

A. H. Merzljak  
V. B. Polonszkij  
M. SZ. Jakir

# MÉRTAN

Tankönyv az általános oktatási  
rendszerű tanintézetek  
7. osztálya számára

247/2

*Ajánlotta Ukrajna Oktatási  
és Tudományos Minisztériuma*

ЗОШ № 3  
І.М.Ф.РАКОЦІ ІІ  
БІБЛІОТЕКА  
м. Мукачево

Львів  
Видавництво „СВІТ”  
2015

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

М 52

**Перекладено за виданням:**

**Мерзляк А.Г.** Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2015

*Рекомендовано*

*Міністерством освіти і науки України  
(наказ МОН України від 20.07.2015 № 777)*

**Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено**

**Мерзляк А. Г.**

М 52 Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. угорською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої, А. А. Штерр, Ю. І. Кулін. – Львів : Світ, 2015. – 224 с. : іл.

ISBN 978-966-603-972-2

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-603-972-2 (угор.)  
ISBN 978-966-474-253-2 (укр.)

© Мерзляк А. Г., Полонський В. Б.,  
Якір М. С., 2015  
© ТОВ ТО „Гімназія”, оригінал-макет,  
художнє оформлення, 2015  
© Поллої Д. Ф., Штерр А. А., Кулін Ю. І.,  
переклад угорською мовою, 2015

## A SZERZŐKTŐL

### TANULÓKNAK

#### Kedves hetedikeseik!

Most elkezdtetek egy új tantárgy – a **mértan tanulmányozását**. Figyeljétek meg, hogy a *geográfia* és a *geometria* szavakban közös a *geo* tag, ami görögül földet jelent. Azonban amíg a 6. osztályban a földrajzórán valóban a föld leírásával foglalkoztatotok (*grafia* görögül leírást, rajzot jelent), úgy a mértanórákon nem kell földméréssel foglalkozni (*metreo* görögül – mérni).

A mértan az egyik legősibb tudomány. Az elnevezését azzal lehet magyarázni, hogy a mértan kialakulása és fejlődése szorosan összefügg az ember sokoldalú gyakorlati tevékenységével: a földterületek határainak kijelölésével, utak, öntözőcsatornák és egyéb létesítmények építésével, vagyis ahogyan ilyen esetben mondják, *alkalmazott tudomány* volt. Fokozatosan, lépésről-lépésre összegyűlt az emberi tudás és a mértan szép és tökéletes, szigorú és következetes matematikai elméletté vált. Ezzel a tudománnyal és a megszerzett tudásokat gyakorlati alkalmazásával fogtok foglalkozni a mértanórákon.

A mértan ismerete rendkívül fontos. Valóban, nézzetek körül – mindenütt jelen van a mértan, pontosabban a **mértani alakzatok**: szakaszok, háromszögek, téglalapok, derékszögű paralelepipedonok (téglatestek), gömbök stb.



a



b



**1. ábra.** Építészeti létesítmények:

a – Szajut Hotel (Kijev);

b – közigazgatási épület (London)

**2. ábra.** Szeireci

tv-torony

(Kijev)

Elmélyült mértani ismeretek nélkül nem készülhettek volna bonyolult építészeti szerkezetek (1., 2. ábra), hajók és repülőgépek (3. ábra) még a gyerek-építőjátékok elemei és a hímzések mintái sem (4. ábra). A minták létrehozása megköveteli a népművéstől azt, hogy legyen elképzelése a szimmetria és a párhuzamos eltolás mértani fogalmakról. A mértan ismerete nélkül senkiből sem lehet tervezőmérnök, esztergályos, asztalos, tudós, építész, dizájnér, divattervező, számítógépes grafikai szakember stb. Általánosságban a mértani ismeretek – az emberi kultúra fontos összetevői.



a



b

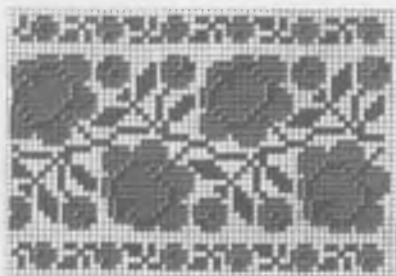
**3. ábra.** Gépgyártási szerkezetek:

a – hajó a mikolajivi hajógyár sólyáján;

b – AN-225-ös (Mrija) repülőgép



a



b

4. ábra. Mértan a mindennapokban:  
a – gyerek-építőjáték; b – hímzés minta

A mértan egy nagyon érdekes tantárgy. Reméljük, hogy erről rövidesen meggyőződtek, amiben segít majd ez a tankönyv is. Ismerkedjete meg a szerkezetével.

A tankönyv négy paragrafusra van bontva, amelyek mindegyike pontokból áll. A pontokban található az elméleti anyag. Ezt tanulmányozva fordítsatok különös figyelmet a **vastag betűvel**, a **vastag dőlt betűvel** és **dőlt betűvel** szedett szövegre; a könyvben így jelölik a meghatározásokat, szabályokat és a legfontosabb matematikai állításokat.

Az elméleti anyag kifejtése általában mintafeladatok megoldásával zárul. Ezekre a leírásokra a megoldások elkészítésének egyik lehetséges mintájaként lehet tekinteni.

Minden egyes ponthoz önálló megoldást igénylő feladatokat találtok, megoldásukhoz csak az elméleti anyag elsajátítását követően ajánlatos nekifogni. A feladatok között vannak könnyű és közepes nehézségi szintűek, illetve bonyolult feladatok is (különösen a csillaggal (\*) jelzettek).

Minden pont *Figyeljétek meg, rajzoljatok, szerkesszete, képzeljétek el* rovattal zárul. Ide olyan feladatokat gyűjtöttünk össze, melyek megoldásához nincs szükség speciális geometriai ismeretekre, csak józan észre, találékonyságra és ötletességre. Ezek a feladatok olyan hasznosak, mint a vitaminok: fejlesztik a „mértani látást” és az intuíciót.

Ezenkívül a tankönyvben érdekes elbeszéléseket olvashattok a mértan történelméből.

Hajrá, előre! Sok sikert!

## TANÁROKNAK

### Tisztelt kollégák!

Az általános és középiskolai tanintézmények 5–9. osztályos tanulóinak szóló matematika oktatási programjában a következő megállapítás szerepel: „A tananyag tartalma a megfelelő oktatási kurzusok témáinak megfelelően strukturált, a tanulmányozásukra szánt óraszám meghatározásával. A tartalom és a tanulmányi idő ezen felosztása tájékoztató jellegű. A tanároknak és a tankönyvek szerzőinek jogukban áll módosítani azt az elfogadott módszertani koncepciónak megfelelően...”

Erre való tekintettel célszerűnek látjuk a tankönyv második paragrafusában a *Háromszögek* téma áttekintését. Ez lehetőséget nyújt a *Párhuzamos egyenesek* paragrafus didaktikai anyagának változatosabbá tételére.

Érthető, hogy a középiskolai keretek között lehetetlen megvalósítani a mértan tanfolyamának formális-logikai elven való felépítését: az axiómarendszert a rendszer alapjába helyezni és tovább deduktív módon építeni az anyag kifejtését, vagyis szigorú logika szerint bizonyítani a tételeket, az axiómákra és a korábban bizonyított tényekre alapozva. Ez azzal magyarázható, hogy korlátozott a deduktív gondolkozásra hajlamos tanulók (különösen a hetedikesek) száma. Valójában a többségre a szemléltető-képi gondolkodásmód a jellemző. Ezért a gyerek esetén a szemmel láthatóságra való apellálás teljesen természetes és igazolható.

A kifejtetteknek megfelelően a tankönyv alapjául a **szemléltető-deduktív módszer szolgál, egyesítve a részleges axiomatizációval.**

Úgy véljük, hogy a mértan iskolai tanulmányozásának fő célja – nem kizárólag a logikus gondolkodásmód és a bizonyítás elvégzése képességének fejlesztése. A tankönyv szerzői szélesebb célt tűznek ki: pontosítani a tanulók elképzelését az elemi mértani alakzatokról (háromszög, körvonal, téglalap stb.), fejleszteni bennük a bizonyítás igényét, vagyis lerakni a deduktív és a heurisztikus gondolkodás alapjait, a legfőbb pedig – **megtanítani a tanulókat a mértani alakzatok tulajdonságainak alkalmazására a gyakorlati és elméleti feladatok megoldása során.** Bízunk benne, hogy Önök úgy értékelik majd ezt a tankönyvet, mint olyat, amely elősegíti a kijelölt célok megvalósítását.

A könyvbe nagy és változatos didaktikai anyag került be. Azonban egy tanév alatt lehetetlen megoldani az összes feladatot, ez nem is szükséges. Ezzel együtt sokkal kényelmesebb a munka, amikor jelentős tartalék feladat áll rendelkezésre. Ez lehetővé teszi a szintek alapján történő differenciáció megvalósítását és az egyéni hozzáállást a tanulás során.

Zöld szín jelzi a házi gyakorlatra javasolt feladatok számát, kék szín pedig azokat a feladatokat, amelyeket a tanár véleménye szerint (az osztály tanulói egyéni sajátosságainak figyelembe vételével) szóban is meg lehet oldani.

Tehát alakítsuk át közösen a mértan iskolai tanfolyamát érthető és vonzó tantárggyá.

Alkotói ihletet és türelmet kívánunk Önöknek.

## EGYEZMÉNYES JELEK

- $n^{\circ}$  az elemi és közepes tanulmányi eredményi szinteknek megfelelő feladatok;
- $n^{\star}$  a megfelelő tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;
- $n^{\star\star}$  a magas tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;
- $n^{\star}$  matematikai szakköröknek és fakultatívoknak megfelelő feladatok;
-  kulcsfeladatok, amelyek eredményei felhasználhatók más feladatok megoldása során
-  megfelelő tanulmányi eredményi szintnek megfelelő tétel bizonyítása;
-  magas tanulmányi eredményi szintnek megfelelő tétel bizonyítása;
-  tanulmányozásra nem kötelező tétel bizonyítása;
-  a tétel bizonyításának befejezése;
-  a feladat megoldásának befejezése;



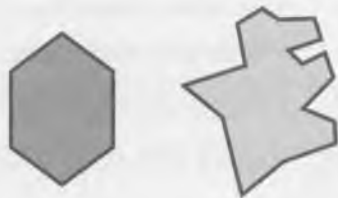
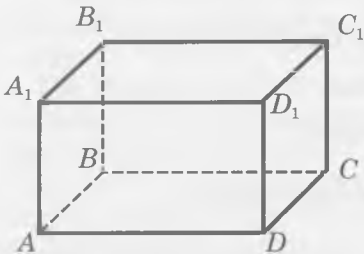
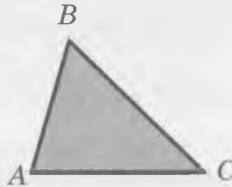
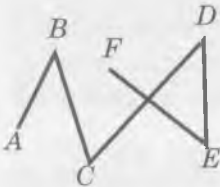
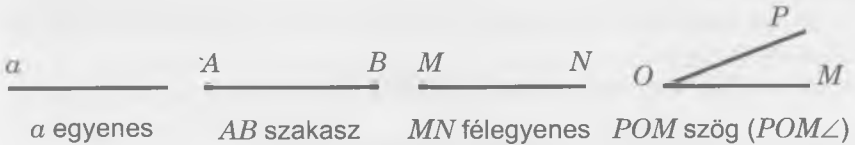
*Amikor elkészültél a házi feladattal rubrika.*

A rajzokon az egyenlő hosszúságú szakaszokat egyenlő számú vonalkákkal, az egyenlő nagyságú szögeket pedig egyenlő számú körívvel jelöljük. Ez alól azok a szakaszok, szögek képeznek kivételt, amelyeket meg kell határozni.

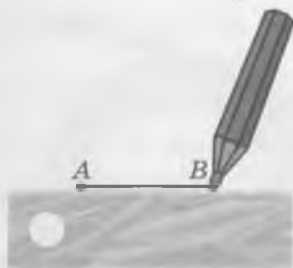
## BEVEZETŐ

### Mit tanulmányoz a mértan?

Habár a mértan új tantárgy a számotokra, azonban a matematikaórákon már megismerkedtetek ennek a bölcs tudománynak az alapjaival. Így, az 5. ábrán látható összes mértani alakzat jól ismert a számotokra.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

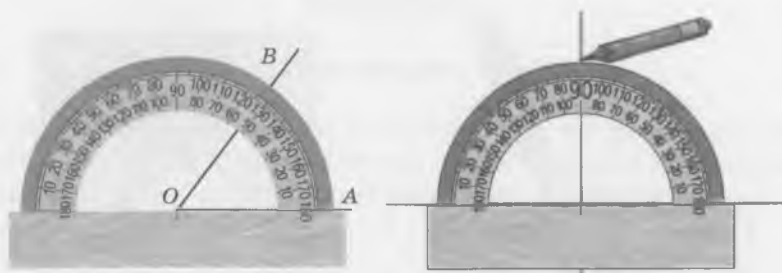
Vonalzó segítségével szakasszal tudtok összekötni két pontot (6. ábra), körző segítségével körvonalat tudtok szerkeszteni (7. ábra), egyenes és derékszögű vonalzó segítségével merőleges és párhuzamos egyeneseket tudtok rajzolni (8. ábra). Meg tudjátok mérni a szakasz hosszát és megadott hosszúságú szakaszt tudtok szerkeszteni milliméteres beosztású vonalzó segítségével (9. ábra), meg tudjátok határozni a szög mértékét és megadott mértékű szöget tudtok szerkeszteni szögmérő segítségével (10. ábra), felosztani a háromszögeket (nézd az előzőklapot).



8. ábra



9. ábra



10. ábra

Azonban az alakzat „kinézetének” felismerése, vagy az egyszerű szerkesztések elvégzésének képessége – csupán *a mértani alakzatok tulajdonságáról szóló tudomány*, vagyis a *mértan* alapismereteit jelentik.

A mértan *szisztematikus tanfolyamának* tanulmányozása során fokozatosan, bizonyos sorrendben tanulmányozni fogjátok a mértani alakzatok tulajdonságait, vagyis mind a már ismert, mind pedig az új alakzatokat. Ez azt jelenti, hogy meg kell tanulnotok az alakzat egyes tulajdonságai alapján meghatározni, és ami a legfontosabb, **bebizonyítani** más tulajdonságait.

A mértan iskolai tanfolyamát hagyományosan **planimetriára** (síkmértanra) és **sztereometriára** (térmértanra) osztják. A planimetria a síkon fekvő alakzatokat tanulmányozza (*planum* latinból fordítva – *sík*), a sztereometria pedig a térbeni alakzatokat (*sztereosz* görögből fordítva – térbeni).

Tehát elkezdjük a síkmértan tanulmányozását.

# A LEGEGYSZERŰBB MÉRTANI ALAKZATOK ÉS TULAJDONSÁGAIK 1.§.

Ebben a paragrafusban áttekintjük az alsóbb osztályokból számotokra már ismert alakzatokat, jelesül: a pontokat, egyeneseket, szakaszokat, félegyeneseket és szögeket.

Többet megtudtok ezeknek az alakzatoknak a tulajdonságairól. Egyes tulajdonságokat megtanultok **bebizonyítani**. Megszokottá, érthetőkké és gyakran használttá válnak számotokra a **meghatározás, tétel, axióma** szavak.



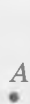


## 1. Pontok az egyenesen

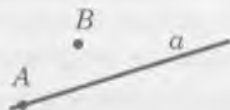
A pont – a legegyszerűbb mértani alakzat. Ez az egyetlen alakzat, amely nem bontható részekre. Például a 11. ábrán látható alakzatok részekre vannak bontva. Míg a 12. ábrán látható alakzatról, amely két pontból áll, elmondható, hogy két részből áll: az  $A$  és a  $B$  pontból.



11. ábra



12. ábra



13. ábra

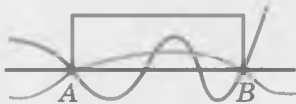
A 13. ábrán az  $a$  egyenes és két,  $A$  és  $B$  pont látható. Úgy mondják, hogy *az  $A$  pont az  $a$  egyeneshez tartozik, vagy az  $A$  pont az  $a$  egyenesen fekszik, vagy az  $a$  egyenes áthalad az  $A$  ponton, és ennek megfelelően, a  $B$  pont nem tartozik az  $a$  egyeneshez, vagy a  $B$  pont nem fekszik az  $a$  egyenesen, vagy az  $a$  egyenes nem halad át a  $B$  ponton.*

Az **egyenes** – meghatározott tulajdonságokkal rendelkező mértani alakzat.

