3\cdot10^{-3}$?

A) 0,63; B) 0,063; C) 0,0063; D) 0,00063.

6. Írjátok fel $\dfrac{1}{25}$-öt 5 hatványaként!

A) 5^{-2}; B) 5^2; C) 5^{-3}; D) 5^3.

7. Az $(1{,}7\cdot10^8)\cdot(6\cdot10^{-3})$ kifejezés értéke melyikkel egyenlő a következő kifejezések közül?

A) $1{,}02\cdot10^5$; B) $1{,}02\cdot10^6$; C) $10{,}2\cdot10^6$; D) $1{,}02\cdot10^7$.

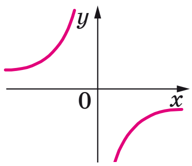
8. Az alábbi számok közül melyikkel egyenlő a $\dfrac{9^{-2}\cdot3^{-5}}{81\cdot27^{-3}}$ kifejezés értéke?

A) 81; B) $\dfrac{1}{81}$; C) 27; D) $\dfrac{1}{27}$.

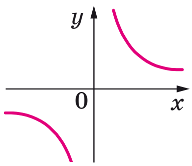
9. Az alábbi függvények közül melyik nem fordított arányosság?

A) $y=\dfrac{3}{x}$; B) $y=-\dfrac{3}{x}$; C) $y=\dfrac{3}{2x}$; D) $y=\dfrac{3x}{2}$.

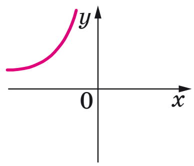
10. Melyik rajzon látható az $y=-\dfrac{4}{x}$ függvény grafikonja?



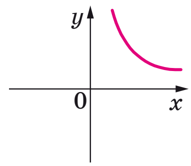
A)



B)



C)



D)

11. A k mely értékénél illeszkedik az $A(-3; 0{,}6)$ pont az $y=\frac{k}{x}$ függvény grafikonjára?

A) $-1{,}8$; B) $-0{,}2$; C) $-2{,}4$; D) $-3{,}6$.

12. Oldjátok meg a $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x+1}{4-x}=\frac{4x^2+8}{x^2-16}$ egyenletet! Mely számok az egyenlet gyökei?

A) 0; 4; B) -4; 0; C) -4; D) 0.

AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Racionális kifejezés

Az egész és a törtkifejezéseket együtt racionális kifejezésnek nevezzük.

A változók megengedett (lehetséges) értékei

A racionális kifejezésben szereplő változók megengedett értékei azon értékek, melyre a kifejezés értelmezhető.

Azonosan egyenlő kifejezések

Azokat a kifejezéseket, melyek helyettesítési értékei egyenlők a változó minden lehetséges értékénél, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.

Azonosság

Azt az egyenlőséget, amely a változó minden lehetséges értékére teljesül, azonosságnak nevezzük.

A racionális tört alaptulajdonsága

Ha egy racionális tört számlálóját és nevezőjét megszorozzuk ugyanazzal a többtagú kifejezéssel, amely nem egyenlő nullával, akkor az eredeti törttel azonosan egyenlő törtet kapunk.

Azonos nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

Ahhoz, hogy összeadjunk azonos nevezőjű törteket, össze kell adni a számlálókat, a nevezőt pedig változatlanul hagyni.

Ahhoz, hogy meghatározzuk azonos nevezőjű törtek különbségét, az első tört számlálójából ki kell vonni a másik tört számlálóját, a nevezőt pedig változatlanul kell hagyni.

Racionális törtek szorzása

Racionális törtek szorzata olyan racionális tört, melynek a számlálója egyenlő a számlálók szorzatával, a nevezője pedig a nevezők szorzatával.

Racionális törtek osztása

Két racionális tört hányadosa olyan racionális tört, melynek a számlálója egyenlő az osztandó számlálójának és az osztó nevezőjének a szorzatával, a nevezője pedig az osztandó nevezőjének és az osztó számlálójának a szorzatával.

Racionális tört hatványozása

Ahhoz, hogy egy racionális törtet hatványra emeljünk, hatványra kell emelni külön a számlálót és külön a nevezőt. Az első eredményt a számlálóba, a másodikat a nevezőbe írjuk.

Egyenértékű (ekvivalens) egyenletek

Két egyenlet ekvivalens, ha gyökeik azonosak vagy ha nincs megoldásuk.

Ekvivalens átalakítások

Ha egy egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, akkor az adott egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.
Ha az egyenlet egyik oldaláról átviszünk egy tagot a másik oldalra ellenkező előjellel, akkor az adott egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.
Ha egy egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazzal a nullától különböző számmal, az adott egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.

Racionális egyenletek

Azokat az egyenleteket, melyek jobb és bal oldala is racionális kifejezés, racionális egyenleteknek nevezzük.

Egész negatív kitevőjű hatvány

Bármely a számra, kivéve a nullát és természetes n számra

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Nulla kitevőjű hatvány

Bármely, nullával nem egyenlő a szám nulla kitevőjű hatványa 1-gyel egyenlő: $a^0 = 1$.

A szám normálalakja

A szám normálalakjának nevezzük az $a \cdot 10^n$ alakot, ahol $1 \leqslant a < 10$ és n egész szám.

Azonosságok az egész kitevőjű hatványokra

Bármely tetszőleges $a \neq 0$ és $b \neq 0$ valós számra és bármely egész m és n számra teljesülnek az alábbi egyenlőségek:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (a hatvány alaptulajdonsága);
$(a^m)^n = a^{mn}$;
$(ab)^n = a^n b^n$;
$a^m : a^n = a^{m-n}$;
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Fordított arányosságfüggvény

Azt a függvényt, melyet az $y = \frac{k}{x}$ képlettel lehet megadni, ahol $k \neq 0$, fordított arányosságnak nevezzük.

Az $y = \frac{k}{x}$ függvény tulajdonságai

Értelmezési tartomány: bármely szám, kivéve a 0-t
Értékkészlet: bármely szám, kivéve a 0-t
Grafikon: hiperbola
Zérushely: nincs
A grafikon tulajdonsága: ha az $A(x_0; y_0)$ pont illeszkedik az $y = \frac{k}{x}$ hiperbolára, akkor $B(-x_0; -y_0)$ pont is illeszkedik erre a hiperbolára.

2.§. NÉGYZETGYÖK. VALÓS SZÁMOK

- Ebben a fejezetben megvizsgáljuk az $y = x^2$ függvényt és néhány tulajdonságát.
- Megismerkedünk egy új művelettel – a négyzetgyökvonással. Érthetővé válik számunkra, hogy a bennünket körülvevő világ tanulmányozásához nem elegendő a racionális számok ismerete.
- Megtanuljuk a számtani négyzetgyök tulajdonságait, és a négyzetgyököt tartalmazó kifejezések egyszerűsítését.

11. Az $y = x^2$ függvény és grafikonja

Jelöljük y-nal egy olyan négyzet területét, melynek oldalhossza x. Akkor $y = x^2$.

Ha megváltoztatjuk a négyzet x oldalhosszát, akkor meg fog változni a területe is.

Érthető, hogy minden x értéknek csak egy y érték felel meg. Tehát az x és az y mennyiségek között egyértelmű a megfeleltetés, vagyis az $y = x^2$ képlet egy függvényt ad meg.

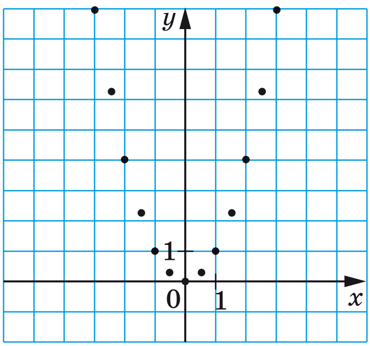
Vizsgáljuk meg az $y = x^2$ képlettel megadott függvényt, melynek az értelmezési tartománya minden szám. Az alábbi táblázat néhány argumentumértéket és a hozzájuk rendelt függvényértéket tartalmazza.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

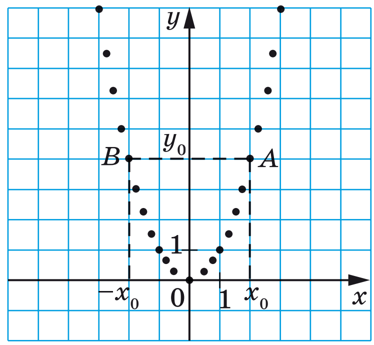
Jelöljük koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyek koordinátái a táblázatban feltüntetett értékek (11. ábra).

Minél több olyan pontot tüntetünk fel, melyek koordinátagyökei az $y = x^2$ egyenletnek, annál kevésbé fog eltérni a kapott görbe az $y = x^2$ függvény grafikonjától (12. ábra).

A (0; 0) koordinátájú pont megoldása az $y = x^2$ egyenletnek, így a függvény grafikonja áthalad az origón. Mivel $y = x^2$ és $x^2 \geqslant 0$, így $y \geqslant 0$, tehát a feltüntetett pontok között nem lehet olyan, melynek ordinátája negatív.



11. ábra



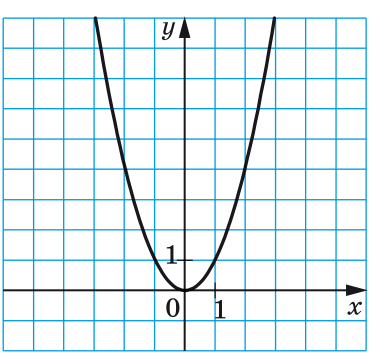
12. ábra

A függvény értékkészlete minden nemnegatív szám.

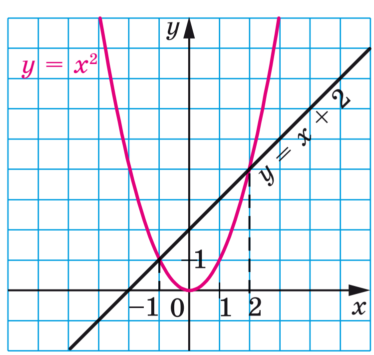
Ha az összes olyan pontot fel tudnánk tüntetni, melyek koordinátái kielégítik az $y = x^2$ egyenletet, akkor egy görbét kapnánk, a függvény grafikonját, melyet **parabolának** hívunk (13. ábra).

A (0; 0) koordinátájú pont a grafikont két részre osztja, melyeket a **parabola ágainak** nevezünk, az origót pedig a **parabola csúcsának**.

Megjegyezzük, ha teljesül az $y_0 = x_0^2$ egyenlőség, akkor teljesül az $y_0 = (-x_0)^2$ egyenlőség is. Ezért megállapíthatjuk, hogyha az $A(x_0; y_0)$ pont rajta van a függvény grafikonján, akkor a $B(-x_0; y_0)$ pont is illeszkedik erre a parabolára.



13. ábra



14. ábra

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az ebben a pontban az $y = x^2$ függvényről tanultakat.

Értelmezési tartomány	Bármely szám
Értékkészlet	Bármely nemnegatív szám
A grafikon alakja	Parabola
Zérushely (az argumentum azon értéke, melynél a függvényérték nulla)	$x = 0$
A grafikon tulajdonsága	Ha az $A(x_0; y_0)$ pont rajta van a függvény grafikonján, akkor a $B(-x_0; y_0)$ pont is illeszkedik erre a parabolára

PÉLDA. Oldjuk meg grafikusan az $x^2 = x + 2$ egyenletet.

Megoldás. Közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ függvények grafikonjait (14. ábra). A grafikonoknak két metszéspontjuk van, melyek abszcisszái 2 és –1. Mind az $x = 2$ és $x = -1$ értékekre az x^2 és $x + 2$ kifejezések helyettesítési értékei egyenlők. Az ellenőrzés ezt igazolja. Valóban, $2^2 = 2 + 2$ és $(-1)^2 = -1 + 2$. ▲

?

1. Mi az $y = x^2$ függvény értelmezési tartománya?
2. Mi az $y = x^2$ függvény értékkészlete?
3. Hogy hívják az $y = x^2$ függvény grafikonját?
4. Az argumentum mely értékénél lesz $y = x^2$ függvényértéke nulla?
5. Hasonlítsátok össze az $y = x^2$ függvény értékeit ellentett argumentumok helyén!

GYAKORLATOK

350.° A függvényt az $y = x^2$ képlettel adták meg. Határozzátok meg:

1) –6; 0,8; –1,2; 150 argumentumhoz tartozó függvényértékeket;
2) az argumentum azon értékeit, ahol a függvény felveszi a 49; 0; 2500; 0,04 értéket!

351.° Rajz nélkül állapítsátok meg, hogy az alábbi pontok rajta vannak-e az $y = x^2$ függvény grafikonján:

1) A (–8; 64); 2) B (–9; –81); 3) C (0,5; 2,5); 4) D (0,1; 0,01).

352.• Ábrázolás nélkül határozzátok meg az $y = x^2$ és $y = 4x - 4$ függvények metszéspontját! Készítsetek rajzot! Jelöljétek rajta a kapott pontokat!

353.• A következő egyenleteket oldjátok meg grafikusan:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \dfrac{8}{x}$.

354.• A következő egyenleteket oldjátok meg grafikusan:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

355.• Állapítsátok meg rajz alapján a következő egyenletrendszerek gyökeinek számát:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

356.• Állapítsátok meg rajz alapján a következő egyenletrendszerek gyökeinek számát:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

357.•• Az *f(x)* függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{ha } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{ha } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{ha } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg az $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$ értéket!
2) Ábrázoljátok a függvényt!

358.•• Az *f(x)* függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{ha } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{ha } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{ha } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg az $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$ értéket!
2) Ábrázoljátok a függvényt!

359.•• Az *f(x)* függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leqslant 0, \\ x + 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg az $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$ értéket!
2) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

360.•• Az *f(x)* függvény a következő képlettel van megadva:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{ha } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{ha } x > -1. \end{cases}$$

1) Határozzátok meg az $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$ értéket!
2) Ábrázoljátok a függvényt!

361.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

362.•• Ábrázoljátok az $y = \dfrac{x^3}{x}$ függvény grafikonját!

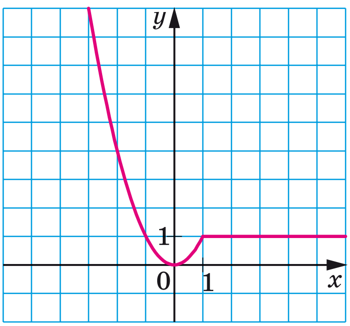
363.•• Határozzátok meg az $y = -x^2$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét! Készítsetek rajzot!

364.* Ábrázoljátok a következő egyenletek görbéit:

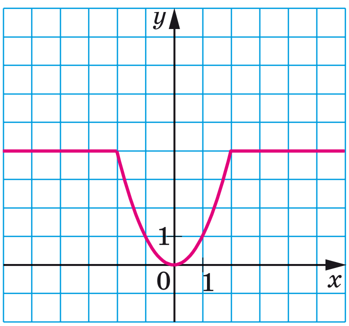
1) $\dfrac{y - x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$; 2) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$.

365.* Rajzold meg az $\dfrac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0$ egyenlet görbéjét!

366.* Adjátok meg a 15. ábrán látható függvényt képlettel!



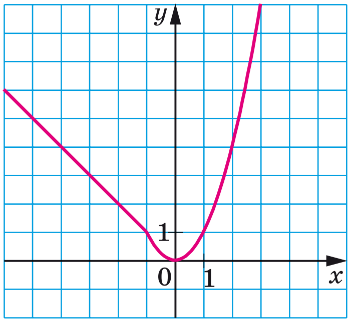
a



b

15. ábra

367.* Adjátok meg a 16. ábrán látható függvényt képlettel!



16. ábra

ISMÉTLŐ FELADATOK

368. Igazoljátok az $\frac{(a+b)^2}{a-b}:\left(\frac{a}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}\right)=a+b$ azonosságot!

369. Oldjátok meg a $\frac{6}{x-2}-\frac{x+3}{x}=\frac{x+6}{x^2-2x}$ egyenletet!

370. Bizonyítsátok be, hogy 27^6-9^7 kifejezés 48 többszöröse!

371. Két helységből, melyek között 30 km a távolság, egyidejűleg egymással szemben két gyalogos indult el. 3 óra 45 perc múlva találkoztak. Ha az egyikük 2 órával hamarább indult volna el, akkor 4,5 óra múlva találkoztak volna. Határozzátok meg a gyalogosok sebességét!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

372. Határozzátok meg annak a négyzetnek az oldalhosszát, melynek területe:

1) $25\ \text{cm}^2$; 2) $1600\ \text{dm}^2$; 3) $0{,}04\ \text{m}^2$.

373. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $x^2=9$; 2) $x^2=\frac{36}{49}$.

374. Az a mely értékeire nincs gyöke az $x^2=a$ egyenletnek?

375. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az $y=x^2$ és $y=1$ függvények grafikonjait! Határozzátok meg a metszéspontok koordinátáit!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

376. Az x, y és z természetes számokra igaz, hogy $x+y$, $y+z$ és $x+z$ is prímszám. Bizonyítsátok be, hogy a három szám közül legalább kettő 1-gyel egyenlő!

12. Négyzetgyök. Számtani négyzetgyök

Vizsgáljunk meg egy olyan négyzetet, melynek a területe $49\ \text{cm}^2$. Legyen x a négyzet oldalhossza. Akkor az $x^2=49$ egyenlet egy olyan matematikai modell, mellyel a négyzet oldalhosszát határozhatjuk meg.

Ennek az egyenletnek a gyökei a 7 és a –7, mert ezen számok négyzete 49. Azt mondják, a 7 és a –7 a 49 **négyzetgyöke**.

Meghatározás. Az *a* szám négyzetgyökének nevezzük azt a számot, melynek a négyzete *a*-val egyenlő.

Nézzünk néhány példát!

A 9-nek négyzetgyöke a 3 és a –3 is, mivel $3^2 = 9$, és $(-3)^2 = 9$.

$\frac{25}{4}$ négyzetgyöke az $\frac{5}{2}$ és a $-\frac{5}{2}$, mivel $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, és $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

A 0-nak csak a nulla a négyzetgyöke.

Mivel nem létezik olyan szám, melynek a négyzete negatív, ezért nem létezik negatív szám négyzetgyöke sem.

Az $x^2 = 49$ egyenlet *pozitív* gyöke a 7, ez a négyzet oldalának meghatározásáról szóló feladat megoldása. Ezt a számot a 49 **számtani négyzetgyökének** nevezzük.

Meghatározás. Az *a* szám számtani négyzetgyökének nevezzük azt a nemnegatív számot, melynek négyzete az *a* szám.

Az *a* szám négyzetgyökét a $\sqrt{a}$ szimbólummal jelöljük. A $\sqrt{\ }$ jelet a **négyzetgyök jelének** nevezzük.

A $\sqrt{a}$ jelölést a „négyzetgyök *a*-nak” olvassuk, elhagyva a „számtani” szót.

Azt a kifejezést, amely a $\sqrt{\ }$ jel alatt áll, **gyök alatti kifejezésnek** nevezzük.

Például a $\sqrt{b-5}$ kifejezésben a gyök alatti kifejezés a $b - 5$ kéttagú kifejezés. A számtani négyzetgyök meghatározásából következik, hogy a ***gyök alatti kifejezés csak nemnegatív értékeket vehet fel.***

Azt a műveletet, amikor keressük az adott szám számtani négyzetgyökét, **gyökvonásnak** nevezzük.

Lássunk néhány példát:

$\sqrt{9} = \mathbf{3},$ mivel $3 \geqslant 0$ és $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2},$ mivel $\frac{5}{2} \geqslant \mathbf{0},$ és $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = \mathbf{0},$ mivel $0 \geqslant 0$ és $0^2 = 0$.

Általánosan igaz: $\sqrt{a} = b$**, ha** $b \geqslant 0$ **és** $b^2 = a$**.**

Ezt a következtetést másképp is megfogalmazhatjuk: ***bármely nemnegatív számra igaz, hogy*** $\sqrt{a} \geqslant 0$ ***és*** $(\sqrt{a})^2 = a$.

Például $\sqrt{4} \geqslant 0$ és $(\sqrt{4})^2 = 4$, $\sqrt{2} \geqslant 0$ és $(\sqrt{2})^2 = 2$, $\sqrt{5{,}2} \geqslant 0$ és $(\sqrt{5{,}2})^2 = 5{,}2$.

Megjegyezzük, hogy a négyzetgyök fogalmának bevezetését az $x^2 = a$, ahol $a \geqslant 0$ egyenlet megoldása indokolta. Ennek az egyenletnek a gyöke az a szám négyzetgyöke.

Az $x^2 = a$ egyenlet megoldását szemléltessük az $x^2 = 4$ egyenlet grafikus megoldásával.

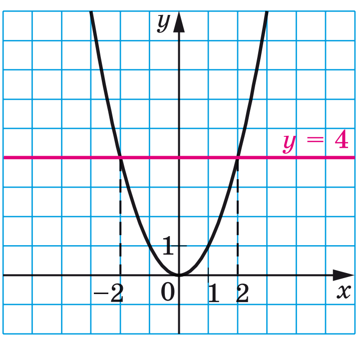
Közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $y = x^2$ és az $y = 4$ függvényeket (17. ábra). A görbék metszéspontjának abszcisszái a 2 és a –2, melyek az adott egyenlet gyökei.

Az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a < 0$ nincs megoldása, melyet szintén a grafikus megoldással szemléltetünk. Az $y = x^2$ és $y = a$, ha $a < 0$ függvények grafikonjainak nincs közös pontja (18. ábra).

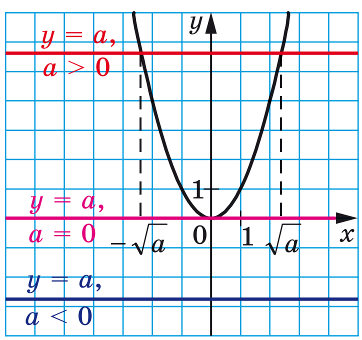
Ha $a = 0$, akkor az $x^2 = a$ egyenletnek egyetlen gyöke van, az $x = 0$.

A grafikus módszer segít általánosítani: az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a > 0$ két megoldása van. Valóban az $y = x^2$ parabolának és az $y = a$ egyenesnek két metszéspontja van, ha $a > 0$ (18. ábra). Ebben az esetben az $x^2 = a$ egyenlet megoldása a $\sqrt{a}$ és $-\sqrt{a}$ szám, mivel $(\sqrt{a})^2 = a$ és $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Például az $x^2 = 5$ egyenlet gyökei a $\sqrt{5}$ és $-\sqrt{5}$.



17. ábra



18. ábra

1. PÉLDA. Határozzuk meg a $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$ kifejezés értékét.

Megoldás. Alkalmazzuk a szorzat hatványra emelését és a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ azonosságot:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacktriangle$$

2. PÉLDA. Oldjuk meg a következő egyenleteket: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$.

Megoldás. 1) Azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Ekkor $x = 6^2$; $x = 36$.

Felelet: 36.

2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$; $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

Felelet: 7. ▲

3. PÉLDA. Oldjuk meg az $(x - 5)^2 = 16$ egyenletet.

Megoldás. $(x - 5)^2 = 16$;

$$x - 5 = -4 \text{ vagy } x - 5 = 4;$$
$$x = 1 \text{ vagy } x = 9.$$

Felelet: 1; 9. ▲

4. PÉLDA. Oldjuk meg a $(3x - 1)^2 = 2$ egyenletet.

Megoldás. $(3x - 1)^2 = 2$;

$$3x - 1 = -\sqrt{2} \text{ vagy } 3x - 1 = \sqrt{2};$$
$$3x = 1 - \sqrt{2} \text{ vagy } 3x = 1 + \sqrt{2};$$
$$x = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \text{ vagy } x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

Felelet: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. ▲

5. PÉLDA. Az alábbi kifejezések x mely értékeire értelmezhetők: 1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x} - 2}$?

Megoldás. 1) A $\sqrt{-5x}$ kifejezés azokra az x értékekre értelmezhető, melyekre a gyök alatti kifejezés nemnegatív. A $-5x$ olyan szorzat, melyben az egyik tényező negatív. Tehát ennek a kifejezésnek abban az esetben lesz nemnegatív az értéke, ha x nempozitív.

Felelet: ha $x \leqslant 0$.

2) Az adott kifejezés olyan x értékekre értelmezhető, melyekre $\sqrt{x}$ kifejezés értelmezhető és $\sqrt{x}-2$ nem egyenlő nullával. Tehát egyszerre kell a következő két feltételnek teljesülnie: $x \geqslant 0$ és $\sqrt{x}-2 \neq 0$. Tehát $x \geqslant 0$ és $x \neq 4$.

Felelet: $x \geqslant 0$ és $x \neq 4$. ▲

6. PÉLDA. Oldjuk meg a következő egyenleteket: 1) $\sqrt{-x}+\sqrt{x-2}=2$; 2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=0$; 3) $(x+2)\sqrt{x-2}=0$.

Megoldás. 1) Az egyenlet bal oldala csak olyan x értékekre értelmezhető, melyekre mind a két gyök alatti kifejezés nemnegatív értéket vesz fel. Abból, hogy az első gyök alatti kifejezésnek nemnegatívnak kell lennie, ezért $-x \geqslant 0$, akkor $x \leqslant 0$. Könnyen belátható, hogyha $x \leqslant 0$, akkor $x - 2$ csak negatív értéket vesz fel. Tehát nincsen olyan x érték, melyre az egyenlet bal oldala értelmezhető.

Felelet: nincs megoldás.

2) Az adott egyenlet bal oldala két nemnegatív szám összege, mely csak abban az esetben lehet nullával egyenlő, ha mind a két összeadandó 0. Vagyis egyszerre kell teljesülnie, hogy $\sqrt{x^2-2x}=0$ és $\sqrt{x-2}=0$. Ez azt jelenti, hogy a két egyenlet közös megoldását kell meghatározni, meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x}=0,\\ \sqrt{x-2}=0.\end{cases}$$

Azt kapjuk, hogy $\begin{cases}x^2-2x=0,\\ x-2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)=0,\\ x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0 \text{ vagy } x=2,\\ x=2.\end{cases}$

Az utolsó egyenletrendszer megoldása az $x = 2$.

Felelet: 2.

3) Mivel a szorzat értéke csak akkor nulla, ha vagy az egyik tényező, vagy a másik tényező egyenlő nullával, ezért az egyenlet megoldása két egyenlet megoldására vezethető vissza:

$$x+2=0 \text{ vagy } \sqrt{x-2}=0;$$
$$x=-2 \text{ vagy } x=2.$$

Viszont az $x = -2$ értékre a $\sqrt{x-2}$ kifejezés nem értelmezhető, így csak egyetlen megoldás van, az $x = 2$.

Felelet: 2. ▲

?

1. Mit nevezünk az *a* szám négyzetgyökének?
2. Mit nevezünk az *a* szám számtani négyzetgyökének?
3. Hogyan jelöljük az *a* szám számtani négyzetgyökét?
4. Hogyan nevezzük a $\sqrt{\ }$ jelet?
5. Hogyan olvassuk a $\sqrt{a}$ jelölést?
6. Hogyan nevezzük a gyökjel alatt álló kifejezést?
7. Milyen értékeket vehet fel a gyök alatti kifejezés?
8. Hogyan nevezzük azt a műveletet, amikor az adott szám számtani négyzetgyökét határozzuk meg?
9. Bármely nemnegatív számra mivel egyenlő a $\left(\sqrt{a}\right)^2$ kifejezés?
10. Hány gyöke van az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a > 0$? Mivel egyenlők?
11. Van-e megoldása az $x^2 = a$ egyenletnek, ha $a = 0$? ha $a < 0$?

GYAKORLATOK

377.° Mennyi 16 négyzetgyöke? 1 négyzetgyöke? 0 négyzetgyöke? Mennyi ezen számok számtani négyzetgyöke?

378.° Igazak-e az alábbi egyenlőségek? (A feleletet indokold meg!)

1) $\sqrt{25} = 5$;   3) $\sqrt{36} = -6$;   5) $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$;
2) $\sqrt{0} = 0$;   4) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}2$;   6) $\sqrt{10} = 100$.

379.° Végezzétek el a kijelölt gyökvonást:

1) $\sqrt{9}$;   5) $\sqrt{0{,}25}$;   9) $\sqrt{400}$;   13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;
2) $\sqrt{49}$;   6) $\sqrt{0{,}01}$;   10) $\sqrt{3600}$;   14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;
3) $\sqrt{100}$;   7) $\sqrt{1{,}21}$;   11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$;   15) $\sqrt{0{,}0004}$;
4) $\sqrt{225}$;   8) $\sqrt{1{,}96}$;   12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$;   16) $\sqrt{0{,}000025}$.

380.° Végezzétek el a kijelölt gyökvonást:

1) $\sqrt{36}$;   4) $\sqrt{0{,}04}$;   7) $\sqrt{2500}$;   10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;
2) $\sqrt{64}$;   5) $\sqrt{0{,}49}$;   8) $\sqrt{10\ 000}$;   11) $\sqrt{0{,}0009}$;
3) $\sqrt{144}$;   6) $\sqrt{1{,}69}$;   9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$;   12) $\sqrt{0{,}0196}$.

381.° Értelmezhetők-e az alábbi kifejezések?

1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$.

382.° Melyik szám számtani négyzetgyöke egyenlő a következő számokkal?

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) –9.

383.° A könyv előzékén található *Természetes számok négyzete* táblázat segítségével végezd el a gyökvonást:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68{,}89}$;
2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5{,}76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;
3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14{,}44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

384.° Határozzátok meg:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9{,}61}$; 5) $\sqrt{72{,}25}$;
2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10{,}24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

385.° Számológéppel számítsátok ki a következő kifejezések értékét! Az eredményt kerekítsétek századokra!

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1{,}8}$; 5) $\sqrt{2{,}439}$.

386.° Számológéppel számítsátok ki a következő kifejezések értékét! Az eredményt kerekítsétek századokra!

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5{,}1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12{,}56}$.

387.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 4) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{4{,}2}\right)^2$; 5) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;
3) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $\left(-0{,}3\sqrt{2}\right)^2$.

388.° Számítsátok ki:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 3) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;
2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 4) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

389.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{16+9}$; 4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$;
2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$;
3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$; 6) $\sqrt{0{,}81}+\sqrt{0{,}01}$;

7) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$;

8) $-2\sqrt{0{,}16}+0{,}7$;

9) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;

10) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

12) $\sqrt{4\cdot5^2-6^2}$.

390.° Számítsátok ki a következő kifejezések pontos értékét:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$;

2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$;

3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$;

4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0{,}2\sqrt{1600}$;

5) $(2\sqrt{6})^2-3(\sqrt{21})^2$;

6) $\sqrt{10^2-4\cdot3^2}$.

391.° Határozzátok meg a következő kifejezések helyettesítési értékét a változó megadott értékénél:

1) $\sqrt{12+a}$, ha $a = 0{,}25$;

2) $\sqrt{7-3b}$, ha $b = 2$;

3) $\sqrt{2a-b}$, ha $a = 34$, $b = 19$;

4) $\frac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$, ha $a=-\frac{1}{2}$, $b=-0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$.

392.° Határozzátok meg a következő kifejezések helyettesítési értékét a változó megadott értékénél:

1) $\sqrt{27+m}$, ha $m = 54$;

2) $\sqrt{m-3n}$, ha $m = 0{,}13$, $n=-0{,}04$.

393.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x}=9$; 2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$; 3) $\sqrt{x}-0{,}2=0$; 4) $\sqrt{x}+7=0$.

394.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

395.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0{,}49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = -25$.

396.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 = 100$; 2) $x^2 = 0{,}81$; 3) $x^2 = 7$; 4) $x^2 = 3{,}6$.

397.• Határozzátok meg a következő kifejezések pontos értékét:

1) $-0{,}06\cdot\sqrt{10\,000}+\frac{8}{\sqrt{256}}-2{,}5\sqrt{3{,}24}$;

2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{6{,}25}+\sqrt{2^3+17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}+3\sqrt{7\frac{1}{9}}-0{,}6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;

5) $\left(3\sqrt{8}\right)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2-2\left(\sqrt{24}\right)^2$;

6) $\sqrt{144}:\sqrt{0{,}04}-\sqrt{2{,}56}\cdot\sqrt{2500}$.

398.• Határozzátok meg a következő kifejezések pontos értékét:

1) $0{,}15\sqrt{3600}-0{,}18\sqrt{400}+\left(10\sqrt{0{,}08}\right)^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}}-\frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}}+\sqrt{8^2+15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{1{,}44}}{3}\cdot\sqrt{12{,}25}\right):\left(0{,}1\sqrt{13}\right)^2$.

399.• Az alábbi kifejezéseknek az x mely értékeinél van értelme?

1) $\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{x-8}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 13) $\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}}$;

2) $\sqrt{-x}$; 6) $\sqrt{8-x}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$; 14) $\sqrt{|x|}$;

3) $\sqrt{x^2}$; 7) $\sqrt{x^2+8}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$; 15) $\sqrt{-|x|}$;

4) $\sqrt{-x^2}$; 8) $\sqrt{(x-8)^2}$; 12) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$; 16) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

400.• Az alábbi kifejezéseknek az y mely értékeinél van értelme?

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{y}-1}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{y}+1}$.

401.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{5x}-4=0$; 3) $\sqrt{5x-4}=6$; 5) $\frac{18}{\sqrt{x}+3}=9$;

2) $\sqrt{5x-4}=0$; 4) $\frac{42}{\sqrt{x}}=6$; 6) $\sqrt{x^2-36}=8$.

402.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$; 3) $\frac{4}{\sqrt{x}-5}=6$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$; 4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

403.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $(x+6)^2=0$; 2) $(x+6)^2=9$; 3) $(x+6)^2=3$; 4) $(7x+6)^2=5$.

404.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

405.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$;

406.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

407.•• Az alábbi kifejezések az a és a b mely értékeire van értelmezve?

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$.

408.•• Igaz-e, hogy az alábbi kifejezéseknek az x bármely értékénél értelme van?

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$; 2) $\sqrt{x^2-4x+5}$.

409.•• Bizonyítsátok be, hogy nem létezik olyan x érték, melyre a $\sqrt{-x^2+6x-12}$ kifejezés értelmezhető!

410.•• Az alábbi kifejezések közül melyik értelmezhető minden x értékre?

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$; 2) $\sqrt{x^2-10x+27}$.

411.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{x}=-x$; 4) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$; 5) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;

3) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$; 6) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

412.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$; 3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$; 4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

413.•• Az a mely értékeire lesz az $x^2 = a + 1$ egyenletnek:

1) két gyöke; 3) nincs megoldása?

2) egy gyöke;

414.•• Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

1) $y=\sqrt{-x^2}$; 2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$; 3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

415.•• Ábrázoljátok az $y=\sqrt{2x-1-x^2}-1$ függvényt!

416.* Oldjátok meg a következő egyenleteket! Vegyétek figyelembe az a különböző értékeit!

1) $a\sqrt{x-1}=0$; 3) $a\sqrt{x-1}=a$;

2) $\sqrt{(a-1)\,x}=0$; 4) $\sqrt{x-2}=a$.

417.* Az a mely értékénél van a $\left(\sqrt{x}-1\right)(x-a)=0$ egyenletnek csak egy gyöke?

ISMÉTLŐ FELADATOK

418. Egy utcában a házakat sorban1-től 24-ig számozták. Hányszor kellett használni a házszámok elkészítéséhez az 1-es számjegyet?

419. Egyszerűsítsétek az $\left(\frac{a}{a^2-25}+\frac{5}{5-a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{28-a^2}{a+5}+a-5\right)$ kifejezést!

420. Egy munkás heti bérét, a 420 hrivnyát 5 és 20 hrivnyás címletekben vette fel. Mennyit kapott a különböző címletekből, ha összesen 31 címlettel fizették ki?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

421. Keressétek meg az összes olyan háromjegyű természetes n számot, melyben a számjegyek összege az n számnál 11-szer kisebb!

Teremhetnek-e a veteményesekben gyökök?

Az ókori görögök a gyökvonást az adott területű négyzet oldalhosszának meghatározásával azonosították, épp ezért oldalnak nevezték.

A hindi nyelvben a „mula” szó eredetet, alapot és a fa gyökerét is jelentette. Ezt a szót használták a négyzet oldalára is. Elképzelhető, hogy azon asszociáció alapján, hogy a négyzet oldalára, mint gyökérre nő ki a négyzet. Lehetséges, hogy épp ezért a latin nyelvben is egy szó, a „radix” jelentette az oldalt és a gyökeret is. Ettől a szótól ered a szláv „ radikál” szakkifejezés.

René Descartes
(1596–1650)

A *radix* latin szó egyik jelentése gyökértermés, tehát olyan zöldség, melynek a gyökerét étkezésre használják.

A XIII–XV. században az európai matematikusok a *radix* szó rövidítésével jelölték a négyzetgyököt: R, ℞, R^2. Tehát a $\sqrt{7}$ kifejezést ebben a korban R^27 alakban írták.

A XVI. században kezdték használni a √ jelet. A jel eredete elég bizonytalan, lehet hogy összefüggésbe hozható a latin írott *r* betűvel.

A XVII. században René Descartes használta először a $\sqrt{\ }$ jelet, kiegészítve az addig használatosat egy függőleges vonallal.

Az első ukrajnai matematikai olimpia első feladata

A 391. (4) feladat azért is figyelemre méltó, mert 1935-ben az első matematikai olimpia feladatsora ezen feladat feltételeivel kezdődött. A matematikai olimpiák kezdeményezője Mihajlo Pilipovics Kravcsuk[1], ismert ukrán matematikus volt.

Azóta több mint 80 év telt el. Ez alatt az időszak alatt több tehetséges gyerek számára ezek az olimpiák jelentették az első lépéseket a tudomány felé. Ma már O. V. Pogorelov, M. G Krein, M. A Krasznoszelszkij. V. G. Drinfeld a tudomány világában ismert nevek. Ezek a tudósok különböző korok diákolimpiáinak győztesei.

Megelégedéssel megállapíthatjuk, hogy a matematikaversenyek napjainkban is népszerűek. Több tízezren vesznek részt a különböző fordulókon. A versenyek szervezésébe, lebonyolításába be vannak vonva a legelhivatottabb tudósok, módszertanos tanárok. Nekik köszönhetően országunk csapata tisztességesen helytáll a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián.

Kedves nyolcadikosok ajánljuk nektek is, hogy ti is vegyetek részt ezeken a tanulmányi versenyeken.

[1] Az előzéken látható M. P. Kravcsuk szobra, amely Ukrajna Nemzeti Műszaki Egyetemén van felállítva Kijevben. Ez az oktatási intézmény kétévente megrendezi meg az M. P. Kravcsukról elnevezett nemzetközi tudományos konferenciát.

13. Halmazok és elemeik. Részhalmazok

Gyakran használjuk a báránycsorda, virágcsokor, bélyeggyűjtemény, halraj, madárraj, méhraj, képgyűjtemény, tollkészlet, baráti társaság szókapcsolatokat.

Ha ezekben a szókapcsolatokban összekeverjük az utótagokat, akkor mulatságos kifejezéseket kapunk: báránycsokor, képraj, madárcsorda, baráti gyűjtemény. Viszont a halgyűjtemény, madárgyűjtemény már ismert fogalmak. Tehát a gyűjtemény szó elég elterjedt. Ugyanakkor a matematikában létezik egy olyan fogalom, amellyel helyettesíthető az összes gyűjtőfogalom. Ez a fogalom a **halmaz**.

Lássunk még néhány példát halmazra:

- a mi osztályunk tanulóinak halmaza;
- a Naprendszer bolygóinak halmaza;
- a kétjegyű számok halmaza;
- azon $(x; y)$ számpárok halmaza, melyek gyökei az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet.

A legfontosabb halmazoknak általánosan elfogadott neve és jelölése van:

- a sík pontjainak halmaza – **mértani alakzat**;
- adott tulajdonsággal rendelkező pontok halmaza – **pontok mértani helye**;
- az f függvény argumentumainak halmaza – **az *f* függvény értelmezési tartománya** $D(f)$;
- az f függvényértékek halmaza – **az *f* függvény értékkészlete** $E(f)$.

A halmazokat a latin ábécé nyomtatott nagybetűivel jelöljük: A, B, C, D és így tovább.

A halmazba tartozó objektumok a **halmaz elemei**. A halmaz elemeit a latin ábécé írott kisbetűivel jelöljük: a, b, c, d és így tovább.

Ha a eleme az A halmaznak, akkor így írjuk: $a \in A$ (olvassuk: a eleme az A halmaznak).

Ha b nem eleme az A halmaznak, akkor így írjuk: $b \notin A$ (olvassuk: b nem eleme az A halmaznak). Ha az A halmaznak három eleme van, a, b és c, akkor így írjuk $A = \{a, b, c\}$.

Ha az M halmaz a 6 természetes osztóinak a halmaza, akkor $M = \{1, 2, 3, 6\}$. A 6 összetett osztóinak a halmaza: $\{6\}$. Ez a halmaz **egyelemű**.

A halmazt elemei felsorolásával akkor célszerű megadni, ha nem túl sok elemről van szó.

Meghatározás. Két A és B halmaz akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, vagyis az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, és fordítva is, a B halmaz minden eleme az A halmaznak is eleme.

Ha az A és B halmaz egyenlő, így írjuk: $A = B$.

A meghatározásból következik, hogy ***egy halmazt egyértelműen megadnak az elemei***. Ha az elemeket kapcsos zárójelbe írjuk, akkor az elemek sorrendjének nincs jelentősége. Tehát egy háromelemű halmaz hatféleképpen írható fel:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Mivel az egyenlő halmazok meghatározásából következik, hogy $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$ halmazzal, ezért az elkövetkezendőekben elfogadjuk, hogy a halmaz elemi különbözők. Tehát a kozmosz szó betűinek halmaza: {k, o, z, m, s, r}.

Megjegyezzük, hogy az $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Az $\{a\}$ halmaznak egy eleme van az a; az $\{\{a\}\}$ halmaznak egy eleme van, az $\{a\}$ halmaz.

Egy halmazt kétféleképpen adhatunk meg.

Első megadási mód: felsoroljuk a halmaz összes elemét. Ezt a megadási módot, már alkalmaztuk, amikor kapcsos zárójelben felsoroltuk a halmaz elemeit. Könnyen belátható, hogy így minden halmaz nem adható meg. Például a páros számok halmaza ilyen.

Második megadási mód: megnevezzük az elemek jellemző közös tulajdonságát, tehát azt a tulajdonságot, mely mindegyik elemet jellemzi. Például azon természetes számok halmaza, melyek 2-vel való osztási maradéka 1, a páratlan számok halmazát adja meg.

Ha a halmazt elemeik közös tulajdonságának megnevezésével adjuk meg, akkor előfordulhat, hogy egyetlen objektum sem rendelkezik ilyen tulajdonságokkal.

Térjünk vissza a példákhoz:

- 1, 2 és 5 számokkal arányos oldalhosszúságú háromszögek halmaza. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy ennek a halmaznak egyetlen eleme sincs.

- Jelöljük A-val az osztályotok sakkmestereinek halmazát. Előfordulhat, hogy ennek a halmaznak sincs eleme.
- Tetszőleges egyenlet gyökeinek halmaza esetén is figyelembe kell venni, lehetséges, hogy az egyenletnek nincs gyöke.

A felhozott példák arra utalnak, hogy a halmazokhoz kell sorolnunk még egy jellegzetes halmazt, amelynek egy eleme sincs. Ezt a halmazt **üres halmaznak** nevezzük. Így jelöljük: $\varnothing$.

Megjegyezzük, hogy $\{\varnothing\}$ nem üres halmaz, ugyanis van egy eleme, az üres halmaz.

Tekintsük az arab számírás számjegyeinek halmazát: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Írjuk ki az A halmazból a páros számjegyeket. Egy másik halmazt kapunk: $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, melynek minden eleme az A halmaznak is eleme.

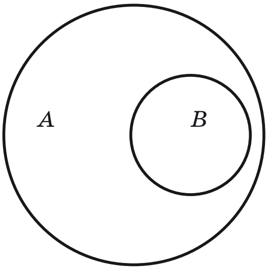
Meghatározás. **A B halmazt az A halmaz részhalmazának nevezzük, ha a B halmaz minden eleme az A-nak is eleme.**

Így jelöljük: $B \subset A$ vagy $A \supset B$. Így olvassuk: a B halmaz részhalmaza az A halmaznak, az A halmaz magába foglalja a B halmazt.

Tekintsünk át néhány példát:

- az osztályod tanulóinak halmaza részhalmaza az iskolád tanulói halmazának;
- az emlősök a gerincesek részhalmaza;
- a CB félegyenes részhalmaza az AB egyenesnek (19. ábra);
- a téglalapok részhalmaza a paralelogrammáknak;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

19. ábra



20. ábra

A halmazok közötti kapcsolat szemléltetésére **Venn-** vagy **Euler-diagramot** alkalmaznak.

A 20. ábrán ábrázolták az A halmazt (a nagyobbik kör) és a B halmazt (a kisebbik kört, ami a nagyobbikban van). Ez azt jelenti, hogy $B \subset A$ (vagy $A \supset B$).

A részhalmaz és az egyenlő halmazok meghatározásából következik, $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.

Ha a B halmaznak nincs olyan eleme, ami ne lenne eleme az A halmaznak is, akkor a B halmaz az A halmaz részhalmaza. Épp ezért az üres halmaz minden halmaz részhalmaza. Valóban, az üres halmaznak egyetlen eleme sincs, tehát egyetlen olyan eleme sincs, amelyik ne lenne eleme az A halmaznak. Tehát bármelyik tetszőleges halmazra igaz a következő állítás: $\varnothing \subset A$.

Minden halmaz részhalmaza önmagának: $A \subset A$.

PÉLDA. Írd le az $A = \{a, b, c\}$ összes részhalmazát.

Megoldás. $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. ▲

?

1. Hogyan jelöljük a halmazokat és elemeiket?
2. Hogyan jelöljük a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét?
3. Hogyan kell leírni, hogy eleme vagy nem eleme a halmaznak?
4. Mely halmazok egyenlők?
5. Hogyan adhatunk meg egy halmazt?
6. Mit nevezzük üres halmaznak? Hogyan jelöljük?
7. Mi a részhalmaz?
8. Hogyan szemléltetjük a halmazok közötti kapcsolatot?
9. Melyik halmaz részhalmaza az összes halmaznak?

GYAKORLATOK

422.° Hogyan hívjuk a szög száraitól azonos távolságra lévő pontok halmazát?

423.° Hogyan hívjuk azon farkasok csapatát, amik egy vezérhez tartoznak?

424.° Nevezzétek meg iskolátok tanulóinak egyik halmazát!

425.° Hogyan nevezzük az egy iskolában dolgozó tanárok halmazát?

426.° Adva van az $f(x) = x^2$ függvény. Helyettesítsétek a csillagokat $\in$ vagy $\notin$ jellel úgy, hogy az alábbi állítások igazak legyenek:

1) $3 * D(f)$; 2) $0 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 4) $-\frac{1}{2} * E(f)$.

427.° Az alábbi állítások közül melyek teljesülnek?

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

428.° Írjátok le az alábbi egyenletek megoldáshalmazait:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

429.° Adjátok meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával:

1) azokat a valódi törteket, melyek nevezője 7;
2) azokat a valódi törteket, melyek nevezője nem nagyobb mint 4;
3) a *matematika* szó betűi;
4) az 5555 szám számjegyei!

430.° Nevezzétek meg osztályod tanulóinak néhány részhalmazát!

431.° Legyen az A halmaz a *koordináta* szó betűinek halmaza. Az alábbi szavak közül mely szavak betűi lesznek az A halmaz részhalmazai?

1) tinó; 5) árad; 9) ordináta;
2) tanár; 6) átitat; 10) tarka;
3) ordít; 7) orr; 11) robot;
4) orkán; 8) tanoda; 12) akarat.

432.° Legyen az A halmaz az 1958 szám számjegyeinek halmaza. Az alábbi számok közül mely számjegyeinek halmaza részhalmaza az A halmaznak?

1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\,888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\,258$.

433.° Legyen az $A \neq \varnothing$. Milyen két különböző részhalmaza van biztosan ennek a halmaznak?

434.• Egyenlő-e az A és a B halmaz?

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$; 3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;

435.• Egyenlő-e az A és a B halmaz, ha:

1) az A halmaz az $|x| = x$ egyenlet gyökeinek halmaza, a B halmaz pedig a nemnegatív számok halmaza;
2) az A halmaz azon négyszögek halmaza, melyek szemben fekvő oldalai páronként egyenlők, a B halmaz azon négyszögek halmaza, melyek átlói metszéspontjukban felezik egymást?

436.• Az alábbi halmazok közül melyik üres halmaz:

1) azon háromszögek halmaza, melyek belső szögeinek összege 180°;
2) a 8800 m-nél magasabb hegycsúcsok halmaza;
3) azon hegyesszögű háromszögek halmaza, melyekben a súlyvonal hossza egyenlő azon oldal hosszával, amelyre húzva van;
4) azon függvények halmaza, melyek grafikonja egy körvonal?

437.• Bizonyítsátok be, ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$!

438.• Rendezzétek az alábbi halmazokat olyan sorrendbe, hogy minden halmaz a következő halmaz részhalmaza legyen:
1) A halmaz a téglalapok halmaza, B halmaz a négyszögek halmaza, C halmaz a négyzeteké, D halmaz a paralelogrammáké;
2) A halmaz az emlősök halmaza, B a kutyafélék halmaza, C a gerincesek halmaza, D a farkasfélék halmaza, E a ragadozó emlősök halmaza!

ISMÉTLŐ FELADATOK

439. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:
1) $\frac{5b}{b-3} - \frac{b+6}{2b-6} \cdot \frac{90}{b^2+6b}$; 2) $\frac{b+2}{b^2-2b+1} : \frac{b^2-4}{3b-3} - \frac{3}{b-2}$.

440. Egy motorcsónak 36 km-t tett meg a folyón lefelé, majd felfelé 3 óra alatt 36,8 km-t. Mekkora a folyó sebessége?

441. Egy dobozban 42 ceruza van, 14 piros és 16 kék, a többi pedig zöld. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen kivett ceruza nem piros és nem kék?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

442. Péter és Demeter minden nap leír egy számot. Az első nap mindketten az 1-es számot írták le. Minden következő napon Péter egy 1-est ír, Demeter pedig az előző napon leírt számok összegét. Lehetséges-e, hogy Demeter egyszer egy olyan számot írjon, mely utolsó számjegyei 101?

14. Számhalmazok

A természetes számok azok a számok, melyeket először használt az emberiség. Ezekkel a számokkal akkor ismerkedtetek meg, amikor a tárgyak megszámlálásával foglalkoztatok. Az összes természetes szám alkotja a **természetes számok halmazát**, melyet $\mathbb{N}$ betűvel jelölünk.

A gyakorlati szükség vezetett a törtszámok kialakulásához. Később elengedhetetlenné vált olyan mennyiségek vizsgálata, melyek jellemzésére nem volt elegendő a pozitív számok ismerete. Így alakult ki a negatív szám.

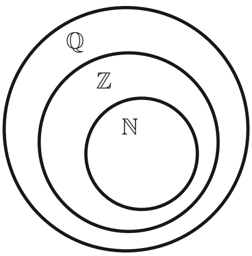
A természetes számok, azok ellentettjei és a nulla alkotják az **egész számok halmazát**, melyet $\mathbb{Z}$-vel jelölünk.

Például $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$.

A természetes számok halmaza részhalmaza az egész számok halmazának, vagyis $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Az egész és a törtszámok (negatív és pozitív törtek) alkotják a **racionális számok halmazát**, melyet $\mathbb{Q}$ betűvel jelölünk. Például $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $-0{,}2 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $15 \in \mathbb{Q}$.

Könnyen belátható, hogy $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. A 21. ábra szemlélteti az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ halmazok viszonyát.



21. ábra

Bármely racionális szám felírható $\frac{m}{n}$ alakban, ahol m egész szám, n pedig természetes szám. Például: $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0{,}2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $5{,}3 = \frac{53}{10}$. Lehetséges, hogy ebből az értelmezésből ered a racionális kifejezés, mert a latin *rationis* szó egyik jelentése hányados, arány.

A 6. osztályban már tanultátok, hogy bármely racionális szám felírható vagy véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban. Az $\frac{m}{n}$ tizedes tört alakját felírhatjuk, ha m-et elosztjuk n-nel.

Például: $\frac{5}{8} = 0{,}625$, $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$.

Az $\frac{5}{8}$-ad véges tizedes tört alakban írható le, $\frac{5}{11}$-ed végtelen szakaszos tizedes tört alakban. A 0,454545... számban a 4-es és az 5-ös számjegy periodikusan ismétlődik. Az ismétlődő számok csoportját **szakasznak** nevezzük, és zárójelbe tesszük: 0,454545… = 0,(45), vagyis $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Megjegyezzük, hogy bármely véges tizedes tört és bármely egész szám felírható végtelen szakaszos tizedes tört alakban. Például:

0,625 = 0,6250000… = 0,625(0);

2 = 2,000… = 2,(0).

Tehát bármely racionális szám felírható végtelen szakaszos tizedes tört alakban.

Igaz az az állítás is, hogy ***bármely végtelen szakaszos tizedes tört egy racionális szám másik alakja.***

A 9. osztályban fogjátok majd megtanulni, hogyan kell a végtelen szakaszos tizedes törtet racionális tört alakban megadni.

Két természetes szám összege és szorzata is természetes szám. A különbségükre ez már nem helytálló. Két természetes szám különbsége nem mindig természetes szám. Például: $(5-7) \notin \mathbb{N}$.

Két egész szám összege, különbsége és szorzata is egész szám. A hányadosra ez már nem érvényes: $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$.

Két racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa (a nullával való osztás kivételével) is racionális szám.

Tehát a kivonás kivezet a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazából, az osztás az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazából. Viszont a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza zárt halmaz a négy alapműveletre.

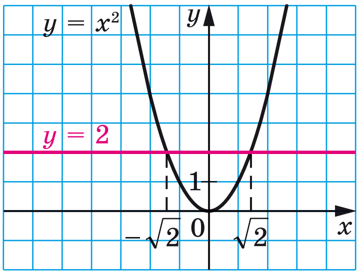
De most ismerkedtetek meg egy új művelettel, a gyökvonással. Felmerül a kérdés, bármely racionális szám négyzetgyöke racionális szám-e, azaz a gyökvonásra zárt halmaz-e a racionális számok halmaza?

Vizsgáljuk meg az $x^2 = 2$ egyenletet. Mivel $2 > 0$, ezért az egyenletnek két gyöke van, a $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ (22. ábra). *Nem létezik olyan racionális szám, melynek négyzete 2* (a bizonyítást elolvashatod a *Ha elkészültél a házi feladattal* című fejezetben *Az irracionális számok felfedezése* címszó alatt), tehát a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ számok nem racionálisak. Ezeket a számokat **irracionális** számoknak nevezzük (az *ir* előtag a tagadás szava, vagyis nem racionális).

Tehát a gyökvonás kivezethet a racionális számok $\mathbb{Q}$halmazából.

Egyetlen irracionális szám se írható fel $\frac{m}{n}$ alakban, ahol $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$, tehát nem írható fel végtelen szakaszos tizedes törtként.

Az irracionális számok **végtelen nem szakaszos** tizedes törtek.



22. ábra

Például számítógépes programmal megállapítható, hogy

$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots$.

A $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ nem az első irracionális számok, amivel már idáig találkoztatok. A π szám, a körvonal hosszának és átmerőjének az aránya is irracionális szám:

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716 93\ldots$.

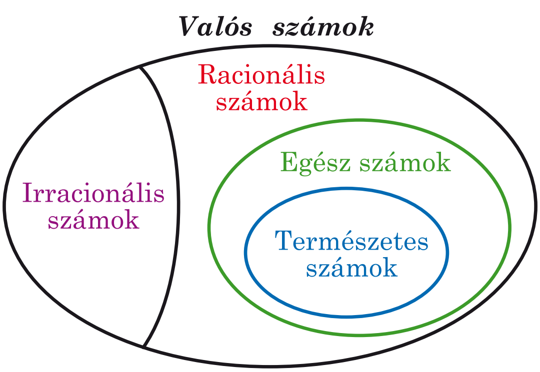
Nemcsak a gyökvonás eredménye lehet irracionális szám, hanem bármely nem szakaszos tizedes tört is. Akár magunk is alkothatunk ilyen törtet.

Például a 0,1010010001000…szám is irracionális (a tizedes vessző után tíz hatványait írjuk). Könnyen belátható, ha feltételezzük, hogy ennek a törtnek van szakasza, akkor valamelyik helyi értéktől kezdődően csak nullák lehetnek. Ez viszont ellentmond a konstrukciós elvnek.

A racionális és az irracionális számok alkotják a **valós számok halmazát**, melyet $\mathbb{R}$-rel jelölünk (a latin *reál* szó első betűje, *az, ami valóban létezik*).

Tehát az $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ lánc bővíthető: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Az ebben a fejezetben tanult számhalmazok közötti összefüggést a 23. ábra szemlélteti.



21. ábra

Egy szakasz hossza mindig kifejezhető egy valós számmal. Ez a megállapítás köti össze a valós számokat a számegyenes pontjaival. Az O ponthoz, a számlálás kezdőpontjához rendeljük hozzá a 0-át. A számegyenes minden, az O ponttól különböző A pontjának feleltessük meg az OA szakasz hosszát, ha az az O ponttól jobbra van és az OA szakasz hosszának ellentett értéke, ha az A pont az O ponttól balra van. Könnyen belátható, hogy minden valós számnak megfelel egy pont a számegyenesen.

A valós számok halmaza mind a négy alapműveletre zárt halmaz (kivéve a nullával való osztást). Ezekre a műveletekre a számotokra már ismert tulajdonságok érvényesek.

$a + b = b + a$	Az összeadás felcserélhetőségi tulajdonsága
$ab = ba$	A szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Az összeadás csoportosítási tulajdonsága
$(ab)\, c = a\, (bc)$	A szorzás csoportosítási tulajdonsága
$a\, (b + c) = ab + ac$	A szorzás széttagolási tulajdonsága

A valós számok összehasonlítását a tizedes törtekre alkalmazott szabály szerint végezzük, tehát a megfelelő helyi értéken álló számjegyek alaki értékét hasonlítjuk össze. Például: 7,853126… < 7,853211... .

Bármelyik pozitív valós szám mindig nagyobb, mint a nulla, és nagyobb, mint bármelyik negatív szám. Bármelyik negatív szám mindig kisebb, mint a nulla. Két negatív szám közül az a nagyobb, amelyik abszolút értéke kisebb.

Ha feltüntetünk két valós számot a számegyenesen, akkor a kisebbik szám mindig balra fog elhelyezkedni a nagyobbiktól.

A körvonal hosszának meghatározásakor a π értékét két tizedesjegyre **kerekítve használjuk** π ($\pi \approx 3{,}14$). Hasonlóan, ha valós számokat tartalmazó kifejezés értékét kell meghatározni, akkor az irracionális számokat közelítő értékeikkel helyettesítjük. Például: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ vagy $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Az első esetben lefelé kerekítettünk ezrednyi pontossággal, míg a második esetben felfelé ugyanilyen pontossággal. Bővebben a közelítő értékekkel a 9. osztályban fogtok találkozni.

Végül megjegyezzük, hogy bármely nemnegatív valós szám négyzetgyöke valós szám. Tehát a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza a gyökvonásra zárt halmaz.

?

1. Mely számok alkotják az egész számok halmazát?
2. Milyen betűvel jelöljük az egész számok halmazát?
3. Mely számok alkotják a racionális számok halmazát?
4. Milyen betűvel jelöljük a racionális számok halmazát?
5. Milyen alakban írható fel bármely racionális szám?
6. Milyen összefüggés van a racionális számok és a végtelen szakaszos tizedes törtek között?
7. Hogyan hívjuk azokat a számokat, amelyek nem racionálisak?
8. Mely halmazok egyesítése alkotja a valós számok halmazát?
9. Milyen betűvel jelöljük a valós számok halmazát?
10. Milyen összefüggés van az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ számhalmazok között?

GYAKORLATOK

443.° Az alábbi állítások közül melyik hamis:
1) a –3 valós szám;
2) a –3 racionális szám;
3) a –3 egész szám;
4) a –3 természetes szám?

444.° Igazak-e az alábbi állítások?
1) $1 \in \mathbb{N}$;
2) $1 \in \mathbb{Z}$;
3) $1 \in \mathbb{Q}$;
4) $1 \in \mathbb{R}$;
5) $-2{,}3 \in \mathbb{N}$;
6) $-2{,}3 \in \mathbb{R}$;
7) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$;
8) $\sqrt{121} \notin \mathbb{R}$;
9) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$.

445.° Igazak-e az alábbi állítások?
1) $0 \in \mathbb{N}$;
2) $0 \notin \mathbb{Z}$;
3) $0 \in \mathbb{R}$;
4) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$;
5) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$;
6) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$;
7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$;
8) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$.

446.° Igazak-e az alábbi állítások:
1) minden természetes szám egész szám;
2) minden természetes szám racionális szám;
3) minden természetes szám valós szám;
4) minden racionális szám egész szám;
5) minden valós szám racionális szám;
6) minden racionális szám valós szám;
7) minden irracionális szám valós szám;
8) minden valós szám vagy racionális vagy irracionális szám?

447.° Az alábbi számok közül melyek egy racionális szám tizedes tört alakja és melyek irracionális számok:
1) 0,(3);
2) 0,4(32);

3) 0,20200200020... (a 2-es számjegyek közötti nullák száma eggyel nő)?

448.° Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:

1) 6,542... és 6,452...; 2) –24,064... és –24,165... .

449.° Hasonlítsátok össze az alábbi számokat :

1) 0,234... és 0,225...; 2) –1,333... és –1,345... .

450.° Számológép segítségével adjátok meg $\sqrt{3}$ századokra kerekített értékét: 1) felfelé kerekítve; 2) lefelé kerekítve!

451.° Számológép segítségével adjátok meg $\sqrt{5}$ századokra kerekített értékét: 1) felfelé kerekítve; 2) lefelé kerekítve!

452.• Nevezzétek meg az a-nak legalább egy olyan értékét, melynél az $x^2 = a$ egyenletnek:

1) két racionális gyöke van;
2) két irracionális gyöke van;
3) nincs megoldása!

453.• Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:

1) $\frac{43}{7}$ és 6,12; 4) –2,(36) és –2,36;
2) 3,(24) és 3,24; 5) 7,(18) és 7,(17).
3) π és 3,(14);

454.• Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:

1) $\frac{1}{6}$ és 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ és 0,77; 3) –1,(645) és –1,(643).

455.• Rendezzétek csökkenő sorrendbe a 3,(16); π ; –1,82…; –0,08…; 2,(136) számokat!

456.• Rendezzétek növekvő sorrendbe a következő számokat: 1,57; 1,571…; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572)!

457.•• Igazoljátok, hogy két racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám!

458.•• Igazoljátok, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális!

459.•• Igaz-e, hogy:

1) bármelyik két irracionális szám összege irracionális;
2) bármelyik két irracionális szám szorzata irracionális;
3) bármelyik irracionális és bármelyik racionális szám szorzata irracionális?

ISMÉTLŐ FELADATOK

460. Egy kilencszintes épület minden szintjén és minden lépcsőházában 8 lakás van. Hányadik lépcsőház, melyik szintjén van a 186. lakás?

461. Az a és b természetes számok közül az a páros szám, a b pedig páratlan. Az alábbi kifejezések közül melyik értéke nem lehet természetes szám?

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$.

462. Igazoljátok, hogy a változó minden megengedett értékére a

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}$$

kifejezés értéke független az a változó értékétől!

463. Egy vödörben néhány liter víz van. Ha kiöntjük a vödörben lévő víz felét, akkor 14 literrel kevesebb víz marad benne, mint amennyi belefér. Ha 4 liter vizet hozzáöntünk, akkor a vödör űrtartalmának $\frac{2}{3}$-a lesz tele vízzel. Hány literes a vödör?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

464. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $|-3{,}5|-|2{,}6|$; 2) $|-9{,}6|-|-32|$.

465. Melyik szám abszolút értéke 6?

466. Mely számokra igazak az alábbi egyenlőségek?

1) $|a|=a$; 3) $|a|=|-a|$;

2) $|a|=-a$; 4) $|a|=-|a|$.

467. Mely számokra igazak egyszerre az alábbi egyenlőségek?

$$|a|=a \text{ és } |a|=-a.$$

468. Határozzátok meg az a^2, $(-a)^2$ és $|a|^2$ kifejezések helyettesítési értékeit, ha $a=-8$ és $a=7$! Vonjatok le következtetést!

469. Ismeretes, hogy $a>0$ és $c<0$. Hasonlítsátok össze az alábbi kifejezéseket nullával:

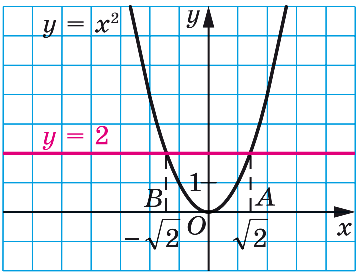
1) a^3c^4; 2) ac^5.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

470. Egy század katonái közül minden éjszaka hárman őrködnek! Meg lehet-e szervezni úgy a szolgálatot, hogy egy idő után minden katona pontosan egyszer őrködjön a többi katonával?

Az irracionalitás felfedezése

A 14. pontban az $x^2 = 2$ egyenlet megoldása során megállapítottuk, hogy az OA és OB szakaszok hossza $\sqrt{2}$ (24. ábra). Megmutatjuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám.



24. ábra

Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám. Akkor felírhatjuk $\frac{m}{n}$ egyszerűsíthetetlen tört alakban, ahol m és n természetes szám. Azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

De akkor $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$; $2 = \frac{m^2}{n^2}$; $m^2 = 2n^2$.

Az utolsó egyenlőségből következik, hogy m^2 páros. De ez azt jelenti, hogy akkor m is páros szám. Tehát m felírható $2k$ alakban: $m = 2k$, ahol k természetes szám. Felírhatjuk, hogy $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Ebből viszont az következik, hogy n^2 páros, tehát n is páros szám.

Vagyis az $\frac{m}{n}$ tört számlálója és nevezője is páros, tehát a tört egyszerűsíthető. Ez viszont ellentmond eredeti feltételezésünknek.

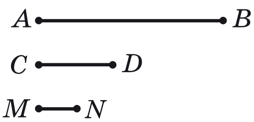
Az előző példa (a 24. ábrán az OA és OB szakaszok hossza) szemlélteti, hogy létezik olyan szakasz, melynek a hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni, tehát a *szakaszok mérésére nem elegendők a racionális számok*.

Ezt a tényt az ókori Görögországban, Püthagorasz iskolájában fedezték fel.

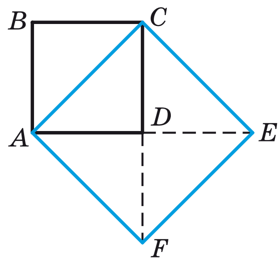
Először a püthagoreusok úgy vélték, bármilyen AB és CD szakaszhoz lelhető olyan MN szakasz, amely maradék nélkül néhányszor rámérhető az adott szakaszokra. Ebből következik, bármely két szakasz aránya kifejezhető természetes számok hányadosaként, vagyis racionális számmal.

Például a 25. ábrán $AB = 5MN$ és $CD = 2MN$, így $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Az MN szakaszt az AB és a CD szakaszok **közös mértékének** nevezzük.

Ha két szakasznak létezik közös mértéke, akkor a szakaszokat **összemérhetőknek** nevezzük. Például az AB és CD szakaszok (25. ábra) összemérhetők.



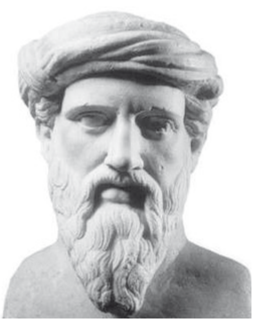
25. ábra



26. ábra

Az ókori görögök úgy tekintették, hogy bármely két szakasz összemérhető, és ez lehetőséget adott arra, hogy bármely szakasz hosszát racionális számmal fejezzék ki.

Valóban, ha az AB szakaszt egységnyi szakasznak választjuk, akkor az AB szakaszra és bármely CD szakaszra létezik olyan e szakasz, amely az adott szakaszok közös mértéke. Tehát $AB = ne$ és $CD = me$, ahol m és n természetes szám. Vagyis $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Mivel $AB = 1$, így $CD = \frac{m}{n}$.



Püthagorasz
(i. e. 570 körül–
500 körül)

Maguk a püthagoreusok fedezték fel, hogy a négyzet átlója és oldala összemérhetetlen, „aszszümetron”. Tehát ha a négyzet oldalát vesszük egységnek, akkor az átló hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni.

Ahhoz, hogy ezt bebizonyítsuk, vegyünk egy tetszőleges $ABCD$ négyzetet, melynek az oldalát tekintsük egységnek. A négyzet területe $AB^2 = 1$. Szerkesszünk az AC átlóra $ACEF$ négyzetet (26. ábra). Nyilvánvaló, hogy az $ACEF$ négyzet területe 2-szer nagyobb az $ABCD$ négyzet területénél. Mivel $AC^2 = 2$, innen $AC = \sqrt{2}$. Tehát az AC átló hosszát nem lehet racionális számmal kifejezni.

Ez a felfedezés megváltoztatta az ókori tudósok egyik posztulátumát, amely azt mondta ki, hogy bármelyik két mennyiség aránya kifejezhető két egész szám hányadosaként.

Egy legenda szerint ezt a felfedezést a püthagoreusok a legnagyobb titokban tartották, és azt az embert, aki elmondta, azt az istenek megbüntették. Hajókatasztrófában halt meg.

GYAKORLATOK

1. Bizonyítsátok be, hogy a $\sqrt{3}$ irracionális szám!

2. Igazoljátok, ha egy természetes n szám nem négyzetszám, akkor $\sqrt{n}$ irracionális szám!

15. A számtani négyzetgyök tulajdonságai

Könnyű belátni, hogy $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt{1{,}4^2}=1{,}4$, $\sqrt{0^2}=0$. Azt hihetnénk, hogy $\sqrt{a^2}=a$. De ez nem így van. Például a $\sqrt{(-5)^2}=-5$ egyenlőség nem igaz, mivel $-5 < 0$. Valójában $\sqrt{(-5)^2}=5$. Ugyanígy meggyőződhetünk arról, hogy $\sqrt{(-7)^2}=7$ és $\sqrt{(-2{,}8)^2}=2{,}8$.

Általánosan igaz a következő tétel.

15.1. tétel. ***Bármely valós számra igaz az alábbi egyenlőség:***

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a $\sqrt{a}=b$ egyenlőséget, igazolni kell hogy $b \geqslant 0$ és $b^2 = a$.

Bármely a-ra $|a| \geqslant 0$.

Az abszolút érték meghatározása alapján: $(|a|)^2 = a^2$.

A következő tétel általánosítja az előző kijelentést.

15.2. tétel (a hatvány négyzetgyöke). ***Bármely valós a számra és természetes n-re igaz az alábbi egyenlőség:***

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

A tétel bizonyítása az előző tétel bizonyításához hasonló. Végezzétek el önállóan!

15.3. tétel (a szorzat négyzetgyöke). ***Minden valós $a \geqslant 0$ és $b \geqslant 0$ számra igaz az alábbi egyenlőség:***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Bizonyítás. Mivel $\sqrt{a} \geqslant 0$ és $\sqrt{b} \geqslant 0$, így $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$.

A szorzat négyzetére vonatkozó azonosságból következik:

$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$. Tehát a $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ szorzat csak nemnegatív értéket vesz fel és a négyzete egyenlő ab-vel.

Megjegyezzük, hogy ez a tétel érvényes több tényezőre is. Például, ha $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ és $c \geqslant 0$, akkor

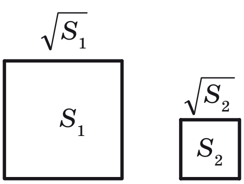
$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\,c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

15.4. tétel (a tört négyzetgyöke). ***Minden valós $a \geqslant 0$ és $b > 0$ számra igaz az alábbi egyenlőség:***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

A tétel bizonyítása az előző 15.3. tételhez hasonló.

Könnyen belátható, hogy két S_1 és S_2 területű négyzet közül annak nagyobb az oldala, melyiknek a területe nagyobb (27. ábra). Tehát, ha $S_1 > S_2$, akkor $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Ezen egyszerű gondolatmenet alapján megállapíthatjuk, hogy ***minden nemnegatív a_1 és a_2 valós számra, ha $a_1 > a_2$, akkor $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.***



27. ábra

1. PÉLDA. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{(-7,3)^2}$; 2) $\sqrt{1,2^4}$; 3) $\sqrt{0,81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Megoldás. 1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44$.

3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225} = \sqrt{0{,}81} \cdot \sqrt{225} = 0{,}9 \cdot 15 = 13{,}5$.

4) $\sqrt{\dfrac{16}{49}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \dfrac{4}{7}$. ▲

2. PÉLDA. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Megoldás. 1) A négyzetgyökök szorzatát helyettesítsük a szorzat négyzetgyökével:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) A négyzetgyökök hányadosát helyettesítsük a hányados négyzetgyökével:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$ ▲

3. PÉLDA. Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, ha $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, ha $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

Megoldás. 1) A hatvány négyzetgyökének azonossága alapján:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{ha } a \geqslant 0, \\ -a^7, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

2) A hatvány négyzetgyökének azonossága alapján: $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$. Mivel $a \leqslant 0$, ezért $a^3 \leqslant 0$. Így

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n|$. Mivel $m \geqslant 0$, ezért $|m| = m$. Viszont $n \leqslant 0$, ezért $|n| = -n$. Így $|m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn$.

4) $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Mivel $a^{18} \geqslant 0$, ezért $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$. ▲

4. PÉLDA. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

Megoldás. 1) A gyök alatti kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37-12)(37+12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) A gyök alatti kifejezést alakítsuk négyzetek szorzatává:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4} = \sqrt{169 \cdot 0{,}04} = 13 \cdot 0{,}2 = 2{,}6$. ▲

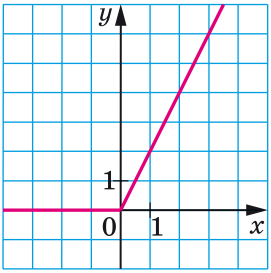
5. PÉLDA. Ábrázoljuk az $y=\sqrt{x^2}+x$ függvényt!

Megoldás. Mivel $\sqrt{x^2}=|x|$, ezért $y=|x|+x$.

Ha $x \geqslant 0$, akkor $y=x+x=2x$.
Ha $x<0$, akkor $y=-x+x=0$.

Tehát $y=\begin{cases}2x, \text{ ha } x \geqslant 0,\\ 0, \quad \text{ha } x<0.\end{cases}$

A függvény grafikonja a 28. ábrán látható.▲



28. ábra

?

1. Mivel egyenlő $\sqrt{a^2}$?
2. Fogalmazzátok meg a hatvány számtani négyzetgyökéről szóló tételt!
3. Fogalmazzátok meg a szorzat számtani négyzetgyökéről szóló tételt!
4. Fogalmazzátok meg a tört számtani négyzetgyökéről szóló tételt!
5. Ismeretes, hogy az a_1 és a_2 nemnegatív számokra $a_1 > a_2$. Melyik szám nagyobb – a $\sqrt{a_1}$ vagy $\sqrt{a_2}$?

GYAKORLATOK

471.° Mennyi az alábbi kifejezések értéke?

1) $\sqrt{0{,}4^2}$; 4) $3\sqrt{1{,}2^2}$; 7) $5\sqrt{(-10)^4}$;
2) $\sqrt{(-1{,}8)^2}$; 5) $\sqrt{6^4}$; 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$;
3) $2\sqrt{(-15)^2}$; 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 9) $-10\sqrt{3^6}$.