**Az egyenes alaptulajdonsága.** Bármely két pont<sup>1</sup> át egyenest lehet húzni, méghozzá csakis egyet.

Miért tartják úgy, hogy ez az egyenes alaptulajdonsága?

Legyen egy bizonyos vonalról csak az ismert, hogy átmegy az  $A$  és a  $B$  ponton. Ahhoz, hogy elképzeljük, hogyan is néz ki ez az alakzat, ez az információ szemmel láthatóan hiányos. Hiszen az  $A$  és a  $B$  pontokon át sok különböző *vonalat* lehet meghúzni (14. ábra). Az egyenest egyértelműen meghatározza ez a két pont. Eppen ebben rejlik az egyenes alaptulajdonságának a lényege.



14. ábra

Ez a tulajdonság lehetővé teszi az egyenes megjelölését két tetszőleges pontja megnevezése által. Így az  $M$  és az  $N$  pontokon

<sup>1</sup> Itt és a továbbiakban, amikor azt mondjuk *két pont, három pont, két egyenes* stb., úgy tekintjük, hogy ezek különböző pontok és különböző egyenesek. Egybeesésük esetét külön meghatározzuk.

át meghúzott egyenest  $MN$  egyenesnek (vagy  $NM$  egyenesnek nevezik).

A mértani alakzat alaptulajdonságát még axiómának (az axiómákról részletesebben a 6. p. tanulók majd) is nevezik.

Ha meg kell magyarázni valamely fogalom (szakkifejezés) értelmét, akkor a **meghatározásokat** alkalmazzuk. Például:

- 1) órának nevezik az idő mérésére szolgáló műszert;
- 2) a mértan – a matematika része, amely az alakzatok tulajdonságait tanulmányozza.

A meghatározásokat a mértanban is alkalmazzák.

**Meghatározás.** A közös ponttal rendelkező két egyenest egymást metszőknek nevezik.

A 15. ábrán az  $a$  és  $b$  egyenes látható, amelyek az  $O$  pontban metszik egymást.

Gyakran egy tény igaz voltát *logikai megfontolások* segítségével állapítják meg.

Vizsgáljuk meg a következő feladatot. Ismert, hogy a Mértan utca összes lakója – matematikus. Jenő a Mértan u. 5-ben lakik. Jenő matematikus?

A feladat feltétele szerint Jenő a Mértan utcában lakik. Mivel pedig ennek az utcának az összes lakója matematikus, így Jenő – matematikus.



15. ábra



16. ábra

A felhozott logikai megfontolásokat azon tény **bizonyításának** nevezzük, miszerint Jenő – matematikus.

A matematikában az olyan állításokat, amelyeknek az igaz voltát bizonyítás segítségével állapítják meg, **tételeknek** nevezzük.

**1.1. tétel.** *Bármely két egyenesnek, amelyek metszik egymást, csak egy közös pontjuk van.*

**Bizonyítás.**  $\odot$  Legyen az egymást metsző  $a$  és  $b$  egyeneseknek a közös  $A$  pontjukon kívül még egy közös pontjuk, a  $B$  (16. ábra).



Akkor az  $A$  és a  $B$  pontokon két egyenes megy át. Ez pedig ellentmond az egyenes alaptulajdonságának. Tehát a feltételezés az  $a$  és  $b$  egyenesek másik metszéspontjának a létezéséről hibás. ▲



1. Melyik alakzatot nem lehet részekre bontani?
2. Fogalmazzatok meg az egyenes alaptulajdonságát.
3. Az egyenes mely tulajdonsága teszi lehetővé azt, hogy két pontja megnevezésével jelöljük?
4. Mi célból alkalmazzák a meghatározásokat?
5. Milyen két egyenest neveznek egymást metszőnek?
6. Hogyan nevezik azt az állítást, amelynek az igaz voltát bizonyítással állapítják meg?
7. Fogalmazzatok meg a két egymást metsző egyenes tételét.



## GYAKORLATI FELADATOK

- 1.<sup>o</sup> Húzzatok egy egyenest, jelöljétek  $m$ -el. Jelöljétek meg az ezen az egyenesen fekvő  $A$  és  $B$  pontokat, illetve a  $C$ ,  $D$ ,  $E$  pontokat, amelyek nem fekszenek rajta.
- 2.<sup>o</sup> Jelöljétek meg az  $M$  és a  $K$  pontokat, és húzzatok rajtuk keresztül egyenest. Ezen az egyenesen jelöljétek meg az  $E$  pontot. Írjátok le a kapott egyenes összes lehetséges megnevezését.
- 3.<sup>o</sup> Húzzatok meg az  $a$  és a  $b$  egyeneseket úgy, hogy metsszék egymást. Metszéspontjukat jelöljétek  $C$  betűvel. A  $C$  pont hozzátartozik-e az  $a$  egyeneshez?, a  $b$  egyeneshez?
- 4.<sup>o</sup> Vegyetek fel három pontot úgy, hogy azok ne feküdjenek egy egyenesen és minden egyes pontpáron át húzzatok egyenest. Hány egyenes keletkezett?
- 5.<sup>o</sup> Vegyetek fel négy pontot úgy, hogy közülük egyik hármas sem feküdjön egy egyenesen és minden egyes pontpáron át húzzatok egyenest. Hány egyenes keletkezett?
- 6.<sup>o</sup> Húzzatok három egyenest úgy, hogy közülük minden pár metssze egymást. Jelöljétek meg ezeknek az egyeneseknek a metszéspontjait. Hány metszéspontot kaphatunk?
- 7.<sup>o</sup> Vegyetek fel négy pontot úgy, hogy a rajzon az egyenesek meghúzása során a pontpárokon át: 1) egy egyenes keletkez-

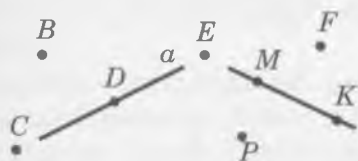
zen; 2) négy egyenes keletkezzen; 3) hat egyenes keletkezzen. Húzzátok meg ezeket az egyeneseket.



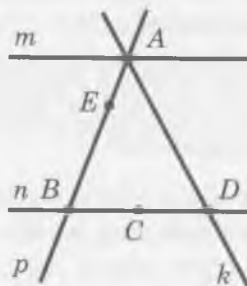
## GYAKORLATOK

8.° A 17. ábra felhasználásával:

- 1) tüntessétek fel az összes megjelölt pontot, amely az  $a$  egyeneshez tartozik; az  $MK$  egyeneshez tartozik;
- 2) tüntessétek fel az összes megjelölt pontot, amely nem tartozik az  $a$  egyeneshez;  $MK$  egyeneshez;
- 3) állapítsátok meg, metszik-e egymást az  $a$  és az  $MK$  egyenesek;
- 4) nevezzétek meg az összes megjelölt pontot, amely az  $a$  egyeneshez tartozik, de nem tartozik hozzá az  $MK$  egyeneshez.



17. ábra



18. ábra

9.° A 18. ábra felhasználásával tüntessétek fel:

- 1) a megjelölt pontok közül melyek tartoznak a  $p$  egyeneshez, és melyek nem;
- 2) mely egyenesekhez tartozik az  $A$  pont; a  $B$  pont; a  $C$  pont; a  $D$  pont; az  $E$  pont;
- 3) mely egyenesek mennek át a  $C$  ponton; a  $B$  ponton; az  $A$  ponton;
- 4) mely pontban metszik egymást a  $k$  és  $p$  egyenesek; az  $m$  és  $n$  egyenesek;
- 5) mely pontban metszi egymást a négy ábrázolt egyenes közül három.



- 10.\* A  $C$  pont az  $AB$  egyeneshez tartozik. Különböznek-e az  $AB$  és az  $AC$  egyenesek? A választ indokoljátok meg?
- 11.\* Meghúztak négy egyenest, amelyek közül kettő metszi egymást, még hozzá minden metszésponton át csupán két egyenes megy át. Hány metszéspont keletkezett eközben?
- 12.\*\* Hogyan kell elhelyezni hat pontot úgy, hogy azok hat egyenest határozzanak meg?
- 13.\*\* Az adott egyenest négy egyenes metszi. Hány metszéspontjuk keletkezhet ezeknek az egyeneseknek az adott egyenessel?
- 14.\*\* Négy egyenest húztak, amelyek közül mindegyik metsz egy másikat. Hány metszéspont keletkezhet?
- 15.\*\* Öt egyenest húztak, amelyek közül mindegyik metsz egy másikat. Mennyi ezen egyenesek metszéspontjainak legkisebb lehetséges száma? Maximálisan hány metszéspont keletkezhet?
- 16.\* Meg lehet-e szerkeszteni hat egyenest és felvenni azokon 11 pontot úgy, hogy minden egyenesen négy pont legyen megjelölve?
- 17.\* A síkon három egyenest húztak. Az első egyenesen öt pontot jelöltek meg, a másodikon – hét pontot, a harmadikon pedig három pontot. Mennyi a megjelölhető pontok legkisebb lehetséges száma?
- 18.\* Meg lehet-e jelölni néhány pontot és meghúzni néhány egyenest úgy, hogy minden egyenesen pontosan három megjelölt pont fekszen és minden ponton pontosan három egyenes menjen át?



**FIGYELJÉTEK MEG,  
RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK,  
KÉPZELJÉTEK EL**

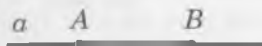


19. Rakjatok össze néhány, a 19. ábrán látható alakzathból négyzetet.

19. ábra

## 2. A szakasz és hossza

A 20. ábrán az  $a$  egyenes látható, amely átmegy az  $A$  és a  $B$  pontokon. Ezek a pontok határolják az  $a$  egyenes piros színnel jelölt részét. Az egyenesnek ezt a részét, beleértve az  $A$  és a  $B$  pontokat is, **szakasznak** nevezik, az  $A$  és  $B$  pontokat pedig a szakasz **végpontjainak**.



20. ábra



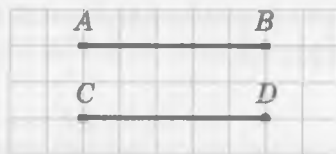
21. ábra

Bármely két pont részére *egyetlen* szakasz létezik, amelynek ezek a pontok a végpontjai, vagyis *a szakasz a végpontjai által egyértelműen meghatározott*. Ezért a szakaszt a végpontjai megnevezése által jelölik. A 21. ábrán látható szakaszt például így jelölik:  $MN$  vagy  $NM$  (így olvassuk:  $MN$  szakasz vagy  $NM$  szakasz).

A 22. ábrán az  $AB$  szakasz és a szakaszhhoz tartozó  $X$  pont látható, amely azonban nem esik egybe egyik végponttal sem. Az  $X$  pontot az  $AB$  szakasz **belső** pontjának nevezik. Ebben az esetben azt mondják, hogy az  $X$  pont az  $A$  és a  $B$  pontok **között** fekszik.



22. ábra



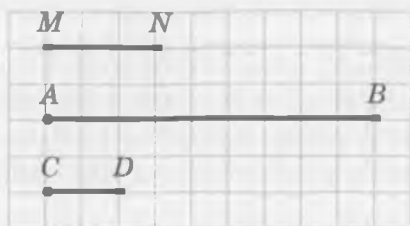
23. ábra

Így tehát az  $AB$  szakasz az  $A$  és a  $B$  pontokból, valamint az  $AB$  egyenes összes,  $A$  és  $B$  pontja között fekvő pontjából áll.

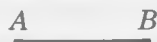
**Meghatározás.** Két szakaszt **egybevágónak** neveznek, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

A 23. ábrán két azonos hosszúságú szakasz, az  $AB$  és a  $CD$  látható. Így írják:  $AB = CD$ .

Tudjátok, hogy minden szakasznak bizonyos hossza van és a megméréséhez **egységszakaszt** kell választani. Egységként bármely szakasz szolgálhat.



24. ábra



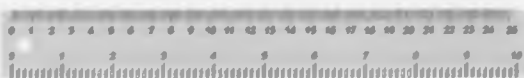
25. ábra

Tekintsük a 24. ábrán látható  $MN$  szakaszt egységnek. Ezt a tényt így írjuk le:  $MN = 1$  egység. Akkor úgy tekintik, hogy az  $AB$  szakasz hossza **három hosszegység**, ezt így írják:  $AB = 3$  egység, használják az  $AB = 3$  jelölést, ezt így olvassák: az  $AB$  szakasz hossza 3-mal egyenlő. A  $CD$  szakasz esetében:  $CD = \frac{2}{3}$ .

A gyakorlatban a leggyakrabban ezeket az egységszakaszokat használják: 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km.

A hosszegység kiválasztásától függően változik a szakasz **számbeli értéke**. Például, a 25 ábrán adódik:  $AB = 17$  mm vagy  $AB = 1,7$  cm vagy  $AB = 0,17$  dm stb.

A termelésben és a mindennapokban sokféle műszert használnak a szakaszok hosszának a meghatározására (26. ábra): beosztással ellátott vonalzót, mérőszalagot, tolómércét, mikrométert, terepkörzőt.



beosztással ellátott vonalzó



mérőszalag



tolómérce



mikrométer



terepkörző

26. ábra

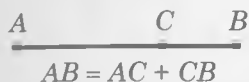
Az egybevágó szakaszoknak egyenlő a hosszuk és megfordítva, ha a szakaszok hossza egyenlő, akkor maguk a szakaszok is egybevágók.

Ha az  $AB$  szakasz hossza nagyobb, mint az  $MN$  szakaszé, akkor azt mondják, hogy az  $AB$  szakasz nagyobb, mint az  $MN$  és így jelölik:  $AB > MN$ . Ugyanígy mondhatjuk, hogy az  $MN$  szakasz kisebb, mint az  $AB$ , ezt így írjuk:  $MN < AB$ .

A továbbiakban „a szakaszok összegéről” szólva e szakaszok hosszának összegére gondolunk.

**A szakasz hosszának alaptulajdonsága.** Ha a  $C$  pont az  $AB$  szakasz belső pontja, akkor az  $AB$  szakasz egyenlő az  $AC$  és a  $CB$  szakasz összegével (27. ábra), vagyis

$$AB = AC + CB$$



27. ábra



28. ábra



29. ábra

**Meghatározás.** Az  $A$  és a  $B$  pontok közötti távolságot az  $AB$  szakasz hosszának nevezzük. Ha az  $A$  és a  $B$  pontok egybeesnek, akkor úgy tekintik, hogy a köztük lévő távolság nulla.

**Meghatározás.** Az  $AB$  szakasz felezőpontjának ennek a szakasznak azt a  $C$  pontját nevezik, amelyre nézve  $AC = CB$ .

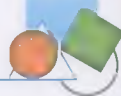
A 28. ábrán a  $C$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja.

**Feladat.** Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok ugyanahhoz az egyeneshez tartoznak,  $AB = 8$  cm, az  $AC$  szakasz 2 cm-el hosszabb a  $BC$ -nél. Határozzátok meg az  $AC$  és a  $BC$  szakaszokat<sup>1</sup>.

**Megoldás.** A feltételben nincs kikötve, milyen az adott pontok kölcsönös elhelyezkedése az egyenesen. Ezért megvizsgálunk három lehetséges esetet.

1) A  $B$  pont az  $AC$  szakasz belső pontja (29. ábra). Akkor az  $AC$  szakasz az  $AB$  szakasznival, vagyis 8 cm-el hosszabb a  $BC$  szakasznál. Ez ellentmond a feltételnek. Tehát ez az eset nem lehetséges.

<sup>1</sup> Gyakran a Határozzátok meg a szakasz hosszát... helyett azt mondják: Határozzátok meg a szakaszt...



2) A  $C$  pont az  $AB$  szakasz belső pontja (30. ábra). Ebben az esetben  $AC + BC = AB$ . Legyen  $BC = x$  cm, akkor  $AC = (x + 2)$  cm. Adódik:

$$x + 2 + x = 8;$$

$$x = 3.$$

Tehát,  $BC = 3$  cm,  $AC = 5$  cm.



30. ábra



31. ábra

3) Az  $A$  pont a  $BC$  szakasz belső pontja (31. ábra). Ebben az esetben  $AB + AC = BC$ , és akkor  $AC < BC$ . Ez ellentmond a feltételnek. Tehát ez az eset nem lehetséges.

*Felelet:*  $AC = 5$  cm,  $BC = 3$  cm. ●



1. Hány olyan szakasz létezik, amelyek végpontjai két megadott pont?
2. Mely pontokból áll az  $AB$  szakasz?
3. Milyen két szakaszt neveznek egybevágónak?
4. Lehet-e bármely szakaszt egységszakasznak tekinteni?
5. Mit mondhatunk az egybevágó szakaszok hosszáról?
6. Mit mondhatunk azokról a szakaszokról, amelyek hossza megegyezik?
7. Fogalmazzátok meg a szakasz hosszának alaptulajdonságát.
8. Mit nevezünk két pont távolságának?
9. Mivel egyenlő két egybeeső pont távolsága?
10. Mely pontot nevezik az  $AB$  szakasz felezőpontjának?