472.° Számítsátok ki az alábbi kifejezés értékét:

1) $\sqrt{a^2}$, ha $a=4{,}6; -18{,}6$; 3) $0{,}1\sqrt{c^6}$, ha $c=-2; 5$.
2) $\sqrt{b^4}$, ha $b=-3; 1{,}2$;

473.° Számítsátok ki a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{9\cdot 25}$; 5) $\sqrt{0{,}09\cdot 0{,}04}$; 9) $\sqrt{25\cdot 64\cdot 0{,}36}$;
2) $\sqrt{16\cdot 2500}$; 6) $\sqrt{6{,}25\cdot 0{,}16}$; 10) $\sqrt{0{,}01\cdot 0{,}81\cdot 2500}$;
3) $\sqrt{0{,}64\cdot 36}$; 7) $\sqrt{6^2\cdot 3^4}$; 11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$;
4) $\sqrt{400\cdot 1{,}44}$; 8) $\sqrt{7^2\cdot 2^8}$; 12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; 15) $\sqrt{\frac{169}{36\cdot 81}}$; 16) $\sqrt{\frac{121\cdot 256}{25\cdot 100}}$.

14) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 2\frac{14}{25}}$;

474.° Mennyi a következő kifejezések értéke?

1) $\sqrt{36\cdot 81}$; 5) $\sqrt{0{,}36\cdot 1{,}21}$; 9) $\sqrt{2{,}25\cdot 0{,}04\cdot 1600}$;

2) $\sqrt{900\cdot 49}$; 6) $\sqrt{5^2\cdot 3^6}$; 10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt{16\cdot 0{,}25}$; 7) $\sqrt{4^4\cdot 3^2}$; 11) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot \frac{4}{25}}$;

4) $\sqrt{9\cdot 1{,}69}$; 8) $\sqrt{2^6\cdot 5^2}$; 12) $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot \frac{9}{25}}$.

475.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{0{,}009}\cdot\sqrt{1000}$; 7) $\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{1\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{0{,}18}$; 8) $\sqrt{\frac{2}{11}}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{11}}$;

3) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$; 6) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}$; 9) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3^3}$.

476.° Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{12{,}1}$; 5) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{2{,}8}$;

2) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{50}$; 6) $\sqrt{5\cdot 2^3}\cdot\sqrt{5^3\cdot 2^3}$.

477.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; 7) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3{,}2}}{\sqrt{0{,}2}}$; 6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}}$.

478.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}7}}$; 5) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$;

479.• Az a szám mely értékeinél teljesülnek az alábbi egyenlőségek?

1) $\sqrt{a^2}=a$; 2) $\sqrt{a^2}=-a$.

480.• Az a és a b számok mely értékeinél teljesülnek az alábbi egyenlőségek?

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; 2) $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; 3) $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$.

481.$^\bullet$ Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét! A gyök alatti kifejezéseket alakítsátok át négyzetek szorzatává:

1) $\sqrt{18 \cdot 32}$; 4) $\sqrt{75 \cdot 48}$; 7) $\sqrt{2{,}7 \cdot 1{,}2}$;
2) $\sqrt{8 \cdot 98}$; 5) $\sqrt{288 \cdot 50}$; 8) $\sqrt{80 \cdot 45}$;
3) $\sqrt{3{,}6 \cdot 14{,}4}$; 6) $\sqrt{4{,}5 \cdot 72}$; 9) $\sqrt{33 \cdot 297}$.

482.$^\bullet$ Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{18 \cdot 200}$; 3) $\sqrt{14{,}4 \cdot 0{,}9}$; 5) $\sqrt{12{,}5 \cdot 32}$;
2) $\sqrt{3{,}6 \cdot 0{,}4}$; 4) $\sqrt{13 \cdot 52}$; 6) $\sqrt{108 \cdot 27}$.

483.$^\bullet$ Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 3) $\sqrt{8{,}5^2 - 7{,}5^2}$; 5) $\sqrt{\dfrac{155^2 - 134^2}{84}}$;
2) $\sqrt{145^2 - 144^2}$; 4) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$; 6) $\sqrt{\dfrac{139^2 - 86^2}{98{,}5^2 - 45{,}5^2}}$.

484.$^\bullet$ Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$; 2) $\sqrt{98{,}5^2 - 97{,}5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2 - 164^2}}$.

485.$^\bullet$ Helyettesítsétek az alábbi kifejezéseket velük azonos, gyököt nem tartalmazó kifejezéssel:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

486.$^\bullet$ Helyettesítsétek az alábbi kifejezéseket gyököt nem tartalmazó, velük azonos kifejezéssel:

1) $1{,}2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

487.$^\bullet$ Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{m^2}$, ha $m > 0$;
2) $\sqrt{n^2}$, ha $n < 0$;
3) $\sqrt{16p^2}$, ha $p \geqslant 0$;
4) $\sqrt{0{,}36k^2}$, ha $k \leqslant 0$;
5) $\sqrt{c^{12}}$;
6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, ha $b \leqslant 0$;
7) $\sqrt{81x^4y^2}$, ha $y \geqslant 0$;
8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, ha $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;
9) $-1{,}2x\sqrt{64x^{18}}$, ha $x \leqslant 0$;
10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, ha $b < 0$;
11) $\dfrac{3{,}3a^4}{b^3}\sqrt{\dfrac{b^{24}}{121a^{26}}}$, ha $a < 0$;
12) $-0{,}5m^5\sqrt{1{,}96m^6n^8}$, ha $m \leqslant 0$.

488.$^\bullet$ Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;
2) $\sqrt{0{,}81d^6}$, ha $d \geqslant 0$;
3) $-5\sqrt{4x^2}$, ha $x \leqslant 0$;
4) $-0{,}1\sqrt{100z^{10}}$, ha $z \geqslant 0$;
5) $\sqrt{p^6q^8}$, ha $p \geqslant 0$;
6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, ha $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, ha $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;
8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\dfrac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, ha $m < 0$, $k > 0$.

489.•• Az alábbi állítások közül melyek teljesülnek az a bármely valós értékére?

1) $\sqrt{a^2}=a$; 2) $\sqrt{a^4}=a^2$; 3) $\sqrt{a^6}=a^3$; 4) $\sqrt{a^8}=a^4$.

490.•• Mely valós a értékekre igazak a következő egyenlőségek?

1) $\sqrt{a^{10}}=a^5$; 2) $\sqrt{a^{10}}=-a^5$; 3) $\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2$; 4) $\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{-a}\right)^2$.

491.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y=\sqrt{x^2}-x$, ha $x\leqslant 0$; 3) $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$;

2) $y=2x+\sqrt{x^2}$; 4) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}+3$.

492.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y=\sqrt{x^2}-2x$, ha $x\geqslant 0$; 2) $y=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-x}$.

493.* Mely x-ekre igazak az alábbi egyenlőségek?

1) $\sqrt{x^2}=x-4$; 2) $\sqrt{x^2}=6-x$; 3) $2\sqrt{x^2}=x+3$.

494.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x^2}=x+8$; 2) $\sqrt{x^2}=6x-10$.

ISMÉTLŐ FELADATOK

495. Határozzátok meg az

$$\left(\frac{a^2-5a}{a^2-10a+25}+\frac{25}{a^2-25}\right):\frac{125-a^3}{5+a}$$

kifejezés értékét, ha a = 4,5!

496. Egy traktorosnak 8 nap alatt kell bevetnie a kijelölt földterületet. A rossz idő miatt naponta a tervezettnél 3 hektárral kisebb földterületet tudott csak bevetni. Így 10 nap alatt végzett a munkával. Mekkora földterületet kellett a traktorosnak bevetnie?

497. Az a és b természetes számok közül a páros, b páratlan. Az alábbi kifejezések közül melyik értéke lesz bármely a és b-re páros?

1) $(a+b)\,b$; 2) $\dfrac{ab}{2}$; 3) $\dfrac{a^2b}{2}$; 4) $\dfrac{ab^2}{2}$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

498. A táblára felírtak 102 egymást követő természetes számot. Felbonthatók-e ezek a számok két olyan csoportra, melyek összege prímszám (egy-egy csoportban legalább két összeadandónak kell lenni)?

16. Négyzetgyököt tartalmazó kifejezések azonos átalakításai

A szorzat négyzetgyökének azonossága alapján átalakítjuk a $\sqrt{48}$ kifejezést:

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Tehát a $\sqrt{48}$ felírható egy racionális szám, a 4 és egy irracionális szám, a $\sqrt{3}$ szorzataként. Ezt az eljárást a ***négyzetgyökjel alóli kiemelésnek*** nevezzük. Ebben az estben a 4-et hoztuk ki a gyökjel alól.

Figyeljük meg az előző átalakítást fordított sorrendben:

$$4\sqrt{3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Ez az eljárás ***bevitel a négyzetgyökjel alá***. Ebben az estben a 4-es tényezőt vittük be a gyökjel alá.

1. PÉLDA. Az alábbi kifejezésekben emeljünk ki tényezőt a gyökjel alól: 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, ha $a<0$.

Megoldás. 1) A gyökjel alatti számot írjuk fel olyan szorzatként, melynek egyik tényezője négyzetszám:

$$\sqrt{150}=\sqrt{25\cdot 6}=5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8}=\sqrt{36a^8\cdot 2}=6a^4\sqrt{2}.$

3) A feltételekből következik, hogy $b\geqslant 0$, ezért

$$\sqrt{b^{35}}=\sqrt{b^{34}b}=|\,b^{17}\,|\sqrt{b}=b^{17}\sqrt{b}.$$

4) A feltételekből következik, hogy $b\leqslant 0$, ezért

$$\sqrt{-b^{35}}=\sqrt{b^{34}\cdot(-b)}=|\,b^{17}\,|\sqrt{-b}=-b^{17}\sqrt{-b}.$$

5) A feltételekből következik, hogy $a^2>0$. Mivel a gyök alatti kifejezés nemnegatív, ezért $b\geqslant 0$. Így

$$\sqrt{a^2b^3}=\sqrt{a^2b^2b}=|\,a\,|\cdot|\,b\,|\sqrt{b}=-ab\sqrt{b}.$$ ▲

2. PÉLDA. Az alábbi kifejezésekben vigyünk be tényezőt a gyökjel alá: 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Megoldás. 1) $-2\sqrt{7}=-\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{28}.$

2) Ha $a\geqslant 0$, akkor $a\sqrt{7}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{7a^2}$; ha $a<0$, akkor $a\sqrt{7}=$ $=-\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{7a^2}.$

3) A feltételekből következik, hogy $b \leqslant 0$, ezért

$$3b\sqrt{-\frac{b}{3}}=-\sqrt{9b^2}\cdot\sqrt{-\frac{b}{3}}=-\sqrt{9b^2\cdot\left(-\frac{b}{3}\right)}=-\sqrt{3b^3}.$$

4) A feltételekből következik, hogy $c \geqslant 0$, ezért $c\sqrt{c^7}=\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{c^7}=\sqrt{c^9}$. ▲

3. PÉLDA. Egyszerűsítsük az alábbi kifejezéseket:
1) $\sqrt{54a}+\sqrt{24a}-\sqrt{600a}$; 2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$;
3) $(7-3\sqrt{2})^2-(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})$.

Megoldás. 1) Emeljünk ki tényezőt a gyökjel alól:

$$\sqrt{54a}+\sqrt{24a}-\sqrt{600a}=\sqrt{9\cdot 6a}+\sqrt{4\cdot 6a}-\sqrt{100\cdot 6a}=$$
$$=3\sqrt{6a}+2\sqrt{6a}-10\sqrt{6a}=\sqrt{6a}\,(3+2-10)=\sqrt{6a}\cdot(-5)=-5\sqrt{6a}.$$

2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=6-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2(\sqrt{3})^2=6+\sqrt{3}-6=\sqrt{3}$.

3) Alkalmazzuk a különbség négyzetének és a kéttag különbsége és összege szorzatának nevezetes azonosságait:

$$(7-3\sqrt{2})^2-(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})=7^2-2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2-$$
$$-\left((\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2\right)=49-42\sqrt{2}+18-(10-5)=62-42\sqrt{2}.$$ ▲

4. PÉLDA. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket: 1) a^2-2; 2) $b-4$, ha $b \geqslant 0$; 3) $9c-6\sqrt{5c}+5$; 4) $a+\sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3}+6$; 6) $\sqrt{35}-\sqrt{15}$.

Megoldás. 1) Írjuk fel az adott kifejezést négyzetek különbségeként:
$a^2-2=a^2-(\sqrt{2})^2=(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$.

2) Mivel a feltétel szerint $b \geqslant 0$, ezért $b-4=(\sqrt{b})^2-4=(\sqrt{b}-2)(\sqrt{b}+2)$.

3) Alkalmazzuk a kéttagú kifejezések négyzetének azonosságát:

$$9c-6\sqrt{5c}+5=(3\sqrt{c})^2-2\cdot 3\sqrt{c}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=(3\sqrt{c}-\sqrt{5})^2.$$

4) Emeljünk ki közös tényezőt: $a+\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+1)$.

5) $\sqrt{3}+6=\sqrt{3}+2\cdot(\sqrt{3})^2=\sqrt{3}\,(1+2\sqrt{3})$.

6) $\sqrt{35}-\sqrt{15}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\,(\sqrt{7}-\sqrt{3})$. ▲

5. PÉLDA. Egyszerűsítsük a következő törteket: 1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;
3) $\dfrac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$, ha $a>0$ és $b>0$.

Megoldás. 1) A tört számlálóját alakítsuk szorzattá:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{(\sqrt{b})^2-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2})^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3.$

3) Mivel $a > 0$ és $b > 0$, így szorzattá alakíthatjuk úgy a számlálót, mint a nevezőt:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.\ \blacktriangle$$

A **nevező gyöktelenítése azt jelenti**, hogy a törtet úgy bővítjük, hogy a nevezőjében ne legyen gyökös kifejezés.

6. PÉLDA. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét: 1) $\frac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Megoldás. 1) Bővítsük a törtet $\sqrt{3}$-mal, vagyis szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is $\sqrt{3}$-mal:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is $5\sqrt{2}+1$ kifejezéssel:

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}+1\right)}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1}=$$

$$=\frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{49}=\frac{2\left(5\sqrt{2}+1\right)}{7}=\frac{10\sqrt{2}+2}{7}.\ \blacktriangle$$

7. PÉLDA. Igazoljuk a

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

azonosságot.

Megoldás. $$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.\ \blacktriangle$$

8. PÉLDA. Egyszerűsítsük a $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$ kifejezést.

Megoldás. Alakítsuk a gyök alatti kifejezést teljes négyzetté:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{9+2\varnothing 3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=\left|3+\sqrt{3}\right|=3+\sqrt{3}.\ \blacktriangle$$

GYAKORLATOK

499.° Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{54}$; 7) $\sqrt{275}$; 10) $\sqrt{0,48}$;
2) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{490}$; 8) $\sqrt{108}$; 11) $\sqrt{450}$;
3) $\sqrt{32}$; 6) $\sqrt{500}$; 9) $\sqrt{0,72}$; 12) $\sqrt{36\,300}$.

500.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

501.° Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{125}$; 7) $-2\sqrt{0,18}$; 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;
2) $\sqrt{24}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 11) $10\sqrt{0,03}$;
3) $\sqrt{20}$; 6) $0,4\sqrt{250}$; 9) $0,8\sqrt{1250}$; 12) $0,7\sqrt{1000}$.

502.° Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

1) $7\sqrt{2}$; 4) $-10\sqrt{14}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 10) $-0,3\sqrt{10b}$;
2) $3\sqrt{13}$; 5) $5\sqrt{8}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;
3) $-2\sqrt{17}$; 6) $6\sqrt{a}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

503.° Vigyétek be a gyökjel alá a gyökjel előtt álló tényezőt:

1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;
2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0,7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

504.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; 3) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;
2) $6\sqrt{b}+2\sqrt{b}-8\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

505.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}$; 3) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.
2) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$;

506.° Helyettesítsétek a következő kifejezéseket velük azonos kifejezésekkel:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$; 3) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$;
2) $\sqrt{64b}-\frac{1}{6}\sqrt{36b}$; 4) $0,4\sqrt{100m}+15\sqrt{\frac{4}{9}m}-1,2\sqrt{2,25m}$.

507.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$; 2) $3\sqrt{0{,}09y}-0{,}6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

508.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$; 4) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;

2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$; 5) $5\sqrt{7}-\sqrt{700}-0{,}5\sqrt{28}$;

3) $\sqrt{96}-3\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0{,}6\sqrt{125}$.

509.° Racionálisak vagy irracionálisak-e az alábbi kifejezések?

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$.

510.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $4\sqrt{700}-27\sqrt{7}$; 4) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$; 5) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;

3) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

511.° Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\sqrt{2}\left(\sqrt{50}+\sqrt{8}\right)$; 3) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5}$;

2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

512.° Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{28}\right)$; 3) $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4\right)\cdot 3\sqrt{3}$;

2) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$; 4) $\left(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$.

513.° Végezzétek el a kijelölt szorzást:

1) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$; 6) $\left(y-\sqrt{7}\right)\left(y+\sqrt{7}\right)$;

2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$; 7) $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;

3) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$; 8) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$; 9) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$;

5) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$; 10) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^2$.

514.° Végezzétek el a kijelölt szorzást:

1) $\left(\sqrt{7}+3\right)\left(3\sqrt{7}-1\right)$; 5) $\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$;

2) $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$; 6) $\left(\sqrt{19}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)$;

3) $\left(\sqrt{p}-q\right)\left(\sqrt{p}+q\right)$; 7) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\left(6-\sqrt{13}\right)\left(6+\sqrt{13}\right)$; 8) $\left(3-2\sqrt{15}\right)^2$.

515.° Mennyi az alábbi kifejezések értéke?

1) $\left(2+\sqrt{7}\right)^2-4\sqrt{7}$; 2) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2+6\sqrt{2}$.

516.° Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $(3+\sqrt{5})^2-6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{12}-2\sqrt{2})^2+8\sqrt{6}$.

517.° Gyöktelenítsétek a következő törtek nevezőjét:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

518.° Gyöktelenítsétek a következő törtek nevezőjét:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{13}{\sqrt{26}}$; 5) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 6) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

519.• Bontsátok tényezőkre az alábbi kifejezéseket:

1) a^2-3;
2) $4b^2-2$;
3) $5-6c^2$;
4) $a-9$, ha $a\geqslant 0$;
5) $m-n$, ha $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
6) $16x-25y$, ha $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$;
7) $a-2\sqrt{a}+1$;
8) $4m-28\sqrt{mn}+49n$, ha $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
9) $b+6\sqrt{b}+9$;
10) $3+2\sqrt{3c}+c$;
11) $2+\sqrt{2}$;
12) $6\sqrt{7}-7$;
13) $a-\sqrt{a}$;
14) $\sqrt{b}+\sqrt{3b}$;
15) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$.

520.• Bontsátok tényezőkre az alábbi kifejezéseket:

1) $15-x^2$;
2) $49x^2-2$;
3) $36p-64q$, ha $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$;
4) $c-100$, ha $c\geqslant 0$;
5) $a-8b\sqrt{a}+16b^2$;
6) $m+2\sqrt{mn}+n$, ha $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
7) $a-4\sqrt{a}+4$;
8) $5+\sqrt{5}$;
9) $\sqrt{3p}-p$;
10) $\sqrt{12}+\sqrt{32}$.

521.• Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-b}{3-b^2}$; 3) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$; 4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

5) $\frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{25a-49b}$; 6) $\frac{100a^2-9b}{10a+3\sqrt{b}}$; 7) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$; 8) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;

9) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$; 10) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$; 11) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 12) $\frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}$.

522.• Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; 4) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; 7) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}+2}{a-4}$; 5) $\dfrac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$; 8) $\dfrac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

3) $\dfrac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$;

523.• Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{3a^2}$, ha $a \geqslant 0$; 2) $\sqrt{5b^2}$, ha $b \leqslant 0$; 3) $\sqrt{12a^4}$; 4) $\sqrt{c^5}$.

524.• Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{18x^{12}}$; 2) $\sqrt{y^9}$.

525.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$; 4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;

2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\dfrac{1}{3}\sqrt{162}$; 5) $\sqrt{a^3b}-\dfrac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, ha $a > 0$;

3) $0{,}7\sqrt{300}-7\sqrt{\dfrac{3}{49}}+\dfrac{2}{3}\sqrt{108}$; 6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

526.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $0{,}5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0{,}4\sqrt{75}$; 3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\dfrac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

2) $2{,}5\sqrt{28b}+\dfrac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0{,}07b}$;

527.• Bizonyítsátok be a következő egyenlőségeket:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$; 2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

528.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{27}+2\right)$; 4) $\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{5}-2\right)^2-\left(3+\sqrt{5}\right)^2$; 5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

529.• Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{8}-2\right)$; 3) $\left(10-4\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)^2$;

2) $\left(3-2\sqrt{7}\right)^2+\left(3+2\sqrt{7}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

530.• Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\dfrac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$; 3) $\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, ha $a > 0$, $b > 0$;

2) $\dfrac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$; 4) $\dfrac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$; 6) $\dfrac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

531.• Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$; 3) $\dfrac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

2) $\dfrac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, ha $a>0$, $b>0$;

532.• Gyöktelenítsétek az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; 3) $\dfrac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{19}{2\sqrt{5}-1}$; 6) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

533.• Gyöktelenítsétek az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

534.• Igazoljátok a következő egyenlőségeket:

1) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$;

2) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+4}-\dfrac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$.

535.• Igazoljátok, hogy az alábbi kifejezések értéke racionális szám:

1) $\dfrac{6}{3+2\sqrt{3}}+\dfrac{6}{3-2\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

536.• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{a}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\dfrac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\dfrac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\dfrac{a}{a-16}$;

5) $\dfrac{a}{\sqrt{ab}-b}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;

6) $\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{b}{2\sqrt{a}+2}$;

7) $\dfrac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\dfrac{c-25}{3c}$;

8) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$;

9) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

10) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$.

537. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;

4) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

5) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

6) $\dfrac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\dfrac{1}{a+8\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

538. Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{-m^9}$;

2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, ha $a\neq 0$;

3) $\sqrt{4x^6y}$, ha $x<0$;

4) $\sqrt{m^7n^7}$, ha $m\leqslant 0$, $n\leqslant 0$;

5) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, ha $y<0$;

6) $\sqrt{64a^2b^9}$, ha $a>0$;

7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, ha $b<0$;

8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, ha $m>0$, $n<0$.

539. Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;

2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, ha $b\neq 0$;

3) $\sqrt{49a^2b}$, ha $a<0$;

4) $\sqrt{a^9b^9}$;

5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, ha $y<0$;

6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, ha $m>0, n>0$.

540. Vigyétek be a gyökjel alá a szorzótényezőt:

1) $a\sqrt{3}$;

2) $b\sqrt{-b}$;

3) $c\sqrt{c^5}$;

4) $m\sqrt{n}$, ha $m\geqslant 0$;

5) $xy^2\sqrt{xy}$, ha $x\leqslant 0$;

6) $2p\sqrt{\dfrac{p}{2}}$;

7) $2p\sqrt{-\dfrac{p}{2}}$;

8) $ab^2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, ha $a\geqslant 0$.

541. Vigyétek be a gyökjel alá a szorzótényezőt:

1) $m\sqrt{7}$, ha $m\geqslant 0$;

2) $3n\sqrt{6}$, ha $n\leqslant 0$;

3) $p\sqrt{p^3}$;

4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, ha $y\leqslant 0$;

5) $7a\sqrt{\dfrac{3}{a}}$;

6) $5ab\sqrt{-\dfrac{a^7}{5b}}$, ha $a\leqslant 0$, $b>0$.

542. Bizonyítsátok be a következő azonosságokat:

1) $\left(\dfrac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7}-\dfrac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right):\dfrac{8\sqrt{a}+41}{a-49}+\dfrac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7}=\sqrt{a}-7$;

2) $\dfrac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9}-\dfrac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right)=\sqrt{a}$.

543.[••] Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}-\frac{1}{a-b}\cdot\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}};$

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right).$

544.[*] Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}};$ 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}};$ 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}.$

545.[*] Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}};$ 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}};$ 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}.$

546.[*] Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezést:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

547.[*] Igazoljátok, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

548.[*] Igazoljátok, hogy

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2.$$

549.[*] Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}};$ 2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$

ISMÉTLŐ FELADATOK

550. Egy munkásnak naponta 12 alkatrészt kellett elkészítenie. Mivel ő naponta 15 alkatrészt gyártott, így a határidő lejárta előtt már 5 nappal csak 30 alkatrészt kellett elkészítenie. Hány alkatrészt kellett a munkásnak a terv szerint legyártania?

551. A kiárusításon egy termék árát 20%-kal csökkentették. Hány százalékkal kellene ennek a terméknek az árát növelni, hogy az eredeti áron lehessen értékesíteni?

552. Egy csónak a folyón lefelé haladva 32 km-t 4 óra alatt tett meg, a folyón felfelé pedig 8 óra alatt. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét és a csónak sebességét állóvízben!

553. Ferenc és Olga egy vonaton utazott. Ferenc a szerelvény elejétől számítva a 12-edik vagonba szállt fel, Olga a végétől számítva a 6-dikba. Kiderült, hogy egy vagonban fognak utazni. Hány vagonból állt a szerelvény?

554. Az adott kifejezések közül melyik értéke a legnagyobb, ha az a szám pozitív, a b szám pedig negatív:
1) a^2b; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab; 5) $-a^2b$?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

555. Egy osztály tanulóinak legalább 96,5%-a és legfeljebb 95,5%-a jó vagy kitűnő tanuló. Hányan járnak ebbe az osztályba?

17. Az $y=\sqrt{x}$ függvény és grafikonja

Ha x-szel jelöljük a négyzet területét, akkor az $y=\sqrt{x}$ képlettel meg tudjuk határozni a négyzet oldalhosszát. A terület, az x változása maga után vonja az oldalhossz, az y változását.

Érthető, hogy minden x értéknek csak egy y érték felel meg. Tehát az y és az x változó között egyértelmű a hozzárendelés, vagyis az $y=\sqrt{x}$ képlet egy függvényt add meg.

Mivel a $\sqrt{x}$ kifejezés, csak a nemnegatív értékekre értelmezhető, így a négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya is a nemnegatív számok halmaza.

A $\sqrt{x}$ kifejezés értéke sem lehet negatív szám, így egyetlen negatív szám sem tartozhat hozzá a függvény értékkészletéhez. Igazoljuk, hogy az $y=\sqrt{x}$ függvény bármely nemnegatív számot felvesz, például $y = 7{,}2$. Valóban létezik az argumentumnak olyan értéke, melynél $\sqrt{x}=7{,}2.$ Ez a szám az $x = 7{,}2^2$. A bemutatott példa igazolja, hogy bármely nemnegatív b számra létezik olyan x érték, hogy $\sqrt{x}=b.$ Ez a szám a b^2.

Tehát az $y=\sqrt{x}$ függvény értékkészlete a nemnegatív számok halmaza.

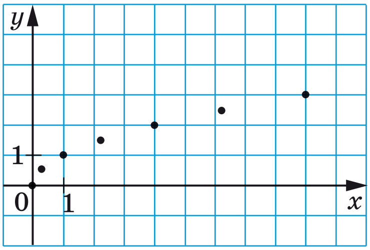
Megjegyezzük, hogyha $x = 0$, akkor $y = 0$.

Figyelembe véve az $y=\sqrt{x}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét megállapíthatjuk, hogy a függvény grafikonja az I. koordináta-negyedben helyezkedik el.

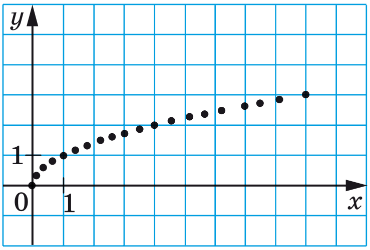
Készítsünk függvényérték-táblázatot. Az alábbi táblázatban feltüntettünk néhány argumentumértéket és a hozzá rendelt függvényértéket.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Tüntessük fel koordináta-rendszerben azokat a pontokat, melyek (x; y) koordinátái a táblázatban szereplő értékpárok (29. ábra)!



29. ábra

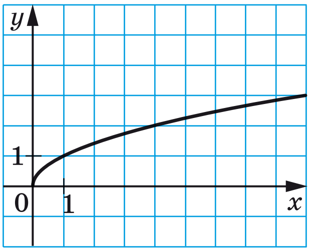


30. ábra

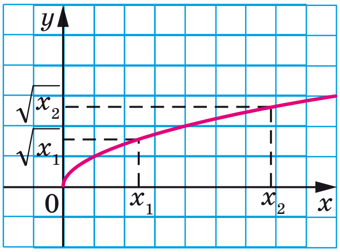
Minél több olyan pontot tüntetünk fel, melynek a koordinátái kielégítik az $y=\sqrt{x}$ egyenletet, annál kevésbé fog eltérni a mi rajzunk az $y=\sqrt{x}$ függvény képétől (30. ábra).

Ha minden ilyen pontot fel tudnánk tüntetni, akkor a 31. ábrán látható rajzot kapnánk. Későbbi tanulmányaitok során megbizonyosodtok majd arról, hogy az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonja az $y=x^2$ függvény grafikonjának az egyik ága.

Vizsgáljuk az $y=\sqrt{x}$ függvényt két tetszőleges, x_1 és x_2 argumentumra, melyekre igaz, hogy $x_1 < x_2$. A számtani négyzetgyök tulajdonsága alapján megállapíthatjuk, hogy $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Ez azt jelenti, hogy a nagyobb argumentumértéknek nagyobb függvényérték felel meg, és fordítva, nagyobb függvényértékhez nagyobb argumentumérték tartozik, vagyis ha $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, akkor $x_1 < x_2$ (32. ábra).



31. ábra

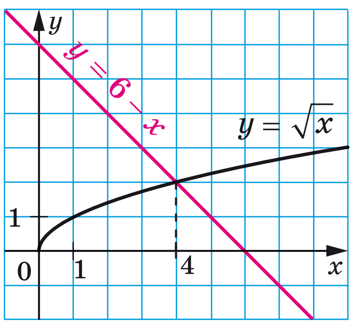


32. ábra

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk az $y=\sqrt{x}$ függvényről az ebben a pontban tanultakat.

Értelmezési tartomány	Minden nemnegatív szám
Értékkészlet	Minden nemnegatív szám
Grafikon	A parabola egyik ága
Zérushely (az argumentum azon értéke, melynél a függvényérték nulla)	$x=0$
A függvényértékek összehasonlítása	Nagyobb argumentumértékhez nagyobb függvényérték tartozik

1. PÉLDA. Oldjuk meg grafikusan a $\sqrt{x}=6-x$ egyenletet.



33.ábra

Megoldás. Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $y=\sqrt{x}$ és az $y=6-x$ függvények grafikonját (33. ábra). A grafikonok metszik egymást, a metszéspont abszcisszája 4. Az ellenőrzés igazolja, hogy a 4 valóban gyöke az egyenletnek. ▲

2. PÉLDA. Hasonlítsátok össze a következő számokat:

1) 6 és $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ és $\sqrt{65}$.

Megoldás. 1) Mivel $6=\sqrt{36}$ és $36>31$, így $\sqrt{36}>\sqrt{31}$, azaz $6>\sqrt{31}$.

2) Tudjuk, hogy $3\sqrt{7}=\sqrt{63}$ és $63<65$, így $\sqrt{63}<\sqrt{65}$. Tehát $3\sqrt{7}<\sqrt{65}$. ▲

3. PÉLDA. Mely x értékekre teljesül a $\sqrt{x}<3$ egyenlőtlenség?

Megoldás. Az adott egyenlőtlenséget írjuk fel $\sqrt{x}<\sqrt{9}$ alakban. Mivel az $y=\sqrt{x}$ függvény nagyobb értékeihez nagyobb argumentum felel meg, így $x<9$. Figyelembe véve, hogy a $\sqrt{x}$ kifejezés csak pozitív számokra van értelmezve, így $0\leqslant x<9$. ▲

4. PÉLDA. Egyszerűsítsük a $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ kifejezést.

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy $\sqrt{5}>2$ és $\sqrt{5}<3$, így $\sqrt{5}-2>0$ és $\sqrt{5}-3<0$. Innen

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-3|=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.$$

Felelet: 1. ▲

?

1. Mi az $y=\sqrt{x}$ függvény értelmezési tartománya?
2. Mi az $y=\sqrt{x}$ függvény értékkészlete?
3. Mi az $y=\sqrt{x}$ függvény zérushelye?
4. Melyik koordináta-negyedben van az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonja?
5. Milyen görbe az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonja?
6. Az *a* és a *b* nemnegatív számokról tudjuk, hogy $a<b$. Hasonlítsátok össze a $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ kifejezések értékét!
7. Tudjuk, hogy $\sqrt{a}<\sqrt{b}$. Mit mondhatunk el az a és a b számokról?

GYAKORLATOK

556.° Töltsétek ki a táblázatot, ha $y=\sqrt{x}$.

x	0,01	4				1600
y			9	11	1,5	

557.° Egy függvény az $y=\sqrt{x}$ képlettel van megadva.

1) Mennyi a függvény 0,16; 64; 1,44; 3600 argumentumához tartozó helyettesítési értéke?

2) Az argumentum mely értékénél veszi fel a függvény a 0,2; 5; 120; –4 értéket?

558.° Rajz nélkül állapítsátok meg, az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonjához: *A* (36; 6), *B* (4; –2), *C* (0,81; 0,9), *D* (–1; 1), *E* (42,25; 6,5).

559.° Az alábbi pontok közül melyek tartoznak az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonjához:

1) *A* (16; 4); 2) *B* (49; –7); 3) *C* (3,6; 0,6); 4) *D* (–36; 6)?

560.° Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:

1) $\sqrt{86}$ és $\sqrt{78}$;
4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ és 1;
7) $\sqrt{41}$ és $2\sqrt{10}$;
2) $\sqrt{1,4}$ és $\sqrt{1,6}$;
5) –7 és $-\sqrt{48}$;
8) $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{1,1}$;
3) 5 és $\sqrt{26}$;
6) $3\sqrt{2}$ és $2\sqrt{3}$;
9) $\sqrt{75}$ és $4\sqrt{3}$.

561.° Melyik szám nagyobb?

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ és 6; 5) $\sqrt{30}$ és $2\sqrt{7}$;

2) 9 és $\sqrt{82}$; 4) $3\sqrt{5}$ és $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ és $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

562.• Rajz nélkül határozzátok meg az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonjának és az alábbi egyenesek metszéspontjának koordinátáit:

1) $y = 1$; 2) $y = 0{,}8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

563.• Rendezzétek a következő számokat csökkenő sorrendbe: 8, $\sqrt{62}$, 7,9, $\sqrt{65}$, 8,2!

564.• Rendezzétek a következő számokat növekvő sorrendbe: $\sqrt{38}$, 6,1, 6, $\sqrt{35}$, 5,9!

565.• Mely két egymást követő egész szám között helyezkedik el az alábbi szám a számegyenesen?

1) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{59}$;
2) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$; 8) $-\sqrt{115}$;
3) $\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{0{,}98}$; 9) $-\sqrt{76{,}19}$.

566.• Mely két szomszédos egész szám között helyezkedik el az alábbi szám a számegyenesen?

1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{19}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) $\sqrt{160}$; 5) $-\sqrt{86}$; 6) $-\sqrt{30{,}5}$.

567.• Nevezzétek meg azokat az egész számokat, melyek a számegyenesen az alábbi számok között helyezkednek el:

1) 3 és $\sqrt{68}$; 2) $\sqrt{7}$ és $\sqrt{77}$; 3) $-\sqrt{31}$ és $-2{,}3$; 4) $-\sqrt{42}$ és 2,8.

568.• Nevezzétek meg azokat az egész számokat, melyek a számegyenesen az alábbi számok között vannak:

1) $\sqrt{3}$ és $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ és $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ és $-\sqrt{47}$.

569.• Mely x értékekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek?

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$.

570.• Mely x értékekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek?

1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 20$.

571.• Oldjátok meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x+2$; 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$;

2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 0{,}5x+0{,}5$; 6) $\sqrt{x} = 1{,}5-0{,}5x$.

572.• Oldjátok meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

1) $\sqrt{x} = -x-1$; 2) $\sqrt{x} = 2-x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

573.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

574.• Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{8}-3\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}$.

575.•• Oldjátok meg a $\sqrt{x}=-x^2$ egyenletet!

576.•• Adott az $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & \text{ha } x<0,\\ \sqrt{x}, & \text{ha } x\geqslant 0\end{cases}$ függvény.

1) Határozzátok meg $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$ helyettesítési értékeket!
2) Ábrázoljátok a függvényt!

577.•• Adott az $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{ha } x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}, & \text{ha } x>1\end{cases}$ függvény.

1) Határozzátok meg $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$ helyettesítési értékeket!
2) Ábrázoljátok a függvényt!

578.•• Határozzátok meg az $y=\sqrt{-x}$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és zérushelyeit! Ábrázoljátok a függvényt!

579.•• Ábrázoljátok az $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ függvényt!

580.* Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

581.* Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.

582.* Az a paraméter értékeitől függően hány gyöke van a $\sqrt{x}=a-x$ egyenletnek?

583.* Egyszerűsítsétek a $\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{\left(\sqrt{a}-2\right)^2+8\sqrt{a}}$ kifejezést!

584.* Egyszerűsítsétek a $\sqrt{\left(\sqrt{a}-6\right)^2+24\sqrt{a}}-\sqrt{\left(\sqrt{a}+6\right)^2-24\sqrt{a}}$ kifejezést!

ISMÉTLŐ FELADATOK

585. Az egyik konténerben 90 kg alma volt, egy másikban pedig 75 kg. Miután az első konténerből háromszor annyi almát vettek ki, mint a másodikból, az első konténerben kétszer kevesebb alma maradt, mint a másodikban. Hány kilogramm almát vettek ki az első konténerből?

586. A folyami kikötőből a vízfolyással szemben egy motorcsónak indult el, melynek a sebessége állóvízben 12 km/h. 40 perccel az indulás után meghibásodott a csónak motorja, és így a csónakot a vízfolyás 2 óra alatt visszahozta a kikötőbe. Mekkora a folyó sebessége?

587. Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

1) $\left(\frac{a-2b}{a^2+2ab}-\frac{1}{a^2-4b^2}:\frac{a+2b}{(2b-a)^2}\right):\frac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2}=\frac{2b}{a^2}$;

2) $\left(\frac{2a}{a+3}-\frac{4a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\frac{a^2-9}{a+1}-\frac{a^2-9a}{a+3}=a$.

588. Két helység között az utat egy személygépkocsi 2 óra alatt teszi meg, egy tehergépkocsi 3 óra alatt. Hány óra múlva találkozik a személygépkocsi és a teherautó, ha a két helységből egyszerre indulnak egymással szemben?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

589. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $x^2 = 0$;
2) $x^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 + 5x = 0$;
4) $-3x^2 + 12 = 0$;
5) $5x^2 - 6x = 0$;
6) $0{,}2x^2 + 2 = 0$;
7) $\frac{1}{6}x^2 - 5x = 0$;
8) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
9) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

590. Az 1-től 37-ig lévő természetes számokat úgy rendezték el, hogy bármely szám osztója az előtte álló számok összegének. Melyik szám áll ebben a sorban a harmadik helyen, ha az első helyen a 37 van, a másodikon pedig az 1?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 4. SZ. TESZTFELADAT

1. Az alábbi állítások közül melyik hamis?

A) –5 egész szám;
B) –5 racionális szám;
C) –5 irracionális szám;
D) –5 valós szám.

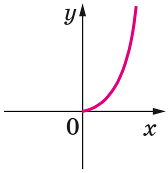
2. Az alábbi számok közül melyik irracionális?

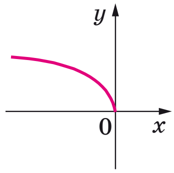
A) $\sqrt{4}$; B) $\sqrt{0{,}4}$; C) $\sqrt{0{,}04}$; D) $\sqrt{400}$.

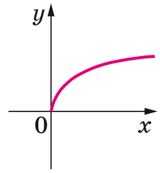
3. Az alábbi függvények közül melyik grafikonja parabola?

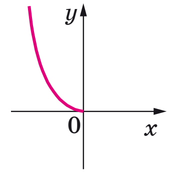
A) $y = 2x$; B) $y = x^2$; C) $y = \frac{2}{x}$; D) $y = \frac{x}{2}$.

4. Az alábbi rajzok közül melyiken látható az $y=\sqrt{x}$ függvény grafikonja?

A) 

B) 

C) 

D) 

5. Az alábbi kifejezések közül melyik nem értelmezhető?

A) $\sqrt{2}$; B) $-\sqrt{2}$; C) $\sqrt{-2}$; D) $\sqrt{(-2)^2}$.

6. Számítsátok ki a $\sqrt{7x-3}$ kifejezés értékét, ha $x = 4$!

A) 5; B) –5; C) 25; D) –25.

7. Mennyi a $\sqrt{36\cdot 0{,}81}$ kifejezés értéke?

A) 6,9; B) 54; C) 5,4; D) 0,54.

8. Határozzátok meg a $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$ kifejezés értékét!

A) 2; B) 4; C) 2,5; D) 0,4.

9. Egyszerűsítsétek a $\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{64a}$ kifejezést!

A) $15\sqrt{a}$; B) $15a$; C) $7\sqrt{a}$; D) $7a$.

10. Gyöktelenítsétek a $\frac{12}{\sqrt{2}}$ tört nevezőjét!

A) $\sqrt{2}$; B) $4\sqrt{2}$; C) $6\sqrt{2}$; D) $10\sqrt{2}$.

11. Egyszerűsítsétek az $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$ törtet!

A) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; B) $\frac{a+2}{a-2}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

12. Egyszerűsítsétek a $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{20}$ kifejezést!

A) 15; B) 5; C) $10-\sqrt{5}$; D) $10+5\sqrt{5}$.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Az $y = x^2$ függvény tulajdonságai:

Értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$.

Értékkészlete: a nemnegatív számok halmaza.

Grafikonja: parabola.

Zérushelye: $x = 0$.

A grafikon tulajdonsága: ha az $A(x_0; y_0)$ pont rajta van a függvény grafikonján, akkor a $B(-x_0; y_0)$ pont is illeszkedik erre a parabolára.

Négyzetgyök

Az a szám négyzetgyökének nevezzük azt a számot, melynek a négyzete egyenlő a-val.

Számtani négyzetgyök

Az a szám számtani négyzetgyökének nevezzük azt a nemnegatív számot, melynek a négyzete egyenlő a-val.

Egyenlő halmazok

Az A és B halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, vagyis ha az A halmaz minden eleme a B-nek is eleme, és fordítva, ha a B halmaz minden eleme az A-nak is eleme.

Részhalmaz

A B halmaz részhalmaza az A halmaznak, ha a B halmaz minden eleme az A-nak is eleme.

A számhalmazok jelölése

$\mathbb{N}$ – természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$ – egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$ – racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$– valós számok halmaza

A számhalmazok közötti kapcsolat

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

A gyökvonás azonosságai

Bármilyen valós a számra teljesül a $\sqrt{a^2} = |a|$ egyenlőség.

Bármilyen valós a számra és természetes n számra teljesül a $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$ egyenlőség.

Bármilyen valós a és b számra, ha $a \geqslant 0$ és $b \geqslant 0$ teljesül a $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Bármilyen valós a és b számra, ha $a \geqslant 0$ és $b > 0$ teljesül a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ egyenlőség.

Minden nemnegatív a_1 és a_2 valós számra, ha $a_1 > a_2$, akkor $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

Az $y = \sqrt{x}$ függvény tulajdonságai

Értelmezési tartománya: a nemnegatív számok halmaza.
Értékkészlete: a nemnegatív számok halmaza.
Grafikonja: parabola ágai.
Zérushelye: $x = 0$.
Nagyobb argumentumértékhez nagyobb függvényérték tartozik.

3.§. A MÁSODFOKÚ EGYENLET

- Megtanuljátok megoldani az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenleteket.
- Megismerkedtek a másodfokú egyenletekre alkalmazható nevezetes Viète tételével.
- Elsajátítjátok a másodfokú egyenletre visszavezethető egyenletek megoldását.

18. Másodfokú egyenletek. A nem teljes másodfokú egyenletek megoldása

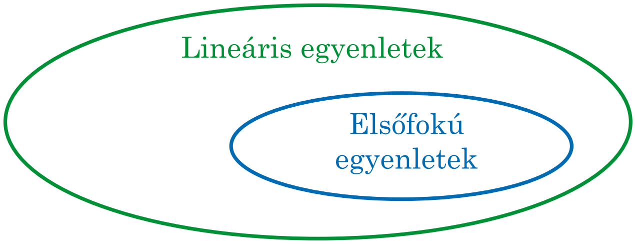
Már megtanultátok, hogyan kell megoldani az $ax + b = 0$ alakú lineáris egyenleteket, ahol a és b bármely szám, x a változó.

Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ alakú egyenleteket **elsőfokú egyenleteknek** nevezzük.

Például a $2x = 3$, $3x = 0$ és az $\frac{1}{3}x = -7$ lineáris egyenletek elsőfokúak, viszont a $0x = 0$ és $0x = 2$ lineáris egyenletek nem elsőfokúak.

Az a és a b számokat az $ax = b$ **elsőfokú lineáris egyenlet együtthatóinak** nevezzük.

Azt a tényt, hogy az elsőfokú egyenletek a lineáris egyenleteknek részesetei, a 34. ábra szemlélteti.



34. ábra

Már találkoztatok néhány olyan egyenlet megoldásával, melyben a változó második hatványa szerepel. Például felkészülés közben már megoldottátok az $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ egyenleteket (589. példa). Ezek az egyenletek $ax^2 + bx + c = 0$ alakúak.

Meghatározás. Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenleteket másodfokú egyenleteknek nevezzük, ahol x a változó, a, b és c bármely szám és $a \neq 0$.

Az a, b és c számokat **a másodfokú egyenlet együtthatóinak** nevezzük. Az a szám a négyzetes tag együtthatója**, főegyüttható**, **b az elsőfokú tag** együtthatója, **c a szabad tag.**

Például a $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ másodfokú egyenletben $a = -2$, $b = 5$ és $c = 3$.

Az $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ egyenletek főegyütthatója 1.

Mivel az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet főegyütthatója nem lehet nulla, ezért bármelyik másodfokú egyenlet felírható olyan alakban, ahol a főegyüttható 1. Osszuk el az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet mindkét oldalát a-val: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet b vagy c együtthatója nulla, akkor az egyenletet **hiányos (nem teljes) másodfokú egyenletnek** nevezzük.

A hiányos másodfokú egyenletek három részesetét különböztetjük meg:

1. Ha $b = c = 0$, akkor $ax^2 = 0$.
2. Ha $c = 0$ és $b \neq 0$, akkor $ax^2 + bx = 0$.
3. Ha $b = 0$ és $c \neq 0$, akkor $ax^2 + c = 0$.

Oldjuk meg mindegyik részesetet külön-külön.

1) Mivel $a \neq 0$, ezért az $ax^2 = 0$ egyenletnek egyetlen gyöke van, az $x = 0$.

2) Az $ax^2 + bx = 0$ egyenletet írjuk fel $x(ax + b) = 0$ alakban. Ennek az egyenletnek mindig két, x_1 és x_2 gyöke van. Az egyik gyök a nulla, a másik az $ax + b = 0$ egyenlet gyöke. Tehát $x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3) Az $ax^2 + c = 0$ egyenletet írjuk fel $x^2 = -\frac{c}{a}$ alakban. Mivel $c \neq 0$, így két eset lehetséges: $-\frac{c}{a} < 0$ vagy $-\frac{c}{a} > 0.$ Könnyen belátható, hogy az első esetben az egyenletnek nincs megoldása. A második esetben az egyenletnek két gyöke van: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ és $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

A kapott eredményeket az alábbi táblázat foglalja össze.

A b és c együtthatók értékei $ax^2 + bx + c = 0$	Egyenlet	Gyökök
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	nincs megoldás
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

PÉLDA. Oldjuk mag az $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$ egyenletet.

Megoldás. Ha $x > 0$, akkor $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ vagy $x = -2$. Viszont $x = -2$ nem felel meg az $x > 0$ feltételnek.

Ha $x < 0$, akkor $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 + 4 = 0$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: 2. ▲

?

1. Milyen egyenletet nevezünk lineárisnak?
2. Milyen egyenletet nevezünk elsőfokúnak?
3. Hozzatok fel példát olyan lineáris egyenletre, amely elsőfokú és olyan lineáris egyenletre, amely nem elsőfokú!
4. Milyen egyenletet nevezünk másodfokúnak?
5. Hogyan hívjuk az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet együtthatóit!
6. Melyek a redukált másodfokú egyenletek?
7. Melyek a hiányos másodfokú egyenletek?
8. A hiányos másodfokú egyenletek mely részeseteit különböztetjük meg? Hány gyöke van ezekben az estekben az egyenletnek?

GYAKORLATOK

591.° Az alábbi egyenletek közül válasszátok ki a másodfokúakat! Nevezzétek meg a másodfokú egyenletek együtthatóit, főegyütthatóját, szabadtagját!

1) $x = 0$; 5) $x^2 - 4x + 2 = 0$; 9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
2) $x^2 = 0$; 6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$; 10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.
3) $x^2 + x = 0$; 7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$; 8) $x^3 - x - 9 = 0$;

592.° Írd fel azt a másodfokú egyenletet, melynek:

1) a főegyütthatója 6, az elsőfokú tag együtthatója 7 és a szabadtag pedig 2;
2) a főegyütthatója 1, az elsőfokú tag együtthatója –8 és a szabadtag pedig $-\frac{1}{3}$;
3) a főegyütthatója –0,5, az elsőfokú tag együtthatója 0 és a szabadtag pedig $2\frac{3}{7}$;
4) a főegyütthatója 7,2, az elsőfokú tag együtthatója –2 és a szabadtag pedig 0.

593.° Írjátok fel azt a másodfokú egyenletet, melynek:

1) a főegyütthatója –1, az első fokú tag együtthatója –2 és a szabadtag pedig 1,6;
2) a főegyütthatója és a szabadtag 2, az elsőfokú tag együtthatója 0.

594.° Írjátok fel az alábbi egyenleteket $ax^2 + bx + c = 0$ alakban, nevezd meg az a, b és c együtthatókat:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$; 3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$; 4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$.

595.° Írjátok fel az alábbi egyenleteket $ax^2 + bx + c = 0$ alakban, nevezd meg az a, b és c együtthatókat:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$; 2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

596.° Az alábbi egyenletek közül nevezzétek meg azokat, melyek főegyütthatója 1! Alakítsátok át a többi egyenletet úgy, hogy a főegyütthatója 1 legyen:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$; 5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$; 4) $16 - 6x + x^2 = 0$; 6) $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 1 = 0$.

597.° Alakítsátok át az egyenleteket úgy, hogy a főegyütthatója 1 legyen:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$; 3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

598.° Az 1; 0; –3; 2; –10 számok közül melyek gyökei az $x^2 + 9x - 10 = 0$ egyenletnek?

599.° Igazoljátok, hogy:
1) –1 gyöke az $x^2 - 2x + 3 = 0$ egyenletnek;
2) a $-\frac{1}{3}$ és a –3 gyöke a $3x^2 + 10x + 3 = 0$ egyenletnek;
3) a $-\sqrt{2}$ és $\sqrt{2}$ gyöke a $3x^2 - 6 = 0$ egyenletnek!

600.° Igazoljátok, hogy:
1) –5 gyöke az $x^2 + 3x - 10 = 0$ egyenletnek;
2) a 4 gyöke az $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$ egyenletnek!

601.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:
1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

602.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

603.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

604.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:
1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

605.° Határozzátok meg azt a két szomszédos természetes számot, melyek szorzata 36-tal nagyobb a kisebbik számnál!

606.° Határozzátok meg azt a két szomszédos természetes számot, melyek szorzata 80-nal nagyobb a nagyobbik számnál!

607.• Igazoljátok, hogy a $2-\sqrt{3}$ és $2+\sqrt{3}$ számok gyökei az $x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenletnek!

608.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $\frac{x^2-8x}{6} = x$;
2) $\frac{x^2-3}{5} - \frac{x^2-1}{2} = 2$.

609.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $\frac{x^2+x}{7} - \frac{x}{3} = 0$;
2) $\frac{x^2+1}{6} - \frac{x^2+2}{4} = -1$.

610.• Mekkora az m, ha:
1) 2 gyöke az $x^2 + mx - 6 = 0$ egyenletnek;
2) –3 gyöke a $2x^2 - 7x + m = 0$ egyenletnek;
3) $\frac{1}{7}$ gyöke az $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$ egyenletnek?

611.• Mekkora az n, ha:
1) 6 gyöke az $x^2 - nx + 3 = 0$ egyenletnek;
2) 0,5 gyöke az $nx^2 - 8x + 10 = 0$ egyenletnek!

612.• Csoportosítási módszerrel alakítsátok szorzattá a bal oldalt, és oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 + 12x + 20 = 0$; 3) $x^2 + 22x - 23 = 0$.

613.• Alakítsátok a bal oldalt teljes négyzetté, és oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $x^2 + 6x - 7 = 0$; 3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.

614.• Alakítsátok szorzattá a bal oldalt, és oldjátok meg a következő egyenleteket:
1) $x^2 - 10x + 9 = 0$; 3) $x^2 - x - 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

615.• Két természetes szám négyzeteinek az összege 17-tel több a nagyobbik szám kétszeresénél. Melyek ezek a számok?

616.• Határozzátok meg azt a két egymást követő egész számot, melyek négyzeteinek az összege 1!

617.• Az m mely értékeinél nem másodfokúak az alábbi egyenletek:
1) $(m - 4)\,x^2 + mx + 7 = 0$;
2) $(m^2 + 8m)\,x^2 + (m + 8)\,x + 10 = 0$;
3) $(m^2 - 81)\,x^2 - 6x + m = 0$?

618.• Az $ax^2 + bx = 0$ másodfokú egyenlet nullától különböző gyökei milyen előjelűek, ha:
1) $a > 0$, $b > 0$; 2) $a < 0$, $b > 0$; 3) $a > 0$, $b < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$?

619.• Létezik-e az $ax^2 + c = 0$ hiányos másodfokú egyenletnek megoldása, ha:
1) $a > 0$, $c > 0$; 2) $a < 0$, $c > 0$; 3) $a > 0$, $c < 0$; 4) $a < 0$, $c < 0$?

620.•• A $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$ egyenletben a csillagokat helyettesítsétek olyan többtagú kifejezéssel, hogy a kapott hiányos másodfokú egyenletnek gyökei legyenek az alábbi számok:
1) 0 és 4; 2) –1 és 1.

621.•• Az $x^2 + 5x - 1 + * = 0$ egyenletben a csillagokat helyettesítsétek olyan többtagú kifejezéssel, hogy a kapott hiányos másodfokú egyenletnek gyökei legyenek az alábbi számok:
1) 0; –7; 2) –4; 4.

622.•• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:
1) $x^2 - 3\,|\,x\,| = 0$; 3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$;
2) $x^2 + |\,x\,| - 2x = 0$; 4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$.

623.•• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $x^2 - 7\ |\ x\ | = 0$; 2) $x^2 - 6\ |\ x\ | + x = 0$; 3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|\ x\ |} = 0.$

624.•• Az a mely értékei mellett lesz az $(a - 2)\ x^2 + (2a - 1)\ x + a^2 - 4 = 0$ egyenlet:

1) lineáris;
2) olyan másodfokú egyenlet, melynek főegyütthatója 1;
3) hiányos másodfokú egyenlet, $a \neq 1$;
4) olyan hiányos másodfokú egyenlet melynek főegyütthatója 1?

625.•• Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenletek egyik gyöke 0? Mi a másik gyök?

1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$;
2) $4x^2 + (a - 8)\ x + a^2 + a = 0$;
3) $ax^2 + (a + 3)\ x + a^2 - 3a = 0.$

ISMÉTLŐ FELADATOK

626. Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

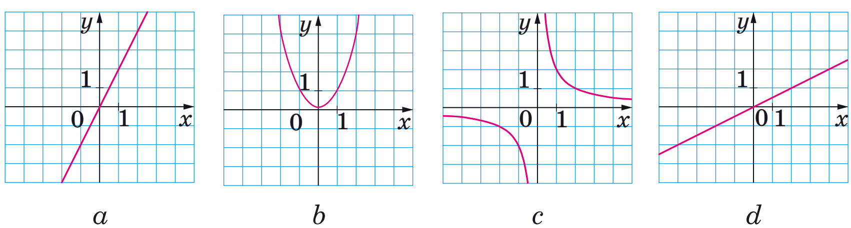
1) $\frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2}$;
2) $\frac{a^2-6b^2}{3b} + 2b$;
3) $\frac{4}{c^2-4c} - \frac{c+4}{c^2-16}$;
4) $\frac{56a^5}{b^4} \cdot \frac{b^2}{14b^5}$;
5) $\frac{72a^3b}{c} : (27a^2b)$;
6) $\frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{10a+5}{a+3}$.

627. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$;
2) $\left(3\sqrt{5} - \sqrt{20}\right)\sqrt{5}$;
3) $\left(5 - \sqrt{2}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{18} - \sqrt{3}\right)\sqrt{2} + 0{,}5\sqrt{24}.$

628. A 33. ábra melyik rajzán látható az alábbi függvények grafikonja:

1) $y = x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = \frac{2}{x}$?



35. ábra

629. A tanuló egy kétjegyű számra gondolt. Ha a szám mindkét számjegyét kettővel növeljük, akkor a kapott szám 13-mal kevesebb a gondolt szám kétszeresénél. Melyik számra gondolt a tanuló?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

630. Egy számológépbe, ha az $(a;\ b)$ számpárt táplálják be, akkor az $\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$ számpárt adja ki. Lehetséges-e ezzel a géppel a (0,25; 1000) számpárból a (1,25; 250) számpárt kapni?

19. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Ha ismerjük az $ax = b$ elsőfokú egyenlet a és b együtthatóját, akkor az egyenlet gyökét az $x = \frac{b}{a}$ képlettel határozhatjuk meg.

Kivezetjük azt a képletet, mellyel az a, b és c együtthatókon keresztül meghatározhatjuk az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeit.

Induljunk ki a másodfokú egyenlet általános alakjából:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $4a$-val. Mivel $a \neq 0$, ezért az előzővel egyenértékű egyenletet kapunk:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Az egyenlet bal oldalát alakítsuk teljes négyzetté:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \tag{2}$$

A (2) egyenlet megoldása és gyökeinek száma a $b^2 - 4ac$ kifejezés előjelétől függ. Ezt a kifejezést a **másodfokú egyenlet diszkriminánsának** nevezzük, és D betűvel jelöljük. Tehát $D = b^2 - 4ac$. A diszkrimináns fogalom a latin *discriminare* szóból ered, melynek jelentése megkülönböztetni, elválasztani.

Tehát a (2) egyenlet így is felírható:

$$(2ax + b)^2 = D. \tag{3}$$

A következő három eset fordulhat elő: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Ha $D < 0$, akkor a (3) egyenletnek és így az (1) egyenletnek sincs megoldása. Valóban, mivel a $(2ax + b)^2$ kifejezés az x bármely értékére nemnegatív.

Következtetés: **ha $D < 0$, akkor a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke.**

2. Ha $D = 0$, akkor a (3) egyenlet az alábbi módon írható fel:

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Innen $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

Következtetés: **ha $D = 0$, akkor a másodfokú egyenletnek egy gyöke van: $x = -\dfrac{b}{2a}$.**

3. Ha $D > 0$, akkor a (3) egyenlet így írható fel:

$$(2ax+b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

Ebből kapjuk, hogy $2ax+b = -\sqrt{D}$ vagy $2ax+b = \sqrt{D}$. Tehát $x = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ vagy $x = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Következtetés: **ha $D > 0$, akkor a másodfokú egyenletnek két gyöke van:**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Gyakran használják a rövidített felírást:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Ez az $ax^2 + bx + c = 0$ **másodfokú egyenlet megoldóképlete**.

A képletet alkalmazni lehet abban az esetben is, ha $D = 0$. Akkor $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$.

A másodfokú egyenlet megoldását az alábbi algoritmus szerint végezzük el:

- meghatározzuk a másodfokú egyenlet D diszkriminánsát;
- ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása;
- ha $D \geqslant 0$, akkor alkalmazzuk a megoldóképletet.

Ha az elsőfokú tag együtthatója páros, tehát felírható $2k$ alakban, akkor alkalmazhatunk egy másik képletet, mely sok esetben leegyszerűsíti a számítást.

Ebben az esetben a másodfokú egyenlet $ax^2 + 2kx + c = 0$ alakú.

Számítsuk ki az egyenlet diszkriminánsát: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Jelöljük a $k^2 - ac$ kifejezést D_1-gyel.

Ha $D_1 \geqslant 0$, akkor a megoldóképlet alapján:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

vagyis

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ ahol } D_1 = k^2 - ac.$$

1. PÉLDA. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Megoldás. 1) Az egyenlet együtthatói: $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

A diszkrimináns

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

A gyökképletbe helyettesítve

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{196}}{6} = \frac{2-14}{6} = -2,\ x_2 = \frac{2+14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Felelet: -2; $2\frac{2}{3}$.

2) $D = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$.

Tehát ennek az egyenletnek csak egy gyöke van:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet más módszerrel is megoldható. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát -2-vel:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$(x - 2)^2 = 0;\ x - 2 = 0;\ x = 2.$$

Felelet: 2.

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Az egyenletnek két gyöke van: $x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

Felelet: $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.

Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: nincs megoldás.

5) Írjuk fel az adott egyenletet $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ alakban, és alkalmazzuk az $ax^2 + 2kx + c = 0$ egyenlet megoldóképletét:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Felelet: $\frac{1}{5}$; 3. ▲

2. PÉLDA. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket: 1) $x^2+6\sqrt{x^2}-16=0$; 2) $x^2-10\left(\sqrt{x}\right)^2-24=0$; 3) $9x^2-8x+\frac{5}{x-1}=1+\frac{5}{x-1}$.

Megoldás. 1) Mivel $\sqrt{x^2}=|x|$, így az $x^2+6|x|-16=0$ egyenletet kell megoldani.

Ha $x \geqslant 0$, akkor az $x^2+6x-16=0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei -8 és 2, viszont a -8 nem felel meg az $x \geqslant 0$ feltételnek.

Ha $x<0$, akkor az $x^2-6x-16=0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei 8 és -2, viszont a -2 nem felel meg az $x<0$ feltételnek.

Felelet: 2; –2.

2) Mivel $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, ha $x \geqslant 0$, ezért a változó olyan értékeit keressük, melyeknek két feltételt kell kielégíteniük: $x^2-10x-24=0$ és $x \geqslant 0$. Azt is mondhatjuk, hogy az eredeti egyenlet ekvivalens az $\begin{cases} x^2-10x-24=0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel. Az $x^2-10x-24=0$ egyenletnek két gyöke van, a -2 és 12, viszont a -2 nem felel meg az $x \geqslant 0$ feltételnek.

Felelet: 12.

3) Az adott egyenlet ekvivalens a $\begin{cases} 9x^2-8x=1, \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel.

$$\begin{cases} 9x^2-8x-1=0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \text{ vagy } x=-\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x=-\frac{1}{9}.$$

Felelet: $-\frac{1}{9}$. ▲

3. PÉLDA. A b mely értéke mellett lesz az alábbi egyenleteknek egy gyöke:

1) $2x^2-bx+18=0$;

2)* $(b+6)x^2-(b-2)x+1=0$?

Megoldás. 1) Az adott egyenlet másodfokú, így akkor lesz az egyenletnek egy gyöke, ha a diszkrimináns 0.

$$D=b^2-4\cdot 2\cdot 18=b^2-144;$$
$$b^2-144=0;$$
$$b=-12 \text{ vagy } b=12.$$

Felelet: $b=-12$ vagy $b=12$.

2) Ha $b=-6$, akkor a $8x+1=0$ egyenletet kapjuk, melynek csak egy gyöke van.

Ha $b \neq -6$, akkor az adott egyenlet másodfokú, így akkor lesz az egyenletnek egy gyöke, ha a diszkrimináns 0:

$D=(b-2)^2-4(b+6)=b^2-4b+4-4b-24=b^2-8b-20.$

Megoldva a $b^2-8b-20=0$ egyenletet azt kapjuk, hogy $b=-2$ vagy $b=10$.

Felelet: $b=-2$, vagy $b=10$, vagy $b=-6$. ▲

A matematikatanárok több nemzedéke és tanítványaik is Mikola Andrijovics Csajkovszkij (1887–1970) híres ukrán pedagógus és matematikus *Másodfokú egyenletek* című könyvéből merítették pedagógiai tapasztalataikat és bővítették tudásukat.

M. A. Csajkovszkijnak óriási pedagógiai és tudományos hagyatéka van. Munkásságát Ukrajna határain túl is jól ismerik.

M. A. Csajkovszkij
(1887–1970)

?

1. Mi a másodfokú egyenlet diszkriminánsa?
2. Hogyan függ a másodfokú egyenlet gyökeinek száma a diszkrimináns értékétől?
3. Írjátok le a másodfokú egyenlet megoldóképletét!
4. Milyen algoritmus szerint oldjuk meg a másodfokú egyenleteket?

GYAKORLATOK

631.° Határozzátok mg az alábbi egyenletek diszkriminánsát, és állapítsátok meg a gyökök számát:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$; 3) $2x^2 - 6x - 3,5 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 4) $5x^2 - 2x + 0,2 = 0$.

632.° Az alábbi egyenletek közül melyiknek van két gyöke?

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$; 3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$; 4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$.

633.° Az alábbi egyenletek közül melyiknek nincs gyöke?

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$; 3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$; 4) $0,04x^2 - 0,4x + 1 = 0$.

634.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 56 = 0$;
6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
7) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
8) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
11) $2x^2 - x - 6 = 0$;
12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;
17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
18) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
19) $2x^2 - x - 4 = 0$;
20) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

635.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

636.° A változó mely értékeire

1) egyenlők a $6x^2 - 2$ és $5 - x$ többtagú kifejezések értéke;
2) egyenlő az $y - 6$ kéttagú kifejezés és az $y^2 - 9y + 3$ háromtagú kifejezés értéke;
3) egyenlők a $4m^2 + 4m + 2$ és $2m^2 + 10m + 8$ háromtagú kifejezések értéke?

637.° A változó mely értékeire:

1) egyenlők a $4x + 4$ kéttagú kifejezés és $3x^2 + 5x - 10$ háromtagú kifejezés értéke;
2) egyenlők a $10p^2 + 10p + 8$ és $3p^2 - 10p + 11$ kifejezések értéke?

638.° Határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

639.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

640.° Határozzátok meg azt a természetes számot, mely 42-vel kevesebb négyzeténél!

641.° Határozzátok meg annak a téglalapnak a kerületét, melynek a területe 70 cm², és egyik oldala 9 cm-rel hosszabb a másiknál!

642.° Két szám szorzata 84. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha az egyik 8-cal kevesebb a másiknál?

643.° Két szomszédos természetes szám szorzata 89-cel több összegüknél. Melyek ezek a számok?

644.° Melyik két szomszédos természetes szám négyzetének az összege 365?

645.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $2x^2+x\sqrt{5}-15=0$;

2) $x^2-x\left(\sqrt{6}-1\right)-\sqrt{6}=0$;

3) $\frac{x^2-4}{8}-\frac{2x+3}{3}=-1$;

4) $\frac{4x^2+x}{3}-\frac{x^2+17}{9}=\frac{5x-1}{6}$.

646.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2+3x\sqrt{2}+4=0$;

2) $x^2-x\left(\sqrt{3}+2\right)+2\sqrt{3}=0$;

3) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{x+3}{4}=x-1$.

647.• Az a mely értéke mellett lesz $\frac{1}{4}$ az $a^2x^2+4ax-5=0$ egyenlet gyöke?

648.• Az a mely értéke mellett lesz 2 az $x^2-0{,}5ax-3a^2=0$ egyenlet gyöke?

649.• Egy négyzet alakú papírlapból levágtak egy 3 cm széles csíkot. A maradék papírlap területe 40 cm². Mekkora volt az eredeti papírlap oldalhossza?

650.• Egy 18 cm hosszú téglalap alakú papírlapból levágtak a téglalap szélességével egyenlő oldalhosszúságú négyzetet. A maradék téglalap területe 72 cm². Mekkora az eredeti téglalap szélessége?

651.• Egy derékszögű háromszög befogóinak különbsége 14 cm, átfogója 34 cm. Mekkorák a háromszög befogói?

652.• Egy téglalap oldalainak különbsége 31 cm, átlója 41 cm. Mekkorák a téglalap oldalai?

653.• Határozzátok meg azt a három egymást követő természetes páratlan számot, melyek közül a legkisebb négyzete 33-mal több, mint a másik két szám összegének kétszerese?

654.• Határozzátok meg azt a négy egymást követő páros természetes számot, melyek közül az első és a harmadik összege 5-ször kisebb, mint a második és a negyedik szám szorzata!

655.• Bizonyítsátok be, hogyha a másodfokú egyenlet főegyütthatója és szabadtagja különböző előjelű, akkor az egyenletnek két gyöke van!

656.• (*Ősi indiai feladat.*) Majmok játszottak egyszer – így szól az indiai hír –, nyolcadrészük négyzetre emelve már ugrál az erdőben. A fennmaradó tizenkettő táncolva és nagy zajjal a zöld lombok közé szaladt. Hányan voltak összesen?

657.•• Az idei labdarúgó-bajnokságban 36 mérkőzést játszottak le. Hány csapat vesz részt a bajnokságon, ha fordulónként mindenki mindenkivel játszik?

658.•• Hány oldala van annak a sokszögnek, melyben 90 átló húzható?

659.•• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $|x^2+7x-4|=4$;
2) $5x^2-8|x|+3=0$;
3) $x|x|+6x-5=0$;
4) $x^2+\frac{4x^2}{|x|}-12=0$;
5) $x^2-8\sqrt{x^2}+15=0$;
6) $x^2+4\sqrt{x^2}-12=0$.

660.•• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $|x^2+10x-4|=20$;
2) $x|x|+12x-45=0$;
3) $\frac{x^3}{|x|}-14x-15=0$;
4) $x^2-8\sqrt{x^2}-9=0$.

661.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2+2x+\frac{3}{x-8}=\frac{3}{x-8}+80$;
2) $x^2+8\left(\sqrt{x}\right)^2-33=0$.

662.•• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $6x^2+5x-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$;
2) $5x^2-14\left(\sqrt{x}\right)^2-3=0$.

663.•• A b mely értéke esetén lesz az alábbi egyenleteknek egy gyöke?

1) $2x^2+4x-b=0$;
2) $3x^2-bx+12=0$.

664.•• A b mely értéke esetén lesz az alábbi egyenleteknek egy gyöke?

1) $6x^2-18x+b=0$;
2) $8x^2+bx+2=0$.

665.•• Igazoljátok, hogy az alábbi egyenleteknek a p bármely értéke mellett két gyöke van:

1) $4x^2-px-3=0$;
2) $x^2+px+p-2=0$.

666.•• Igazoljátok, hogy az alábbi egyenleteknek az m bármely értéke mellett nincs megoldása:

1) $x^2+mx+m^2+1=0$;
2) $x^2-2mx+2m^2+9=0$.

667.•• Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 + bx - 7 = 0$ egyenletnek a b minden értéke esetén két gyöke van!

668.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 + (3a + 1)\,x + 2a^2 + a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 4)\,x + 8a = 0$;
3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
4) $3\,(2a - 1)\,x^2 - 2\,(a + 1)\,x + 1 = 0$.

669.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 - (2a - 5)\,x - 3a^2 + 5a = 0$;
2) $x^2 + (3a - 4)\,x - 12a = 0$;
3) $ax^2 - (a + 1)\,x + 1 = 0$.

670.* A b mely értékei mellett lesz az alábbi egyenleteknek egy megoldásuk?

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)\,x^2 - (b + 6)\,x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)\,x^2 + (2b - 8)\,x + 15 = 0$.

671.* A b mely értékei mellett lesz az alábbi egyenleteknek egy megoldásuk?

1) $bx^2 + x + b = 0$;
2) $(b + 3)\,x^2 + (b + 1)\,x - 2 = 0$.

ISMÉTLŐ FELADATOK

672. Egyszerűsítsétek a $\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ kifejezést!

673. Határozzátok meg a $\frac{(a^{-3})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ kifejezés értékét, ha $a = \frac{1}{3}$!

674. Rendezzétek a $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ és 4 számokat növekvő sorrendbe!

675. Kétféle vasérc van: az egyiknek 5%-a, a másiknak 45%-a nikkel. Mennyi vasércre van szükség mind a két fajtából 120 tonna olyan ötvözethez, melynek 30%-a nikkel?

676. Egy könyvből hiányzik néhány oldal. A bal oldalon a 24-es szám áll, a jobb oldalon az 53-as. Hány lap hiányzik a könyvből?

FÉLKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

677. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket, számítsátok ki a gyökök összegét és szorzatát, hasonlítsátok össze az elsőfokú tag együtthatójával és a szabadtaggal:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$; 2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

678. Töltsétek ki az alábbi táblázatot, ha a, b és c az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet együtthatói, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei!

Egyenlet	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	x_1x_2
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

679. Bizonyítsátok be, hogy 101 festett kockából mindig ki lehet választani 11 azonos színűt vagy 11 olyan kockát, mely mind különböző színű!

20. Viète tétele

A felkészülés közben a 677., 678. példákat oldottuk meg. Lehet, hogy ezek a példák rávezettek arra, hogy milyen összefüggés van a másodfokú egyenletek gyökei és együtthatói között.

20.1. tétel (Viète tétele). ***Ha x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, akkor***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy az adott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nagyobb, mint nulla: $D > 0$. Akkor a megoldóképlet alapján felírhatjuk, hogy:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ és } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Vagyis $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}$.

$$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Megjegyzés. Viète tétele igaz abban az esetben is, ha $D = 0$. Ekkor úgy vesszük, hogy $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \ \blacktriangle$$

Következmény. ***Ha x_1 és x_2 az $x^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, akkor***

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b,}$$
$$\boldsymbol{x_1 x_2 = c,}$$

vagyis, *ha a főegyüttható 1, akkor a két gyök összege egyenlő az elsőfokú tag együtthatójának ellentettjével, a két gyök szorzata pedig a szabadtaggal.*

20.2. tétel (Viète tételének megfordítása). ***Ha α és β számokra igaz hogy $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ és $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, akkor ezek a számok az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei.***

Bizonyítás. Induljunk ki az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletből, osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a-val:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

François Viète
(1540–1603)

François Viète francia matematikus, foglalkozását tekintve jogász. 1591-ben bevezette azt, hogy nemcsak az egyenletek változóit, hanem az együtthatóit is betűvel jelölte, ami lehetővé tette az egyenletek általános alakjának és gyökeinek vizsgálatát. Viète saját bevallása szerint különösen nagyra értékelte saját munkái közül az egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés felfedezését.

Felhasználva a tétel feltételeit, felírhatjuk:

$$x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Helyettesítsük be a kapott egyenletbe α-t és β-t:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\,\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$

$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\,\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Tehát α és β gyökei a (*) egyenletnek és így az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek is. ▲

Következmény. ***Ha*** α ***és*** β ***számokra igaz, hogy*** $\alpha + \beta = -b$ ***és*** $\alpha\beta = c$***, akkor ezek a számok az*** $x^2 + bx + c = 0$ ***egyenlet gyökei.***

Alkalmazva ezt a következményt, a másodfokú egyenlet megoldható a megoldóképlet nélkül is.

1. PÉLDA. Határozzuk meg a $3x^2 - 15x + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek összegét és szorzatát.

Megoldás. Ellenőrizzük le, vannak-e gyökei az adott egyenletnek:

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0.$$

Mivel a diszkrimináns nagyobb, mint nulla, így az egyenletnek két gyöke van: x_1 és x_2.

Viète tétele alapján: $x_1 + x_2 = -\dfrac{-15}{3} = 5,\;\; x_1x_2 = \dfrac{2}{3}$. ▲

2. PÉLDA. Határozzuk meg az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet b és c együtthatóit, ha tudjuk hogy az egyenlet gyökei –7 és 4.