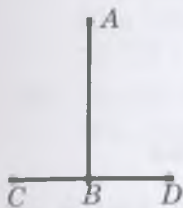


## GYAKORLATI FELADATOK

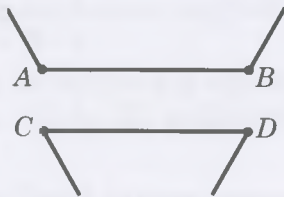
- 20.° Vegyetek fel két  $A$  és  $B$  pontot, és húzzatok rajtuk át egyenest. Jelöljétek meg az  $AB$  szakaszhoz tartozó  $C$ ,  $D$  és  $E$  pontokat, valamint az  $F$ ,  $M$  és  $K$  pontokat, amelyek nem tartoznak az  $AB$  szakaszhoz, de hozzátartoznak az  $AB$  egyeneshez.



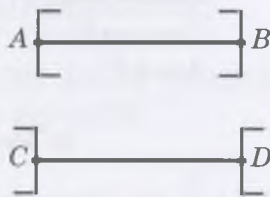
- 21.° Húzzatok egy egyenest, és vegyetek fel azon három pontot. Hány szakasz keletkezett?
- 22.° Jelöljétek meg az egyenesen az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontokat úgy, hogy a  $C$  pont az  $A$  és  $B$  pont között, a  $D$  pont pedig a  $B$  és  $C$  pont között fekszen.
- 23.° Vegyetek fel az egyenesen az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:  $AC = AB + BC$ .



a



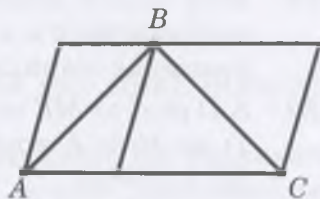
b



c

32. ábra

- 24.° Hasonlítsátok össze szemre az  $AB$  és a  $CB$  szakaszt (32. ábra). A következtetésetek helyességét ellenőrizzétek méréssel.
- 25.° Hasonlítsátok össze szemre az  $AB$  és a  $BC$  szakaszt (33. ábra). A következtetésetek helyességét ellenőrizzétek méréssel.

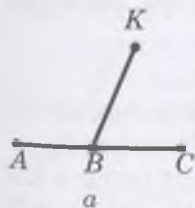


33. ábra

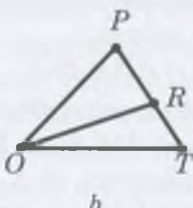


## GYAKORLATOK

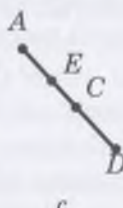
- 26.° Nevezétek meg a 34. ábrán látható összes szakaszt.



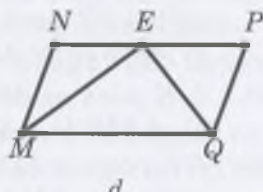
a



b



c



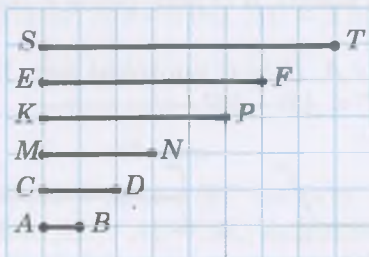
d

34. ábra

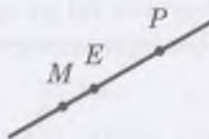


27.° Határozzátok meg a 35. ábrán látható összes szakasz hosszát, ha az egységszakasz egyenlő az:

- 1)  $AB$  szakasszal; 2)  $MN$  szakasszal.



35. ábra



36. ábra

28.° A 36. ábrán feltüntetett pontok közül melyik fekszik két másik között? Írjátok le a megfelelő egyenlőséget, amely a szakasz hosszának alaptulajdonságából ered.

29.° Mely pontok között fekszik a  $B$  pont (37. ábra)? Minden esetben írjátok le a megfelelő egyenlőséget, amely a szakasz hosszának alaptulajdonságából ered.

30.° A  $D$  pont az  $ME$  szakasz belső pontja. Határozzátok meg:

- 1) az  $M$  és  $E$  pont közötti távolságot, ha  $MD = 1,8$  dm,  $DE = 2,6$  dm;  
2) az  $MD$  szakasz hosszát, ha  $ME = 42$  mm,  $DE = 1,5$  cm.



37. ábra



38. ábra

31.° Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok egy egyenesen fekszenek (38. ábra). Az alábbi állítások közül melyik helyes:

- 1)  $AB + BC = AC$ ; 2)  $AC + AB = BC$ ?

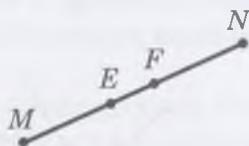
32.° A  $K$  pont az  $MN$  szakasz felezőpontja. Fedésbe hozható-e:  
1) az  $MK$  és a  $KN$  szakasz; 2) az  $MK$  és az  $MN$  szakasz?

33.° A  $K$  pont az  $MN$  szakasz felezőpontja, az  $E$  pont pedig a  $KN$  szakaszé.  $EN = 5$  cm. Határozzátok meg az  $MK$ ,  $ME$  és  $MN$  szakaszok hosszát.

- 34.° A  $C$  pont a 20 cm hosszúságú  $AB$  szakasz belső pontja. Határozzátok meg az  $AC$  és  $BC$  szakaszokat, ha:
- 1) az  $AC$  szakasz 5 cm-el hosszabb a  $BC$  szakasznál;
  - 2) az  $AC$  szakasz 4-szer kisebb a  $BC$  szakasznál;
  - 3)  $AC : BC = 9 : 11$ .
- 35.° A  $K$  pont a 28 cm hosszúságú  $CD$  szakaszhoz tartozik. Határozzátok meg a  $CK$  és  $KD$  szakaszokat, ha:
- 1) a  $CK$  szakasz 4 cm-rel kisebb a  $KD$  szakasznál;
  - 2) a  $CK$  szakasz 6-szor nagyobb a  $KD$  szakasznál;
  - 3)  $CK : KD = 3 : 4$ .
- 36.° Az  $AB$  és a  $CD$  szakaszok egyenlők (39. ábra). Igazoljátok, hogy az  $AC$  és  $BD$  szakaszok is egyenlők.



39. ábra



40. ábra

- 37.° Az  $ME$  és  $FN$  szakaszok egyenlők (40. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $MF = EN$ .
- 38.° A  $C$  pont az  $a$  hosszúságú  $AB$  szakaszt két szakaszra osztja. Határozzátok meg az  $AC$  és a  $BC$  szakaszok felezőpontjai közötti távolságot.
- 39.° Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok egy egyenesen fekszenek. Határozzátok meg a  $BC$  szakaszt, ha  $AB = 24$  cm,  $AC = 32$  cm. Hány megoldása van a feladatnak?
- 40.° Az egyenesen megjelölték az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat úgy, hogy  $AB = 15$  cm,  $AC = 9$  cm. Határozzátok meg az  $AB$  és  $AC$  szakaszok felezőpontjai közötti távolságot.
- 41.° Az  $EF$  szakasz 12 cm. Határozzátok meg az  $EF$  egyenesen az összes olyan pontot, amelyek mindegyike az  $EF$  szakasz végpontjáig mért távolságainak összege egyenlő: 1) 12 cm, 2) 15 cm; 3) 10 cm.
- 42.° Az  $A$  és  $B$  pontokon át egyenest húztak. Hol fekszik ezen az egyenesen a  $C$  pont, amelynek távolsága a  $B$  pontig kétszer akkora, mint az  $A$  pontig.



- 43.\*\* A 32 cm hosszú szakaszt három nem egybevágó szakaszra osztották. A szélső szakaszok felezőpontjai közötti távolság 18 cm. Határozzátok meg a középső szakasz hosszát.
- 44.\*\* Legkevesebb hány belső pontot kell felvenni a 41. ábrán látható szakaszokon ahhoz, hogy mindegyikükön két belső pont legyen?



a



b



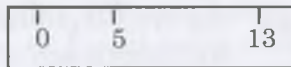
c



d

41. ábra

- 45.\*\* Hány pontot kell felvenni az  $A$  és  $B$  pontok között ahhoz, hogy az  $AB$  szakasszal együtt hat szakasz keletkezzen?
- 46.\*\* A vonalzó skáláján csak a 0 cm-t, az 5 cm-t és a 13 cm-t jelölő beosztás van feltüntetve (42. ábra). Hogyan lehet ennek a vonalzonak a segítségével megszerkeszteni a megadott hosszúságú szakaszokat: 1) 3 cm; 2) 2 cm; 3) 1 cm?
- 47.\*\* A vonalzó skáláján csak a 0 cm-t, a 7 cm-t és a 11 cm-t jelölő beosztás van feltüntetve. Hogyan lehet ennek a vonalzonak a segítségével megszerkeszteni a megadott hosszúságú szakaszokat: 1) 8 cm; 2) 5 cm?



42. ábra

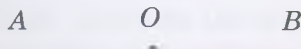
**FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK,  
SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL**

48. Az  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 3 \dots$ ,  $1 \times 13$  méretű téglalapokból rakjatos ki egy olyan téglalapot, amelynek oldalai nagyobbak egynél.

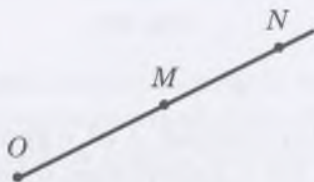
**3. Félegyenes. Szög. Szögek mérése**

Meghúzzuk az  $AB$  egyenest és megjelölünk rajta egy tetszőleges  $O$  pontot. Ez a pont két részre osztja az egyenest, amit két színnel jelöl a 43. ábra. Mindkét részt, az  $O$  pontot is beleértve, **félegyenesnek** nevezzük. Az  $O$  pontot a félegyenes **kezdőpontjának** nevezzük.

A 43. ábrán látható két félegyenes mindegyike az  $O$  pontból és az  $AB$  egyenes összes, az  $O$  ponttól azonos oldalra eső pontjából áll.



43. ábra



44. ábra

Ez lehetővé teszi a félegyenes megjelölését két pontja megnevezése által: elsőként kötelezően a félegyenes kezdőpontját nevezik meg, másodikként pedig bármely, a félegyeneshez tartozó pontot. Így például, az  $O$  kezdőpontú félegyeneset (44. ábra) jelölhetjük  $OM$ -mel vagy  $ON$ -nel.

Az  $OA$  és  $OB$  félegyenesek kiegészítik egymást és egyenest alkotnak (43. ábra). Állíthatjuk, hogy ezeknek a félegyeneseknek az egyesítése – egyenes.

**Meghatározás.** Két félegyeneset, amelyeknek közös a kezdőpontjuk és ugyanazon az egyenesen fekszenek, **kiegészítő** (komplementer) félegyeneseknek nevezzük.

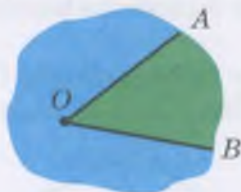
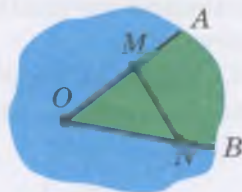


45. ábra

Például a  $BC$  és  $BA$  félegyenesek – kiegészítő félegyenesek (45. ábra). Egyesítésük az  $AC$  egyenes. Megjegyezzük, hogy a  $CA$  és az  $AC$  egyenesek egyesítése révén ugyancsak az  $AC$  egyenest kapjuk. Azonban ezek a félegyenesek már nem kiegészítők: nincs közös kezdőpontjuk.

A 46.  $a$  ábrán egy alakzat látható, amely két,  $OA$  és  $OB$  félegyeneseből áll, amelyeknek közös a kezdőpontjuk. Ez az alakzat a síkot két részre osztja, amelyeket más-más szín jelöl. Mindegyik részt, az  $OA$  és az  $OB$  félegyenesekkel együtt **szögnek** nevezzük.

Az  $OA$  és az  $OB$  félegyeneseket a szög **szárainak**, az  $O$  pontot pedig a szög **csúcsának** nevezzük.

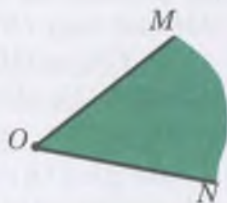
 $a$  $b$ 

46. ábra

Amint látjuk, a 46.  $a$  ábra szögei külsőleg jelentősen különböznek. Ezt a különbséget a következő tulajdonság határozza meg. Az  $OA$  és  $OB$  félegyeneseken kiválasztunk két tetszőleges  $M$  és  $N$  pontot (46.  $b$  ábra). Az  $MN$  szakasz a **zöld** szöghöz tartozik, a **kék** szöghöz viszont csak a szakasz végpontjai.

A továbbiakban a szög alakzat alatt csak azt értjük, amely bármely olyan szakaszt tartalmaz, amelynek a végpontjai a szög szárain vannak. Azokat az eseteket, amikor olyan szögeket vizsgálunk, amelyekre nézve nem teljesül ez a feltétel, külön kiemeljük.

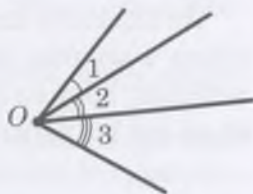
A szögek jelölésének néhány módja létezik. A 47. ábrán látható szöget jelölhetjük így:  $MON\angle$  vagy  $NOM\angle$  vagy egyszerűen  $O\angle$  (így olvassuk:  $MON$  szög,  $NOM$  szög,  $O$  szög).



47. ábra



A 48. ábrán néhány szög látható, amelyeknek közös a csúcspont. Itt a szög jelölése a csúcspont egy betűje által zavart okozhat. Ezekben az esetekben a szögeket számokkal kényelmes megjelölni:  $1\angle$ ,  $2\angle$ ,  $3\angle$  (ennek megfelelően olvassuk: egyes szög, kettes szög, hármas szög).



48. ábra

**Meghatározás.** Az olyan szöget, amelynek a szárai kiegészítő félegyenesek, **egyenesszögnek** nevezzük (49. ábra).



49. ábra



50. ábra

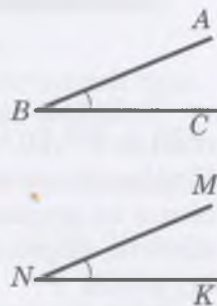
A 49. ábrán az  $OA$  és az  $OB$  szögek kiegészítő szögek, ezért a zöld és sárga színnel kiemelt szögek egyenesszögek lesznek.

Bármely egyenes a síkot két **félsík**ra osztja, melyeknek az adott egyenes a **határoló egyenesük** (50. ábra). Úgy tekintik, hogy az egyenes mindkét félsíkhoz hozzátartozik, amelyeket határol. Mivel pedig az egyenesszög szárai egyenest alkotnak, úgy elmondható, hogy az egyenesszög olyan félsík, amelynek a határoló egyenesén megjelöltek egy pontot, a szög csúcspontját.

**Meghatározás.** Két szöget **egyenlőnek** vagy **egybevágónak** mondanak, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

Az 51. ábrán két egyenlő szög látható, az  $ABC$  és az  $MNK$ . Ezt így jelöljük:  $ABC\angle = MNK\angle$ .

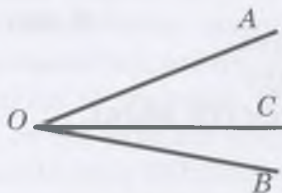
Érthető, hogy minden egyenesszög egyenlő.



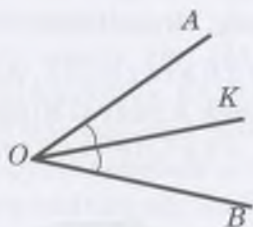
51. ábra



Az 52. ábrán az  $AOB$  szög és az  $OC$  félegyenes látható, amely ehhez a szöghöz tartozik, azonban különbözik a száraitól. Azt mondják, hogy az  $OC$  félegyenes az  $AOB$  szög szárai között megy át, és azt két szögre, az  $AOC$ -re és a  $COB$ -re osztja.



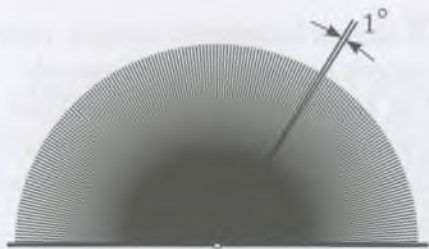
52. ábra



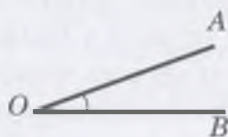
53. ábra

**Meghatározás.** A szög **szögfelezőjének** a szög csúcsából kiinduló félegyeneset nevezik, amely az adott szöget két egyenlő szögre osztja.

Az 53. ábrán az  $OK$  félegyenes az  $AOB$  szög szögfelezője. Tehát  $\angle AOK = \angle KOB$ .



54. ábra



55. ábra

Tudjátok, hogy minden szögnek bizonyos mértéke van. A méréséhez ki kell választani a mértékegységet – az **egységyszöget**. Kiválasztása a következőképpen történhet. Felosztjuk 180 egyenlő részre az egyenlő szöget (54. ábra). A két szomszédos sugár által alkotott szöget egységnek tekintik. Mértékét **foknak** nevezik és így jelölik:  $1^\circ$ .

Például az  $AOB$  szög fokmértéke (nagysága) (55. ábra) egyenlő  $20^\circ$  (ezt a tényt könnyű szögmérő segítségével ellenőrizni).



Ebben az esetben azt mondják: az  $AOB$  szög  $20^\circ$ -os, így jelölik:  $AOB\angle = 20^\circ$ .

A szög elfogadott meghatározásából következik, hogy az *egyenesszög fokmértéke*  $180^\circ$ .

Az 56. a ábrán ősi fokmérő műszer, az asztrolábium (görögből – a csillagokat megragadó) látható. Sok évszázadon át éppen ez a műszer segítette a tengerészeknek megtalálni az utat, a csillagászoknak pedig meghatározni a csillagok helyzetét. Napjainkban a gyakorlatban szögmérésre használják az asztrolábiumot (56. b ábra), valamint egyéb, speciális rendeltetésű műszert: a teodolitot (57. ábra) a terepen végzett mérésekhez, periszkópos tájolóműszert (58. ábra) a tűzéségnél, a sextánst (59. ábra) a tengerészetnél.



a



b

56. ábra. Asztrolábium

a – ősi;  
b – modern



57. ábra. Teodolit

58. ábra. Periszkópos  
tájolóműszer

59. Sextáns

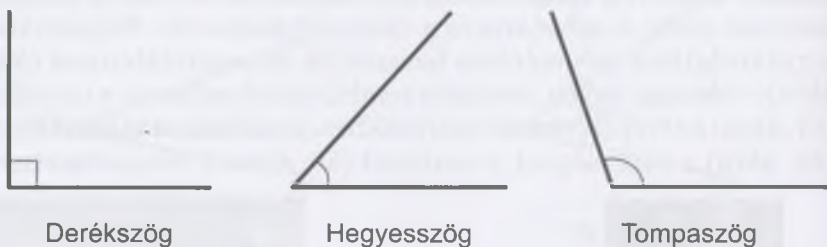
A szögek még pontosabb méréséhez a fokok törtrészeit használják:  $\frac{1}{60}$  egyenlő egy szögperccel ( $1'$ ), vagyis  $1^\circ = 60'$ ; a perc  $\frac{1}{60}$ -át szögmásodperccnek nevezik ( $1''$ ), vagyis  $1' = 60''$ . Például a  $23^\circ 15' 11''$  azt jelenti, hogy a szög fokmértéke 23 fok 15 perc 11 másodperc.

Léteznek egyéb szög mértékegységek: a tengerjárók például a hajózási vonást használják. 1 hajózási vonás egyenlő  $11^\circ 15'$ .



**Meghatározás.** A  $90^\circ$  fokmértékű szöget **derékszögnek** nevezzük. A  $90^\circ$  fokmértéknél kisebb szöget **hegyesszögnek** nevezzük. A  $90^\circ$  fokmértéknél nagyobb, de  $180^\circ$ -nál kisebb szöget **tompaszögnek** nevezzük.

A 60. ábrán ez a háromféle szög látható.



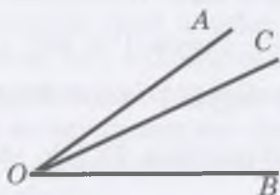
60. ábra

Az egybevágó szögek nagysága egyenlő, és megfordítva, ha a szögek nagysága megegyezik, maguk a szögek is egybevágók.

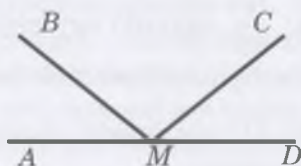
Ha az  $ABC$  szög mértéke nagyobb az  $MNP$  szögénél, akkor azt mondják, hogy az  $ABC$  szög nagyobb, mint az  $MNP$  és így jelölik:  $ABC\angle > MNP\angle$ . Azt is mondják, hogy az  $MNP$  szög kisebb, mint az  $ABC$  szög, ezt így írják:  $MNP\angle < ABC\angle$ .

A továbbiakban a szögek összegéről szólva a szögek mértékének összegére gondolunk.

**A szögmérték alaptulajdonsága.** Ha az  $OC$  félegyenes az  $AOB$  szöget két szögre,  $AOC$ -re, és  $COB$ -re osztja, akkor  $AOB\angle = AOC\angle + COB\angle$  (61. ábra).



61. ábra



62. ábra



**Feladat.** A 62. ábrán  $AMC\angle = DMB\angle$ ,  $BMC\angle = 118^\circ$ . Határozzátok meg<sup>1</sup> az  $AMB$  szöget.

**Megoldás.** Adódik:  $AMC\angle = AMB\angle + BMC\angle$ ,  $DMB\angle = DMC\angle + BMC\angle$ .

Mivel  $AMC\angle = DMB\angle$ , ezért  $AMB\angle = DMC\angle$ .

Leírhatjuk, hogy:  $AMB\angle + BMC\angle + CMD\angle = AMD\angle = 180^\circ$ .

Akkor  $2\ AMB\angle + 118^\circ = 180^\circ$ . Ebből adódik  $AMB\angle = 31^\circ$ .

**Felelet:**  $31^\circ$ . ●



1. Hogy nevezzük azt az alakzatot, amely az egyeneshez tartozó pontból és az egyenesnek az egyik részéből keletkezik, amelyekre ez a pont az egyenest osztja? Hogyan nevezzük az adott pontot?
2. Hogyan jelölik a félegyenest?
3. Milyen félegyeneseket nevezünk kiegészítőknak?
4. Hogyan nevezzük azt az alakzatot, amely két, közös kezdőponttal rendelkező félegyenesből, valamint a síknak az egyik részéből, amelyekre ezek a félegyenesek felosztják a síkot, keletkezik? Ebben az esetben hogy nevezzük az adott félegyeneseket? A közös kezdőpontjukat?
5. Hogyan jelölik a szöget?
6. Milyen szöget nevezünk egyenesszögnek?
7. Hogyan nevezzük azokat a részeket, amelyekre az egyenes a síkot osztja?
8. Milyen szögeket nevezünk egybevágóknak?
9. Mit nevezünk a szög szögfelezőjének?
10. Milyen egységekben mérik a szögeket?
11. Mennyi az egyenesszög fokmértéke?
12. Hogyan nevezik a  $90^\circ$  nagyságú szöget?
13. Milyen szöget nevezünk hegyesszögnek?
14. Milyen szöget nevezünk tompaszögnek?
15. Mi mondható el a egybevágó szögek fokmértékéről?
16. Mi mondható el az azonos fokmértékű szögekről?
17. Fogalmazzatok meg a szög mértékének alaptulajdonságát!

<sup>1</sup> Gyakran ahelyett, hogy *Határozzátok meg a szög fokmértékét...* azt mondják: *Határozzátok meg a szöget...*



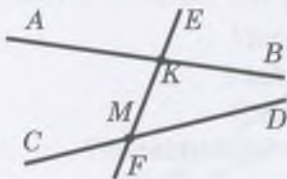
## GYAKORLATI FELADATOK

- 49.° Húzzatok két,  $AB$  és  $AC$  félegyenest úgy, hogy azok ne legyenek egymás kiegészítő félegyenesei. Szerkesszettek mindkét félegyeneshöz kiegészítő félegyenest. Jelöljétek meg, és írójátok le az összes keletkezett félegyenest.
- 50.° Húzzátok meg az  $AB$  szakaszt és két félegyenest, az  $AB$ -t és a  $BA$ -t. Kiegészítő félegyenesei-e egymásnak ezek a félegyenesek? A választ indokoljátok meg.
- 51.° Rajzoljátok meg az  $MNE$  szöget, és húzzátok meg a szárai között az  $NA$  és  $NC$  félegyenéseket. Írójátok le az összes így keletkezett szöget.
- 52.° Húzzátok meg az  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  és  $OD$  félegyenéseket úgy, hogy az  $OC$  félegyenese az  $AOB$  szög, az  $OD$  félegyenese pedig a  $BOC$  szög szárai között haladjon át.
- 53.° Rajzoljatok két félegyenest úgy, hogy a közös részük: 1) pont; 2) szakasz; 3) félegyenese legyen.

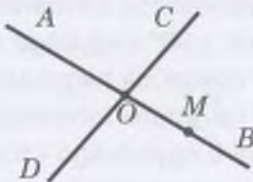


## GYAKORLATOK

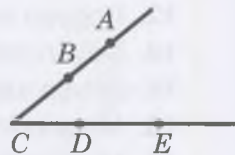
- 54.° Az  $EF$  egyenes metszi az  $AB$  és a  $CD$  egyeneseket (63. ábra). Tüntessétek fel: 1) az összes keletkezett félegyenest, amelyek kezdőpontja az  $M$  pont; 2) az összes  $K$  kezdőpontú kiegészítő félegyenese-párt.
- 55.° Írójátok le az összes félegyenest, amely a 64. ábrán látható. Tüntessétek fel, közülük melyek az  $O$  kezdőpontú kiegészítő félegyenese.



63. ábra



64. ábra

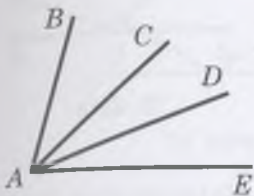


65. ábra

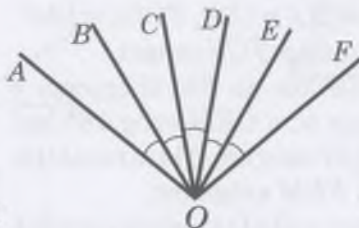
- 56.° Lehet-e a 65. ábrán látható szögeket így jelölni:
- |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1) $ABC\angle$ ; | 3) $ADC\angle$ ; | 5) $ACE\angle$ ; | 7) $BDE\angle$ ; |
| 2) $ACD\angle$ ; | 4) $DCA\angle$ ; | 6) $BCD\angle$ ; | 8) $ECD\angle$ ? |



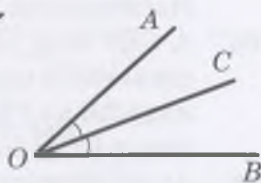
57.° Írjátok le az összes szöget, amelyeket a 66. ábrán láthatunk.



66. ábra



67. ábra



68. ábra

58.° A 67. ábrán  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$ .

- 1) Melyik félegyenes az  $\angle AOC$  szög szögfelezője? A  $\angle DOF$ -é? A  $\angle BOF$ -é?
- 2) Mely szögek szögfelezője az  $OC$  félegyenes?

59.° A 68. ábrán az  $OC$  félegyenes az  $\angle AOB$  szög szögfelezője. Fedésbe hozhatók-e: 1) az  $\angle AOC$  és  $\angle BOC$  szögek; 2) az  $\angle AOC$  és  $\angle AOB$  szögek?

60.° A  $BD$  félegyenes az  $\angle ABC$  szöget két szögre osztja. Határozzátok meg:

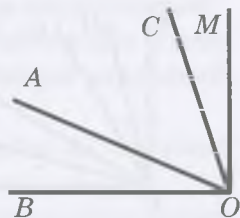
- 1) az  $\angle ABC$  szöget, ha  $\angle ABD = 54^\circ$ ,  $\angle CBD = 72^\circ$ ;
- 2) a  $\angle CBD$  szöget, ha  $\angle ABC = 158^\circ$ ,  $\angle ABD = 93^\circ$ .

61.° Az  $OP$  félegyenes az  $\angle MOK$  szárai között halad át. Határozzátok meg az  $\angle MOP$  szöget, ha  $\angle MOK = 172^\circ$ ,  $\angle POK = 85^\circ$ .

62.° Igaz-e az állítás:

- 1) bármely, tompaszögnél kisebb szög az hegyesszög;
- 2) az egyenesszögnél kisebb szög az tompaszög;
- 3) a tompaszögnél 2-szer kisebb szög az hegyesszög;
- 4) két hegyesszög összege nagyobb a derékszögnél;
- 5) az egyenesszögnél 2-szer kisebb szög nagyobb bármilyen hegyesszögnél;
- 6) az egyenesszögnél nagyobb szög az tompaszög?

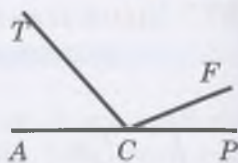
63.° A  $\angle BOM$  derékszög csúcsából (69. ábra) két félegyenest, az  $OA$ -t és az  $OC$ -t húztak meg úgy, hogy  $\angle BOC = 74^\circ$ ,  $\angle AOM = 62^\circ$ . Határozzátok meg az  $\angle AOC$  szöget.



69. ábra

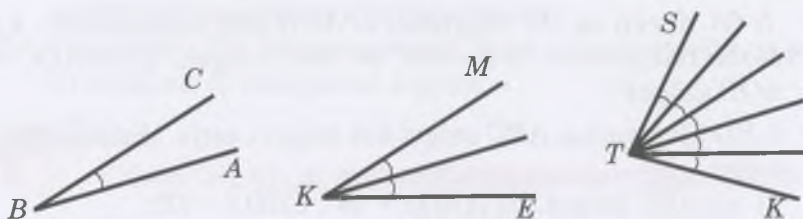


- 64.° Az  $ACP$  egyenesszög csúcsából (70. ábra) két félegyenest, a  $CT$ -t és a  $CF$ -t húztak meg úgy, hogy  $ACF\angle = 158^\circ$ ,  $TCP\angle = 134^\circ$ . Határozzátok meg a  $TCF$  szöget.



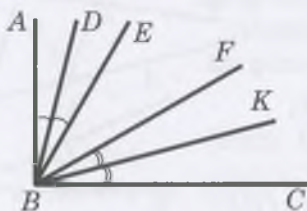
70. ábra

- 65.° A  $CEF$  szög  $152^\circ$ -os, az  $EM$  félegyenes a szárjai között megy át, a  $CEM$  szög  $18^\circ$ -kal nagyobb az  $FEM$  szögnél. Határozzátok meg a  $CEM$  és  $FEM$  szögeket.
- 66.° Az  $AK$  félegyenes a  $BAD$  szöghöz tartozik. Határozzátok meg a  $BAK$  és  $DAK$  szögeket, ha a  $BAK$  szög 7-szer kisebb a  $DAK$  szögnél és  $BAD\angle = 72^\circ$ .
- 67.° A 71. ábrán körívek jelzik az egyforma szögeket. Határozzátok meg az  $ABC$ ,  $MKE$  és  $STK$  szögeket, ha az egységyszög: 1) az  $ABC$  szög; 2) az  $MKE$  szög.

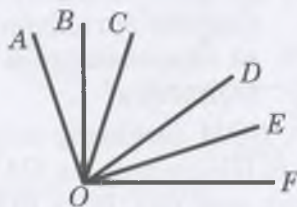


71. ábra

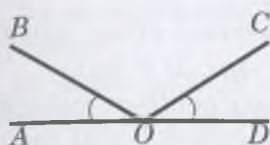
- 68.° Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok úgy helyezkednek el az egyenesen, hogy  $AB = 3,2$  cm,  $AC = 4,8$  cm,  $BC = 8$  cm. Az  $AB$  és  $AC$  félegyenesek kiegészítő félegyenesek-e?
- 69.° A 72. ábrán az  $ABC$  szög derékszög,  $ABE\angle = EBF\angle = FBC\angle$ , a  $BD$  és  $BK$  félegyenesek pedig megfelelően, az  $ABE$  és  $FBC$  szögek szögfelezői. Határozzátok meg a  $DBK$  szöget.