Megoldás. Viète tétele alapján: $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$. ▲

3. PÉLDA. Írjunk fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, melynek gyökei a következő számok: 1) 4 és $-\dfrac{5}{7}$; 2) $\dfrac{6-\sqrt{7}}{2}$ és $\dfrac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Megoldás. 1) Mivel $x_1 = 4$ és $x_2 = -\dfrac{5}{7}$,

ezért $x_1 + x_2 = 4 - \dfrac{5}{7} = \dfrac{23}{7},\;\; x_1x_2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{5}{7}\right) = -\dfrac{20}{7}$.

A fordított tétel alapján az x_1 és x_2 számok gyökei az $x^2 - \dfrac{23}{7}x - \dfrac{20}{7} = 0$. egyenletnek. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 7-tel, így olyan másodfokú egyenletet kapunk melynek együtthatói egész számok:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Ha $x_1 = \dfrac{6-\sqrt{7}}{2}$ és $x_2 = \dfrac{6+\sqrt{7}}{2}$,

akkor $x_1 + x_2 = \dfrac{6-\sqrt{7}}{2} + \dfrac{6+\sqrt{7}}{2} = 6$, és $x_1x_2 = \dfrac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{6+\sqrt{7}}{2} = \dfrac{36-7}{4} = \dfrac{29}{4}$.

Tehát x_1 és x_2 számok gyökei az $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$ egyenletnek, de akkor a keresett egész együtthatós egyenlet a $4x^2 - 24x + 29 = 0$ egyenlet. ▲

4. PÉLDA. A $2x^2 - 3x - 9 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg az $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet gyökei!

Megoldás. Viète tétele alapján $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.

Tehát $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.

Felelet: $-\frac{1}{3}$. ▲

5. PÉLDA. A $3x^2 - 10x + n = 0$ egyenlet egyik gyöke 4. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és az n értékét.

Megoldás. Jelöljük x_1-gyel és x_2-vel az adott egyenlet gyökeit, és emellett $x_1 = 4$. Akkor Viète tétele alapján $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$.

$\frac{n}{3} = x_1 x_2 = -\frac{8}{3}$, $n = -8$.

Felelet: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -8$. ▲

6. PÉLDA. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 4-gyel nagyobbak, mint az $x^2 + 6x - 14 = 0$ egyenlet megfelelő gyökei.

Megoldás. Jelöljük x_1-gyel és x_2-vel az $x^2 + 6x - 14 = 0$ egyenlet gyökeit és x_1' és x_2' a keresett másodfokú egyenlet gyökei.

A feltételek alapján: $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

Viète tétele alapján $x_1 + x_2 = -6$ és $x_1 \cdot x_2 = -14$.

Így:

$$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x_1' x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$$

Viète tételének megfordított tétele alapján a keresett egyenlet $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Felelet: $x^2 - 2x - 22 = 0$. ▲

?

1. Fogalmazzátok meg Viète tételét!
2. Fogalmazzátok meg Viète tételének következményét!
3. Fogalmazzátok meg a Viète-tétel megfordítását!
4. Fogalmazzátok meg a Viète-tétel megfordításának következményét!

GYAKORLATOK

680.° Mennyi az $x^2 + 5x - 10 = 0$ egyenlet gyökeinek összege?
1) 5; 2) –5; 3) –10; 4) 10.

681.° Mennyi az $x^2 - 14x + 12 = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata?
1) –14; 2) 14; 3) 12; 4) –12.

682.° A következő egyenletek megoldása nélkül írd fel a gyökök összegét és szorzatát:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$; 3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$; 4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

683.° A következő egyenletek megoldása nélkül írd fel a gyökök összegét és szorzatát:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$; 3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$; 4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

684.° Viète megfordított tétele alapján ellenőrizzétek, hogy az adott számok gyökei-e az alábbi egyenletnek:
1) 2 és 6 az $x^2 - 8x + 12 = 0$ egyenletnek;
2) –7 és 8 az $x^2 + x - 56 = 0$ egyenletnek;
3) 5 és 8 az $x^2 - 13x + 42 = 0$ egyenletnek;
4) 9 és 11 az $x^2 - 20x - 99 = 0$ egyenletnek!

685.° Viète fordított tétele alapján ellenőrizzétek, hogy az adott számok gyökei az alábbi egyenletnek:
1) 1 és –2 az $x^2 + 2x - 3 = 0$ egyenletnek;
2) –2 és –3 az $x^2 + 5x + 6 = 0$ egyenletnek!

686.° Határozzátok meg az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet b és c együtthatóját, ha az alábbi számok az egyenlet gyökei:
1) –8 és 6; 2) 4 és 5.

687.° Határozzátok meg az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet b és c együtthatóját, ha az alábbi számok az egyenlet gyökei:
1) –2 és 0,5; 2) –10 és –20.

688.° Írjatok fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, melynek az alábbi számok a gyökei:
1) 2 és 5; 3) –0,2 és –10; 5) 0 és 6;
2) $-\frac{1}{3}$ és 2; 4) $2-\sqrt{3}$ és $2+\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ és $\sqrt{7}$.

689.° Írjatok fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, melynek az alábbi számok a gyökei:
1) –7 és –8; 2) 5 és –0,4; 3) $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{3}$; 4) $5-\sqrt{10}$ és $5+\sqrt{10}$.

690.• Az $x^2 - 8x + q = 0$ egyenlet egyik gyöke –2. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és a q értékét!

691.• Az $x^2 + px - 42 = 0$ egyenlet egyik gyöke 7. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és a p értékét!

692.• A $6x^2 - bx + 4 = 0$ egyenlet egyik gyöke $\frac{1}{3}$. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és a b értékét!

693.• A $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$ egyenlet egyik gyöke –0,2. Határozzátok meg az egyenlet másik gyökét és az m értékét!

694.• A $2x^2 - 7x - 13 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg az $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet két gyöke!

695.• Az $5x^2 + 4x - 13 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg a $3x_1x_2 - x_1 - x_2$ kifejezés értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet gyökei!

696.• A b mely értékei mellett lesznek az $x^2 + bx - 17 = 0$ egyenlet gyökei ellentett számok? Határozzátok meg ezeket a számokat!

697.• Oldjátok meg a következő másodfokú egyenleteket! Alkalmazzátok Viète tételét:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
5) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
6) $x^2 - x - 2 = 0$;
7) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
8) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

698.• Oldjátok meg a következő másodfokú egyenleteket! Alkalmazzátok Viète tételét:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 + x - 12 = 0$.

699.• Az alábbi egyenletek közül melyeknek lesz mind a két gyöke pozitív, mind a két gyöke negatív és melyek gyökei ellenkező előjelűek:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 42 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x + 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

700.•• Az $x^2 - 10x + c = 0$ egyenlet gyökei közül az egyik 8-cal nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a c értékét és az egyenlet gyökeit!

701.•• Az $x^2 + 20x + a = 0$ egyenlet gyökeinek aránya 7 : 3. Határozzátok meg az a értékét és az egyenlet gyökeit!

702.•• Az $x^2 - 7x + m = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire igaz, hogy $2x_1 - 5x_2 = 28$. Határozzátok meg az egyenlet gyökeit és az m értékét!

703.•• Az $x^2 + 4x + n = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire igaz, hogy $3x_1 - x_2 = 8$. Határozzátok meg az egyenlet gyökeit és az n értékét!

704.•• Viète fordított tételével határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;
2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$; 4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

705.•• Viète fordított tételével határozzátok meg az alábbi egyenletek gyökeit:

1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$; 2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

706.•• Az $x^2 - 9x + 6 = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2. A gyökök kiszámítása nélkül határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 - x_2)^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

707.•• Az $x^2 + 5x - 16 = 0$ egyenlet megoldása nélkül határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét, ha x_1 és x_2 az előbbi egyenlet két gyöke:

1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 3) $| x_2 - x_1 |$.

708.•• Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2-vel kisebbek az $x^2 + 8x - 3 = 0$ egyenletek megfelelő gyökeinél!

709.•• Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 3-mal nagyobbak, mint az $x^2 - 12x + 4 = 0$ egyenletek megfelelő gyökei!

710.•• Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 3-szor kisebbek, mint a $2x^2 - 14x + 9 = 0$ egyenletek megfelelő gyökei!

711.•• Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2-szer nagyobbak, mint a $2x^2 - 15x + 4 = 0$ egyenletek megfelelő gyökei!

712.* A $3x^2 + ax - 7 = 0$ egyenlet gyökeinek összege $\frac{46}{9}$. Határozzátok meg az a értékét!

713.* Az $x^2 - ax + 8 = 0$ gyökeire igaz, hogy $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Határozzátok meg az a értékét!

714.* Igazak-e az alábbi állítások, hogy

1) a $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ egyenlet gyökei különböző előjelűek az a bármely értéke mellett;
2) az $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ egyenlet gyökei, ha léteznek, függetlenül az a értékétől, negatív előjelűek?

715.* Határozzátok meg a b összes olyan egész értékét, melyre az alábbi egyenletek gyökei is egészek:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

716.* Határozzátok meg a b összes olyan egész értékét, melyre az alábbi egyenletek gyökei is egészek:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

717.* Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei egyenlők a b és c együtthatóval. Határozzátok meg a b és a c értékét!

718.* Az a mely értékére lesz az $x^2 - 4x + a = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege: 1) 12; 2) 6?

719.* Az a mely értékére lesz az $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszege 9?

ISMÉTLŐ FELADATOK

720. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{4a-16}{a^2-16}$; 3) $\dfrac{c^2+10c+25}{5c+25}$; 5) $\dfrac{n^3-n^5}{n^3-n}$;

2) $\dfrac{12b^3-8b^2}{2-3b}$; 4) $\dfrac{4-m^2}{m^2-4m+4}$; 6) $\dfrac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}$.

721. Egy gyümölcsösben 48 fát ültettek, soronként azonos mennyiséget. 8-cal kevesebb a sorok száma, mint amennyi fát ültettek egy-egy sorba. Hány fát ültettek egy-egy sorba, és hány sort ültettek?

722. Rajz nélkül határozzátok meg az $y = x^2$ és $y = x + 2$ függvények grafikonjainak metszéspontját! Ábrázoljátok a függvényeket, és jelöljétek a meghatározott pontokat!

723. A gyümölcsös 60%-a cseresznye és szilvafa. A cseresznye és szilvafák 20%-a szilvafa. A gyümölcsös hány százaléka szilvafa?

FÉLKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

724. Az alábbi kifejezéseket csoportosítási módszerrel alakítsd szorzattá:

1) $x^2 - 7x + 10$; 3) $a^2 + 8a + 12$;

2) $y^2 + 3y - 4$; 4) $x^2 - x - 6$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

725. László három, x, y, z számjegyre gondolt. Péter megnevez három számot: a, b és c. László megmondja az $ax + by + cz$ kifejezés értékét. Mely számokat kell megneveznie Péternek ahhoz, hogy a kapott információ alapján meg tudjuk mondani, mely számokra gondolt László?

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT! 5. SZ. TESZTFELADAT

1. Az alábbi egyenletek közül melyik másodfokú?
A) $x^2 = 0$; B) $x^2 + x = 0$; C) $x^3 + x = 0$; D) $x^2 + x - 2 = 0$.

2. Oldjátok meg a $9x - x^2 = 0$ egyenletet!
A) –3; 0; 3; B) 0; 3; C) –3; 3; D) 0; 9.

3. Oldjátok meg az $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{3-x}{2}$ egyenletet!
A) 0; 5; B) 5; C) $\sqrt{5}$; D) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.

4. Az alábbi egyenletek közül melyiknek nincs gyökük?
A) $x^2 - 5x - 2 = 0$; C) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
B) $x^2 - 5x + 2 = 0$; D) $x^2 + 2x - 5 = 0$.

5. Hány gyöke van a $6x^2 + 13x + 5 = 0$ másodfokú egyenletnek?
A) kettő; C) egyetlen egy sem;
B) végtelen sok; D) egy.

6. Határozzátok meg az $x^2 + 4x - 21 = 0$ egyenlet gyökeit!
A) 7; –3; B) –7; 3; C) –7; –3; D) 3; 7.

7. Mennyi az $x^2 - 10x - 12 = 0$ egyenlet gyökeinek összege?
A) 10; B) –10; C) –12; D) 12.

8. Mennyi a $3x^2 - 16x + 6 = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata?
A) 6; B) 2; C) –16; D) $\frac{16}{3}$.

9. Az x mely értékei mellett egyenlők a $(3x - 1)(x + 2)$ és a $(x - 12)(x - 4)$ kifejezések értékei?
A) –12,5; 2; B) 12,5; –2; C) –25; 4; D) 25; –4.

10. Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei a $3-\sqrt{2}$ és $3+\sqrt{2}$!
A) $x^2 + 6x - 7 = 0$; C) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
B) $x^2 - 6x - 7 = 0$; D) $x^2 - 6x + 7 = 0$.

11. Oldjátok meg az $x|x| - 9x - 10 = 0$ egyenletet!
A) –1; 10; $\frac{-9-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{-9+\sqrt{41}}{2}$; C) –1; $\frac{-9-\sqrt{41}}{2}$;
B) 10; $\frac{-9-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{-9+\sqrt{41}}{2}$; D) –1; 10.

12. A $2x^2 + 9x + c = 0$ egyenlet egyik gyöke –5. Határozzátok meg a másik gyököt és a c értékét!
A) $x_2 = 0{,}5$, $c = -5$; C) $x_2 = 9{,}5$, $c = 22{,}5$;
B) $x_2 = -0{,}5$, $c = 5$; D) $x_2 = 9{,}5$, $c = -22{,}5$.

21. Másodfokú polinom

Meghatározás. **Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést másodfokú polinomnak nevezzük, ahol x változó, a, b és c bármely szám és $a \neq 0$.**

Lássunk néhány példát olyan többtagú kifejezésre, melyek másodfokú polinomok:

$$2x^2 - 3x + 5;\ x^2 + 7x;\ x^2 - 5;\ 3x^2.$$

Jegyezzük meg, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet bal oldala is másodfokú polinom.

Meghatározás. **A másodfokú polinom gyökének nevezzük a változó azon értékét, melyre a kifejezés helyettesítési értéke 0.**

Például a 2 gyöke az $x^2 - 6x + 8$ másodfokú polinomnak.

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom gyökeit, meg kell oldani az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletet.

A $D = b^2 - 4ac$ kifejezést az **$ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsának nevezzük.**

Ha $D < 0$, akkor a másodfokú polinomnak nincsenek gyökei, ha $D = 0$, egy gyöke van, ha $D > 0$, akkor két gyöke van.

Csoportosítási módszerrel bontsuk tényezőkre az $x^2 - 3x + 2$ másodfokú polinomot. (Ilyen volt a 724. feladat, melyet a felkészüléskor oldottunk):

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) =$$
$$= (x - 1)(x - 2).$$

Ezt az azonos átalakítást nevezzük az $x^2 - 3x + 2$ kifejezés **lineáris tényezőkre** bontásának.

A másodfokú polinom gyökei és lineáris tényezői közötti összefüggést a következő tétel mondja ki.

21.1. tétel. ***Ha az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa pozitív, akkor a másodfokú polinom szorzattá alakítható:***

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

ahol x_1 és x_2 a polinom gyökei.

Bizonyítás. Mivel x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, így Viète tétele alapján $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$

Ezért

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \blacktriangle$$

Megjegyezzük, hogyha a diszkrimináns nulla, akkor úgy tekintjük, hogy a másodfokú polinomnak két egyenlő gyöke van, vagyis $x_1 = x_2$. Ebben az esetben

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2.$$

21.2. tétel. ***Ha az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, akkor a másodfokú polinom nem bontható lineáris szorzótényezőkre.***

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom szorzattá alakítható, vagyis léteznek olyan k, m és n számok, melyekre teljesül az $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$ egyenlőség. Ebben az esetben viszont m és n a polinom gyökei. Vagyis a diszkrimináns nemnegatív, ami ellentmond a feltételezésnek. ▲

1. PÉLDA. Bontsuk tényezőkre az alábbi polinomokat:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Megoldás. 1) Meghatározzuk a polinom gyökeit:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Tehát $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)\,(x - 16)$.

2) Oldjuk meg a $-x^2 + 17x - 30 = 0$ egyenletet! Azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Vagyis $-x^2 + 17x - 30 = -\,(x - 2)\,(x - 15)$.

3) Megoldjuk a $3x^2 - 7x + 2 = 0$ egyenletet:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Tehát $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)\,(x - 2)$. ▲

2. PÉLDA. Egyszerűsítsük a $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$ törtet.

Megoldás. Bontsuk tényezőkre a tört számlálóját. Oldjuk meg a $6a^2 - a - 1 = 0$ egyenletet. Az egyenlet gyökei:

$$a_1 = -\frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{2}.$$

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a+1)(2a-1).$$

Vagyis:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a+1)(2a-1)}{(3a+1)(3a-1)} = \frac{2a-1}{3a-1}.$$

Felelet: $\frac{2a-1}{3a-1}$. ▲

3. PÉLDA. Az m mely értéke mellett lehet a $2x^2 + 9x + m$ másodfokú polinomot olyan szorzatként felírni, melynek egyik tényezője az $(x + 5)$ lineáris kifejezés?

Megoldás. Mivel az egyik szorzótényező az $(x + 5)$ lineáris kifejezés, így a polinom egyik gyöke -5.

Vagyis:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$
$$m = -5.$$

Felelet: $m = -5$. ▲

?

1. Mit nevezünk másodfokú polinomnak?
2. Mi a másodfokú polinom gyöke?
3. Mit nevezünk a másodfokú polinom diszkriminánsának?
4. Mikor nincs a másodfokú polinomnak gyöke? Mikor van egy gyöke? Két gyöke?
5. Mikor bontható lineáris tényezőkre egy másodfokú polinom?
6. Írjátok le a másodfokú polinom tényezőkre bontásának képletét!
7. Mely esetben nem lehet tényezőkre bontani a másodfokú polinomot?

GYAKORLATOK

726.° Határozzátok meg a következő másodfokú polinomok gyökeit:

1) $x^2 - x - 12$; 3) $3x^2 - 16x + 5$; 5) $4x^2 + 28x + 49$;
2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $16x^2 - 24x + 3$; 6) $3x^2 + 21x - 90$.

727.° Tényezőkre lehet-e bontani a következő kifejezéseket?

1) $x^2 - 12x + 6$; 3) $2a^2 - 8a + 8$;
2) $3x^2 - 8x + 6$; 4) $-6b^2 + b + 12$.

728.° Bontsátok lineáris tényezőkre az alábbi polinomokat:

1) $x^2 - 7x + 12$; 5) $-x^2 + x + 2$; 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
2) $x^2 + 8x + 15$; 6) $6x^2 - 5x - 1$; 10) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
3) $x^2 - 3x - 10$; 7) $4x^2 + 3x - 22$; 11) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
4) $-x^2 - 5x - 6$; 8) $-3a^2 + 8a + 3$; 12) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

729.° Bontsátok lineáris tényezőkre az alábbi polinomokat:

1) $x^2 - 3x - 18$; 4) $5x^2 + 8x - 4$; 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
2) $x^2 + 5x - 14$; 5) $2a^2 - 3a + 1$; 8) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$;
3) $-x^2 + 3x + 4$; 6) $4b^2 - 11b - 3$; 9) $x^2 - 2x - 2$.

730.° Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{x^2+x-6}{x+3}$; 3) $\frac{3x-15}{x^2-x-20}$; 5) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x}$;
2) $\frac{x-4}{x^2-10x+24}$; 4) $\frac{x^2-3x+2}{6x-6}$; 6) $\frac{x^2+4x}{x^2+2x-8}$.

731.° Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{x^2-6x+5}{x-5}$; 2) $\frac{2x+12}{x^2+3x-18}$; 3) $\frac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$.

732.• Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\frac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$; 3) $\frac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$; 5) $\frac{x^2-16}{32-4x-x^2}$;
2) $\frac{2b^2-7b+3}{4b^2-4b+1}$; 4) $\frac{m^3-1}{m^2+9m-10}$; 6) $\frac{4n^2-9n+2}{2+9n-5n^2}$.

733.• Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\frac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; 3) $\frac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$;
2) $\frac{2y^2+3y-5}{y^2-2y+1}$; 4) $\frac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$.

734.•• A b mely értéke mellett lehet az alábbi polinomokat olyan szorzattá alakítani, melynek egyik tényezője a megadott lineáris kifejezés?

1) $2x^2 - 5x + b$; $(x - 3)$;
2) $-4x^2 + bx + 2$; $(x + 1)$;
3) $3x^2 - 4x + b$; $(3x - 2)$.

735.•• A a mely értéke mellett lehet az alábbi polinomokat olyan szorzattá alakítani, melynek egyik tényezője a megadott lineáris kifejezés?

1) $2x^2 - 7x + a$; $(x - 4)$;
2) $4x^2 - ax + 6$; $(2x + 1)$.

736.•• Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\dfrac{a-2}{3a+2}+\dfrac{a-1}{1-2a}$;

2) $\dfrac{b-4}{b^3-b}:\left(\dfrac{b-1}{2b^2+3b+1}-\dfrac{1}{b^2-1}\right)$;

3) $\left(\dfrac{c+2}{c^2-c-6}-\dfrac{2c}{c^2-6c+9}\right):\dfrac{c^2+3c}{(2c-6)^2}$;

4) $\left(\dfrac{3}{m-4}+\dfrac{2m}{m+1}+\dfrac{4m-6}{m^2-3m-4}\right)\cdot\dfrac{4m-16}{2m-3}$.

737.•• Igazoljátok, hogy az alábbi kifejezések értéke független az a változó értékétől:

1) $\dfrac{25a^2-36}{10a^2-9a+2}:\dfrac{5a+6}{5a-2}+\dfrac{9a-8}{1-2a}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{4}{a^2+2a-3}\right):\dfrac{2a+1}{a+3}$.

738.•• Ábrázoljátok az alábbi függvényeket:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{3x^2-10x+3}{x-3}-\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

739.•• Ábrázoljátok a következő függvények grafikonját:

1) $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$; 2) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}-\dfrac{x^2-x-30}{x+5}$.

740.* Alakítsátok szorzattá az alábbi többtagú kifejezéseket:

1) $x^2-6xy+5y^2$; 3) $3m^2-8mn-3n^2$;

2) $a^2+5ab-36b^2$; 4) $4x^2-5xy+y^2$.

741.* Alakítsátok szorzattá az alábbi polinomokat:

1) $a^2-14ab+40b^2$; 2) $12b^2+bc-6c^2$.

742.* Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(a^2-a-6)\,x=a^2-9$; 2) $(a^2-8a+7)\,x=2a^2-13a-7$.

743.* Az a minden értékére oldjátok meg az

$$(a^2+7a-8)\,x=a^2+16a+64$$

egyenletet!

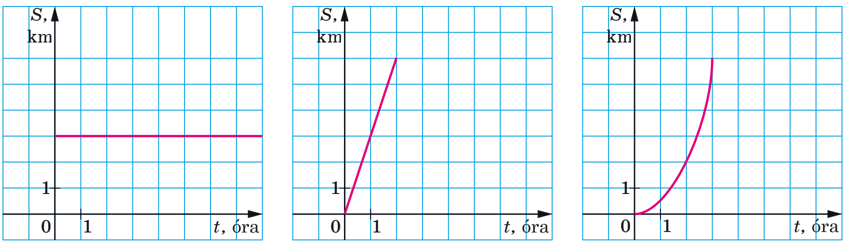
ISMÉTLŐ FELADATOK

744. Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3}$; 5) $\dfrac{9a-b^2}{9a+6b\sqrt{a}+b^2}$;

2) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-5\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{4a-2}{2\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{a\sqrt{a}-8}{a+2\sqrt{a}+4}$.

745. A 36. ábra egyik rajzán egy állandó sebességgel haladó gyalogos mozgási grafikonja látható. Határozzátok meg a gyalogos sebességét!



а *б* *в*

36. ábra

746. 2 liter 8%-os és 3 liter 6%-os zsírtartalmú tejet összeöntöttek. Hány százalék a kapott tej zsírtartalma?

FÉLKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

747. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2 = 9$; 3) $(4x + 1)^2 = 9$; 5) $\sqrt{x} = 9$;

2) $x^2 = -9$; 4) $(x - 1)^2 = 5$; 6) $\sqrt{x} = -9$.

748. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\dfrac{4x-1}{x-2} = \dfrac{x+5}{x-2}$;

2) $\dfrac{2y^2 - 3y - 20}{y-4} - y = 1$;

3) $\dfrac{5x-3}{x+1} - \dfrac{4x-2}{x+2} = 1$;

4) $\dfrac{1}{y-5} - \dfrac{1}{y+4} = \dfrac{9}{(y-5)(y+4)}$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

749. Milyen téglalapból van több: olyanból, amelynek kerülete 1000 egység vagy olyanból, amelyeknek a kerülete 1002 egység? A feladat feltételében az összes olyan téglalap szerepel, melyek oldalhosszainak mérőszáma természetes szám.

22. Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása

1. PÉLDA. Oldjuk meg az $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Vezessünk be új változót: $x^2 = t$. Akkor $x^4 = t^2$. Ekkor az egyenlet felírható a t változón keresztül:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Az utóbbi egyenletet megoldva kapjuk, hogy $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Mivel $t = x^2$, ezért az

$$x^2 = 4 \text{ és } x^2 = 9$$

egyenletet kell megoldani.

Tehát $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ és $x_4 = 3$.

Felelet: kétféleképen is felírhatjuk: –2; 2; –3; 3 vagy ±2; ±3. ▲

Meghatározás. Az $ax^4 + bx^2 + c = 0$ alakú egyenletet bikvadratikus egyenletnek nevezzük, ahol x változó, a, b, c valós szám és $a \neq 0$.

Az $x^2 = t$ változócserét alkalmazva a bikvadratikus egyenlet visszavezethető $at^2 + bt + c = 0$ alakú másodfokú egyenletre. Ezt a módszert **változócserének** nevezzük.

Ezt az elvet nemcsak bikvadratikus egyenletek megoldásakor alkalmazhatjuk.

2. PÉLDA. Oldjuk meg a $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Vezessük be a $t = (2x - 1)^2$ változót. Ezt behelyettesítve az egyenletünk

$$t^2 + t - 2 = 0 \text{ alakú lesz.}$$

Innét $t_1 = -2$ és $t_2 = 1$.

Tehát a $(2x - 1)^2 = -2$ és $(2x - 1)^2 = 1$ egyenleteket kell megoldani.

Az első egyenletnek nincs megoldása. A második egyenletből a

$$2x - 1 = 1 \text{ vagy } 2x - 1 = -1$$

egyenleteket kapjuk, melyek megoldása az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$.

Felelet: 0; 1. ▲

3. PÉLDA. Oldjuk meg a $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Vezessünk be új ismeretlent. Legyen $\sqrt{x} = t$, akkor $t^2 = x$. Így az egyenletünk: $6t^2 + 5t + 1 = 0$ alakú lett.

Ennek az egyenletnek két gyöke van: $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Két egyenletet kaptunk:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \quad \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Mivel $\sqrt{x} \geqslant 0$, ezeknek az egyenleteknek nincs megoldásuk.

Felelet: az egyenletnek nincsenek gyökei. ▲

4. PÉLDA. Oldjuk meg az $\frac{x^2+2x}{x-6} = \frac{5x+18}{x-6}$ egyenletet.

Megoldás. Ez az egyenlet ekvivalens a

$$\begin{cases} x^2+2x = 5x+18, \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Innét

$$\begin{cases} x^2-3x-18 = 0, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \text{ vagy } x = 6, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$x = -3.$$

Felelet: –3. ▲

5. PÉLDA. Oldjuk meg az $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ egyenletet.

Megoldás. Rendezzük az egyenletet: $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0;$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Ez az egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases} 5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{cases} 5x+10-4x+8-x^2+4x-4 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x-14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \text{ vagy } x = -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 7.$$

Felelet: 7. ▲

? Mit nevezünk bikvadratikus egyenletnek?

GYAKORLATOK

750.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

751.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

752.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\dfrac{x^2+3x-4}{x+1} = 0$;
2) $\dfrac{x^2-6x-7}{x-7} = 0$;
3) $\dfrac{3x^2-x-2}{1-x} = 0$;
4) $\dfrac{x^2-8x}{x+10} = \dfrac{20}{x+10}$;
5) $\dfrac{x^2-14}{x+2} = \dfrac{5x}{x+2}$;
6) $\dfrac{x^2+10x}{x-8} = \dfrac{12x+48}{x-8}$;
7) $\dfrac{x^2+4x}{x-5} - \dfrac{9x+50}{x-5} = 0$;
8) $\dfrac{x^2-6x}{x-3} + \dfrac{15-2x}{x-3} = 0$;
9) $\dfrac{x^2-6x}{x-4} = 4$;
10) $\dfrac{5x+18}{x-2} = x$;
11) $x+1 = \dfrac{6}{x}$;
12) $5 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{18}{x}$.

753.° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\dfrac{x^2-5x-6}{x-6} = 0$;
2) $\dfrac{4x^2-7x-2}{x-2} = 0$;
3) $\dfrac{2x^2+6}{x+8} = \dfrac{13x}{x+8}$;
4) $\dfrac{x^2+4x}{x+7} = \dfrac{5x+56}{x+7}$;
5) $\dfrac{x^2+12x}{x+4} - \dfrac{5x-12}{x+4} = 0$;
6) $\dfrac{x^2-3x}{x+6} = 6$;
7) $\dfrac{2-33y}{y-4} = 7y$;
8) $y - \dfrac{39}{y} = 10$.

754.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

755.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$;
2) $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$.

756.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$;
2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;
3) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$;
4) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$;
5) $6\sqrt{x} - 27 + x = 0$;
6) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$.

757.• Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$; 2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$; 3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

758.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$;
2) $\dfrac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$;
3) $\dfrac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0$;
4) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$.

759.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0$; 2) $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0$.

760.• Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\dfrac{2y}{y - 3} = \dfrac{3y + 3}{y}$;
2) $\dfrac{3x + 4}{x - 3} = \dfrac{2x - 9}{x + 1}$;
3) $\dfrac{5x + 2}{x - 1} = \dfrac{4x + 13}{x + 7}$;
4) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 3x - 4$.

761.• Határozzátok meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $\dfrac{2x - 13}{x - 6} = \dfrac{x + 6}{x}$; 2) $\dfrac{3x^2 - 4x - 20}{x + 2} = 2x - 5$.

762.• Határozzátok meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $\dfrac{10}{x + 2} + \dfrac{9}{x} = 1$;
2) $\dfrac{48}{14 - x} - \dfrac{48}{14 + x} = 1$;
3) $\dfrac{x - 1}{x + 2} + \dfrac{x}{x - 2} = \dfrac{8}{x^2 - 4}$;
4) $\dfrac{x - 1}{x + 3} + \dfrac{x + 1}{x - 3} = \dfrac{2x + 18}{x^2 - 9}$;
5) $\dfrac{4x - 10}{x - 1} + \dfrac{x + 6}{x + 1} = 4$;
6) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{10}{x^2 - 5x} = \dfrac{3 - x}{x - 5}$;
7) $\dfrac{4x}{x^2 + 4x + 4} - \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x} = \dfrac{1}{x}$;
8) $\dfrac{6}{x^2 - 36} - \dfrac{3}{x^2 - 6x} + \dfrac{x - 12}{x^2 + 6x} = 0$;
9) $\dfrac{x}{x + 7} + \dfrac{x + 7}{x - 7} = \dfrac{63 - 5x}{x^2 - 49}$;
10) $\dfrac{4}{x^2 - 10x + 25} - \dfrac{1}{x + 5} = \dfrac{10}{x^2 - 25}$.

763.° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{5}$;

2) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$;

3) $\frac{9}{x+3}+\frac{14}{x-3}=\frac{24}{x}$;

4) $\frac{2y+3}{2y+2}-\frac{y+1}{2y-2}+\frac{1}{y^2-1}=0$;

5) $\frac{3x}{x^2-10x+25}-\frac{x-3}{x^2-5x}=\frac{1}{x}$;

6) $\frac{x-20}{x^2+10x}+\frac{10}{x^2-100}-\frac{5}{x^2-10x}=0$.

764.° A változó mely értékénél lesz:

1) a $\frac{24}{x-2}$ és a $\frac{16}{x+2}$ tört összege 3;

2) a $\frac{42}{x}$ tört értéke $\frac{1}{4}$-del több a $\frac{36}{x+20}$ tört értékénél?

765.° A változó mely értékénél lesz:

1) a $\frac{30}{x+3}$ tört értéke $\frac{1}{2}$-del kevesebb a $\frac{30}{x}$ tört értékénél;

2) a $\frac{20}{x}$ tört értéke 9-cel több a $\frac{20}{x+18}$ tört értékénél?

766.°° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3}+\frac{5-2x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{14}{x^2+3x+2}$;

4) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{2}{x^2+5x+6}$.

767.°° Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+39}{x^3-8}=\frac{5}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}=\frac{8}{x^2+2x-3}$.

768.°° Oldjátok meg a következő egyenleteket! Vezessetek be új változót:

1) $(x^2-2)^2-8(x^2-2)+7=0$;

2) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;

3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=3$;

4) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)=-5$.

769.°° Oldjátok meg a következő egyenleteket! Vezessetek be új ismeretlent:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2-\frac{6(2x-1)}{x}+5=0$;

2) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{3x-1}=3\frac{1}{3}$.

770.°° Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$;

2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;

3) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;

4) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{3}{2}$.

771.* Oldjátok meg az alábbi egyenleteket! Vegyétek figyelembe, hogy a valós szám:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$;

3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$;

4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0$.

772.* Az a mely értéke mellett lesz az $\dfrac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ egyenletnek egy gyöke?

ISMÉTLŐ FELADATOK

773. Igaz-e, hogy az

$$(a-1)^2\left(\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)+\frac{2}{a+1}$$

kifejezés értéke az a bármely értékére pozitív?

774. A $\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$ kifejezés értéke racionális vagy irracionális szám?

775. Ábrázoljátok az

$$y=\begin{cases}-\dfrac{8}{x}, & \text{ha } x<-2,\\ x^2, & \text{ha } x\geqslant -2\end{cases}$$

függvényt!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

776. A számítógép monitorán az 1-gyes számjegy látható. A gép minden másodpercben a monitoron lévő számhoz hozzáadja a szám számjegyeinek összegét. Lehetséges-e, hogy bizonyos idő múltán a monitoron a 123 456 789 szám legyen látható?

Egyenletek megoldása új változó bevezetésével

A 22. pontban megismerkedtetek az egyenletek megoldásának azzal a módszerével, mikor új változót vezettünk be. Tekintsünk át még néhány példát ennek a módszernek az alkalmazására, melyek igazolják a módszer hatékonyságát.

1. PÉLDA. Oldjuk meg az $\dfrac{x^2-3x-6}{x}-\dfrac{8x}{x^2-3x-6}=-2$ egyenletet.

Megoldás. Jelöljük az $\dfrac{x^2-3x-6}{x}=t$ kifejezést t-vel, akkor $\dfrac{8x}{x^2-3x-6}=\dfrac{8}{t}$. Behelyettesítve, az egyenletünk $t-\dfrac{8}{t}=-2$ alakú lesz, amely ekvivalens a $\begin{cases}t^2+2t-8=0,\\ t\neq 0\end{cases}$ egyenletrendszerrel.

Megoldva ezt az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $t_1 = -4$ és $t_2 = 2$.

Tehát az adott egyenlet megoldását visszavezettük két egyenlet megoldására:

1) $\dfrac{x^2 - 3x - 6}{x} = -4;$

2) $\dfrac{x^2 - 3x - 6}{x} = 2.$

Ezeket az egyenleteket oldjátok meg önállóan!

Felelet: –3; –1; 2; 6. ▲

2. PÉLDA. Oldjuk meg a $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$ egyenletet.

Megoldás. Alakítsuk át az egyenletet:

$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$

$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5\,(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$

Vezessünk be új változót: $2x^2 + 3x - 1 = t$. Ekkor az egyenlet $t^2 - 5t + 4 = 0$ alakban írható fel, melynek megoldása $t_1 = 1$ és $t_2 = 4$.

Vagyis $2x^2 + 3x - 1 = 1$ vagy $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

A kapott másodfokú egyenleteket megoldva kapjuk meg az eredeti egyenlet megoldását.

Felelet: $-2;\ \frac{1}{2};\ -\frac{5}{2};\ 1.$ ▲

3. PÉLDA. Oldjuk meg a $(2x^2 - 3x + 1)\,(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ egyenletet.

Megoldás. Könnyen leellenőrizhető, hogy az $x = 0$ érték nem gyöke az adott egyenletnek, ezért osszuk el az egyenlet mindkét oldalát x^2-tel, így az eredeti egyenlettel azonos

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9$$

egyenletet kapjuk.

Innét $\left(2x - 3 + \dfrac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \dfrac{1}{x}\right) = 9.$

Vezessünk be új változót: $2x + \dfrac{1}{x} - 3 = t$. Akkor $2x + 5 + \dfrac{1}{x} = t + 8$. Ekkor $t\,(t + 8) = 9$. A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ és $t_2 = -9$.

Ezeket az értékeket visszahelyettesítve két egyenletet kapunk:

1) $2x + \dfrac{1}{x} - 3 = 1;$

2) $2x + \dfrac{1}{x} - 3 = -9.$

Az egyenleteket oldjátok meg önállóan!

Felelet: $\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2};\ \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}.$ ▲

4. PÉLDA. Oldjuk meg a $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$ egyenletet.

Megoldás. Vezessünk be új változót: $x+\frac{1}{x}=t$. Ekkor $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$.

Innen $x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$; $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve:

$$7t-2(t^2-2)=9;$$
$$2t^2-7t+5=0.$$

A kapott másodfokú egyenleteket megoldva: $t_1=1$ és $t_2=\frac{5}{2}$.

Tehát $x+\frac{1}{x}=1$ vagy $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.

Ezeket az egyenleteket oldjátok meg önállóan!

Felelet: $\frac{1}{2}$; 2. ▲

5. PÉLDA. Oldjuk meg az $(x^2-2x+2)^2+3x(x^2-2x+2)=10x^2$ egyenletet.

Megoldás. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $x=0$ nem gyöke az egyenletnek. Így az egyenlet felírható

$$\frac{(x^2-2x+2)^2}{x^2}+\frac{3(x^2-2x+2)}{x}=10$$

alakban, mivel az egyenlet mindkét oldalát elosztottuk x^2-tel.