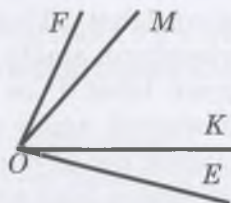
72. ábra



73. ábra

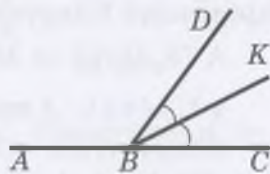


74. ábra



75. ábra

- 70.\* A 73. ábrán  $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$ , az  $OB$  félegyenes az  $\angle AOC$  szög szögfelezője, az  $OE$  félegyenes pedig a  $\angle DOF$  szögé,  $\angle BOE = 72^\circ$ . Határozzátok meg az  $\angle AOF$  szöget.
- 71.\* A 74. ábrán  $\angle AOB = \angle DOC$ . Vannak-e ezen az ábrán további egybevágó szögek? A választ indokoljátok meg.
- 72.\* Az  $\angle FOK$  és  $\angle MOE$  szögek egyenlők (75. ábra). Egyenlők-e az  $\angle FOM$  és  $\angle KOE$  szögek?
- 73.\* A  $BK$  félegyenes a  $\angle CBD$  szög szögfelezője,  $\angle ABK = 146^\circ$  (76. ábra). Határozzátok meg a  $\angle CBD$  szöget.
- 74.\* A  $BK$  félegyenes a  $\angle CBD$  szög szögfelezője,  $\angle CBD = 56^\circ$  (76. ábra). Határozzátok meg az  $\angle ABK$  szöget.
- 75.\* Hány fokkal fordul el egy perc alatt: 1) a percmutató; 2) az óramutató?
- 76.\* Határozzátok meg az óra mutatói által bezárt szöget, ha az idő: 1) 3 óra; 2) 6 óra; 3) 4 óra; 4) 11 óra; 5) 7 óra.
- 77.\*\* Az  $\angle ABC$  szög  $30^\circ$ -kal egyenlő, a  $\angle CBD$  pedig  $80^\circ$ -kal. Határozzátok meg az  $\angle ABD$  szöget. Hány megoldása van a feladatnak?
- 78.\*\* Határozzátok meg az  $\angle MOK$  szöget, ha  $\angle MON = 120^\circ$ ,  $\angle KON = 43^\circ$ . Hány megoldása van a feladatnak?
- 79.\*\* A derékszög csúcsából húzott félegyenes két szögre bontja azt. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett szögek szögfelezői  $45^\circ$ -os szöget alkotnak.
- 80.\*\* Hogyan lehet a  $70^\circ$ -os szög sablonja segítségével  $40^\circ$ -os szöget szerkeszteni?
- 81.\*\* Hogyan lehet a  $40^\circ$ -os szög sablonja segítségével olyan szöget szerkeszteni, amely egyenlő 1)  $80^\circ$ -kal; 2)  $160^\circ$ -kal; 3)  $20^\circ$ -kal?



76. ábra



- 82.\*\* Hogyan lehet  $13^\circ$ -os szögsablon segítségével olyan szöget szerkeszteni, amely egyenlő  $2^\circ$ -kal?
- 83.\* Hogyan lehet  $1^\circ$ -os szöget szerkeszteni olyan szögsablon segítségével, amely egyenlő: 1)  $19^\circ$ -kal; 2)  $7^\circ$ -kal?
- 84.\* Húzzatok hat egyenest, amelyek egy pontban metszik egymást. Igaz-e, hogy az így keletkezett szögek között van olyan, amelyik kisebb  $31^\circ$ -nál?



**FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL**

85. Anélkül, hogy felemelnétek a ceruzát a papírról, kilenc ponton át (77. ábra) húzzatok négy szakaszt (nem kötelező visszatérni a kezdőpontba).



77. ábra

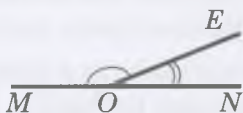
#### 4. Mellék- és csúcsszögek

**Meghatározás.** Két szöget **mellékszögnek** nevezünk, ha az egyik száruk közös, a másik kettő pedig kiegészítő félegyenes.

A 78. ábrán az  $MOE$  és az  $EON$  szög mellékszögek.

**4.1. tétel.** A mellékszögek összege  $180^\circ$ -kal egyenlő.

**Bizonyítás.** ☉ Legyenek az  $AOC$  és a  $COB$  szögek mellékszögek (79. ábra). Azt kell bizonyítani, hogy  $AOC\angle + COB\angle = 180^\circ$ .



78. ábra



79. ábra

Mivel az  $AOC$  és  $COB$  mellékszögek, ezért az  $OA$  és az  $OB$  félegyenesek kiegészítő félegyenesek. Akkor az  $AOB$  szög egyenesszög.  $AOB\angle = 180^\circ$ . A szög mértékének alaptulajdonságából adódik:  $AOC\angle + COB\angle = AOB\angle = 180^\circ$ . ▲

**Meghatározás.** Két szöget **csúcsszögnek** nevezünk, ha az egyik szög szárai a másik szárainak kiegészítő félegyenesei.

A 80. ábrán az  $AOB$  és  $COD$  szögek csúcsszögek.

Nyilvánvaló, hogy amikor két egyenes metszi egymást, két pár csúcsszög keletkezik, amelyek nem egyenesszögek. A 80. ábrán az  $AOC$  és  $BOD$  szögek is csúcsszögek.

#### 4.2. tétel. A csúcsszögek egyenlők.

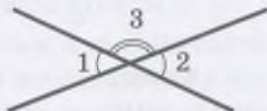
**Bizonyítás.** ☉ Ha a csúcsszögek egyenesszögek, akkor egyenlők.

A 81. ábrán az 1-es és a 2-es szögek csúcsszögek és különböznek az egyenesszögtől. Be kell bizonyítani, hogy  $1\angle = 2\angle$ .

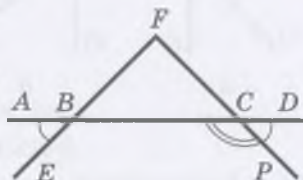
Az 1-es és a 2-es szögek mindegyike a 3-as szög mellékszöge. Akkor  $1\angle + 3\angle = 180^\circ$  és  $2\angle + 3\angle = 180^\circ$ . Ebből adódik, hogy  $1\angle = 180^\circ - 3\angle$  és  $2\angle = 180^\circ - 3\angle$ . Azt kaptuk, hogy az 1-es és a 2-es szögek fokmértéke egyenlő, tehát maguk a szögek is egyenlők. ▲



80. ábra



81. ábra



82. ábra

**Feladat.** A 82. ábrán  $ABE\angle = DCP\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $FBC\angle + BCP\angle = 180^\circ$ .

**Megoldás.**  $DCP\angle + BCP\angle = 180^\circ$ , mivel a  $DCP$  és a  $BCP$  szögek mellékszögek. A  $DCP$  és az  $ABE$  szögek egyenlők a feltétel szerint. Az  $ABE$  és  $FBC$  szögek egyenlők, mint csúcsszögek.

Tehát  $DCP\angle = FBC\angle$ . Akkor  $FBC\angle + BCP\angle = 180^\circ$ . ●



1. Milyen két szöget nevezünk mellékszögnek?
2. Mivel egyenlő a mellékszögek összege?
3. Milyen két szöget nevezünk csúcsszögnek?
4. Fogalmazzatok meg a csúcsszögek tulajdonságáról szóló tételt.



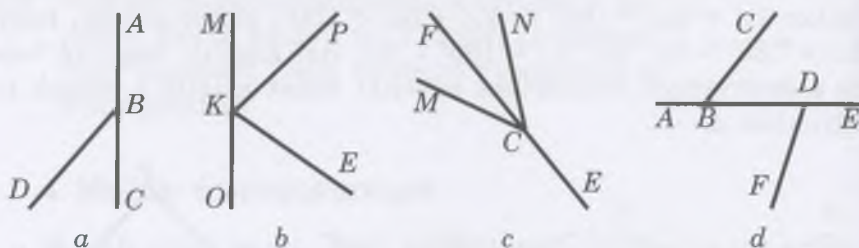
## GYAKORLATI FELADATOK

- 86.<sup>o</sup> Rajzoljatok három szöget: egy-egy hegyes-, derék- és tompaszöget. Szerkesszétek meg mindegyik mellékszögét.
- 87.<sup>o</sup> Rajzoljatok két nem egyenlő mellékszöget úgy, hogy a közös száruk merőleges legyen.



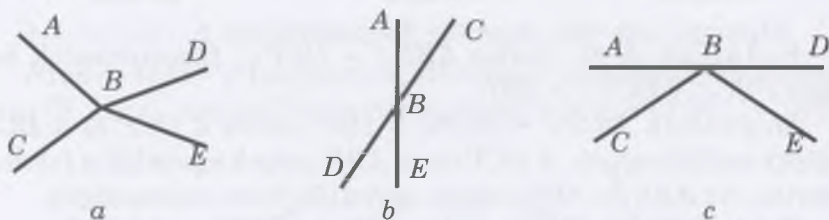
## GYAKORLATOK

- 88.<sup>o</sup> Tüntessétek fel a mellékszög-párokat (83. ábra).



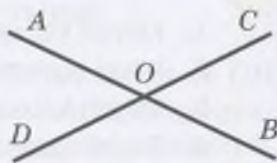
83. ábra

- 89.<sup>o</sup> Csúcsszögek-e az  $ABC$  és  $DBE$  szögek (84. ábra)?



84. ábra

- 90.<sup>o</sup> Hány mellékszög-pár látható a 85. ábrán? Nevezzétek meg őket. Tüntessétek fel a mellékszög-párokat.
- 91.<sup>o</sup> Lehet-e a két mellékszög egyenlő: 1)  $24^\circ$  és  $156^\circ$ ; 2)  $63^\circ$  és  $107^\circ$ ? A feleletet indokoljátok meg.



85. ábra

92.° Határozzátok meg a következő szögek mellékszögét: 1)  $29^\circ$ ; 2)  $84^\circ$ ; 3)  $98^\circ$ ; 4)  $135^\circ$ .

93.° Állhat-e a mellékszög-pár:

- 1) két hegyesszögből;
- 2) két tompaszögből;
- 3) egy derék- és egy tompaszögből;
- 4) egy derék és egy hegyesszögből?

94.° A mellékszögek egyike derékszög. Milyen a másik szög?

95.° Határozzátok meg az  $ABC$  szög mellékszögét, ha:

- 1)  $ABC\angle = 36^\circ$ ; 2)  $ABC\angle = 102^\circ$ .

96.° Határozzátok meg a 2-es, 3-as és 4-es szögeket (86. ábra), ha  $1\angle = 42^\circ$ .

97.° Határozzátok meg a mellékszögeket, ha:

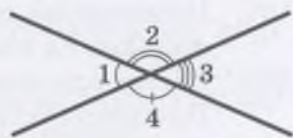
- 1) az egyik  $70^\circ$ -kal nagyobb a másikonál;
- 2) az egyik 8-szor kisebb a másikonál;
- 3) a fokmértékeik aránya  $3 : 2$ .

98.° Határozzátok meg a mellékszögeket, ha:

- 1) az egyik 17-szer nagyobb a másikonál;
- 2) a fokmértékeik aránya  $19 : 26$ .

99.° Igaz-e az állítás:

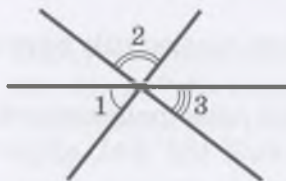
- 1) minden szöghöz csak egy csúcsszög húzható;
- 2) minden egyenesszögtől eltérő szöghöz csak egy mellékszög szerkeszthető;
- 3) ha a szögek egyenlők, akkor csúcsszögek;
- 4) ha a szögek nem egyenlők, akkor nem csúcsszögek;
- 5) ha a szögek nem csúcsszögek, akkor nem egyenlők;
- 6) ha két szög mellékszög, akkor az egyikük hegyesszög, a másikuk pedig tompa;
- 7) ha két szög mellékszög, akkor az egyikük nagyobb a másikonál;
- 8) ha két szög összege  $180^\circ$ , akkor azok mellékszögek;
- 9) ha két szög összege nem egyenlő  $180^\circ$ -kal, akkor azok nem mellékszögek;
- 10) ha két szög egyenlő, akkor a mellékszögeik is egyenlők;



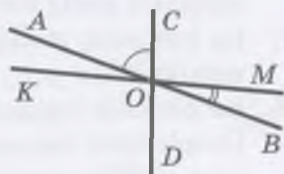
86. ábra



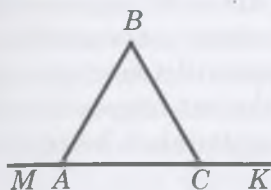
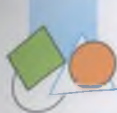
- 11) ha a mellékszögek egyenlők, akkor azok derékszögek;  
 12) ha az egyenlő szögeknek közös a csúcuk, akkor azok csúcsszögek;  
 13) ha két szögnek közös a szára, akkor azok mellékszögek?
- 100.\*** Két egyenes metszésekor keletkezett két szög összege  $140^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy ezek a szögek csúcsszögek.
- 101.\*** Határozzátok meg a két egyenes metszésekor keletkezett szögeket, ha:  
 1) kettőjük összege  $106^\circ$ -kal egyenlő;  
 2) hármójuk összege  $305^\circ$ -kal egyenlő.
- 102.\*** Határozzátok meg a két egyenes metszésekor keletkezett szögeket, ha közülük kettő különbsége  $64^\circ$ .
- 103.\*** Három egyenes egy pontban metszi egymást (87. ábra). Határozzátok meg:  $1\angle + 2\angle + 3\angle$ .
- 104.\*** Az  $AB$ ,  $CD$  és  $MK$  egyenesek az  $O$  pontban metszik egymást (87. ábra),  $AOC\angle = 70^\circ$ ,  $MOB\angle = 15^\circ$ . Határozzátok meg a  $DOK$ ,  $AOM$  és  $AOD$  szögeket.
- 105.\*** Határozzátok meg a mellékszögek szögfelezői által bezárt szöget.
- 106.\*** Határozzátok meg a csúcsszögek szögfelezői által bezárt szöget.
- 107.\*** Az  $ABF$  és  $FBC$  szögek mellékszögek,  $ABF\angle = 80^\circ$ , a  $BD$  félegyenes az  $ABF$  szöghöz tartozik,  $ABD\angle = 30^\circ$ . Határozzátok meg a  $DBF$  és az  $FBC$  szögek szögfelezői által bezárt szöget.
- 108.\*** Az  $AOB$  és  $BOC$  szögek mellékszögek, az  $OD$  félegyenes az  $AOB$  szög szögfelezője, a  $BOD$  szög  $18^\circ$ -kal kisebb a  $BOC$  szögnél. Határozzátok meg az  $AOB$  és  $BOC$  szögeket.
- 109.\*** Határozzátok meg az  $MKE$  és  $PKE$  mellékszögeket, ha az  $FKE$  szög  $24^\circ$ -kal nagyobb a  $PKE$  szögnél, ahol a  $KF$  félegyenes az  $MKE$  szög szögfelezője.



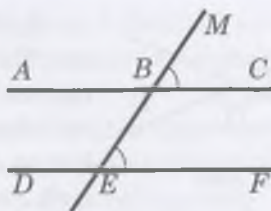
87. ábra



88. ábra



89. ábra



90. ábra

- 110.\* A 89. ábrán  $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\angle MAB = \angle KCB$ .
- 111.\* A 90. ábrán  $\angle MBC = \angle BEF$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$ .
- 112.\* Két szögnek közös a szára, az összegük pedig  $180^\circ$ -kal egyenlő. Állíthatjuk-e, hogy ezek mellékszögek?



**FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL**

113. Vágjátok szét a 91. ábrán látható alakzatot hat részre két egyenes által.



91. ábra

## 5. Merőleges egyenesek

A 92. ábrán négy szög van feltüntetve, amelyek az  $a$  és  $b$  egyenesek kölcsönös metszése által keletkeztek. Könnyű belátni (végezzétek el önállóan), hogy amikor az egyik szög derékszög (például az 1-es szög), akkor a 2-es, 3-as és 4-es szögek is derékszögek.



92. ábra

**Meghatározás.** Két egyenest **merőlegesnek** nevezünk, ha kölcsönös metszésükkor derékszög keletkezik.

A 92. ábrán az  $a$  és  $b$  egyenesek merőlegesek. Ezt így jelölik:  $a \perp b$  vagy  $b \perp a$ .



93. ábra

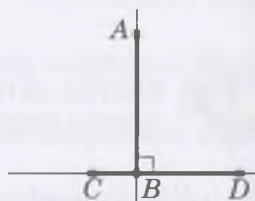
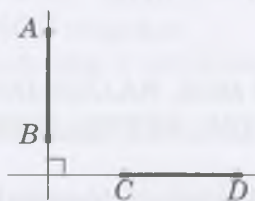
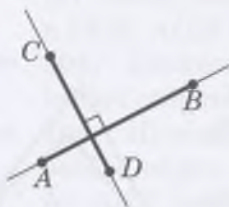
A 93. ábrán az  $AD$  és  $BC$  egyenesek nem merőlegesek. Kölcsönös metszésükkor egy egyenlő hegyesszög-pár, illetve tompaszög-pár keletkezett. A keletkezett hegyesszög mértékét az  $AD$  és a  $BC$  egyenesek közötti szögnek nevezzük.