Az $\frac{x^2-2x+2}{x}=t$ új változó bevezetésével a

$$t^2+3t-10=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Fejezzétek be önállóan!

Felelet: $2-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; –1; –2. ▲

Ezen példák megoldása közben felmerülhetett bennetek, hogy miért nem alkalmaztunk azonos átalakításokat?

Az igazság az, hogy a kijelölt azonos átalakítások után az ax^4+bx^3+ $+cx^2+dx+e=0$ alakú egyenletet kapjuk (győződjetek meg róla önállóan). Ha $a\neq 0$, ezeket az egyenleteket **negyedfokú** egyenleteknek nevezzük. Ha $a=0$ és $b\neq 0$, akkor **harmadfokúnak**. Ezen egyenletek részesete a bikvadratikus egyenlet, amikor $b=0$ és $d=0$. Ezeket az egyenleteket már meg tudjátok oldani.

Általános esetben a harmadfokú és negyedfokú egyenletek megoldásához ismerni kell a megoldóképletet. A megoldóképlet kivezetésének történetéről olvashatsz a következő értekezésből.

GYAKORLATOK

Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{3x^2-9x}{2}-\frac{12}{x^2-3x}=3;$

2) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1;$

3) $x(x+3)(x+5)(x+8)=100;$

4) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2;$

5) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9;$

6) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1);$

7) $(x-6)^4+(x-4)^4=82.$

Scipione del Ferro titkos fegyvere

Könnyen meg tudjátok oldani a következő harmadfokú egyenleteket:

$$x^3-8=0,\ x^3+x^2=0,\ x^3-x=0.$$

Ezek az egyenletek részesetei az $ax^3+bx^2+cx+d=0$ egyenletnek, ahol x a változó, a, b, c, d valós szám és $a\neq 0$. A harmadfokú egyenlet megoldóképletének levezetése nehéz feladat. Nemhiába tekintik a XVI. század egyik kiemelkedő matematikai felfedezésének.

Először Scipione del Ferro (1465–1526) olasz matematikus vezette le az $x^3+px=q$ egyenletet, ahol p és q pozitív szám. Scipione del Ferro a

Niccolo Tartaglia (1499–1557)

Girolamo Cardano (1501–1576)

Niels Henrik Abel (1802–1829)

felfedezését titokban tartotta. Abban a korban egy tudós érvényesülése sokban függött a matematikaversenyeken elért eredményeitől. Ezért volt számára kifizetődő, hogy titokban tartsa felfedezését, mert titkos fegyverként tudta alkalmazni.

Scipione del Ferro halála után egyik tanítványa, Fiore, aki ismerte a titkos képletet, kihívta Niccolo Tartagliát, egy velencei számolómestert (1499–1557) egy tudományos párbajra. Néhány nappal a párbaj előtt Tartaglia is felfedezte a harmadfokú egyenletek megoldásának eljárását és 1535. november 20-án fölényes győzelmet aratott.

Először a titkos képletet Girolamo Cardano (1501–1576) ismert olasz matematikus jelentette meg a *A nagy művészet, avagy az algebrai szabályokról* című könyvében. Ebben a műben találkozunk először a negyedfokú egyenlet megoldási eljárásával is, melyet Ludoviko Ferrari (1522–1565) dolgozott ki.

A XVII – XVIII. század matematikusai sok energiát fektettek az ötödfokú egyenletek megoldásába. Az elért eredményekhez sokban hozzájárultak Paolo Ruffini (1765–1822), és Niels Henrik Abel (1802–1829) fiatalon elhunyt norvég matematikus. Az eredmény meglepő volt: bebizonyították, hogy az általános ötödfokú és magasabb fokú egyenletek véges számú algebrai művelettel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás és gyökvonás) nem oldhatók meg.

23. A racionális egyenlet, mint a reális problémák matematikai modellje

A 7. pontban már tanultátok a racionális egyenletek alkalmazását a reális problémák megoldására, matematikai modelljére. Most, hogy már meg tudtok oldani másodfokú egyenletet is, a feladatok köre kibővíthető.

1. PÉLDA. Az A helységből egy kerékpáros indult el, majd 45 perccel később ugyanabba az irányba egy teherautó. A teherautó az A helységtől 15 km-re utolérte a kerékpárost. Mekkora átlagsebességgel haladt a kerékpáros és a teherautó, ha a teherautó sebessége 18 km/h-val több volt?

Megoldás. Jelöljük a kerekpáros sebességét x km/h-val, akkor a teherautó sebessége $(x + 18)$ km/h. A kerékpáros a 15 km-es utat $\frac{15}{x}$ óra alatt tette meg, a teherautó $\frac{15}{x+18}$ óra alatt. Mivel a teherautó ezt az utat 45 perccel, $\frac{3}{4}$ órával rövidebb idő alatt tette meg, mint a kerékpáros, ezért $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4}$.

Így:

$$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x}-\frac{5}{x+18}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{20x+360-20x-x^2-18x}{4x\,(x+18)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2+18x-360=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -18. \end{cases}$$

$x = 12$ vagy $x = –30$.

A –30 nem felel meg a feladat feltételeinek.

Tehát a kerekpáros sebessége 12 km/h, a teherautóé pedig 12 + 18 = = 30 (km/h).

Felelet: 12 km/h, 30 km/h. ▲

2. PÉLDA. Az útjavítást 7 órán keresztül egy brigád végezte, majd csatlakozott hozzájuk egy másik brigád. Két óra közös munkával be is fejezték az útkarbantartást. Hány óra alatt végzett volna külön-külön a két brigád az útjavítással, ha az elsőnek 4 órával több időre van szüksége?

Megoldás. Jelöljük x-szel azt az időt, ami alatt az első brigád elkészül az útjavítással, akkor a második brigád $(x – 4)$ óra alatt. 1 óra alatt az első brigád az út $\frac{1}{x}$-ed részét javítja ki, a második az út $\frac{1}{x-4}$-ed részét. Az első brigád 9 órát dolgozott, így az út $\frac{9}{x}$-ed részével végzett, a második brigád 2 órát dolgozott, tehát az út $\frac{2}{x-4}$-ed részét javította ki. Mivel a munkát közösen fejezték be, így a $\frac{9}{x}+\frac{2}{x-4}=1$ egyenletet írhatjuk fel.

A kapott egyenletnek két megoldása van: $x_1 = 12$ és $x_2 = 3$ (önállóan ellenőrizzétek le). A második gyök nem felel meg a feladat feltételeinek, mivel akkor a második brigád $x = 3 – 4 = –1$ óra alatt fejezné be a munkát, ami lehetetlen.

Tehát az első brigád 12 óra alatt, a második 8 óra alatt végezné el az útjavítást, ha egyedül dolgozna.

Felelet: 12 óra, 8 óra. ▲

3. PÉLDA. Egy sóoldat 120 gramm vizet tartalmaz. Miután az oldathoz hozzáadtak 10 g sót, az oldat koncentrációja 5%-kal megnőtt. Hány gramm só volt eredetileg az oldatban?

Megoldás. Jelöljük az eredeti oldat sótartalmát x-szel. Akkor az oldat tömege (x + 120) gramm, tehát a töménysége $\frac{x}{x+120}$. Miután az oldathoz 10 g sót adtak, akkor az oldat sótartalma (x + 10), és az oldat tömege (x + 130) gramm, a töménysége pedig $\frac{x+10}{x+130}$. Ez a töménység 5%-kal, azaz $\frac{1}{20}$-dal több az eredeti oldat töménységénél. Tehát $\frac{x+10}{x+130}-\frac{x}{x+120}=\frac{1}{20}$.

A kapott egyenletnek két gyöke van $x_1 = 30$ és $x_2 = -280$, melyek közül a második nem felel meg a feladat feltételeinek.

Vagyis az eredeti oldatban 30 gramm só volt.

Felelet: 30 g. ▲

GYAKORLATOK

777.• Az A és B városok közötti távolság első 150 km-ét egy személygépkocsi meghatározott sebességgel tette meg. Majd a további 240 km-en a sebességét 5 km/h-val növelte. Határozzátok meg a személygépkocsi kezdeti sebességét, ha a két város közötti utat a személygépkocsi 5 óra alatt tette meg!

778.• Egy motorkerékpáros a 90 km-es utat 18 perccel rövidebb idő alatt teszi meg, mint egy másik motorkerékpáros, mert a sebessége 10 km/h-val nagyobb. Határozzátok meg a motorkerékpárosok sebességét!

779.• Az egyik helységből a másik helységbe, melyek között a távolság 240 km, egyszerre indult el egy személygépkocsi és egy autóbusz. Az autóbusz átlagsebessége 20 km/h-val kisebb, mint a személygépkocsié, és így 1 órával később érkezett meg. Mekkora a személygépkocsi és az autóbusz átlagsebessége?

780.• Egy vonat 10 perces késését úgy próbálta behozni, hogy az út utolsó 80 km-es szakaszán az átlagsebességét növelte 16 km/h-val. Határozzátok meg a vonat kezdeti sebességét!

781.• A Meggyes és Körtvélyes közötti 15 km-es távolságot egy lovas valamilyen átlagsebességgel tette meg. A visszaúton a sebességét 3 km/h-val növelte, így 15 perccel rövidebb idő alatt ért vissza. Határozzátok meg a lovas kezdeti sebességét!

782.• Egy gépírónőnek meghatározott idő alatt 180 oldalt kellett legépelnie. Ő viszont 5 órával hamarabb végzett a munkával, mert óránként a tervezettnél 3 oldallal többet gépelt le. Hány oldalt gépelt óránként a gépírónő?

783.• Az egyik szivattyú 90 m^3 vizet 1 órával rövidebb idő alatt pumpál át, mint egy másik szivattyú 100 m^3-t. Mennyi a szivattyúk teljesítménye, ha az első óránként 5 m^3-rel több vizet pumpál át?

784.• Egy munkásnak 72 alkatrészt kellett meghatározott idő alatt legyártania. Mivel naponta 4 alkatrésszel többet készített, így a munkát a tervezetnél 3 nappal hamarabb fejezte be. Hány nap alatt végzett a feladattal?

785.• Egy sétahajó a folyón lefelé 16 km-t tett meg és felfelé 30 km-t. Az egész út 1 óra 30 percig tartott. Határozzátok meg a hajó átlagsebességét állóvízben, ha a vízfolyás sebessége 1 km/h!

786.• Egy csónak 15 km-t tett meg a folyón lefelé, majd visszafordult. Visszafelé az út 1 órával hosszabb volt. Határozzátok meg a csónak sebességét a folyón lefelé, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h!

787.• Az egyik kikötőből a folyón lefelé egy tutaj indult el, majd 4 órával később egy csónak. A csónak a kikötőtől 15 km-re utolérte a tutajt. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a csónak sebessége állóvízben 12 km/h!

788.• Egy sétahajó 4 óra alatt 45 km-t tett meg a folyón lefelé és 28 km-t a folyón felfelé. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a sétahajó sebessége állóvízben 18 km/h!

789.• Egy turista az út $\frac{5}{8}$-át hajón, a többit személygépkocsival tette meg. A személygépkocsi sebessége 20 km/h-val nagyobb a hajó sebességénél. Személygépkocsival 1 óra 30 perccel kevesebbet utazott, mint hajón. Határozzátok meg a személygépkocsi és a hajó átlagsebességét, ha a turista 160 km-t tett meg összesen!

790.• A menetrend szerint az autóbusznak 72 km-t kellett megtennie. 24 km megtétele után egy sorompónál az autóbusz 12 percet várakozott. Hogy tartani tudja a menetrendet, az autóbuszvezető a sebességét 12 km/h-val növelte, és így csak 4 percet késett. Határozzátok meg az autóbusz kezdeti sebességét!

791.• Az iskolások egy csoportja turistautat szervezett *A* városból *B* városba. Odafelé autóbusszal mentek, visszafelé pedig vonaton. Visszafelé az út 30 perccel rövidebb volt. Határozzátok meg a vonat és az autóbusz átlagsebességét, ha a vonat sebessége 20 km/h-val kevesebb a busz átlagsebességénél, és a két város között a műút 160 km, a vasútvonal pedig 150 km!

792.• Egy turista kajakkal 4 km-t a tavon és 5 km-t a folyón lefelé ugyanannyi idő alatt tett meg, mint 6 km-t a folyón felfelé. Mekkora sebességgel haladt a kajakos a tavon, ha a vízfolyás sebessége 2 km/h?

793.• Egy gőzös 1 óra alatt 16 km-t tett meg a tavon és 18 km-t a tóból eredő folyón. Határozzátok meg a gőzös sebességét állóvízben, ha a folyó sebessége 4 km/h!

794.• Egy közönséges tört nevezője 3-mal több a számlálójánál. Ha a tört számlálóját 4-gyel, a nevezőjét pedig 8-cal növeljük, akkor a kapott tört értéke $\frac{1}{6}$-dal több az eredeti tört értékénél. Határozzátok meg az eredeti törtet!

795.• Egy közönséges tört számlálója 5-tel kevesebb a nevezőjénél. Ha a tört számlálóját 3-mal csökkentjük, a nevezőjét pedig 4-gyel növeljük, akkor a kapott tört $\frac{1}{3}$-dal kisebb az eredeti törtnél. Határozzátok meg az eredeti törtet!

796.• Két munkás együtt a kijelölt feladatot 20 nap alatt végzi el. Hány nap alatt készülnének el külön-külön a munkával, ha az egyiküknek 9 nappal több időre van szüksége?

797.• Egy épület homlokzatának kifestésére az egyik munkásnak 5 órával több időre volt szüksége, mint egy másik munkásnak. Az egyik munkás 3 órát dolgozott, majd felváltotta őt a másik munkás. Két órával később a homlokzat 40%-a volt kifestve. Hány óra alatt készülne el az egész munkával külön-külön mindkét munkás?

798.• Az egyik traktoros 6 órát dolgozott a mezőn. Másnap besegített neki egy másik traktoros, így 8 órai közös munka után befejezték a szántást. Hány óra alatt szántaná fel külön-külön mindkét traktoros ezt a mezőt, ha az egyiknek erre 3 órával kevesebb időre van szüksége?

799.• A 20 gramm sót tartalmazó sóoldathoz 100 g vizet öntöttek, így az oldat töménysége 10%-kal csökkent. Mennyi vizet tartalmazott az oldat eredetileg?

800.• Egy 10 kg cinket tartalmazó cink-réz ötvözethez hozzáolvasztottak 10 kg rezet. A kapott ötvözet 5%-kal több rezet tartalmaz, mint az eredeti. Mennyi rezet tartalmazott az eredeti ötvözet?

801.•• 2 óra 40 perccel később, mint ahogy az A kikötőből elindult egy tutaj, a B kikötőből a folyón felfelé elindult egy motorcsónak. Határozzátok meg a folyóvíz sebességét, ha a tutaj és a motorcsónak az A kikötőtől 14 km-re találkozott! A motorcsónak sebessége állóvízben 12 km/h, és a két kikötő között a távolság 32 km!

802.•• Egy medencébe két cső vezet. Az egyik csövön keresztül töltik meg a medencét vízzel, a másikon keresztül engedik le a vizet. A víz leengedése 1 órával tovább tart, mint a medence megtöltése. Ha mindkét cső nyitva van, akkor a medence 30 óra alatt telik meg vízzel. Hány óra alatt lehet megtölteni vízzel az üres medencét?

803.•• Egy medencét három csapon keresztül lehet megtölteni vízzel. Az első csapon keresztül annyi idő alatt telik meg a medence, mint a másik kettőn együtt. Az első csapon keresztül 2 órával gyorsabban telik meg a medence, mint a másodikon és 8 órával hamarabb, mint a harmadikon. Hány óra alatt telne meg a medence az egyes csapokon keresztül?

804.•• A 400 km-es távolságot egy autóbusz meghatározott átlagsebességgel szerette volna megtenni. Az első két órában a tervezett sebességgel haladt, de közben 20 percre meg kellett állnia. Ahhoz, hogy idejében megérkezzen, az út hátralévő részén 10 km/h-val nagyobb sebességgel haladt. Mekkora volt az autóbusz tervezett sebessége?

805.•• Egy munkásnak meghatározott idő alatt 360 alkatrészt kell legyártania. Az első öt napban a tervnek megfelelően dolgozott, majd naponta 4 alkatrésszel növelte termelését, így a határidő előtt egy nappal már 372 alkatrészt készített el. Hány alkatrészt kellett elkészítenie naponta a terv szerint?

806.•• Egy meghatározott feladatot az egyik munkás 12 órával gyorsabban fejez be, mint egy másik, és 4 órával később, mintha együtt dolgoznának. Hány óra alatt végzi el a kijelölt munkát az első munkás?

ISMÉTLŐ FELADATOK

807. Számítsátok ki:

1) $(27\cdot 3^{-4})^2$; 2) $\dfrac{7^{-4}\cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 3) $(10^9)^2\cdot 1000^{-6}$.

808. Határozzátok meg az $a^2-2a\sqrt{5}+2$ kifejezés értékét, ha $a=\sqrt{5}-3$!

809. Ábrázoljátok az $y = -2x + 4$ függvényt!

1) Mi a függvény zérushelye?
2) Határozzátok meg x azon értékeit, melyeknél $y > 0$!
3) Illeszkedik-e az $M(-36; 68)$ pont a függvény grafikonjára?

810. A k mely értéke mellett illeszkedik az $A\left(-\sqrt{12}; \sqrt{3}\right)$ pont az $y=\dfrac{k}{x}$ függvény grafikonjára? Rajzoljátok meg a grafikont!

811. Az alábbi egyenlőségek közül melyik igaz?

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\sqrt{3}-2 \text{ vagy } \sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=2-\sqrt{3}.$$

A válaszotokat indokoljátok meg!

812. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(\dfrac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\left(\dfrac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $(0{,}2a^{-1}b^2)^2\cdot 4a^5b^{-4}$.

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK HASZNÁLATA

813. Egy tányéron 9 különböző tömegű sajtdarab van. Bizonyítsátok be, hogy az egyik darabot ketté lehet osztani úgy, hogy a kapott 10 sajtdarabot két tányérra rakva azokon egyenlő tömegű sajt legyen!

Európa első számítógépe

A számítástechnika gyors fejlődése több matematikai szakterület születését eredményezte, és új tudományos és alkalmazott kutatást indított el: a különböző folyamatok számítógépes szimulációját (néhány matematikai modellel már megismerkedtetek a 7., 23. pontokban).

Ma már el se tudjuk képzelni az életünket számítógép nélkül. Épp ezért hihetetlen, hogy a története kevesebb mint száz éves.

Az első elektronikus számológépet, az ENIAC-ot az USA-ban készítették el a XX. század 40-es éveiben, amit tüzérségi lövedékek röppályájának kiszámítására használták.

Európa első elektronikus számológépét Kijevben alkották meg.

1947 végén Szerhij Olekszijovics Lebegyev irányításával az Ukrán Tudományos Akadémia Elektrotechnikai Intézetének elektrotechnikai és speciális modellezés laboratóriumában megkezdődött az úgynevezett *elektronikus számológépmodellek* programja, az MESZM (malaja elektronnaja szcsotnaja masina). Ezek a számológépek már 1951 decemberében olyan gyakorlati feladatokat oldottak meg, melyekhez a programot az Ukrán Tudományos Akadémia Matematika Intézetének munkatársai írták. Az MESZM több mint egy évig a kontinentális Európa nem csak első, hanem egyetlen elektronikus számítógépe is volt.

1957-ben hozták létre az Ukrán Tudományos Akadémia számítóközpontját, amit 1962-ben Kibernetikai Kutatóintézetté szerveztek át. Az intézet alapítója és 1982-ig igazgatója Viktor Mihajlovics Hluskov volt.

Kijev egyik elővárosának, Feofániának az az épülete, ahol megalkották az MESZM-t

Sz. O. Lebegyev
(1902–1974)

A számítógépek által megoldott első feladatok az űrkutatás és az atomenergia kutatását szolgálták. Ezek a számítások a pilóta nélküli vagy pilótával rendelkező repülő szerkezetek röppályáját számították ki a valós időben, kiválasztották az optimális konstrukciót. Az ilyen faladatok a ami napig jellemzőek a gyors számítógépek alkalmazására.

A Kibernetikai Kutatóintézet volt a Szovjetunió számítástechnikájának, a számítástechnika, kibernetika és informatika tudósainak bölcsője. A munkatársak tudományos eredményei az egész világ elismerését kiváltotta. Ma is úgy tekintjük, hogy a számítástechnika alapjai, a matematikai modellezés, az automaták elmélete, a robotirányítású szerkezetek és más számítástechnikai szakterület részben az ukrán tudósok munkásságán alapszik. Az intézet tudósai megalapították a világhírű matematikai kibernetika, a számítógépek, az optimalizálás és rendszeranalízis, matematikai modellezés, matematikai megbízhatóság és a programozás elméletének doktori iskoláját.

A Kibernetika Kutatóintézet önálló részlegein 1992–1997 között hozták létre az Ukrán Nemzeti Tudományos Akadémia (NTA) különböző – Szoftver Rendszerek, Matematikai Gépek Problémája, Űrkutatási – intézeteit, a Nemzeti Űrkutatási Ügynökséget, az Ukrán Oktatási és Tudományos Minisztérium (OTM) Alkalmazott Rendszeranalízis Intézetét valamint az Ukrán NTA és Ukrán OTM Nemzetközi Információs Technológiák Tudományos és Oktató Központját.

V. M. Hluskov
(1923–1982)

Az Ukrán NTA Hluskov Kibernetikai Intézete

ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT!
6. SZ. TESZTFELADAT

1. Határozzátok meg az $5x^2 - x - 6$ másodfokú polinom gyökeit!
A) 2; –0,6; B) –2; 0,6; C) 1; –1,2; D) –1; 1,2.

2. Alakítsátok szorzattá a $-x^2 - 4x + 5$ polinomot!
A) $(x - 1)(x + 5)$; C) $-(x - 1)(x + 5)$;
B) $(x + 1)(x - 5)$; D) $-(x + 1)(x - 5)$.

3. Egyszerűsítsétek az $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$ törtet!
A) $\frac{x+4}{x-2}$; B) $\frac{x-4}{x-2}$; C) $\frac{x+4}{x+2}$; D) $\frac{x-4}{x+2}$.

4. Oldjátok meg az $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$ egyenletet!
A) –3; 3; B) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; C) –3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 3; D) $\sqrt{2}$; 3.

5. Határozzátok meg az $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$ egyenlet gyökeit!
A) –1; 1; 3; 5; B) –1; 5; C) 1; 3; D) 1; 3; 5.

6. Oldjátok meg az $x-\sqrt{x}-12=0$ egyenletet!
A) –3; 4; B) –2; 2; C) 16; D) 9; 16.

7. Oldjátok meg az $\frac{x^2-6}{x-3}=\frac{x}{x-3}$ egyenletet!
A) –2; B) 3; C) –2; 3; D) –3; 2.

8. Oldjátok meg a $\frac{3x-1}{x}-\frac{4}{x-2}=\frac{10-9x}{x^2-2x}$ egyenletet!
A) $-\frac{4}{3}$; 2; B) $\frac{4}{3}$; –2; C) $-\frac{4}{3}$; D) 2.

9. Két város között 350 km a távolság. Az egyik városból a másikba egyszerre és egy irányba elindult egy teherautó és egy személygépkocsi. A tehergépkocsi átlagsebessége 20 km/h kisebb a személygépkocsi sebességénél, így 2 órával később érkezik meg. Jelöljük x km/h-val a teherautó sebességét, akkor az alábbi egyenletek közül melyik a feladat matematikai modellje?
A) $\frac{350}{x}-\frac{350}{x+20}=2$; C) $\frac{350}{x+20}-\frac{350}{x}=2$;
B) $\frac{350}{x}+\frac{350}{x+20}=2$; D) $\frac{350}{x}-\frac{350}{x-20}=2$.

10. Egy gőzös 30 km-t tett meg folyón lefelé, majd visszafordult. Oda-vissza az utat 3 óra 10 perc alatt tette meg. A vízfolyás sebessége 1 km/h. Jelöljük a gőzös sebességét állóvízben x km/h-val. Az alábbi egyenletek közül melyik felel meg a feladat feltételeinek?

A) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x-1}=3,1;$ C) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x}=3\frac{1}{6};$

B) $\frac{30}{x+1}-\frac{30}{x-1}=3,1;$ D) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x-1}=3\frac{1}{6}.$

11. Egy munkásnak meghatározott idő alatt 96 alkatrészt kellett legyártania. Mivel naponta a tervezettnél 2-vel több alkatrészt készített, így a munkát 3 nappal hamarabb fejezte be.
Jelöljük x-szel a munkás napi termelékenységét. Az alábbi egyenletek közül melyik felel meg a feladat feltételeinek?

A) $\frac{96}{x}-\frac{96}{x-2}=3;$ C) $\frac{96}{x}-\frac{96}{x-3}=2;$

B) $\frac{96}{x-2}-\frac{96}{x}=3;$ D) $\frac{96}{x-3}-\frac{96}{x}=2.$

12. Két munkás együtt 10 óra alatt készül el a kijelölt feladattal. Ugyanezt a munkát egyedül, az egyik munkás 15 órával hamarabb végzi el. Jelöljük x órával azt az időt, ami alatt az egyik munkás egyedül elvégzi a kijelölt feladatot, akkor az alábbi egyenletek közül melyik lesz az adott probléma matematikai modellje?

A) $\frac{15}{x}+\frac{15}{10-x}=1;$ C) $\frac{10}{x}+\frac{10}{x+15}=1;$

B) $\frac{15}{x}+\frac{15}{x-10}=1;$ D) $\frac{10}{x}+\frac{10}{x-15}=1.$

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Elsőfokú egyenlet

Az $ax = b$ alakú egyenleteket, ahol x a változó, a és b bármely szám, emellett $a \neq 0$, elsőfokú egyenleteknek nevezzük

Másodfokú egyenlet

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenletet másodfokú egyenletnek nevezzük, ahol x a változó, a, b és c bármely szám és $a \neq 0$.

Rendezett másodfokú egyenlet

Azt a másodfokú egyenletet melynek a főegyütthatója 1, rendezett másodfokú egyenletnek nevezzük.

Hiányos másodfokú egyenlet

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet legalább egyik együtthatója, kivéve a főegyütthatót nulla, akkor az ilyen egyenletet hiányos másodfokú egyenletnek nevezzük.

Hiányos másodfokú egyenletek megoldása

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet együtthatói	Hiányos egyenlet	Gyökök
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	nincs megoldása
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet, $a \neq 0$, diszkriminánsa a $D = b^2 - 4ac$ kifejezés.

A másodfokú egyenletek megoldása

Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek egy megoldása van: $x = -\frac{b}{2a}$.

Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek, két x_1 és x_2 megoldása van: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, vagy $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Viète tétele

Ha x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, akkor $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Viète tételének megfordítása

Ha α és β számokra igaz, hogy $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ és $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, akkor ezek a számok az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei.

Másodfokú polinom

Az $ax^2 + bx + c$ kifejezést másodfokú polinomnak nevezzük, ahol x változó, a, b és c bármely szám és $a \neq 0$.

A másodfokú polinom szorzattá alakítása

Ha az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa pozitív, akkor a másodfokú polinom szorzattá alakítható: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, ahol x_1 és x_2 a polinom gyökei.

Bikvadratikus egyenlet

Az $ax^4 + bx^2 + c = 0$ alakú egyenletet bikvadratikus egyenletnek nevezzük, ahol x változó, a, b, c valós szám és $a \neq 0$.

ISMÉTLŐ FELADATOK A 8. OSZTÁLY TANANYAGÁHOZ

814. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, ha $m=-4$, $n=3$; 2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, ha $a=-0{,}8$.

815. A változó mely értékeire vannak értelmezve az alábbi kifejezések?

1) $7b-11$;
2) $\frac{9}{x}$;
3) $\frac{5}{2-y}$;
4) $\frac{m-3}{7}$;
5) $\frac{3+t}{4-t}$;
6) $\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{x-6}$;
7) $\frac{5}{x^8+3}$;
8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;
9) $\frac{4}{x^2-25}$;
10) $\frac{3}{|x|-5}$;
11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;
12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;
13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;
14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$.

816. Egyszerűsítsétek a következő törteket:

1) $\frac{8a^2c^3}{4a^3c^2}$; 2) $\frac{25mn^2}{75m^8n}$; 3) $\frac{60a^3bc^2d^5}{18a^4b^2c^6d}$; 4) $\frac{42x^8y^9}{14x^6y^3}$.

817. Írjátok fel az alábbi hányadosokat tört alakban, majd egyszerűsítsétek a kapott törteket:

1) $4mn^2p:(28m^2np^6)$;
2) $-30x^5y^3:(36x^4y^8)$;
3) $-63xy^9:(-72xy^7)$.

818. Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;
2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;
3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;
4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;
5) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;
6) $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$;
7) $\frac{a^3+64}{3a+12}$;
8) $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$;
9) $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$;
10) $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$;
11) $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$;
12) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$.

819. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\dfrac{x^5y^7 - x^3y^9}{x^3y^7}$, ha $x = -0{,}2$, $y = 0{,}5$;

2) $\dfrac{4a^2 - 36}{5a^2 - 30a + 45}$, ha $a = 2$;

3) $\dfrac{(3a+3b)^2}{3a^2 - 3b^2}$, ha $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{1}{6}$;

4) $\dfrac{20x^2 - 140xy + 245y^2}{4x - 14y}$, ha $2x - 7y = -0{,}5$.

820. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket (n természetes szám):

1) $\dfrac{100^n}{2^{2n+3} \cdot 5^{2n+1}}$;

2) $\dfrac{2^{2n+1} \cdot 7^{n+1}}{6 \cdot 28^n}$;

3) $\dfrac{5^{n+1} - 5^n}{2 \cdot 5^n}$;

4) $\dfrac{18^n}{3^{2n+2} \cdot 2^{n+3}}$;

5) $\dfrac{41 \cdot 9^n}{9^{n+2} + 9^n}$.

821. Az a minden értékére oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(a + 2)\,x = 7$;

2) $(a + 6)\,x = a + 6$;

3) $(a + 3)\,x = a^2 + 6a + 9$;

4) $(a^2 - 4)\,x = a - 2$.

822. Az alábbi kifejezéseket adjátok meg tört alakban:

1) $\dfrac{7a}{22} + \dfrac{4a}{22}$;

2) $\dfrac{8x}{3y} - \dfrac{5x}{3y}$;

3) $\dfrac{7x - 2y}{15p} + \dfrac{3x + 7y}{15p}$;

4) $\dfrac{x + y}{9p} - \dfrac{x}{9p}$;

5) $\dfrac{a}{8} - \dfrac{a - b}{8}$;

6) $\dfrac{7p - 17}{5k} + \dfrac{7 - 2p}{5k}$;

7) $\dfrac{6a^2 - 4a}{15a} - \dfrac{a^2 + a}{15a}$;

8) $\dfrac{x - y}{8} + \dfrac{x + y}{8}$;

9) $\dfrac{10x - 6}{x} - \dfrac{4x + 11}{x}$.

823. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{7y}{y^2 - 4} - \dfrac{14}{y^2 - 4}$;

2) $\dfrac{y^2 - 3y}{25 - y^2} - \dfrac{7y - 25}{25 - y^2}$;

3) $\dfrac{9p + 5}{3p + 6} - \dfrac{10p - 12}{3p + 6} + \dfrac{9p - 1}{3p + 6}$;

4) $\dfrac{7x + 5}{3 - x} + \dfrac{5x + 11}{x - 3}$;

5) $\dfrac{(3a - 1)^2}{4a - 4} + \dfrac{(a - 3)^2}{4 - 4a}$;

6) $\dfrac{x^2 - 3x}{(2 - x)^2} - \dfrac{x - 4}{(x - 2)^2}$;

7) $\dfrac{7}{a - 2} - \dfrac{b}{2 - a}$;

8) $\dfrac{6a}{5 - a} - \dfrac{4a}{a - 5}$.

824. Végezzétek el az alábbi műveleteket:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5}{y}$; 2) $\frac{7}{ab}+\frac{5}{b}$; 3) $\frac{5}{24xy}-\frac{7}{18xy}$; 4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2}-\frac{2b-1}{a^2b}$.

825. Végezzétek el a kijelölt műveleteket:

1) $\frac{2a-1}{a-4}-\frac{3a+2}{2(a-4)}$;

2) $\frac{x+2}{3x+9}-\frac{4-x}{5x+15}$;

3) $\frac{m+1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}$;

4) $\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}$;

5) $\frac{m}{3m-2n}-\frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2}$;

6) $\frac{a+3}{a^2-2a}-\frac{a-2}{5a-10}+\frac{a+2}{5a}$;

7) $\frac{3}{3a-3}-\frac{a-1}{2a^2-4a+2}$;

8) $2-\frac{14}{m-2}-m$;

9) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}-\frac{8}{x^2-9}-\frac{2x-1}{x^2+6x+9}$.

826. Igazoljátok a

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(a-b)(c-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-a)}=0$$

azonosságot.

827. Írjátok fel az alábbi törteket egy egész és egy törtkifejezés összegeként:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{a^2+2a-2}{a+2}$; 3) $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$.

828. Ismeretes, hogy $\frac{x}{y}=4$. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{x+y}{x}$; 2) $\frac{3x+4y}{x}$.

829. Határozzátok meg az n összes olyan természetes értékeit, melyekre az alábbi kifejezések értéke is természetes szám:

1) $\frac{12n^2-5n+33}{n}$; 2) $\frac{n^3-6n^2+54}{n^2}$; 3) $\frac{10-4n}{n}$; 4) $\frac{12-3n}{n}$.

830. Az alábbi egyenlőségekből fejezd ki az x változót:

1) $x+\frac{a}{b}=1$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

831. Igazoljátok az alábbi azonosságokat:

1) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

832.* Egyszerűsítsétek az

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}$$

kifejezést!

833.* Bizonyítsátok be, hogyha $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, akkor $b=0$ vagy $c=0$.

834. Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

1) $\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{24x}$; 3) $\frac{16a^4}{21b^5}\cdot\frac{9b^2}{10a^3}$; 5) $\frac{24t^7}{16u^3}\cdot 34u^5$;

2) $\frac{m^2n^3}{25t}\cdot\left(\frac{-5t}{mn^2}\right)$; 4) $26m^2\cdot\frac{3n^2}{13m^4}$; 6) $\frac{4x^5y^2}{7a^3b}\cdot\frac{21xb^2}{10y^3a^2}\cdot\frac{25a^5y}{3x^4b}$.

835. Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

1) $\frac{2xy-y^2}{9}\cdot\frac{36}{y^4}$; 3) $\frac{m^2-64}{m^3-9m^2}\cdot\frac{m^2-81}{m^2+8m}$;

2) $\frac{a^2-7ab}{a^2+2ab}\cdot\frac{a^2b+2ab^2}{a^3-7a^2b}$; 4) $\frac{2x^2-16x+32}{3x^2-6x+12}\cdot\frac{x^3+8}{4x^2-64}$.

836. Adjátok meg törtalakban az alábbi kifejezéseket! Végezzétek el hatványra emelését:

1) $\left(\frac{a^5}{x^4}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3$;

2) $\left(-\frac{4y}{3m^2}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2\cdot\left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3$.

837. Végezzétek el az alábbi osztásokat:

1) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-100}:\frac{x-5}{x-10}$; 5) $\frac{x^2-16y^2}{25x^2-4y^2}:\frac{x^2+8xy+16y^2}{25x^2+20xy+4y^2}$;

2) $\frac{a^2-1}{a-8}:\frac{a^2+2a+1}{a-8}$; 6) $\frac{n^2-3n}{49n^2-1}:\frac{n^4-27n}{49n^2-14n+1}$;

3) $\frac{ab+b^2}{8b}:\frac{ab+a^2}{2a}$; 7) $\frac{m^{12}-n^{15}}{2m^{10}-8n^{14}}:\frac{5m^8+5m^4n^5+5n^{10}}{3m^5+6n^7}$;

4) $\frac{2c-3}{c-1}:(2c-3)$; 8) $\frac{5a^2-20ab}{3a^2+b^2}:\frac{30(a-4b)^2}{9a^4-b^4}$.

838. Tudjuk, hogy az alábbi törtek egyszerűsíthetetlenek. Helyettesítsétek az x és y változókat olyan egytagú kifejezéssel, hogy az alábbi egyenlőségek azonosságok legyenek:

1) $\dfrac{x}{7a^2b^3}\cdot\dfrac{y}{4c}=\dfrac{6a^3c^2}{b}$; 2) $\dfrac{36m^2n^4}{x}:\dfrac{y}{35p^6}=\dfrac{21n}{5mp^3}$.

839. Ismeretes, hogy $3x-\dfrac{1}{x}=8$. Határozzátok meg a $9x^2+\dfrac{1}{x^2}$ kifejezés értékét!

840. Ismeretes, hogy $4x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$. Határozzátok meg a $2x-\dfrac{1}{x}$ kifejezés értékét!

841. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{x^{3k}}{y^{2n}}:\dfrac{x^{6k}}{y^{5n}}$, ha k és n is egész szám;

2) $\dfrac{a^{k+5}\cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}}:\dfrac{a^{k+3}\cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}$, ha k egész szám;

3) $\dfrac{(x^n+3y^n)^2-12x^ny^n}{x^{3n}+27y^{3n}}:\dfrac{x^{2n}-9y^{2n}}{(x^n-3y^n)^2+12x^ny^n}$, ha n egész szám!

842. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(\dfrac{a+4}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}\right)\cdot\dfrac{16-a^2}{32a^3}$;

2) $\left(7x-\dfrac{4x}{x-3}\right):\dfrac{14x-50}{3x-9}$;

3) $\dfrac{2a}{a-2}+\dfrac{a+7}{8-4a}\cdot\dfrac{32}{7a+a^2}$;

4) $\left(\dfrac{9c}{c-8}+\dfrac{7c}{c^2-16c+64}\right):\dfrac{9c-65}{c^2-64}-\dfrac{8c+64}{c-8}$;

5) $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;

6) $\left(\dfrac{b}{b+6}+\dfrac{36+b^2}{36-b^2}-\dfrac{b}{b-6}\right):\dfrac{6b+b^2}{(6-b)^2}$;

7) $\left(\dfrac{2x}{x^3+1}:\dfrac{1-x}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{4}:\dfrac{x-1}{x+1}$.