Ha az egyenesek merőlegesek, akkor úgy tekintik, hogy az általuk bezárt szög  $90^\circ$ .

Az elmondottakból az következik, hogy a két egyenes közötti szög nem haladja meg a  $90^\circ$ -ot.

**Meghatározás.** Két szakaszt **merőlegesnek** neveznek, ha azok merőleges egyenesen fekszenek.

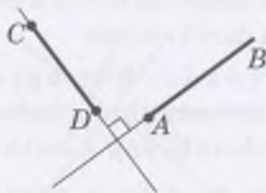
A 94. ábrán az  $AB$  és  $CD$  szakaszok merőlegesek. Így jelölik:  $AB \perp CD$ .



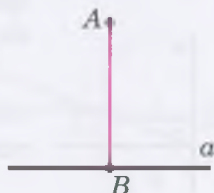
94. ábra

Ugyanígy megvizsgálható két félegyenes merőlegessége, a szakaszé és a félegyenesé, a szakaszé és az egyenesé. Például a 95. ábrán az egymásra merőleges  $CD$  szakasz és  $AB$  félegyenes látható.

A 96. ábrán az  $a$  egyenes és a rá merőleges  $AB$  szakasz látható, amelynek  $B$  végpontja az  $a$  egyeneshez tartozik.



95. ábra



96. ábra

Ebben az esetben azt mondják, hogy az  $A$  pontból az  $a$  egyenesre  $AB$  merőlegest bocsátottak. A  $B$  pontot az  $AB$  merőleges talppontjának nevezzük

Az  $AB$  merőleges hosszát az  $A$  pont és az  $a$  egyenes távolságának nevezzük. Ha az  $A$  pont az  $a$  egyeneshez tartozik, akkor az  $A$  pont és az  $a$  egyenes közötti távolság 0-val egyenlő.

A 97. ábrán az  $OM$  merőleges látható, amelyet az  $O$  pontból az  $AB$  egyenesre bocsátottak. Amennyiben az  $M$  pont, ennek az egyenesnek a talppontja, az  $AB$  szakaszhoz tartozik (az  $AB$  félegyeneshez), akkor az  $OM$  szakasz hosszát az  $O$  pont és az  $AB$  szakasz ( $AB$  félegyenes) távolságának nevezzük.

Ha a pont a szakaszhoz (félegyeneshez) tartozik, akkor természetes úgy tekinteni, hogy ennek a pontnak a távolsága a szakaszig (félegyenesig) nullával egyenlő.

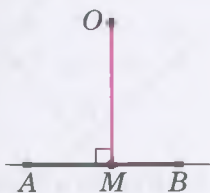
Az  $A$  pontból az  $a$  egyenesre  $AB$  merőlegest bocsátunk (98. ábra). Legyen  $X$  az  $a$  egyenes tetszőleges,  $B$  ponttól különböző pontja. Az  $AX$  szakaszt az  $A$  pontból az  $a$  egyeneshez húzott ferdének nevezzük

**5.1. tétel.** Az egyenes minden egyes pontjára csak egy merőleges egyenes bocsátható.

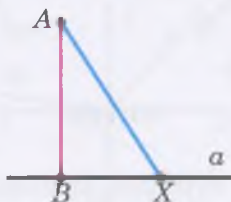
*Bizonyítás.* ☉ Megjelölünk egy tetszőleges  $M$  pontot az  $AB$  egyenesen, és megszerkesztjük a  $CMB$  derékszöget (99. ábra). Akkor  $CM \perp AB$ .

Tegyük fel, hogy az  $M$  ponton át még egy egyenes, az  $MD$  is átmegy, amely különbözik a  $CM$ -től, és merőleges az  $AB$  egyenesre.

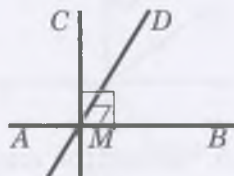
Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az  $MD$  félegyenes a  $CMB$  szöghöz tartozik. Akkor a szögmérték alaptulajdonsága szerint  $CMB\angle = CMD\angle + DMB\angle$ . Innen  $CMB\angle > DMB\angle$ .



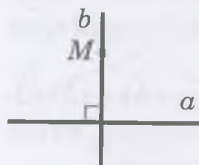
97. ábra



98. ábra



99. ábra



100. ábra

Azonban valójában  $\angle CMB = \angle DMB = 90^\circ$ . Tehát a feltételezésünk téves.

Hasonlóan vizsgálják azt az esetet is, amikor az  $MC$  félegyenes a  $DMB$  szöghöz tartozik. ▲

Képesek vagytok az  $a$  egyeneshez nem tartozó tetszőleges  $M$  ponton át az  $a$  egyenesre merőleges  $b$  egyenest húzni (100. ábra). Azt, hogy az ilyen  $b$  egyenes egyetlen, a 7. pontban fogjuk bizonyítani.

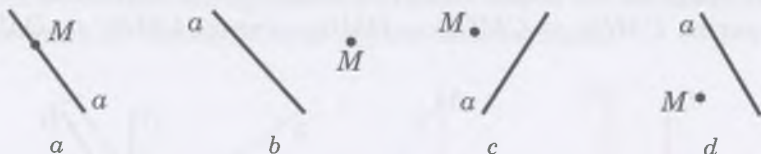


1. Milyen két egyenest nevezünk merőlegesnek?
2. Milyen szimbólummal jelölik a merőleges egyeneseket?
3. Mit nevezünk két egymást metsző egyenes közötti szögnek?
4. Milyen két szakaszt nevezünk merőlegesnek?
5. Mit nevezünk a pont és az egyenes közötti távolságnak?
6. Hány merőleges egyenes bocsátható az egyenes minden egyes pontján át?



## GYAKORLATI FELADATOK

114.<sup>o</sup> Rajzoljátok át a 101. ábrát a füzetbe. Derékszögű vonalzó segítségével húzzátok az  $M$  ponton át az  $a$  egyenesre merőleges egyenest.



101. ábra

115.<sup>o</sup> Húzzátok meg a  $c$  egyenest, és jelöljétek meg rajta a  $K$  pontot. Derékszögű vonalzó segítségével húzzátok a  $K$  ponton át merőlegest a  $c$  egyenesre.

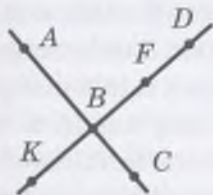


- 116.<sup>o</sup> Húzzátok meg a  $d$  egyenest, és jelöljétek meg az egyeneshez nem tartozó  $M$  pontot. Derékszögű vonalzó segítségével húzzátok az  $M$  ponton át merőlegest a  $d$  egyenesre.
- 117.<sup>o</sup> Szerkesszétek meg az  $ABK$  szöget, amely: 1)  $73^\circ$ ; 2)  $146^\circ$ . A  $BK$  félegyenesen jelöljétek meg a  $C$  pontot, és húzzátok azon át az  $AB$  és  $BK$  egyenesekre merőleges egyeneseket.
- 118.<sup>o</sup> Szerkesszetek két merőleges szakaszt úgy, hogy: 1) metsszék egymást, és ne legyen közös végpontjuk; 2) ne legyen közös pontjuk; 3) legyen közös végpontjuk.
- 119.<sup>o</sup> Rajzoljatok két merőleges félegyenest úgy, hogy azok: 1) metsszék egymást; 2) ne legyenek közös pontjaik.

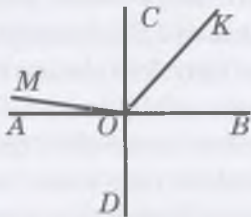


## GYAKORLATOK

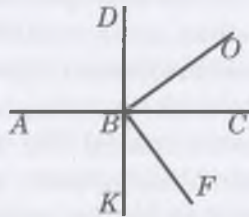
- 120.<sup>o</sup> A 102. ábrán az  $AC$  és a  $DK$  egyenesek merőlegesek. Merőlegesek-e:
- 1) az  $AB$  és  $BK$  szakaszok;
  - 2) a  $BC$  és a  $DF$  szakaszok;
  - 3) a  $BC$  és a  $BK$  félegyenesek;
  - 4) az  $AB$  szakasz és az  $FD$  félegyenes?
- 121.<sup>o</sup> Lehet-e az egyenesek által bezárt szög: 1)  $1^\circ$ ; 2)  $80^\circ$ ; 3)  $90^\circ$ ; 4)  $92^\circ$ ; 5)  $101^\circ$ ?
- 122.<sup>o</sup> Bizonyítsátok be, hogyha az  $AOB$  és  $BOC$  szögek szögfelezői merőlegesek, akkor az  $A$ ,  $O$  és  $C$  pontok ugyanazon az egyenesen fekszenek.
- 123.<sup>o</sup> A 103. ábrán  $AB \perp CD$ ,  $\angle COK = 42^\circ$ ,  $\angle MOC + \angle BOK = 130^\circ$ . Határozzátok meg: 1) a  $\angle MOK$  szöget; 2) a  $\angle MOD$  szöget.
- 124.<sup>o</sup> A 104. ábrán  $AC \perp DK$ ,  $OB \perp BF$ ,  $\angle DBO = 54^\circ$ . Határozzátok meg az  $\angle ABF$  szöget.



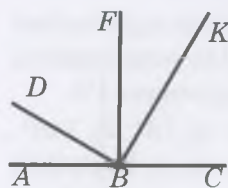
102. ábra



103. ábra



104. ábra



105. ábra

125.\* Az  $ABC$  szög  $160^\circ$ -os, a  $BK$  és a  $BM$  félegyenesek ennek a szögnek a szárai között haladnak át, és azokra merőlegesek. Határozzátok meg az  $MBK$  szöget.

126.\* A 105. ábrán  $BF \perp AC$ ,  $BD \perp BK$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABD\angle = FBK\angle$ .

127.\* A 105. ábrán  $ABD\angle = FBK\angle$ ,  $DBF\angle = KBC\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BF \perp AC$ .

128.\* A  $70^\circ$ -os  $ABC$  szög csúcsából meghúzták a  $BD$  és a  $BF$  félegyeneseket úgy, hogy  $BD \perp BA$ ,  $BF \perp BC$ , a  $BD$  és  $BC$  félegyenesek az  $ABF$  szöghöz tartoznak. Határozzátok meg a  $DBF$  és  $ABF$  szögeket.

129.\* Derékszögű vonalzó és  $17^\circ$ -os szög sablonja segítségével szerkesszetek: 1)  $5^\circ$ -os szöget; 2)  $12^\circ$ -os szöget.

130.\* Derékszögű vonalzó és  $20^\circ$ -os szög sablonja segítségével szerkesszetek  $10^\circ$ -os szöget.



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

131. A 106. ábrán az egyenes metszi a nyolcszög összes oldalát. Metszheti-e az egyenes a tizenháromszög összes oldalát úgy, hogy nem halad át egyik csúcsán sem?



106. ábra

## 6. Axiómák

A korábbi pontokban négy tételt bizonyítottunk. Minden esetben, amikor az alakzat új tulajdonságát bizonyítottuk, a már korábbról ismert mértani tényekre támaszkodtunk. A csúcsszögek tételének bizonyítása során például a mellékszögek tulajdonságát használtuk fel. Ezt az elvet szem előtt tartva még sok új tételt fogunk bizonyítani. Azonban már most, a mértan tanulmányozásának kezdeti szakaszán felmerül a természetes kérdés: ha a mértani alakzatok tulajdonságaival az új a régi alapján elv szerint



ismerkedünk, akkor létezniük kell az elsődleges, kiinduló tényeknek, de akkor mire támaszkodik azok valóságának megalapozása? Hiszen mindaddig semmiféle igaz állítás nem létezett. Ezt a problémát egy módon lehet megoldani: az elsődleges tulajdonságok bizonyítás nélküli elfogadása által. A matematikusok pont így cselekednek. Ezeket a tulajdonságokat **axiómáknak** nevezzük.

Axiómaként az egyszerű, nyilvánvaló, megdönthetetlen állításokat választják ki. Hiszen nemhiába jelenti a görög *axios* szóból eredő *axióma* azt, hogy *méltó elismerés*.

Egyes axiómákat már a korábbi pontokban megfogalmaztunk. Ezeket **alapaxiómáknak** neveztük.

Az axiómák egy részét nem emeltük ki, hanem csak egyszerűen megfogalmaztuk, mint szemléletesen nyilvánvaló igaz állításokat. Például a 2., 3. pontokban megfogalmaztuk a következő axiómákat:

**tetszőleges két pont számára egyetlen szakasz létezik, amelynek ezek a pontok a végpontjai;**

**minden szakasznak bizonyos hossza van;**

**minden szögnek bizonyos nagysága van.**

Más igaz állításokra is támaszkodtunk, amelyeket bizonyítás nélkül fogadtunk el, vagyis lényegében ezek is axiómák, de burkoltan megfogalmazottak. Például az 1. pontban, a 13. ábra leírásakor gyakorlatilag ezt az axiómát alkalmaztuk:

**bármilyen legyen is az egyenes, léteznek olyan pontok, amelyek hozzátartoznak és olyanok is, amelyek nem tartoznak hozzá.**

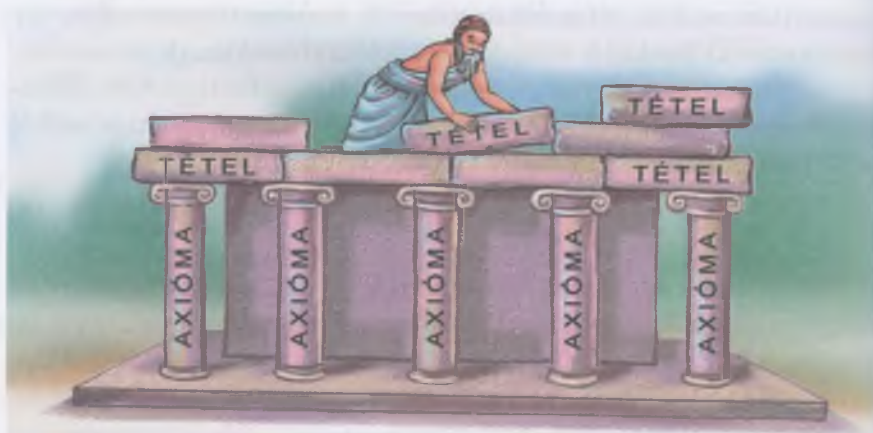
Axiómákat nemcsak a matematikában alkalmaznak. Nemritkán a mindennapi életben is axiómáknak neveznek minden olyan valós állítást, amely nem követel alátámasztást. Például azt mondják: *Március után április jön*. Ez axióma.

Az axiómák nemcsak a gyakorlat vagy a megfigyelések alapján jönnek létre.

Ukrajna minden állampolgára számára az alkotmány – axiómák listája. Ezért az axióma törvényként vagy szabályként is értelmezhető. Azonban a törvényeket (a játékszabályokat) elfogadják, vagyis az emberek egymás közötti megállapodásának eredmé-



nyeként jönnek létre. Vagyis a mértani axiómákat is jóváhagyott szabályoknak tekinthetjük, amelyek alapján a mértantudósok, akár csak a kőművesek, felépítik a tudomány házát (107. ábra).



107. ábra

Ebben az esetben megkérdézhettek: Valójában a mértan játékként is felfogható, mint például a sakk? Bizonyos mértékben – igen. Azonban mindeközben meg kell érteni, hogy a sakk szabályai, így tehát maga a játék is az emberi fantázia révén jöttek létre. Viszont a mértani szabályok (axiómák) a gyakorlatból és a megfigyelésekből keletkeztek. Ezért a mértant, a sakkal ellentétben, nagyon széleskörűen alkalmazzák.

Ha matematikusok leszték, teljesen más geometriákkal is megismerkedhettek, amelyek abban különböznek az iskolában tanulttól, hogy más axiómákra épülnek.



## A MÉRTAN TÖRTÉNETÉBŐL

Mikor és hol keletkeztek az első mértani ismeretek? A szakértők erre a kérdésre nem adnak egyértelmű választ. Egyesek úgy vélik, hogy az úttörők az egyiptomi és babiloni földmérők voltak, akik i. e. 4000 évvel ezelőtt éltek, mások azt feltételezik, hogy a geometria az ókori Egyiptomban született 5000 évvel ezelőtt.



Furcsának tűnhet, de az a kérdés, hogy a **mértan** mint **tudomány**, mikor született meg, nem vált ki vitát. A történészek közös véleményre jutottak: az i. e. VI. században. Ez az egyhangúság első látásra meglepő, hiszen addig az időpontig is nagymennyiségű geometriai ismeretet halmoztak fel az ókori világ népei. Teljesen nyilvánvaló például, hogy mértani tapasztalat nélkül az egyiptomiak nem ajándékozhatták volna meg a világot a hét csoda egyikével – a piramisokkal. Mégis, miért nem



Ősi papirusz

egyenértékű a nagyszámú, összegyűjtött geometriai tény a mértantudomány létezésével?



Egyiptomi piramisok

*A geometria akkor vált tudománnyá, amikor az igazságait bizonyítás útján kezdték megállapítani.*

A *bizonyításos mértan* megjelenése összefügg a hét bölcs első tagja nevével – a milétoszi Thalészével<sup>1</sup> (i. e. közel 625–547), – aki filozófus, tudós, kereskedő és államférfi is volt.

Thalész előtt sokkal korábban ismert volt, hogy a csúcsszögek egyenlők, az is, hogy az átmérő két egyenlő részre osztja a körlapot. Senki sem kételkedett e tények valóságában. Thalész viszont bebizonyította azokat, híressé válva ezzel.

Az i. e. VI–III. században az ókori Görögország tudósainak köszönhetően, közöttük volt Püthagorasz, Eudoxosz, Arkhütasz, Theaitétosz, Eukleidész, Arkhimédész, a mértan alkalmazott tudományból matematikai elméletté változott.



Milétoszi Thalész

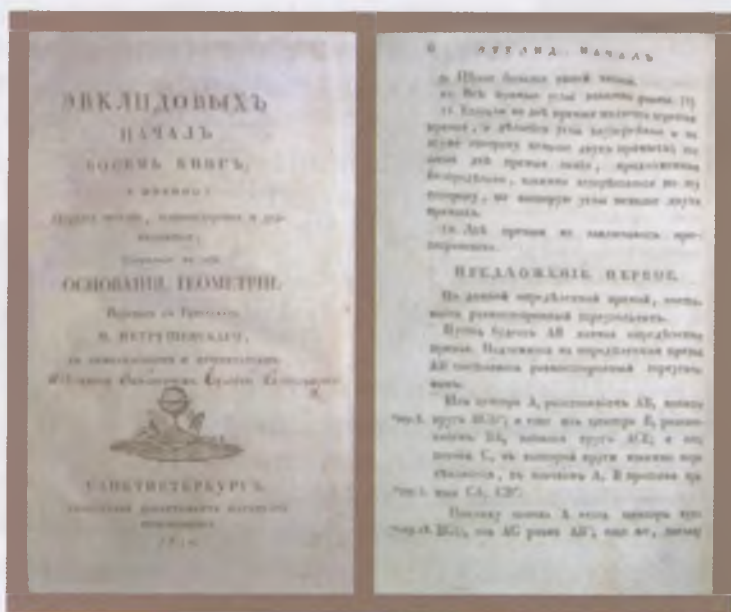
<sup>1</sup> *Milétosz* – kikötő Kis-Ázsiában az Égei-tenger partján



Eukleidész

Azt a könyvet, amelyből több mint 2000 évvel ezelőtt a geometriát tanulták, túlzás nélkül kiemelkedőnek nevezhetjük. A címe *Elemek*, szerzője pedig Eukleidész (kb. i. e. 365–300). Sajnos Eukleidész személyéről keveset tudunk. Ezekben az esetekben az alakot legendák övezik, amelyek egyike nagyon tanulságos. I. Ptolemaiosz király megkérdezte Eukleidészt, létezik-e a geometria megismerésének egyszerűbb útja, mint az *Elemekben* kifejtett. Eukleidész azt felelte: *A geometriához nem vezet királyi út.*

Milyen utat is választott a geometriához Eukleidész az *Elemekben*? Az axiomatikus utat. A tudomány alapja – a legegyszerűbb tények listája. Ezeket posztulátumoknak (a latin *postulatum* – követelmény szóból) és axiómáknak nevezzük. Azután ezekre alapozva, logikai megfontolások útján bizonyítják a többi tulajdonságot – a tételeket.

Eukleidész *Elemek* c. műve



Eukleidésznek öt posztulátuma volt. Kifejtjük az első négyet.

**I. Szükséges, hogy minden ponttól egy tetszőleges másik pontig egyenes vonalat húzhassunk. posztulátum.**

**II. És, hogy minden vonalat korlátlanul meghosszabbíthassunk. posztulátum.**

**III. És, hogy bármely középpontból bármilyen sugarú körvonalat rajzolhassunk. posztulátum.**

**IV. És, hogy minden derékszög egyenlő legyen. posztulátum.**

Az ötödik posztulátumról a 14. pont után szólunk.

Sok évszázadon át Eukleidész *Elemek* c. művével legfeljebb a *Biblia* vetekedhetett. Így például a XIX. században egy sor európai országban még az *Elemek* egyszerűsített kiadása alapján tanították a geometriát.

Az a mértan, amelyet most az iskolában tanultok, nagyon sokban követi Eukleidész elképzeléseit.

## 1. SZ. FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

1. Hány egyenest határoz meg három, nem egy egyenesen fekvő pont?  
A) 2;                      B) 4;                      C) 3;                      D) 1.
2. Hány olyan szakaszt lehet húzni, amelyek két adott pontot tartalmaznak?  
A) 1;                      B) 2;                      C) 3;                      D) végtelenül sok
3. Az  $M$  pont a  $PQ$  szakasz belső pontja. Az alábbi állítások között melyik igaz?  
A)  $PM + MQ = PQ$ ;                      C)  $MQ = PQ + PM$ ;  
B)  $PQ = PM - MQ$ ;                      D)  $PM = PQ + MQ$ .
4. Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok ugyanazon az egyenesen fekszenek, emellett  $BC = 8$  cm,  $AB - BC = 8$  cm. Az alábbi állítások közül melyik igaz?  
A) az  $A$  pont a  $BC$  szakasz felezőpontja;  
B) a  $B$  pont az  $AC$  szakasz felezőpontja;  
C) a  $C$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja;  
D) az  $A$  és  $B$  pont egybeesik.



5. Az  $AB$  szakasz hossza 12 cm. Hány olyan pont létezik az  $AB$  egyenesen, amely mindegyike távolságainak összege az  $AB$  szakasz végpontjáig 14 cm-rel egyenlő?  
 A) számtalan; B) 1; C) 2; D) egy sem
6. Az  $AB$  szakasz hossza 12 cm. Hány olyan pont létezik az  $AB$  egyenesen, amely mindegyike távolságának összege az  $AB$  szakasz végpontjáig 12 cm-rel egyenlő?  
 A) egy sem; B) 2; C) számtalan; D) 1.
7. Két félegyenes kiegészítő, ha:  
 A) közös kezdőpontjuk van;  
 B) egyesítésük egyenes, és közös kezdőpontjuk van;  
 C) egyazon egyeneshez tartoznak;  
 D) egyesítésük egyenes.
8. Az ábrán látható szög megjelölései közül melyik hibás?  
 A)  $O\angle$ ; C)  $MON\angle$ ;  
 B)  $OMN\angle$ ; D)  $NOM\angle$ .
9. Az alábbi állítások közül melyik hamis?  
 A) a mellékszögeknek közös a csúcuk;  
 B) a mellékszögek szára közös;  
 C) a mellékszögek egyike hegyes, a másik pedig tompa;  
 D) ha az  $AOC$  és  $COB$  szögek mellékszögek, akkor az  $OA$  és  $OB$  félegyenesek kiegészítő félegyenesek.
10. Az alábbi állítások közül melyik hamis?  
 A) a csúcsszögek egyenlők;  
 B) ha a szögek egyenlők, akkor csúcsszögek;  
 C) a csúcsszögeknek közös a csúcuk;  
 D) a csúcsszögek szárai két pár kiegészítő félegyenest alkotnak.
11. Az alábbi állítások közül melyik igaz?  
 A) a merőleges szakaszoknak mindig van közös pontjuk;  
 B) a merőleges félegyeneseknek mindig van közös pontjuk;  
 C) a merőleges egyeneseknek mindig van közös pontjuk;  
 D) a merőleges félegyenesnek és egyenesnek mindig van közös pontja.





## AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

### Az egyenes alaptulajdonsága

Tetszőleges két ponton át egyenes húzható, méghozzá kizárólag egy.

### Egymást metsző egyenesek

Két, közös ponttal rendelkező egyenest egymást metszőnek nevezünk.

### Két metsző egyenes tétele

Bármely két, egymást metsző egyenesnek egyetlen közös pontja van.

### Egybevágó szakaszok

Két szakaszt egybevágónak nevezünk, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

Az egybevágó szakaszok hossza egyenlő, és megfordítva, ha a szakaszok hossza egyenlő, akkor a szakaszok egybevágók.

### A szakasz hosszának alaptulajdonsága

Ha a  $C$  pont az  $AB$  szakasz belső pontja, akkor az  $AB$  szakasz egyenlő az  $AC$  és  $CB$  szakaszok összegével, vagyis  $AB = AC + CB$ .

### A pontok közötti távolság

Az  $A$  és  $B$  pont közötti távolságnak az  $AB$  szakasz hosszát nevezzük.

### Kiegészítő félegyenesek

Két, közös kezdőpontú félegyenest, amelyek azonos egyenesen fekszenek, kiegészítő félegyeneseknek nevezünk.

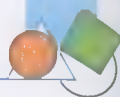
### Egyenesszög

Azt a szöget, amelynek a szárai kiegészítő félegyenesek, egyenesszögnek nevezzük.

### Egybevágó szögek

Két szöget egybevágónak nevezünk, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

Az egybevágó szögeknek egyenlő a mértékük, és megfordítva, ha a szögek mértéke egyenlő, akkor a szögek egybevágók.

**A szög szögfelezője**

A szög szögfelezőjének a szög csúcsából kiinduló félegyenest nevezik, amely az adott szöget két egyenlő szögre osztja.

**Hegyesszög, derékszög, tompaszög**

A  $90^\circ$ -os szöget derékszögnek nevezzük.

A  $90^\circ$ -nál kisebb szöget hegyesszögnek nevezzük.

A  $90^\circ$ -nál nagyobb, de  $180^\circ$ -nál kisebb szöget tompaszögnek nevezzük.

**A szög fokmértékének alaptulajdonsága**

Ha az  $OC$  félegyenest az  $AOB$  szöget két szögre,  $AOC$ -re, és  $COB$ -re osztja, akkor  $AOB\angle = AOC\angle + COB\angle$ .

**Mellékszögek**

Két szöget mellékszögnek nevezünk, ha az egyik szárak közös, a másik kettő pedig kiegészítő félegyenest.

**A mellékszögek tulajdonsága**

A mellékszögek összege  $180^\circ$ .

**Csúcsszögek**

Két szöget csúcsszögnek nevezünk, ha az egyik szög szárai a másik szárainak kiegészítő félegyenesei.

**A csúcsszögek tulajdonsága**

A csúcsszögek egyenlők.

**Merőleges egyenesek**

Két egyenest merőlegesnek nevezünk, ha kölcsönös metszésükkor derékszög keletkezik.

**Az adott egyenesre merőleges egyenes tétele**

Az egyenes minden egyes pontján egyetlen, az adott merőleges egyenesre merőleges egyenes megy át.

## HÁROMSZÖGEK 2.§.

Hogyan lehet megállapítani két háromszögről, hogy egybevágó-e, anélkül, hogy egymásra helyeznénk? Milyen tulajdonsággal rendelkezik az egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszög? Milyen egy tétel „felépítése”? Ezekre és más hasonló érdekes kérdésre kaptok választ ebben a fejezetben.



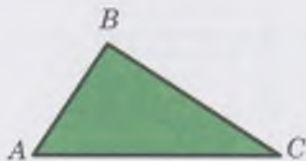


## 7. Egybevágó háromszögek.

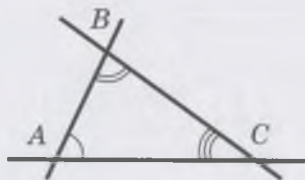
### A háromszög magassága, súlyvonala és szögfelezője

Vegyünk három  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontot, amelyek nem illeszkednek egy egyenesre. Kössük őket össze az  $AB$ ,  $BC$  és  $CA$  szakaszokkal. A kapott alakzat egy síkrészt határol, ami a 108. ábrán zöld színnel van jelölve. A síknak ezt a részét a szakaszokkal együtt **háromszögnek** nevezzük. Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok a **háromszög csúcsai**, az  $AB$ ,  $BC$  és  $CA$  szakaszok pedig a **háromszög oldalai**.

A háromszöget a csúcsai határozzák meg és a csúcsai alapján jelöljük meg. Így a 108. ábrán látható háromszög jelölése:  $ABC\Delta$  ((olvassuk: az  $ABC$  háromszög),  $BCA\Delta$  (olvassuk: a  $BCA$  háromszög), esetleg  $ACB\Delta$  és így tovább.



108. ábra



109. ábra

Az  $ABC$ ,  $BAC$  és  $BCA$  szögeket (109. ábra) az  $ABC$  háromszög **szögeinek** nevezzük.

Az  $ABC$  háromszögben (109. ábra) a  $B$  szöget az  $AC$  oldallal **szembeni szögnek**, az  $A$  és  $C$  szögeket pedig az  $AC$  oldalon lévő szögeknek nevezzük, míg az  $AC$  oldalt a  $B$  szöggel **szembeni oldalnak**, az  $AB$  és  $AC$  oldalakat pedig az  $A$  szöget **közbezáró oldalaknak** nevezzük.

**Meghatározás.** A **háromszög kerületének** az oldalhosszak összegét nevezzük.

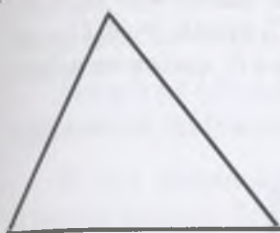
A kerületet  $P$ -vel jelöljük. Például az  $MNK$  háromszög kerületét így jelöljük:  $P_{MNK}$

**Meghatározás.** Egy háromszög **hegyesszögű**, ha mind a három szöge hegyesszög.

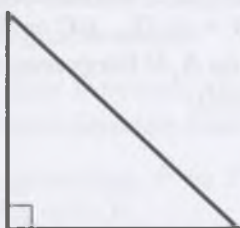
A háromszöget **derékszögűnek** nevezzük, ha az egyik szöge derékszög.



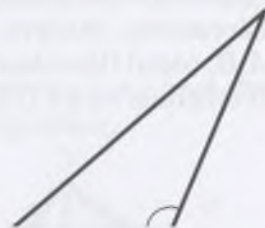
A háromszöget **tompaszögűnek** nevezzük, ha az egyik szöge tompaszög (110. ábra).



Hegyesszögű  
háromszög



Derékszögű  
háromszög



Tompaszögű  
háromszög

110. ábra

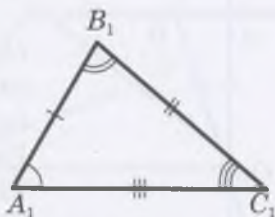
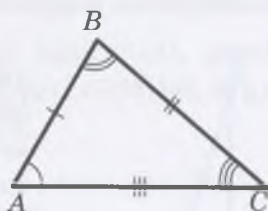
**Meghatározás.** Két háromszög **egybevágó**, ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.

A 111. ábrán az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek egybevágók. Így jelöljük:  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ . Ezeket a háromszögeket úgy helyezhetjük egymásra, hogy az  $A$  és  $A_1$  csúcs, a  $B$  és  $B_1$  csúcs és a  $C$  és  $C_1$  csúcs illeszkedjen egymásra. Így az  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$  és  $\angle C = \angle C_1$ , valamint az  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  és  $AC = A_1C_1$ .

Azokat az oldalakat és szögeket, melyek illeszkednek, ha egymásra helyezünk két egybevágó háromszöget, **megfelelő oldalaknak** és **megfelelő szögeknek** nevezzük. Így a 111. ábrán az  $AC$  és  $A_1C_1$  oldal, valamint az  $A$  és  $A_1$  szög megfelelő.

Általában a rajzokon az egyenlő hosszúságú szakaszokat azonos számú vonallal, az egyenlő fokmértékű szögeket azonos számú ívvel jelöljük (111. ábra).

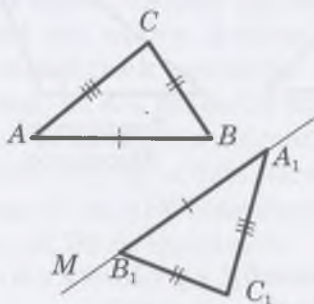
Megjegyzendő, hogy az egybevágó háromszögekben a megfelelő szögekkel szemben megfelelő oldalak vannak és viszont is, a megfelelő oldalakkal szemben megfelelő szögek vannak.