843. Igazoljátok, hogy az a változók megengedett értékeire a

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{6}{9-a^2}+\frac{9}{(a+3)^2}\right):\frac{4\,(2a-3)^2}{(a^2-9)\,(a^2-27)}-\frac{2a^2}{9-a^2}$$

kifejezés értéke állandó.

844. Egyszerűsítsétek a következő emeletes törteket:

1) $\dfrac{a+\dfrac{25}{a+10}}{\dfrac{25}{a}-a}$; 2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

845. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{2x+6}{x+3}=2$;

2) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8$;

3) $\frac{2x-9}{2x+5}+\frac{3x}{3x-2}=2$;

4) $\frac{5x^2+8}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}$.

846. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\frac{x+2}{x+a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x-1}=0$.

847. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $2^{-3}+4^{-2}$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}+(-1{,}8)^0-5^{-1}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

4) $2^{-3}-6^{-1}+3^{-2}$!

848. Az alábbi törteket írjátok fel olyan alakban, melyben nincs se negatív se nulla hatványkitevő:

1) $\frac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4}$;

2) $\frac{1{,}001^0m^{-15}n^{-7}p^{-4}}{2^{-3}a^{-11}b^{16}c^{-22}}$.

849. Az alábbi kifejezéseket írjátok fel hatványalakban vagy hatványok szorzataként:

1) $a^{-7}\cdot a^{10}$;

2) $a^{-9}\cdot a^5$;

3) $a^{17}\cdot a^{-4}\cdot a^{-11}$;

4) $a^{-2}:a^3$;

5) $a^{12}:a^{-4}$;

6) $a^{-7}:a^{-11}$;

7) $a^{-12}:a^{-10}\cdot a^4$;

8) $(a^3)^{-5}$;

9) $(a^{-12})^{-2}$;

10) $(a^{-3})^4:(a^{-2})^5:(a^{-1})^{-7}$;

11) $(m^{-3}n^4p^7)^{-4}$;

12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3}$;

13) $(x^3y^{-4})^5\cdot(x^{-2}y^{-3})^3$;

14) $\left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3}$;

15) $\left(\frac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5}$.

850. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $11^{-23}\cdot 11^{25}$;

2) $3^{17}\cdot 3^{-14}$;

3) $4^{-16}:4^{-12}$;

4) $10^{-15}:10^{-14}\cdot 10^{-2}$;

5) $(14^{-10})^5\cdot(14^{-6})^{-8}$;

6) $\frac{3^{-12}\cdot(3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4}\cdot(3^{-4})^2}$.

851. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $25^{-3}\cdot 5^{8}$;

2) $64^{-3} : 32^{-3}$;

3) $10^{-10} : 1000^{-3}\cdot(0{,}001)^{-5}$;

4) $\dfrac{(-27)^{-12}\cdot 9^{5}}{81^{-4}\cdot 3^{-7}}$;

5) $\dfrac{15^{4}\cdot 5^{-6}}{45^{-3}\cdot 3^{9}}$.

6) $\dfrac{(0{,}125)^{-8}\cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

852. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{3}{5}x^{-3}y^{5}\cdot\dfrac{5}{9}x^{4}y^{-7}$;

2) $0{,}2a^{12}b^{-9}\cdot 50a^{-10}b^{10}$;

3) $-0{,}3a^{10}b^{7}\cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $0{,}36a^{-5}b^{6}c^{3}\cdot\left(-2\dfrac{2}{9}\right)a^{4}b^{-4}c^{-5}$;

5) $2x^{7}\cdot(-3x^{-2}y^{3})^{3}$;

6) $(a^{2}b^{9})^{-3}\cdot(-2a^{4}b^{10})$;

7) $(-5a^{-3}b^{2}c^{-2})^{-2}\cdot(0{,}1a^{2}b^{-3}c)^{-3}$;

8) $0{,}1m^{-5}n^{4}\cdot(0{,}01m^{-3}n)^{-2}$;

9) $-6\dfrac{1}{4}a^{-7}b^{4}\cdot\left(\dfrac{5}{2}a^{-2}b^{2}\right)^{-3}$;

10) $-(4a^{-4}b^{3})^{-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{8}a^{3}b^{-3}\right)^{-3}$;

11) $\dfrac{19a^{-15}}{33b^{-14}}\cdot\dfrac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;

12) $\left(\dfrac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2}\cdot(27x^{-2}y^{4})^{2}$.

853. Egyszerűsítsétek a következő kifejezéseket:

1) $(a^{-5}-1)(a^{-5}+1)-(a^{-5}-2)^{2}$;

2) $\dfrac{y^{-2}-x^{-2}}{x+y}$;

3) $\dfrac{a^{-3}-3b^{-6}}{a^{-6}-2a^{-3}b^{-6}+b^{-12}}-\dfrac{a^{-3}+3b^{-6}}{a^{-6}-b^{-12}}$;

4) $\dfrac{m^{-4}+n^{-4}}{n^{-10}}:\dfrac{m^{-4}n^{-6}+n^{-10}}{n^{-2}}$;

5) $\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}-\dfrac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}}\right)$;

6) $\dfrac{x^{-10}-4}{x^{-5}}\cdot\dfrac{1}{x^{-5}+2}-\dfrac{x^{-5}+2}{x^{-5}}$;

7) $\left(\dfrac{4c^{-6}}{c^{-6}+1}-\dfrac{c^{-6}}{c^{-12}+2c^{-6}+1}\right):\dfrac{4c^{-6}+3}{c^{-12}-1}+\dfrac{2c^{-6}}{c^{-6}+1}$.

854. Végezzétek el a kijelölt műveleteket! Adjátok meg az eredményt normálalakban:

1) $1{,}3\cdot 10^{4}+1{,}8\cdot 10^{5}$;

2) $1{,}5\cdot 10^{2}-2{,}8\cdot 10^{-2}$;

3) $5{,}6\cdot 10^{3}-3{,}2\cdot 10^{2}$;

4) $4{,}8\cdot 10^{-3}+6\cdot 10^{-4}$.

855. Egyszerűsítsétek a következő törteket (n egész szám):

1) $\frac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$; 4) $\frac{a^6+a^{11}}{a^{-4}+a}$; 7) $\frac{5^{n+2}-5^{n-2}}{5^n}$;

2) $\frac{7^{n+1}\cdot 2^{n-1}}{14^n}$; 5) $\frac{a^{-3}+a^{-2}+a^{-1}}{a^3+a^2+a}$; 8) $\frac{2^{-n}+1}{2^n+1}$.

3) $\frac{2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}}{12^n}$; 6) $\frac{6^{n+2}-6^n}{35}$;

856. Az $y=-\frac{24}{x}$ képlettel megadott függvényre határozzátok meg:

1) a függvény helyettesítési értékeit a –4; 8; 1,2 argumentumhelyen;

2) azon argumentumértéket, melynél a függvényérték 24; –18; 60!

857. Ábrázoljátok az $y=\frac{6}{x}$ képlettel megadott függvényt! Határozzátok meg:

1) a függvény helyettesítési értékeit a 2; –1,5; 4 argumentumhelyen;

2) azon argumentumértéket, melynél a függvényérték –2; 3; –4,5;

3) azon argumentumértékeket, melyeknél a függvényérték negatív!

858. Ábrázoljátok az $y=\frac{5}{|x|}$ függvényt!

859. Közös koordináta-rendszerben rajzoljátok meg az $y=\frac{4}{x}$ és $y=x-3$ függvények grafikonját! Olvassátok le a metszéspontok koordinátáit!

860. Határozzátok meg a p értékét, ha ismert, hogy az alábbi pontok illeszkednek az $y=\frac{p}{x}$ függvény grafikonjára: 1) A (–3; 2); 2) $B\left(-\frac{1}{7};3\right)$; 3) C (–0,4; 1,6)!

861. Rajzoljátok le a következő függvények grafikonját:

1) $y=\begin{cases}-\frac{12}{x}, \text{ ha } x\leqslant -3,\\ 1-x, \text{ ha } x>-3;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}3x-1, & \text{ha } x<2,\\ \frac{10}{x}, & \text{ha } 2\leqslant x<5,\\ x-3, & \text{ha } x\geqslant 5.\end{cases}$

862. Rajzoljátok le a következő függvények grafikonját:

1) $y=\frac{4x+12}{x^2+3x}$; 2) $y=\frac{32-2x^2}{x^3-16x}$.

863. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $0{,}4\sqrt{625}-\frac{1}{4}\sqrt{144}$;
2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{0{,}25}+\sqrt{2^4+9}$;
3) $3\sqrt{0{,}25}-\sqrt{7^2+24^2}$;
4) $\sqrt{1\frac{11}{25}}+\sqrt{3\frac{6}{25}}-0{,}04\sqrt{10\,000}$;
5) $\frac{1}{5}\sqrt{625}-\frac{3}{17}\sqrt{289}$.

864. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{1{,}69}$;
2) $\left(3\sqrt{15}\right)^2-\left(15\sqrt{3}\right)^2$;
3) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2$;
4) $\sqrt{1089}-\left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$;
5) $\frac{4}{9}\sqrt{39{,}69}-\frac{5}{49}\sqrt{59{,}29}+\left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2$;
6) $\frac{1}{2}\sqrt{17^2-15^2}+\left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2-0{,}3\sqrt{900}$.

865. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{x}=2$;
2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$;
3) $\sqrt{x}-3=0$;
4) $2\sqrt{x}-7=0$;
5) $\sqrt{x}+5=0$;
6) $\frac{1}{4}\sqrt{x}+5=0$;
7) $\sqrt{7x}-4=0$;
8) $\sqrt{7x-4}=0$;
9) $\sqrt{7x-4}=2$;
10) $\frac{28}{\sqrt{x}}=7$;
11) $\frac{15}{\sqrt{x+4}}=3$;
12) $\sqrt{4+\sqrt{3+x}}=5$.

866. Vonjatok gyököt az alábbi kifejezésekből:

1) $\sqrt{9\cdot100}$;
2) $\sqrt{0{,}49\cdot16}$;
3) $\sqrt{676\cdot0{,}04}$;
4) $\sqrt{0{,}64\cdot0{,}25\cdot121}$;
5) $\sqrt{\frac{25}{196}}$;
6) $\sqrt{18\frac{1}{16}}$;
7) $\sqrt{\frac{9}{64}\cdot\frac{1024}{1089}}$;
8) $\sqrt{3\frac{13}{36}\cdot4\frac{29}{49}}$.

867. Vonjatok gyököt az alábbi kifejezésekből:

1) $\sqrt{75\cdot234}$; 2) $\sqrt{2\cdot800}$; 3) $\sqrt{1{,}6\cdot12{,}1}$; 4) $\sqrt{2890\cdot2{,}5}$.

868. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}$;
3) $\sqrt{160}\cdot\sqrt{250}$;
4) $\sqrt{0{,}4}\cdot\sqrt{4{,}9}$;
5) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;
6) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0{,}225}}$.

869. Határozzátok meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\sqrt{(17{,}1)^2}$;
2) $\sqrt{(-1{,}17)^2}$;
3) $\frac{1}{2}\sqrt{(62)^2}$;
4) $-2{,}4\sqrt{(-4)^2}$;
5) $\sqrt{11^4}$;
6) $\sqrt{(-23)^4}$;
7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$;
8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0{,}1)^2}$.

870. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{q^2}$, ha $q > 0$;
2) $\sqrt{t^2}$, ha $t \leqslant 0$;
3) $\sqrt{49m^2n^8}$, ha $m \geqslant 0$;
4) $\sqrt{0{,}81a^6b^{10}}$, ha $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;
5) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, ha $x \leqslant 0$;
6) $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$, ha $a > 0$, $c < 0$;
7) $\frac{1{,}2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$, ha $y > 0$, $x < 0$;
8) $-0{,}1x^2\sqrt{1{,}96x^{18}y^{16}}$, ha $x \leqslant 0$.

871. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{\left(10-\sqrt{11}\right)^2}$;
2) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-11\right)^2}$;
3) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2}$;
4) $\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}$;
5) $\sqrt{\left(\sqrt{24}-5\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{24}-4\right)^2}$.

872. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;
2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}$;
4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}$;
5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}}+\sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

873. Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{24}$;
2) $\sqrt{63}$;
3) $\sqrt{700}$;
4) $\sqrt{0{,}32}$;
5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$;
6) $-2{,}4\sqrt{600}$;
7) $-1{,}6\sqrt{50}$;
8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

874. Emeljetek ki tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt{10a^2}$, ha $a \geqslant 0$;
4) $\sqrt{36m^2n}$, ha $m < 0$;
2) $\sqrt{15b^2}$, ha $b \leqslant 0$;
5) $\sqrt{4x^6y^5}$, ha $x > 0$;
3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$, ha $y \neq 0$;
6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, ha $b < 0$.

875. Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

1) $3\sqrt{10}$; 3) $0{,}3\sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$; 7) $-0{,}5\sqrt{30}$;
2) $2\sqrt{13}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; 6) $-5\sqrt{7}$; 8) $4\sqrt{a}$.

876. Vigyetek be tényezőt a gyökjel alá:

1) $a\sqrt{5}$; 2) $b\sqrt{-b}$; 3) $x\sqrt{x^7}$; 4) $n\sqrt{m}$, ha $n \leqslant 0$.

877. Hasonlítsátok össze az alábbi számokat:

1) $5\sqrt{6}$ és $6\sqrt{5}$; 3) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ és $\sqrt{0{,}3}$;
2) $\sqrt{55}$ és $3\sqrt{6}$; 4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ és $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

878. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{64a}+\sqrt{4a}-\sqrt{121a}$;
3) $6\sqrt{125a}-2\sqrt{80a}+3\sqrt{180a}$.
2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{320}$;

879. Végezzétek el az alábbi szorzásokat:

1) $\left(\sqrt{80}-\sqrt{45}\right)\sqrt{5}$;
5) $\left(\sqrt{19}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{13}\right)$;
2) $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{96}\right)\sqrt{6}$;
6) $\left(4\sqrt{m}+9\sqrt{n}\right)\left(4\sqrt{m}-9\sqrt{n}\right)$;
3) $\left(12-\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)$;
7) $\left(\sqrt{5x}+\sqrt{11y}\right)^2$;
4) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$;
8) $\left(3\sqrt{11}-2\sqrt{10}\right)^2$.

880. Egyszerűsítsétek az alábbi törteket:

1) $\dfrac{x^2-19}{x+\sqrt{19}}$;
4) $\dfrac{29-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{x}-6}{x-36}$;
5) $\dfrac{a-6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$, ha $a > 0$, $b > 0$;
3) $\dfrac{m+8\sqrt{m}}{m-64}$;
6) $\dfrac{11-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-3}$.

881. Gyöktelenítsétek az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\dfrac{a^3}{\sqrt{b}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; 5) $\dfrac{n+9}{\sqrt{n+9}}$; 7) $\dfrac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{15}}$;

2) $\dfrac{7}{a\sqrt{a}}$; 4) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; 6) $\dfrac{3}{\sqrt{13}-2}$; 8) $\dfrac{18}{\sqrt{47}-\sqrt{29}}$.

882.* Gyöktelenítsétek az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

883. Határozzátok meg a következő kifejezések értékét:

1) $\dfrac{5}{4-3\sqrt{2}}-\dfrac{5}{4+3\sqrt{2}}$; 3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$;

884. Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{x}{x-9}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right):\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

885.* Egyszerűsítsétek az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{x}+5\right)^2-20\sqrt{x}}+\sqrt{\left(\sqrt{x}-4\right)^2+16\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4}+\sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$.

886.* Egyszerűsítsétek az $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}$ kifejezést.

887.* Bizonyítsd be, hogy:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

888. Rendezzétek növekvő sorrendbe az alábbi számokat: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

889. Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben az $y=\sqrt{x}$ és $y = x - 6$ függvényeket! Jelöljétek a metszéspontot!

890. Az alábbi számoknak melyik két egész szám szomszédja: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51{,}25}$?

891. Mely egész számok vannak az alábbi számok között?

1) 6 és $\sqrt{67}$; 2) $\sqrt{14}$ és $\sqrt{52}$; 3) $-\sqrt{53}$ és $-4{,}9$; 4) $-\sqrt{31}$ és 2,7.

892. Adott az $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & \text{ha } x<0, \\ 3, & \text{ha } 0\leqslant x\leqslant 4, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x>4 \end{cases}$ függvény.

1) Határozzátok meg $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$ helyettesítési értéket!
2) Rajzoljátok le a függvény grafikonját!

893. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2-4x-32=0$;
2) $x^2-10x+21=0$;
3) $6x^2-5x+1=0$;
4) $8x^2+2x-3=0$;
5) $x^2+6x-15=0$;
6) $3x^2-x-5=0$;
7) $4x^2+28x+49=0$;
8) $x^2-16x+71=0$.

894. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $(x-4)(x+2)-2(3x+1)(x-3)=x(x+27)$;
2) $(4x-3)^2+(3x-1)(3x+1)=9$;
3) $(x+4)(x^2+x-13)-(x+7)(x^2+2x-5)=x+1$;
4) $\dfrac{2(x^2-9)}{5}-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-41}{4}$;
5) $\dfrac{x^2+5x}{3}-\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{2x^2-2}{8}$.

895. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket az a minden értékére:

1) $x^2+(5a-1)x+4a^2-a=0$;
2) $x^2-(2a+3)x+6a=0$;
3) $a^2x^2-10ax+16=0$.

896. Oldjátok meg az alábbi egyenleteket:

1) $|x^2-2x-6|=6$;
2) $x^2-6|x|-16=0$;
3) $x|x|+2x-15=0$;
4) $||x^2-6x-4|-3|=1$.

897. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $x^2-6x+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}-8$;
2) $\left(\sqrt{x}-5\right)(15x^2-7x-2)=0$;
3) $(x^2+6x)\left(\sqrt{x}-4\right)(x^2-8x-48)=0$.

898. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+6x+8}=0;$

2) $x^2-4x+4+|x^2-3x+2|=0;$

3) $\sqrt{25-x^2}+|x^2+8x-20|=0.$

899. A diszkrimináns kiszámítása nélkül határozzátok meg az a azon értékét, melynél az alábbi egyenleteknek egy gyökük van:
1) $x^2+22x+a=0;$ 2) $x^2-ax+81=0$
Számítsátok ki ezt a gyököt!

900. A b mely értéke mellett lesznek az $x^2+bx-23=0$ egyenlet gyökei ellentett számok? Határozzátok meg ezeket a gyököket!

901. $-\frac{1}{3}$ gyöke a $12x^2-bx+5=0$ egyenletnek. Határozzátok meg a b értékét és az egyenlet másik gyökét!

902. 0,2 gyöke a $8x^2-3{,}2x+k=0$ egyenletnek. Határozzátok meg a k értékét és az egyenlet másik gyökét!

903. Az $x^2-bx+20=0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire igaz, hogy $x_1=5x_2$. Határozzátok meg a b együtthatót és az egyenlet gyökeit!

904. Írjatok fel olyan másodfokú egyenletet, melynek a gyökei 1-gyel kisebbek az $x^2-3x-5=0$ egyenlet megfelelő gyökeinél!

905. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x^2-7x}{x+1}=\frac{8}{x+1};$

2) $\frac{3x^2+4x}{x^2-9}=\frac{3-4x}{x^2-9};$

3) $\frac{4-x}{4x-3}=\frac{2x-2}{7-x};$

4) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-6}=\frac{7}{12};$

5) $\frac{63}{x^2+3x}-\frac{2}{x^2-3x}=\frac{7}{x};$

6) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3}{x+4}=\frac{4x-2}{(x+4)(x-2)};$

7) $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-4}=\frac{x+4}{5x(2-x)};$

8) $\frac{2}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^3-1}=\frac{3}{x^2+x+1}.$

906. Oldjátok meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x-1}{x+5}+\frac{x+5}{x-1}=\frac{10}{3};$

2) $\frac{x^2-3x+6}{x}+\frac{2x}{x^2-3x+6}=3;$

3) $\frac{x^2}{(3x-1)^2}-\frac{4x}{3x-1}-5=0;$

4) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2.$

907.* Az a mely értékei mellett lesz az $\frac{x^2-2ax+3}{x-2}=0$ egyenletnek egy gyöke?

908. Igazak-e a alábbi állítások:

1) ha m és n az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, $a \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor a $-m$ és $-n$ gyökei az $ax^2 - bx + c = 0$ egyenletnek;

2) ha m és n az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei, $a \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor az $\frac{1}{m}$ és $\frac{1}{n}$ gyökei a $cx^2 + bx + a = 0$ egyenletnek? A feleletet indokoljátok meg!

909.* Határozzátok meg a b azon egész értékeit, melyeknél az alábbi egyenlet gyökei is egész számok:

1) $x^2 + bx - 6 = 0$; 2) $x^2 + bx + 21 = 0$!

910.* x_1 és x_2 az $x^2 - (2a - 5)\ x + a^2 - 7 = 0$ egyenlet gyökei. Az a mely értéke mellett igaz, hogy $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

911.* Az a mely érteke mellett lesz az $x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$ egyenlet gyökeinek szorzata 15?

912. Egy autóbusznak 255 km-t kellett megtennie. Miután megtette az út $\frac{7}{17}$-ét, 1 órára leparkolt. Az út hátralévő részén a sebességét 5 km/h-val csökkentette, és így 9 óra múlva érkezett célba. Mekkora volt az autóbusz kezdeti sebessége?

913. Egy réz-cink ötvözetben 20 kg cink van. Az ötvözethez hozzáolvasztottak 3 kg rezet és 4 kg cinket. Az így nyert ötvözet 5%-kal több rezet tartalmaz, mint az eredeti. Mennyi rezet tartalmazott az eredeti ötvözet?

BARÁTKOZZUNK A SZÁMÍTÓGÉPPEL

Az előző osztályokban már használtál számítógépet matematikaórákon. Megtanultad:

- a **számológépek** használatát;
- a **szövegszerkesztő** programokat (például a *Microsoft Word* alkalmazását);
- **táblázatkezelő** programokat (például a *Microsoft Excel* alkalmazását);
- **rajzprogramokat** (például a *Paint* alkalmazását);
- az **internet** használatát.

Ezt a tudásodat továbbra is mélyítened kell.

Ha szeretnél matematikus, programozó matematikus vagy mérnök lenni, tehát olyan szakember, akinek szüksége van a számítógép mindennapos használatára, ajánljuk, hogy szerezz be olyan programokat, melyek megkönnyítik számodra a feladatok megoldásának mechanikus részét. Ilyen program például a *MathLAB* vagy a *MathCAD*. Hasznos még a rajzkészítő programok, például *CorelDraw*, *Visio* stb. ismerete is, melyekkel mértani alakzatokat lehet rajzolni. Ha szeretnétek előadást, illetve bemutatót tartani, akkor célszerű **prezentációkészítőt,** például *PowerPoint*-ot alkalmazni.

A matematika könnyebb megértését és gyakorlását segítő ilyen és ehhez hasonló programok az internetről tölthetők le.

Lehet, hogy köztetek is vannak olyanok, akik képesek a matematika tanulását megkönnyítő programok megírására?

Több mint 70 éve szervezik meg országunkban Ukrajna Kis Tudományos Akadémiáját (MAN – az intézmény ukrán nevének mozaikszava), mely keretén belül a tudomány számos ágában készíthetnek a tanulók elméleti vagy gyakorlati kutatómunkákat. Részt vehetnek a különböző szekciók munkájában, órák utáni foglalkozásokon, szakmai megmérettetéseken, az országos tanulmányi versenyeken, bemutathatják munkáikat az Országos Tudományos és Kutatói Diákkonferencián.

Ebben a fejezetben olyan feladatokkal találkoztok, melyek megoldásában segít a számítógép. Némelyik a tankönyv adott feladatának folytatása, továbbgondolása (ezeket a feladatokat a könyvben jelöltük, ebben a fejezetben pedig utalunk a feladat számára).

Ha a feladat megoldása számológépet igényel, használjatok zsebszámológépet, vagy a számítógépetek számológép funkcióját.

Az informatika iránt komolyan érdeklődő tanulók számára olyan feladatokat ajánlunk, melyekben a tanult matematikai ismeretek alkalmazásával kell algoritmust vagy programot írni. Ezeket a feladatokat csillaggal jelöltük. Amíg nem ismerkedtek meg valamely programozási nyelvvel, addig elegendő az algoritmust szavakkal leírni, vagy folyamatábrát készíteni. Megjegyezzük, hogy az algoritmikus gondolkodás (lépésről lépésre végrehajtott eljárások) nemcsak az informatikában, hanem más tudományágakban is hasznos lehet számotokra.

Az 1. ponthoz
Racionális törtek

Tanuljátok meg a törtkifejezések értékét számológéppel kiszámítani. Mely esetben nem lehet egy törtkifejezés értékét meghatározni? Mindig pontos értéket kapunk-e?

2–4. példák. Valamelyik példát számológéppel vagy valamilyen matematikai programmal számítsátok ki!

A 2. ponthoz
A racionális törtek alaptulajdonsága

46., 47. Válasszátok ki az egyik példát! Határozzátok meg a kifejezés értékét kétféleképpen: először rögtön behelyettesítve a változó értékét, majd egyszerűsítés után! Használjatok számológépet vagy valamilyen matematikai programot! Egyszerűsítés után mennyivel csökkent a lépések száma? Elvégezhető-e szóban a számítás, miután a kifejezést leegyszerűsítettétek?

63. A rajzot grafikonrajzoló programmal készítsétek el! Milyen eszközre van szükség, hogy az $y = 2x$ függvény grafikonjából megkapjuk az $y = 2x - 1$ függvény grafikonját?

A 3. ponthoz
Egyenlő nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

74., 75. Válasszátok ki az egyik példát! Határozzátok meg a kifejezés értékét kétféleképpen: először rögtön behelyettesítve a változó értékét, majd egyszerűsítés után! Használjatok számológépet vagy valamilyen matematikai programot! Egyszerűsítés után mennyivel csökkent a lépések száma? Elvégezhető-e szóban a számítás, miután a kifejezést leegyszerűsítettétek?

A 4. ponthoz

Különböző nevezőjű racionális törtek összeadása és kivonása

138. Ehhez a feladathoz is használjatok számológépet! Minden esetben a kívánt eredményt kaptátok?

Az 5. ponthoz

Racionális törtek szorzása és osztása. Racionális tört hatványozása

160., 161. Valamelyik példát számítsátok ki számológéppel! Milyen következtetést vonhattok le, ha számológépen törtszámokkal számoltok?

A 6. ponthoz

Racionális kifejezések azonos átalakításai

194., 195. A 194. feladat állítását igazoljátok számológép segítségével! Melyik igazolás a szemléletesebb? Igazolható-e ily módon a 195. gyakorlat állítása?

A 7. ponthoz

Ekvivalens (egyenértékű) egyenletek. Racionális egyenletek

222. Használjatok számológépet a megoldáshoz!

A 8. ponthoz

Negatív egész kitevőjű hatvány

Létezik-e a ti számológépeteken vagy általatok használt programokban olyan eszköz, amely megadja a számok normálalakját? Töltsetek le ilyen eszközt!

* Milyen lehetőségeket kínál az általatok kiválasztott programozási nyelv törtszámok adatbevitelére? Hogyan történik az adatok mentése? Milyen hatása van a mentési módnak a számítások pontosságára?

262–264. Válasszátok ki az egyik gyakorlatot! Az adatokból készítsetek táblázatkezelővel táblázatot! Használjatok automatikus szűrést! Készítsetek diagramot! Mennyire szemléletes a rajz? Miért?

266. A feladat megoldásához használjatok számológépet! Mi a közös bennük, és miben különböznek egymástól ez és a 222. feladat? Melyek a közös lépések a két feladat megoldásában?

* Készítsétek el a 222. és a 266. feladatok megoldásának algoritmusát! Tegyétek lehetővé, hogy az algoritmus tetszőleges évszámra is alkalmazható legyen!

A 9. ponthoz

Az egész kitevőjű hatványok tulajdonságai

276. Az 5–8. példák egyikét számítsátok ki számológéppel olyan sorrendben, ahogy le van írva (egyszerűsítés nélkül). Ugyanazt az eredményt kaptátok-e, mint a füzetetekben? Mi lehet az eltérés oka? Vonjatok le következtetést!

293., 294. Mennyire egyszerűsíti a számok normálalakja a számításokat?

* Nézzetek utána, hogyan történik a számítógép memóriájában az adatok mentése lebegőpontos számábrázolás alkalmazásával! Milyen algoritmus szerint végeznek műveleteket az ilyen formátumú adatokkal? Hogyan hat az ilyen formátum a számítás pontosságára?

307. Táblázatkezelővel készítsétek el az értéktáblázatot úgy, hogy automatikus legyen a kitöltés!

A 10. ponthoz

Az $y=\frac{k}{x}$ képlettel megadott függvény és grafikonja

315., 316. A táblázatot táblázatkezelő programmal töltsétek ki! Ábrázoljátok a jelenséget leíró függvényt! Mit kell javítani, hogy minél pontosabb legyen a rajz?

A 11. ponthoz

Az $y = x^2$ függvény és grafikonja

357–360. Válasszatok ki egy függvényt! Rajzoljátok meg a grafikonját kétféleképpen! *Először*: határozzátok meg, milyen mértani alakzat ez a grafikon, és rajzoljátok meg egy rajzolóprogrammal! *Másodszor*: adjátok meg a függvény értéktáblázatát, majd készítsétek el a rajzot az automatikus grafikonszerkesztővel! Ehhez válasszatok egy olyan grafikont, amelyen az adott pontokat szakaszok kötik össze. Melyik rajz lett pontosabb? Hogyan kell figyelembe venni a függvény tulajdonságait az argumentum értékeinek megadásakor?

A 12. ponthoz

Négyzetgyök. Számtani négyzetgyök

Tanuljatok meg gyököt vonni számológéppel vagy más matematikai programmal!

398. Számítsátok ki kétféleképpen: 1) egyszerűsítsétek le a füzetetekben; 2) számítsátok ki számológéppel egyszerűsítés nélkül. Vonjatok le következtetéseket!

***421.** Írjatok algoritmust a feladat megoldására próbálkozással!

A 13. ponthoz

Halmazok és elemeik. Részhalmazok

Keressetek az interneten érdekes tényeket! Mutassátok be a *halmaz*, a *halmaz eleme*, *részhalmaz*, *üres halmaz* kifejezések alkalmazásával! Adjatok meg halmazt elemeik felsorolásával és közös tulajdonság megnevezésével!

A 14. ponthoz

Számhalmazok

Minden számhalmaz néhány elemét vigyétek be a számológépetekbe! Bármely racionális szám minden számjegyét be tudtátok vinni? Be lehet-e vinni irracionális számot? Milyen pontossággal adja meg a számológép az ilyen számokat? Vonjatok le következtetést!

Hogyan lehet bevinni egy számológépbe a π számot?

Gondoljatok ki olyan kifejezést, amelyben a változó értéke olyan racionális szám, melynek pontos az értéke, viszont a kifejezés értéke vagy valós szám vagy irracionális szám, melyet a számológép kerekítve ír ki. Számológéppel számítsd ki ennek a kifejezésnek az értékét!

* Vonjatok le következtetést arról, hogy a valós számokkal végzett műveletek mikor adnak pontatlan eredményt! Hogyan kell ezekben az esetekben helyesen eljárni?

450., 451. Használjatok számológépet vagy valamilyen matematikai programot!

A 15. ponthoz

A számtani négyzetgyök tulajdonságai

483 (6)., 495. Egyszerűsítés nélkül számológéppel számítsátok ki! Melyik számítás egyszerűbb?

A 16. ponthoz
Négyzetgyököt tartalmazó kifejezések azonos átalakításai

Számológéppel számítsátok ki az 515., 516. valamint az 529. példákat! Pontos értéket kaptatok-e?

A 17. ponthoz
Az $y=\sqrt{x}$ függvény és grafikonja

Táblázatkezelővel készítsétek el a függvény értéktáblázatát! A táblázat segítségével ábrázoljátok a függvényt!

A 18. ponthoz
Másodfokú egyenletek. A nem teljes másodfokú egyenletek megoldása

* Írjatok algoritmust a hiányos másodfokú egyenletek megoldására!

* **629.** Oldjátok meg a feladatot próbálgatással! Írjátok le a feladat megoldásának algoritmusát!

A 19. ponthoz
A másodfokú egyenlet megoldóképlete

* Írjatok algoritmust, hogyan kell megoldani az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet, ha ismerjük az a, b és c együtthatókat! Milyen részeseteket kell figyelembe venni?

* **643., 644.** Oldjátok meg a feladatokat próbálgatással! Írjátok le a feladatok megoldásának algoritmusát! Mely feltételek teszik lehetővé, hogy ezeket a feladatokat meg lehet oldani a próbálgatás módszerével, míg a 653. és 654. feladatokat nem?

A 20. ponthoz
Viète tétele

Írjatok le két olyan tizedes törtet, melyben az egész rész és a törtrész is többjegyű! Viète tételének megfordítása következményét alkalmazva adjatok meg olyan másodfokú egyenletet, melynek az adott számok a gyökei! Számítógéppel számoljatok!

A 21. ponthoz
Másodfokú polinom

* Írjatok olyan algoritmust, ami a másodfokú polinomot lineáris tényezőkre bontja!

* **746**. Írjátok le a feladat általánosításának matematikai modelljét!

* **749.** Oldjátok meg a feladatot próbálgatással! Írjátok le a feladat megoldásának algoritmusát!

A 22. ponthoz

Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása

* Írjátok le a bikvadratikus egyenletek megoldásának algoritmusát! Felhasználhatjátok a másodfokú egyenletek megoldásának algoritmusát (lásd a 19. témát).

* **776.** Oldjátok meg a feladatot próbálgatással! Írjatok le a feladat megoldásának algoritmusát!

Egész tanév folyamán a *Barátkozzunk a számítógéppel* című fejezetben sok olyan feladattal találkozhattatok, melyeket próbálgatással ajánlottunk megoldani. Elemezzétek ezeket a feladatokat, és próbáljátok megmagyarázni, miért a próbálgatás módszere angolul „brute force”.

A 23. ponthoz

A racionális egyenlet, mint a reális problémák matematikai modellje

* Felállítható-e ugyanaz a matematikai modell e paragrafus több feladatának megoldására? Keressetek ilyen feladatokat, és írjatok algoritmust megoldásukra!

A 7. OSZTÁLYBAN TANULTAK ISMÉTLÉSE

EGÉSZ KIFEJEZÉSEK

1. Változót tartalmazó kifejezések. Egész racionális kifejezések. A kifejezés helyettesítési értéke

- ✓ Azokat a kifejezéseket, melyekben változók (vagy csak változó, ha egy van), számok, zárójel van, változót tartalmazó kifejezéseknek nevezzük.
- ✓ Ha a változók helyére behelyettesítünk konkrét számokat, akkor számkifejezést kapunk. Ennek a számkifejezésnek az értékét nevezzük a változót tartalmazó kifejezés helyettesítési értékének.
- ✓ A számkifejezéseket és a változót tartalmazó kifejezéseket algebrai kifejezéseknek nevezzük.
- ✓ Azokat a kifejezéseket, melyek nem tartalmaznak változóval való osztást, egész kifejezéseknek nevezzük.

2. Azonosan egyenlő kifejezések. Azonosságok

- ✓ Azok a kifejezések, melyek bármely helyen vett helyettesítési értéke egyenlő, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.
- ✓ Azt az egyenlőséget, amely a változók bármely értékére teljesül, azonosságnak nevezzük.
- ✓ Ha egy kifejezést vele azonosan egyenlő kifejezéssel helyettesítünk, akkor azonos átalakítást végzünk.
- ✓ Azonosság bizonyítása annyit jelent, hogy igazolni kell az adott egyenlőségről azt, hogy az azonosság.
- ✓ Az alább felsorolt lehetőségekkel igazolhatunk azonosságot:
  - azonos átalakítással az egyik oldalt olyan alakra hozzuk, amilyen a másik oldal;
  - azonos átalakítással mind a két oldalt egyenlő alakra hozzuk;
  - igazoljuk, hogy a két oldal különbsége nulla.
- ✓ Ahhoz, hogy bebizonyítsuk egy egyenlőségről, hogy nem azonosság, elegendő felhozni egy ellenpéldát: megnevezni a változónak egy olyan értékét, melyre az egyenlőség nem teljesül.

3. Természetes kitevőjű hatvány

- ✓ Az a szám n-edik hatványának nevezzük, n nagyobb mint 1, azt az n tényezős szorzatot, melyben minden tényező a, $a \neq 0$.
- ✓ Az a szám első hatványa maga az a szám.
- ✓ Az a szám n-edik hatványának jelölése: a^n (olv. a n-edik hatványa, a az n-ediken). A 2. és 3. hatványra külön szavunk van: négyzet és köb.
- ✓ Bármely nemnegatív szám hatványa nemnegatív szám.
- ✓ Negatív szám páros kitevőjű hatványa pozitív, páratlan kitevőjű hatványa negatív szám.

4. Természetes kitevőjű hatványozás azonosságai

- ✓ Bármely a számra és természetes m és n számra igaz, hogy:
$$a^m a^n = a^{m+n}$$
azonos alapú hatványok szorzásakor a hatványalapot a kitevők összegére emeljük.
- ✓ Bármely a számra és természetes m és n számra, ha $m > n$ igaz, hogy:
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
azonos alapú hatványok osztásakor a hatványalapot a kitevők különbségére emeljük.
- ✓ Bármely a számra és természetes m és n számra igaz, hogy:
$$(a^m)^n = a^{m\,n},$$
hatványok hatványozásakor az alap új kitevője a kitevők szorzata lesz.
- ✓ Bármely a és b számra és természetes n számra igaz, hogy:
$$(ab)^n = a^n b^n,$$
a szorzat n-edik hatványa a tényezők n-edik hatványainak szorzatával egyenlő.

5. Egytagú kifejezések

- ✓ Azokat a kifejezéseket, melyek a számok és változók szorzata, egytagú kifejezéseknek nevezzük.
- ✓ Azt az egytagú kifejezést, melyben csak egy számtényező van, ami az első helyen áll, a többi tényező pedig különböző alapú hatvány, az egytagú kifejezés normálalakjának nevezzük. A nullától különböző számok, változók és azok hatványai is normálalakú egytagú kifejezések.

- ✓ A nulla is egytagú kifejezés. A nullával azonosan egyenlő egytagú kifejezéseket nulla értékű kifejezésnek nevezzük. Nem soroljuk őket a normálalakú egytagú kifejezések közzé.
- ✓ Az egytagú kifejezések számtényezőjét együtthatónak nevezzük.
- ✓ Azokat az egytagú kifejezéseket, melyek legfeljebb együtthatóikban különböznek, egynemű kifejezéseknek nevezzük.
- ✓ Az egytagú kifejezések fokszámának nevezzük a benne szereplő változók hatványkitevőinek összegét. Azon egytagú kifejezések fokszámát, melyek nullától különböző számok, nullának tekintjük.
- ✓ A nulla értékű kifejezéseknek nincs fokszámuk.
- ✓ Két egytagú kifejezés szorzata is egytagú kifejezés. Egytagú kifejezés hatványa szintén egytagú kifejezés.

6. Többtagú kifejezések

- ✓ Egytagú kifejezések összegét többtagú kifejezésnek (polinomnak) nevezzük.
- ✓ A többtagú kifejezésekben szereplő egytagú kifejezéseket tagoknak nevezzük.
- ✓ Azokat a polinomokat, melyeknek két tagja van, kéttagú kifejezésnek, melyeknek három tagja van, háromtagú kifejezésnek nevezzük. Az egytagú kifejezések a többtagú kifejezések részesete. Ezek olyan polinomok, melyeknek egy tagja van.
- ✓ Ha a többtagú kifejezések tagjai között vannak egyneműek, akkor ezeket a tagokat a polinom egynemű tagjainak nevezzük.
- ✓ Azt a többtagú kifejezést, melynek minden tagja normálalakú egytagú kifejezés és nincs közöttük egynemű, normálalakú többtagú kifejezésnek nevezzük.
- ✓ A többtagú kifejezés fokszáma a benne szereplő legnagyobb fokszámú tag fokszáma.
- ✓ Ahhoz, hogy összeadjunk két többtagú kifejezést, a kifejezéseket zárójelbe vesszük és közéjük „+" jelet teszünk, majd a zárójel felbontása után összevonjuk az egynemű tagokat (ha van ilyen).
- ✓ Ahhoz, hogy kivonjunk két többtagú kifejezést, a kifejezéseket zárójelbe vesszük és közéjük „–" jelet teszünk, majd a zárójel felbontása után összevonjuk az egynemű tagokat (ha van ilyen).
- ✓ A többtagú kifejezés szorzattá alakításának nevezzük azt az eljárást, amikor a kifejezést több tényező szorzatára bontjuk.

7. Egytagú kifejezés szorzása többtagúval

✓ Ahhoz, hogy egy egytagú kifejezést megszorozzunk egy többtagúval, a többtagú kifejezés minden tagját meg kell szorozni az egytagú kifejezéssel, majd az így kapott szorzatokat össze kell adni.

8. Többtagú kifejezés szorzása többtagúval

✓ Ahhoz, hogy egy többtagú kifejezést megszorozzunk egy többtagúval, a többtagú kifejezés minden tagját meg kell szorozni a másik kifejezés minden tagjával, majd az így kapott szorzatokat össze kell adni.

✓ Többtagú kifejezések szorzata is többtagú kifejezés.

NEVEZETES AZONOSSÁGOK

9. Két tag összegének és különbségének szorzata

✓ Egy kéttagú különbség és ugyanazon tagok összegének szorzata egyenlő az első és a második tag négyzetének különbségével:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

10. Két tag négyzetének különbsége

✓ Két tag négyzetének különbsége egyenlő ezen tagok különbségének és összegének szorzatával:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

11. Kéttagú összeg és különbség négyzete

✓ Egy kéttagú összeg négyzete megegyezik az első tag négyzetének, az első és második tag kétszeres szorzatának és a második tag négyzetének összegével:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

✓ Két tag különbségének négyzetét megkapjuk, ha az első tag négyzetéből kivonjuk az első és a második tag kétszeres szorzatát, és hozzáadjuk a második tag négyzetét:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

12. Többtagú kifejezések átalakítása kéttagú összeg vagy különbség négyzetévé

✓ Az alábbi képletek lehetőséget adnak a háromtagú kifejezések kéttagú kifejezés négyzetévé „tömörítésére”:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

✓ Azokat a háromtagú kifejezéseket, melyek átalakíthatók kéttagú kifejezések négyzetévé, teljes négyzetnek nevezzük.

13. Két tag köbeinek összege és különbsége

- ✓ A $a^2 - ab + b^2$ kifejezést a különbség nem teljes négyzetének nevezzük.
- ✓ Két tag köbeinek összege egyenlő a tagok összegének, valamint különbségük nem teljes négyzetének szorzatával:
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$
- ✓ Az $a^2 + ab + b^2$ kifejezést az összeg nem teljes négyzetének nevezzük.
- ✓ Két tag köbeinek különbsége egyenlő a tagok különbségének és összegük nem teljes négyzetének szorzatával:
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

EGYENLETEK

14. Az egyenlet gyöke

- ✓ Az egyenlet gyökének nevezzük a változó azon értékét, melyre az egyenlőség teljesül.
- ✓ Az egyenlet megoldása olyan eljárás, amellyel meghatározzuk az egyenlet gyökeit, vagy igazoljuk, hogy nincs megoldás.
- ✓ Szöveges feladatok megoldásánál célszerű az alábbi algoritmust követni:
  1) a feladat feltétele alapján írjunk fel egyenletet (állítsuk össze a feladat matematikai modelljét);
  2) oldjuk meg a felírt egyenletet;
  3) ellenőrizzük le, hogy az egyenlet gyökei megfelelnek-e a feladat feltételeinek.

15. Az egyenletek azonos átalakításai

- ✓ Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot.
- ✓ Ha egy olyan egyenlet mindkét oldalához, melynek nincsenek gyökei, hozzáadjuk vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot, olyan egyenletet kapunk, melynek szintén nincsenek gyökei.
- ✓ Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet egyik oldaláról átviszünk a másik oldalra egy tagot ellenkező előjellel.
- ✓ Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (vagy mindkét oldalát elosztjuk) ugyanazzal a nullától eltérő számmal.

16. Egyismeretlenes lineáris egyenletek

- ✓ Egyismeretlenes lineáris egyenletnek az $ax = b$ alakú egyenletet nevezzük, ahol x az ismeretlen, a és b adott számok.

Az a és b értékek	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Az $ax = b$ alakú egyenlet gyökei	$x = \frac{b}{a}$	x – bármely szám	Nincs megoldás

FÜGGVÉNYEK

17. A függvény. A függvény értelmezési tartománya és értékkészlete

- ✓ Ha a független változó minden értékéhez, meghatározott szabály szerint csak egy érték tartozik, akkor az ilyen megfeleltetést egyértelmű hozzárendelésnek, függvénynek nevezzük.
- ✓ A független változót általában x-szel, a függő változót y-nal, a hozzárendelési szabályt f-fel jelöljük. Ha az y és az x változók között egyértelmű a hozzárendelés, akkor az $y = f(x)$ jelölést használjuk (olv.: y egyenlő f az x helyen).
- ✓ A független változót argumentumnak nevezzük.
- ✓ A függő változó értékét függvényértéknek nevezzük.
- ✓ Az x_0 argumentumhoz tartozó függvényértéket a függvény helyettesítési értékének nevezünk és $f(x_0)$-val jelöljük.
- ✓ Az argumentum összes értéke alkotja a függvény értelmezési tartományát. A függő változó által felvett összes érték alkotja a függvény értékkészletét.

18. A függvény megadási módjai

- ✓ Egy függvényt adottnak tekintünk, ha ismerjük az értelmezési tartományát és a hozzárendelési szabályt.
- ✓ Mivel egy függvény egy egyértelmű hozzárendelés, ezért megadható szavakkal, képlettel, táblázattal, grafikusan.
- ✓ Ha egy függvény olyan képlettel van megadva, melynek jobb oldala egész kifejezés és nincs meghatározva az értelmezési tartománya, akkor úgy tekintjük, hogy a függvény értelmezési tartománya minden szám.

19. A függvény grafikonja

- ✓ Az f függvény grafikonja olyan görbe, mely a koordinátasík azon, és csakis azon pontjaiból áll, melyek abszcisszája egyenlő a függvény argumentumával, ordinátája pedig az f függvény helyettesítési értékével.
- ✓ Ha egy görbe az f függvény grafikonja, akkor az alábbi két feltétel teljesül:
  1) ha x_0 a függvény valamely argumentuma és az $f(x_0)$ a hozzá tartozó függvényérték, akkor az $(x_0; f(x_0))$ koordinátájú pont illeszkedik a grafikonra;
  2) ha a grafikon valamely pontjának koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor x_0 és y_0 megfelelően a függvény függő és független változói, vagyis $y_0 = f(x_0)$.
- ✓ Egy görbe akkor tekinthető egy függvény grafikonjának, ha az abszcisszára bocsátott bármelyik merőleges egyenesnek az adott görbével nem több mint egy közös pontja van.

20. A lineáris függvény, grafikonja és tulajdonságai

- ✓ Az $y = kx + b$ képlettel megadott függvényt lineáris függvénynek nevezzük, ahol k és b adott szám, x a független változó.
- ✓ A lineáris függvény értelmezési tartománya bármely szám, grafikonja egyenes.
- ✓ Az $y = kx$, $k \neq 0$ képlettel megadott függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.
- ✓ Az egyenes arányosság grafikonja olyan egyenes, ami átmegy az origón. Ezért az egyenes arányosság grafikonjának ábrázolásához elegendő meghatározni egy, az origótól különböző pontot, meghúzni ezen a ponton és az origón $O(0; 0)$ keresztül egy egyenest.
- ✓ Ha az $y = kx + b$ képletbe $k = 0$ értéket helyettesítünk, akkor $y = b$. Ebben az esetben a függvényérték változatlan bármely argumentum helyen. A függvény grafikonja olyan egyenes, amely párhuzamos az abszcisszatengellyel.

KÉTISMERETLENES LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER

21. Kétismeretlenes egyenlet

- ✓ A két változót tartalmazó egyenlőséget kétismeretlenes egyenletnek nevezzük.
- ✓ A változók azon értékpárjait, melyre az egyenlőség teljesül, a kétismeretlenes egyenlet gyökeinek nevezzük.

- ✓ A kétismeretlenes egyenlet megoldása azt jeleni, hogy meghatározzuk azokat a számpárokat, melyekre teljesül az egyenlőség vagy igazoljuk, hogy nincs ilyen számpár.
- ✓ A kétismeretlenes egyenletekre érvényesek azok az azonos átalakítások, melyek az egyismeretlenes egyenletekre is (lásd a 15. pontot a 220. oldalon).
- ✓ A kétismeretlenes egyenlet grafikonja a koordinátasík azon, és csakis azon pontjai, melyek koordinátái (számpárok) az egyenlet gyökei.
- ✓ Ha egy görbe az egyenlet grafikonja, akkor az alábbi két tulajdonság teljesül:
  1) az egyenlet gyökei olyan pontok koordinátái, melyek illeszkednek a grafikonra;
  2) a grafikon bármely pontjának koordinátái olyan számpár, ami az egyenlet gyöke.

22. Kétismeretlenes lineáris egyenlet grafikonja

- ✓ Kétismeretlenes lineáris egyenletnek nevezzük az $ax + by = c$ alakú egyenletet, ahol x és y ismeretlen, a, b és c adott számok.

Egyenlet	Az a, b és c értékei	Grafikon
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a és c bármely szám	Nem merőleges egyenes
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c bármely szám	Merőleges egyenes
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Az egész koordinátasík
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	Nincs megoldás

23. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer

- ✓ Ha több egyenlet közös megoldását kell meghatározni, akkor azt mondjuk, hogy egyenletrendszert kell megoldani.
- ✓ Az egyenletek rendszerbe foglalásához kapcsos zárójelet használunk.
- ✓ A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásának nevezzük a változók azon értékeit, melyekre egyidejűleg teljesül mindkét egyenlet.
- ✓ A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása azt jeleni, hogy meghatározzuk azokat a számpárokat, melyekre teljesül az egyenlőség, vagy igazoljuk, hogy nincs megoldás.

24. A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer grafikus megoldása

✓ Az egyenletrendszer grafikus megoldása abban rejlik, hogy:
- közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a rendszer mindkét egyenletének grafikonját;
- meghatározzuk a grafikonok metszéspontjainak koordinátáit;
- a meghatározott számpárok lesznek a rendszer megoldásai.

✓ Ha a rendszerben foglalt egyenletek grafikonjai egyenesek, akkor a rendszer gyökeinek száma az egyenesek kölcsönös helyzetétől függ:
- ha az egyenesek metszik egymást, akkor a rendszernek egy megoldása van;
- ha az egyenesek illeszkednek egymásra, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van;
- ha az egyenesek párhuzamosak, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

25. A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása behelyettesítő módszerrel

✓ Ahhoz, hogy a kétismeretlenes egyenletrendszert behelyettesítő módszerrel oldjuk meg, a következő lépeseket kell elvégezni:
1) kifejezzük az egyik egyenletből az egyik változót a másikon keresztül;
2) az így kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe a változó helyére;
3) megoldjuk az így kapott egyismeretlenes egyenletet;
4) visszahelyettesítjük a változó meghatározott értékét az első lépésben kapott kifejezésbe;
5) kiszámítjuk a második változó értékét;
6) felírjuk a megoldást.

26. A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása egyenlő együtthatók módszerével

✓ Ahhoz, hogy a kétismeretlenes egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével oldjuk meg, a következő lépeseket kell elvégezni:
1) megfelelő szorzótényezőket választunk úgy, hogyha megszorozzuk az egyik egyenletet, vagy mindkét egyenletet a választott számmal, valamelyik változó együtthatói ellentett számok legyenek;
2) tagonként összeadjuk az így kapott egyenletek jobb és bal oldalát;
3) megoldjuk a második lépés eredményeként kapott egyismeretlenes egyenletet;
4) visszahelyettesítjük a változó meghatározott értékét az eredeti rendszer valamelyik egyenletébe;

5) kiszámítjuk a másik változó értékét;
6) felírjuk a gyököket.

A SZÁM ABSZOLÚT ÉRTÉKE

27. A szám abszolút értéke

- ✓ Az a szám abszolút értékének nevezzük a számegyenesen az a számot jelölő pont és az origó távolságát.
- ✓ Az a szám abszolút értékének jelölése: $|a|$ (olv.: az a szám abszolút értéke).
- ✓ A pozitív szám abszolút értéke magával a számmal, a negatív szám abszolút értéke pedig ellentettjével egyenlő.

$$|0| = 0.$$

- ✓ Kapcsos zárójelet alkalmazva az abszolút érték tulajdonsága így írható fel:

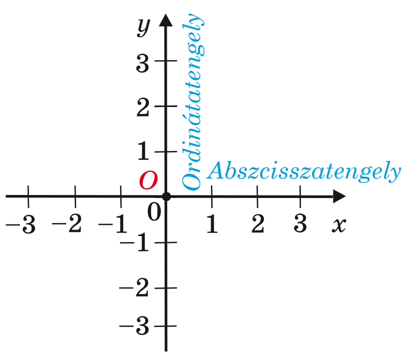
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

- ✓ Az abszolút érték csak nemnegatív értékeket vehet fel.
- ✓ Ellentett számok abszolút értéke egyenlő: $|a| = |-a|$.

KOORDINÁTASÍK

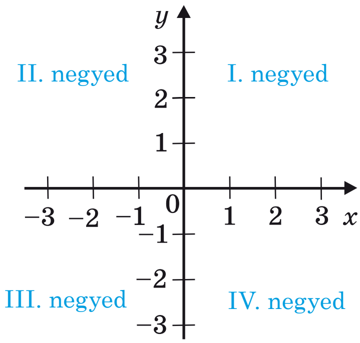
28. Derékszögű koordináta-rendszer

Húzzunk a síkon két, egymásra merőleges számegyenest úgy, hogy az origók egybeessenek (37. ábra). Ezeket az egyeneseket koordinátatengelyeknek, a metszéspontot, az O pontot a számlálás kezdőpontjának (origónak) nevezzük. A vízszintes tengely az abszcisszatengely, melyet x-szel jelölünk, a függőleges tengely az ordinátatengely, és y-nal jelöljük.

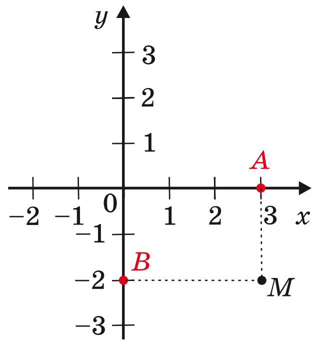


37. ábra

- Az abszcisszatengelyt x tengelynek, az ordinátatengelyt y tengelynek is szoktuk nevezni. E két tengely együtt alkotja a derékszögű koordináta-rendszert, melyet Descartes-féle koordináta-rendszernek is nevezünk.
- Azt a síkot, melyen koordináta-rendszer van, koordinátasíknak nevezzük.
- A koordinátatengelyek négy részre osztják a síkot, melyeket koordinátanegyedeknek nevezünk, és a 38. ábrán látható módon számozunk.



38. ábra



39. ábra

Jelöljük a koordinátasíkon az M pontot (39. ábra). Az M ponton átmenő, az abszcisszatengelyre merőleges egyenes az abszcisszatengelyt az A pontban metszi, az ordinátatengelyre merőleges egyenes ezt a tengelyt a B pontban metszi. Az A pont koordinátája az x tengelyen 3, a B pont koordinátája az y tengelyen –2. A 3-as számot az M pont abszcisszájának, a –2-t az M pont ordinátájának nevezzük. Ezért ezeket a számokat az M pont koordinátáinak nevezzük. Jelölése: $M(3; –2)$.

A pont koordinátáinak felírásakor első helyre az abszcisszát, másodikra az ordinátát írjuk.

Ha egy pont az abszcisszatengelyen van, akkor az ordinátája nulla, ha az ordinátatengelyen van, akkor az abszcisszája nulla.

FELELETEK ÉS ÚTMUTATÁSOK

50. 0,3. **51.** 5. **53.** $\frac{1}{32}$. **54.** Nem. *Útmutatás.* Írjuk fel az adott törtet $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$ alakban. **58.** 1) x – bármely szám, kivéve a –1-et; 2) nincs megoldása; 3) nincs megoldása. **59.** 1) nincs megoldása; 2) –7. **60.** 1) Ha $a = 0$, akkor nincs megoldása; ha $a \neq 0$, akkor $x=\frac{1}{a}$; 2) ha $a = 0$, akkor x bármely szám; ha $a \neq 0$, akkor $x = 1$; 3) ha $a = 6$, akkor x – bármely szám; ha $a \neq 6$, akkor $x = a - 6$; 4) ha $a = -2$, akkor nincs megoldás; ha $a = 2$, akkor x bármely szám; ha $a \neq -2$ és $a \neq 2$, akkor $x=\frac{1}{a+2}$. **61.** 1) Ha $a = -3$, akkor nincs megoldás; ha $a \neq -3$, akkor $x=\frac{3}{a+3}$; 2) ha $a = 0$, akkor nincs megoldás; ha $a = 9$, akkor x bármely szám; ha $a \neq 0$ és $a \neq 9$, akkor $x=\frac{a-9}{a}$. **64.** –4, ha $a = 2b$. **65.** 48 km/h, 60 km/h. **76.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **78.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. **79.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. **87.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **88.** 2) –3; 3) –4,5. **89.** 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. **90.** 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. **91.** 15 km/h, 12 km/h. **92.** 1) –2; 2) nincs megoldás. **112.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **113.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **116.** 2) 4. **117.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **118.** 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. **121.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **122.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. **124.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. **128.** $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Útmutatás.* Írjátok fel az összeadandókat két tört különbségeként. Például $\frac{1}{(a-1)(a-2)}=$ $=\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}$. **129.** $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. **132.** *Útmutatás.* A bal oldalon minden törthez adjatok hozzá 1-et, a jobb oldalon 3-at. **135.** 270 km. **160.** 1) –5; 2) 0,9; 3) –5; 4) –3,2. **161.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **162.** 83. **163.** 10. **164.** 7 vagy

–7. **165.** 2 vagy –2. **166.** 1) 1; 2) 1. **167.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **170.** 1) 0,5; 2) x bármely szám. **172.** 1,2 óra. **173.** 50 liter, 30 liter. **174.** 5 férfi, 1 nő, 6 gyerek. **178.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. **179.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) –1; 3) $x + y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. **180.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a - 2$. **181.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c - 5$; 3) –2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **184.** 1) Nem; 2) igen. **186.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a - 3$; 3) $a + 1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **187.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **188.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$.**189.** $-y$. **192.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **193.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$. **195.** *Útmutatás.* Írjátok fel a kifejezést $10\cdot 3^n - 5\cdot 2^n$ alakban. **196.** 480 kg. **197.** 500 hrivnya, 700 hrivnya. **198.** 2 óra. **199.** 90 alkatrész. **200.** 9 veréb, 10 galamb, 11 gerle. **207.** 2) nincs megoldás; 3) –2; 4) x bármely szám, kivéve a 2-t; 5) x bármely szám; 6) 3; 7) 0,5; 8) nincs megoldás; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) –4; 4; 14) 0; 15) 4. **208.** 1) –1; 2) nincs megoldás; 3) 10; 4) nincs megoldás; 5) 4; 6) x bármely szám, kivéve a 0-át; 7) 6; 8) x bármely szám, kivéve a –0,5-et; 9) –3; 3. **209.** 7. **210.** 10. **212.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) nincs megoldás; 3) 7; 4) 0; –2; 5) nincs megoldás; 6) –17; 7) 0; 8) nincs megoldás. **213.** 1) 10; 2) –0,5; 3) –3; 4) –4; 4; 5) nincs megoldás; 6) –5. **214.** 2 km/h. **215.** 29 km/h. **216.** 9 km/h. **217.** 1) nincs megoldás; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) 0,6; 2) 0. **219.** 1) Ha $a \neq 1$, akkor $x = 1$; ha $a = 1$, akkor nincs megoldás; 2) ha $a \neq -5$, akkor $x = a$; ha $a = -5$, akkor nincs megoldás; 3) ha $a = 0$, akkor x bármely szám, kivéve a 3-at; ha $a \neq 0$ és $a \neq 3$, akkor $x = a$; ha $a = 3$, akkor nincs megoldás; 4) ha $a \neq 7$, akkor $x = a$ vagy $x = 6$; ha $a = 7$, akkor $x = 6$; 5) ha $a \neq 4$ és $a \neq -2$, akkor $x = 4$ vagy $x = -2$; ha $a = 4$, akkor $x = -2$; ha $a = -2$, akkor $x = 4$; 6) ha $a \neq 4$ és $a \neq -2$, akkor $x = a$; ha $a = 4$ vagy $a = -2$, akkor nincs megoldás. **220.** $a = 2$ vagy $a = -2$. **221.** $a = -9$ vagy $a = -3$ vagy $a = 0$. **222.** 70 000 lakos. **223.** 60 km. **251.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 darab vastömb. **266.** 80 000 lakos. **267.** 2 km. **280.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1) –3;

2) –5; 3) –2; 4) –7; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3) –1; 4) 6. **295.** 8 perc. **296.** 5,34 kg. **297.** 81-szer. **298.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **299.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **300.** 1) –1 vagy 0; 2) 3 vagy 4; 3) 4 vagy 5; 4) 2 vagy 3. **301.** 1) 6 vagy 7; 2) 4 vagy 5; 3) 4 vagy 5; 4) 4 vagy 5. **302.** 28; 8. **303.** 31,6%-kal. **304.** 5 óra 45 perc. **305.** Igen, 5 darab 5 hrivnyás címlet és 3 darab 2 hrivnyás címlet. **331.** 1) 2; 2) –1; 3; 3) nincs megoldás. **332.** 1) 2; 4; 2) –1; 1; 3) nincs megoldás. **345.** Nincs megoldás. **346.** 9%-kal csökkent. **347.** 36 érme, 24 érme. **348.** 12 km/h. **353.** 1) Nincs megoldás; 2) –1; 3; 3) 2. **354.** 1) –3; –1; 2) nincs megoldás; 3) –1. **369.** 4. **371.** 5 km/h, 3 km/h. **397.** 1) –10; 2) 25; 3) –23,8; 4) 13; 5) 216; 6) –20. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) –20. **399.** 2) $x \leqslant 0$; 3) x bármely szám; 4) $x = 0$; 5) $x \geqslant 8$; 6) $x \leqslant 8$; 9) x bármely szám, kivéve a 8-at; 10) $x \geqslant 0$ és $x \neq 9$; 11) $x \geqslant 0$; 12) $x = 0$; 13) x-nek nem létezik olyan értéke; 14) x bármely szám; 15) $x = 0$; 16) x bármely szám, kivéve a 0-t. **400.** 2) $y \leqslant 0$; 3) $y \geqslant 0$; 4) $y \leqslant 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$; 7) $y \geqslant 0$ és $y \neq 1$. **401.** 6) –10; 10. **402.** 4) –7; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) nincs megoldás. **406.** 1) 4900; 2) nincs megoldás. **407.** 1) Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor a és b azonos előjelűek; ha $a = 0$, akkor b bármely szám; ha $b = 0$, akkor a bármely szám; 3) ha $b \neq 0$, akkor $a \geqslant 0$; ha $b = 0$, akkor a bármely szám; 5) ha $a \neq 0$, akkor $b \leqslant 0$; ha $a = 0$, akkor b bármely szám. **408.** 2) *Útmutatás.* $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. **409.** *Útmutatás.* $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. **410.** 2. kifejezés. **411.** 1) 0; 2) nincs megoldás; 3) 1; 4) –2; 5) –1; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) nincs megoldás; 3) 1; 4) 3. **413.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **416.** 1) Ha $a = 0$, akkor $x \geqslant 1$, ha $a \neq 0$, akkor $x = 1$; 2) ha $a = 1$, akkor x bármely szám; ha $a \neq 1$, akkor $x = 0$; 3) ha $a = 0$, akkor $x \geqslant 1$; ha $a \neq 0$, akkor $x = 2$; 4) ha $a < 0$, akkor nincsenek gyökök; ha $a \geqslant 0$, akkor $x = a^2 + 2$. **417.** $a < 0$ vagy $a = 1$. **418.** 13. **419.** $\frac{a+10}{5-a}$. **420.** 27 darab 100 hrivnyás címlet, 500 hrivnyásból 4 címlet. **428.** 2) $\{-2, 2\}$; 4) $\varnothing$. **429.** 4) $\{5\}$. **439.** 1) $\frac{5b+15}{b}$; 2) $\frac{3}{1-b}$. **440.** 1,4 km/h. **441.** $\frac{2}{7}$. **457.** *Útmutatás.* Legyen $\frac{m}{n}$ és $\frac{p}{q}$ az adott racionális szám. Akkor az összegük $\frac{mq+np}{nq}$, vagyis $\frac{s}{t}$, ahol $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. **458.** *Útmutatás.* Ha feltételezzük, hogy az adott összeg racionális szám, akkor az

adott irracionális szám megadható két racionális szám különbségeként. **459.** 1) Nem, például $\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)=\mathbf{0}$; 2) nem, például $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2=\mathbf{3}$; 3) nem, például $\sqrt{3}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$. **460.** A harmadik lépcsőházban, a hatodik emeleten. **461.** $\frac{b^2}{a}$. **463.** 18 *l*. **493.** 1) Nem létezik olyan x érték; 2) 3; 3) –1; 3. **494.** 1) –4; 2) 2. **495.** –4. **496.** 120 ha. **525.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **526.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **528.** 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **529.** 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **536.** 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **537.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **538.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. **539.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **540.** 2) Mivel a feltételek szerint $b \leqslant 0$, ezért $b\sqrt{-b}=-\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. **541.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$. **543.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$. **544.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **545.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **546.** 9. **549.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **550.** 180 alkatrész. **551.** 25%-kal. **552.** 6 km/h, 2 km/h. **553.** 17 vagon. **571.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) nincs megoldás; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **573.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **574.** 2) $-\sqrt{2}$. **575.** 0. *Útmutatás*. Az egyenlet bal oldala csak nemnegatív értéket vesz fel, a jobb oldala csak nem pozitívat. **580.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. **581.** 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **582.** Ha $a \geqslant 0$, akkor egy gyök van; ha $a < 0$, akkor nincs megoldás. **583.** $2\sqrt{a}+1$, ha $a > 1$; 3, ha $0 \leqslant a \leqslant 1$. **584.** 12, ha $a > 36$; $2\sqrt{a}$, ha $0 \leqslant a \leqslant 36$. **585.** 63 kg. **586.** 3 km/h. **588.** 1 óra 12 perc. **605.** 6; 7. **606.** 9; 10. **608.** 1) 0; 14; 2) nincs megoldás. **609.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **615.** –3; –2 vagy 3; 4. **616.** –1; 0 vagy

0; 1. **617.** 1) 4; 2) 0; –8; 3) –9; 9. **622.** 1) 0; –3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) –2; 2. **623.** 1) 0; 7; –7; 2) 0; 5; –7; 3) –1,5; 1,5. **624.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; –2; 4) nem létezik ilyen érték. **625.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ vagy $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **629.** 35. **636.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **637.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) –3; $\frac{1}{7}$. **638.** 1) 4; –3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **639.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) nincs megoldás. **640.** 7. **641.** 38 cm. **642.** 6 és 14 vagy –14 és –6. **643.** 10; 11. **644.** 13; 14. **645.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) –1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) –1; $\frac{31}{22}$. **646.** 1) $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **647.** –20; 4. **648.** 1; $-\frac{4}{3}$. **649.** 8 cm. **650.** 6 cm vagy 12 cm. **651**. 16 cm, 30 cm. **652.** 9 cm, 40 cm. **653.** 9; 11; 13. **654.** 4; 6; 8; 10. **656.** 16 majom vagy 48 majom. **657.** 9 csapat. **658.** 15 oldal. **659.** 1) –8; –7; 0; 1; 2) –1; 1; 0,6; –0,6; 3) $-3 + \sqrt{14}$; 4) –2; 2; 5) 3; 5; –3; –5; 6) 2; –2. **660.** 1) –12; 2; –2; –8; 2) 3; 3) 15; $-7 \pm \sqrt{34}$; 4) 9; –9. **661.** 1) –10; 2) 3. **662.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **663.** 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ vagy $b = 12$. **664.** 1) $b = 13{,}5$; 2) $b = -8$ vagy $b = 8$. **668.** 1) $x = -2a - 1$ vagy $x = -a$; 2) $x = 2a$ vagy $x = 4$; 3) ha $a \neq 0$, akkor $x = \frac{25}{a}$ vagy $x = -\frac{1}{a}$, ha $a = 0$, akkor nincs megoldás; 4) ha $a = \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{1}{3}$, ha $a \neq \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{1}{3}$ vagy $x = \frac{1}{2a-1}$. **669.** 1) $x = 3a - 5$ vagy $x = -a$; 2) $x = -3a$ vagy $x = 4$; 3) ha $a = 0$, akkor $x = 1$; ha $a \neq 0$, akkor $x = 1$ vagy $x = \frac{1}{a}$. **670.** 1) $b = 0$ vagy $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$ vagy $b = 2\sqrt{6}$, vagy $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$. **671.** 1) $b = 0$ vagy $b = -0{,}5$ vagy $b = 0{,}5$; 2) $b = -3$ vagy $b = -5$. **672.** $\frac{a-b}{a}$. **673.** 9. **674.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **675.** 45 tonna, 75 tonna. **676.** 14 lap. **690.** $x_2 = 10$, $q = -20$. **691.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **692.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **693.** $x_2 = 1{,}6$, $m = -1{,}28$. **694.** –20,5. **695.** –7. **696.** $\sqrt{17}$; $-\sqrt{17}$. **700.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **701.** $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **702.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **703.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **706.** 1) 1,5; 2) 69. *Útmutatás.* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **707.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$.

Útmutatás. $|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$. **708.** $x^2+12x+17=0$. **709.** $x^2-18x+49=0$. **710.** $6x^2-14x+3=0$. **711.** $x^2-15x+8=0$. **712.** $a=2$ vagy $a=-2$. **713.** $a=6$ vagy $a=-6$. **715.** 1) 7; –7; 5; –5; 2) –11; 11; –1; 1; –4; 4. **716.** 1) –9; 9; –6; 6; 2) –17; 17; –7; 7; –3; 3. **717.** $b=c=0$ vagy $b=1$, $c=-2$. 718. 1) $a=2$; 2) nincs ilyen értéke az a-nak. **719.** $a=2$. **721.** 4 sor, minden sorban 12 fa. **723.** 18%. **732.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **733.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **734.** 1) –3; 2) –2; 3) $\frac{4}{3}$. **735.** 1) –4; 2) –14. **736.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **740.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **741.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **742.** 1) Ha $a=3$, akkor x bármely szám, ha $a=-2$, nincs megoldás, ha $a\neq 3$ és $a\neq -2$, akkor $x=\frac{a+3}{a+2}$; 2) ha $a=7$, akkor x bármely szám, ha $a=1$, akkor nincs megoldás, ha $a\neq 7$ és $a\neq 1$, akkor $x=\frac{2a+1}{a-1}$. **743.** Ha $a=-8$, akkor x bármely szám, ha $a=1$, akkor nincs megoldás, ha $a\neq -8$ és $a\neq 1$, akkor $x=\frac{a+8}{a-1}$. **746.** 6,8%. **748.** 1) Nincs megoldás; 2) –4; 3) 3; 4) y bármely szám, kivéve a –4-et és az 5-öt. **752.** 1) –4; 1; 2) –1; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) –2; 10; 5) 7; 6) –6; 7) –5; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) –2; 9; 11) –3; 2; 12) 4; –0,4. **753.** 1) –1; 2) –0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) –3; 6) –3; 12; 7) –1; $\frac{2}{7}$; 8) –3; 13. **758.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **759.** 1) 10; 2) –7. **760.** 1) $3\pm\sqrt{18}$; 2) –23; 1; 3) –27; –1; 4) 3. **761.** 1) 4; 9; 2) 5. **762.** 1) –1; 18; 2) –98; 2; 3) –1,5; 4) –2; 5) –3; 4; 6) –3; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. **763.** 1) –60; 50; 2) –3; 3) –9; 24; 4) 2; 5) –20; 2. 6) 15. **764**. 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) –56; 60. **765.** 1) –15; 12; 2) –20; 2. **766.** 1) –5; 2) nincs megoldás; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **767.** 1) –15; 1; 2) 1,5. **769.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; –3; 3; 2) –6; –4; –1; 1; 3) 0; 3; 4) –1; –3; 1. **769.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **770.** 1) –1; 7; 2; 4; 2) –6; –2; $-4\pm\sqrt{20}$; 3) –2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **771.** 1) Ha $a=1$, akkor $x=7$; ha $a=7$, akkor $x=1$; ha $a\neq 1$ és $a\neq 7$, akkor $x=1$ vagy

$x = 7$; 2) ha $a \neq 1$ és $a \neq 7$, akkor $x = a$; ha $a = 1$ vagy $a = 7$, akkor nincs megoldás; 3) ha $a \neq 2$ és $a \neq \frac{2}{3}$, akkor $x = 3a$ vagy $x = 2$; ha $a = 2$ vagy $a = \frac{2}{3}$, akkor $x = 2$; 4) ha $a = 0$, akkor x bármely szám, kivéve a –3-t; ha $a = -3$, akkor nincs megoldás; ha $a \neq 0$ és $a \neq -3$, akkor $x = a$. **772.** $a = 2\sqrt{5}$, vagy $a = -2\sqrt{5}$ vagy $a = 6$. **777.** 75 km/h. **778.** 50 km/h, 60 km/h. **779.** 80 km/h, 60 km/h. **780.** 80 km/h. **781.** 12 km/h. **782.** 12 oldal. **783.** 30 m^3, 25 m^3. **784**. 6 nap. **785.** 31 km/h. **786.** 10 km/h. **787.** 3 km/h. **788.** 2 km/h vagy 2,25 km/h. **789.** 60 km/h, 40 km/h. **790.** 60 km/h. **791.** 60 km/h. **792.** 8 km/h. **793.** 32 km/h. **794.** $\frac{1}{4}$. **795.** $\frac{7}{12}$. **796.** 45 nap, 36 nap. **797.** 15 óra, 10 óra. **798.** 21 óra, 24 óra. **799.** 80 g. **800.** 30 kg. **801.** 3 km/h. **802.** 5 óra. **803.** 4 óra, 6 óra, 12 óra. **804.** 80 km/h. **805.** 24 alkatrész. **806.** 12 óra. **808.** 6. **823.** 3) $\frac{8}{3}$. **829.** 4) 1, 2, 3. **832.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **833.** *Útmutatás.* Vizsgáljátok a két oldal különbségét. **886.** $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. **909.** 1) –5; 5; –1; 1; 2) –10; 10; –22; 22. **910.** $a = 1$. **911.** $a = 3$.

AZ *ELLENŐRIZZÉTEK MAGATOKAT!* FELADATSOROK MEGOLDÁSA

Feladatlap sorszáma	Feladatok száma											
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1.	B	C	A	A	D	A	C	D	C	D	B	C
2.	B	D	B	D	A	A	C	B	C	B	C	A
3.	C	D	C	B	C	A	B	B	D	A	A	D
4.	C	B	B	C	C	A	C	D	C	C	A	B
5.	C	D	D	C	A	B	A	B	A	D	B	A
6.	D	C	A	B	A	C	A	C	A	D	B	C

TÁRGYMUTATÓ

TARTALOMJEGYZÉK

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови
Перекладач *Кулін Юдіт Імріївна*

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 15,0. Обл.-вид. арк. 13,9.
Тираж 2160 прим. Зам. № ______.

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua; e-mail: office@svit.gov.ua; svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ „Патент”, 88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011