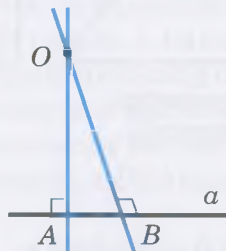
111. ábra



**Az egybevágó háromszögek alaptulajdonsága (axiómája).** Adott  $ABC$  háromszöggel adott  $A_1M$  félegyenesre vonatkoztatva létezik az  $ABC$  háromszöggel egybevágó  $A_1B_1C_1$  háromszög, melyre  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  és  $AC = A_1C_1$ , az  $A_1B_1$  oldal illeszkedik az  $A_1M$  félegyenesre és a  $C_1$  csúcs az adott félsíkban van (112. ábra).



112. ábra



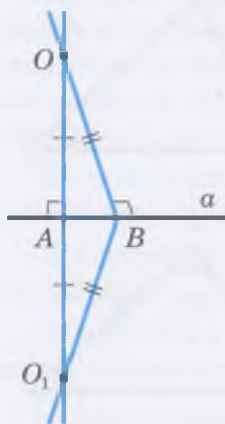
113. ábra

**7.1. tétel.** Adott egyenesre, az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül csak egy, az egyenesre merőleges egyenes húzható.

**Bizonyítás.** ☺ Vegyünk egy  $a$  egyenest és egy rajta kívüli  $O$  pontot. Tegyük fel, hogy létezik két,  $OA$  és  $OB$  egyenes, mely merőleges az  $a$  egyenesre (113. ábra).

Az egybevágósági axióma értelmében létezik egy  $O_1AB$  háromszög, amely egybevágó az  $AOB$  háromszöggel,  $AO = AO_1$  és  $BO = BO_1$ . Ezért az  $OAB\angle = O_1AB\angle$ . Tehát az  $O_1AB\angle = 90^\circ$ . Innen  $O_1AO\angle = 180^\circ$ , tehát az  $O_1, A$  és  $O$  pont egy egyenesre illeszkedik.

Hasonlóképpen igazolható, hogy  $O_1, B$  és  $O$  pontok is egy egyenesre illeszkednek. Ebben az esetben viszont az  $OA$  és  $OB$  egyeneseknek két metszéspontjuk van, az  $O$  és  $O_1$  pont. Ez viszont ellentmond az 1.1. tételnek. Tehát a feltételezésünk hibás, nem helytálló. Így az  $O$  ponton keresztül, csak egy, az  $a$  egyenesre merőleges egyenes húzható. ▲



114. ábra



Bizonyára észrevettétek, hogy az egybevágó szakaszok, egybevágó szögek és egybevágó háromszögek meghatározásai hasonlóan egymásra. Ezért célszerű megfogalmazni az egybevágó alakzatok következő meghatározását.

**Meghatározás.** Két mértani alakzat **egybevágó**, ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.

A 115. ábrán két egybevágó,  $F$  és  $F_1$  alakzat látható. Így írjuk  $F = F_1$ .

Könnyű belátni, hogy két egyenes (két félegyenes, két pont) egybevágó.

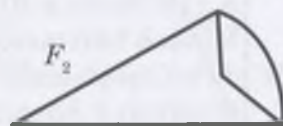
**Meghatározás.** A háromszög csúcsából a szemközti oldalra húzott merőlegest a **háromszög magasságának** nevezzük.

A 116. ábrán a  $BB_1$  és  $CC_1$  szakaszok az  $ABC$  háromszög magasságai.

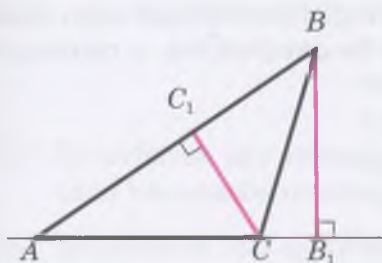
**Meghatározás.** Azt a szakaszt, amely összeköti a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával, a **háromszög súlyvonalának** nevezzük.

A 117. ábrán az  $AM$  szakasz az  $ABC$  háromszög súlyvonala.

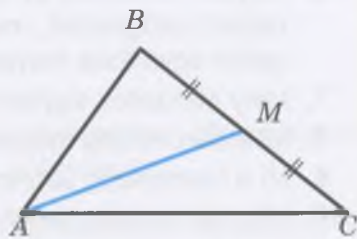
**Meghatározás.** A szögfelező azon szakaszát, amely összeköti a háromszög csúcsát a szemközti oldallal, a **háromszög szögfelezőjének** nevezzük.



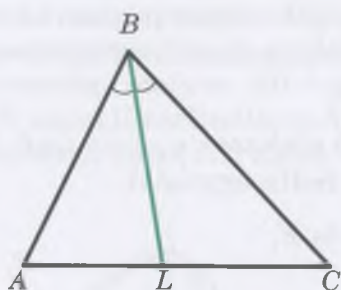
115. ábra



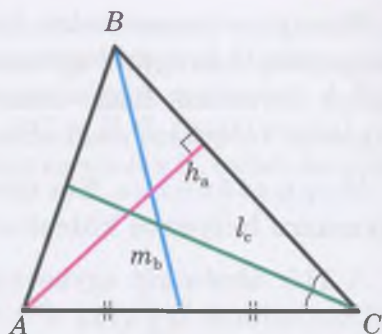
116. ábra



117. ábra



118. ábra



119. ábra

A 118. ábrán a  $BL$  szakasz a háromszög szögfelezője.

Minden háromszögnek három magassága, három súlyvonala és három szögfelezője van.

Gyakran a háromszögekben az  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcsokkal szemközi oldalakat  $a$ ,  $b$  és  $c$ -vel jelölik. A magasságok jelölése  $h_a$ ,  $h_b$  és  $h_c$ , a súlyvonalaké  $m_a$ ,  $m_b$  és  $m_c$ , a szögfelezőké  $l_a$ ,  $l_b$  és  $l_c$ . Az alsó index azt mutatja, melyik oldalhoz tartozik a nevezetes vonal (119. ábra).



1. Mi a háromszög, és hogyan jelöljük?
2. Mi a háromszög kerülete?
3. Milyen háromszögeket különböztetünk meg szögeik szerint?
4. Melyik háromszög derékszögű? Tompaszögű? Hegyesszögű?
5. Mely háromszögek egybevágók?
6. Hogyan nevezzük az egybevágó háromszögek azon oldalpárjait, szögpárjait, melyek illeszkednek, ha a háromszögeket egymásra helyezzük?
7. Mely alakzatok egybevágók?
8. Mi a háromszög magassága?
9. Mi a háromszög súlyvonala?
10. Mi a háromszög szögfelezője?
11. Egy háromszögnek hány magassága, súlyvonala és szögfelezője van?



## GYAKORLATI FELADATOK

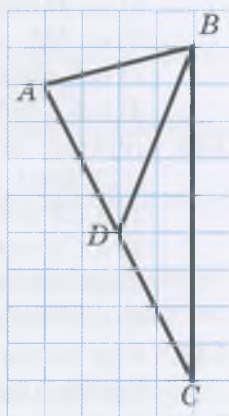
132.° Rajzoljatok:

- 1) hegyesszögű;
- 2) derékszögű;
- 3) tompaszögű háromszöget.

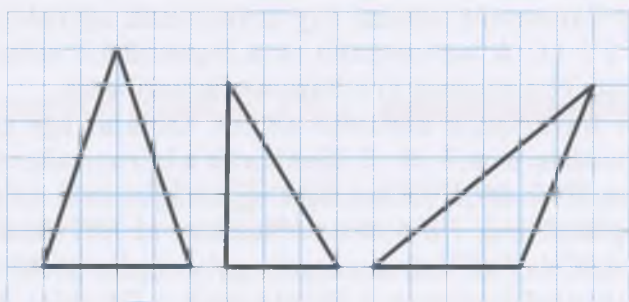
Húzzátok minden csúcsából magasságot.

133.° Rajzoljátok át a füzetbe a 120. ábrát. Húzzátok meg azt a magasságot, amely egybeesik mind a három háromszögbe. Melyik háromszögben esik ez a magasság a háromszögön kívülre?

134.° Rajzoljátok át a füzetbe a 121. ábrát. Húzzátok meg mind a három háromszög mindegyik magasságát.



120. ábra



121. ábra

135.° Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget. Húzzátok meg ezen háromszög mindhárom súlyvonalát.

136.° Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget. Húzzátok meg ezen háromszög mindhárom súlyvonalát.



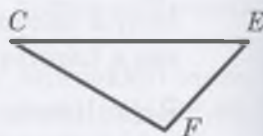
## GYAKORLATOK

137.° Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget. Csúcsait jelöljétek  $M$ ,  $K$  és  $E$  pontokkal. Nevezzétek meg:

- 1) az  $M$  szöggel szembeni oldalt;
- 2) az  $MK$  oldallal szembeni szöget;
- 3) a  $K$  szöget bezáró oldalakat;
- 4) a  $KE$  oldalon lévő szögeket.

138.° Írjátok le a  $CEF$  háromszög oldalait, csúcsait és szögeit (122. ábra). Nevezzétek meg:

- 1) a  $CF$  oldallal szemben lévő szöget;
- 2) a  $CE$  oldalon lévő szögeket;
- 3) az  $E$  szöggel szembeni oldalt;
- 4) az  $F$  szöget bezáró oldalakat.



122. ábra

139.° Egy háromszög egyik oldala ötször kisebb a másik oldalnál és 25 cm-rel rövidebb a harmadik oldalnál. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha a kerülete 74 cm.

140.° Egy háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint  $5 : 7 : 11$ . A leghosszabb és a legrövidebb oldal összege 80 cm. Számítsátok ki a háromszög területét.

141.° Egy háromszög kerülete 48 cm. Oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint  $7 : 9 : 8$ . Mekkora a háromszög oldalai?

142.° Az  $APK$  és  $MCE$  háromszögek egybevágók, az  $A$  szögnek a  $C$  szög felel meg.  $PK = 10$  cm. Mekkora az  $ME$  oldal?

143.° Az  $ABC$  és  $DEF$  háromszögek egybevágók, az  $AB$  oldalnak a  $DE$  oldal felel meg, a  $BC$  oldalnak a  $DF$  oldal,  $B\angle = 32^\circ$ . Mekkora a  $D$  szög?

144.° Az  $ABC$  és  $KTM$  háromszögek egybevágók, az  $A$  szögnek az  $M$  szög felel meg, valamint a  $B$  szögnek a  $K$  szög,  $C\angle = 40^\circ$ ,  $MK = 5$  cm. Határozzátok meg a  $T$  szög fokmértékét és az  $AB$  oldal hosszát.

145.° Igaz-e az alábbi állítás:

- 1) ha két háromszög egybevágó, akkor a kerületeik is egyenlők;
- 2) ha két háromszög kerülete egyenlő, akkor a háromszögek egybevágók?

- A háromszög nevezetes vonalai közül (magasság, súlyvonal, szögfelező) melyik illeszkedik mindig a háromszögre?
- A háromszög nevezetes vonalai közül (magasság, súlyvonal, szögfelező) melyik illeszkedhet a háromszög oldalára? Nevezzétek meg azt a háromszögfajtát, melyre ez a feltétel teljesülhet.
- 1) Lehetséges-e, hogy a háromszög egyik magassága illeszkedik a háromszögre, míg a másik kettő nem?
- 2) Lehetséges-e, hogy csak az egyik magassága illeszkedjen a háromszög oldalára?
- 3) Melyik háromszögben lesz mind a három magasság metszéspontja a háromszög egyik csúcsa?
- Az  $ABC$  háromszöget a  $BD$  súlyvonala két olyan háromszögre bontja, melyek kerülete 32 cm és 36 cm. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög területét, ha  $BD = 10$  cm.
- Egy háromszöget, melynek a kerülete 60 cm, egyik súlyvonala olyan két háromszögre bontja, melyek kerületei 36 cm és 50 cm. Mekkora ez a súlyvonal?

## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

A 123. ábrán  $KP = PE = EF = FT = 1$  cm. Mely szakaszok még egyenlő hosszúságúak a rajzon? Határozzátok meg a hosszukat.



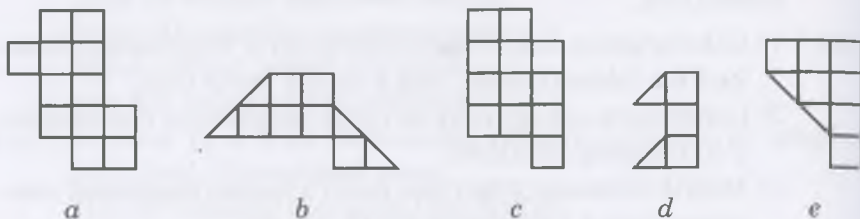
123. ábra

A  $72^\circ$ -os  $ABC$  szöget a  $BD$  belső félegyenese két,  $ABD$  és  $CBD$  szögre bontja úgy, hogy  $\angle ABD = 5\angle CBD$ . A  $BK$  félegyenest úgy húzták meg, hogy a  $BA$  félegyenese a  $DBK$  szög szögfelezője. Határozzátok meg a  $DBK$  szög fajtáját és fokmértékét.



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

153. A 124. ábrán látható alakzatokat vágjátok két egybevágó részre (nem feltétlenül a rácsvonalak mentén).

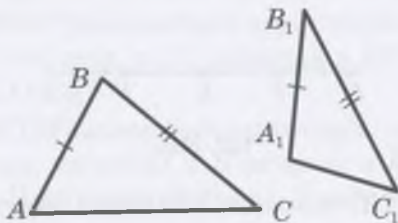


124. ábra

### 8. A háromszögek egybevágóságának első és második ismertetőjele (alapesete)

Ha két,  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszög egybevágó, akkor hat egyenlőségnek kell teljesülnie. Az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögekre ez  $A\angle = A_1\angle$ ,  $B\angle = B_1\angle$  és  $C\angle = C_1\angle$ , valamint  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  és  $CA = C_1A_1$ . Ez könnyen belátható, mert ezek a háromszögek fedik egymást, ha egymásra helyezzük.

Próbáljuk meg csökkenteni a feltételeket. Például hagyjunk meg csak két feltételt:  $AB = A_1B_1$  és  $BC = B_1C_1$ . Ebben az esetben a két,  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszög nem feltétlenül egybevágó (125. ábra).



125. ábra

Hogyan csökkentjük le a feltételeket minimálisra úgy, hogy teljesüljön az egybevágóság? Erre a kérdésre azok a tételek adnak

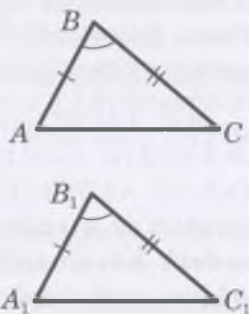


választ, melyek a **háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit** mondják ki.

**8.1. tétel (a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele: két oldaluk és általuk közbezárt szögük alapján).** Ha az egyik háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög egyenlő egy másik háromszög két oldalával és az általuk közbezárt szöggel, akkor ez a két háromszög egybevágó.

**Bizonyítás.** ☉ Tekintsük az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögekre, melyekben  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  és  $B\angle = B_1\angle$  (126. ábra). Bizonyítsuk be, hogy  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ .

Tegyük az  $ABC$  háromszögre az  $A_1B_1C_1$  háromszöget úgy, hogy a  $BA$  illeszkedjen a  $B_1A_1$  félegyenesre, a  $BC$  pedig a  $B_1C_1$  félegyenesre. Ez lehetséges, mivel a feltételek alapján  $B\angle = B_1\angle$ . Mivel a feltétel szerint  $AB = A_1B_1$  és  $BC = B_1C_1$ , ezért a  $BA$  oldal illeszkedik a  $B_1A_1$  oldalra, a  $BC$  pedig a  $B_1C_1$  oldalra. Tehát az  $ABC$  és az  $A_1B_1C_1$  háromszögek teljesen fedik egymást, vagyis egybevágóak. ▲

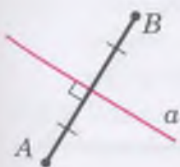


126. ábra

**Meghatározás.** Azt az egyenest, amely illeszkedik a szakasz felezőpontjára és merőleges a szakaszra, **szakaszfelező merőlegesnek** vagy **felezőmerőlegesnek** nevezzük.

A 127. ábrán az  $a$  egyenes az  $AB$  szakaszfelező merőlegese. Jegyezd meg, hogy az  $A$  és  $B$  pont azonos távolságra van az  $a$  egyenestől.

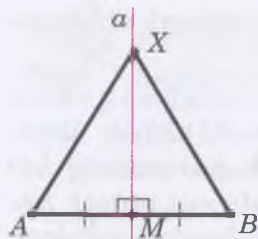
**8.2. tétel.** A szakaszfelező merőleges bármelyik pontja azonos távolságra van a szakasz végpontjaitól.



127. ábra

**Bizonyítás.** ☉ Legyen az  $X$  pont az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesének egyik tetszőleges pontja. Be kell bizonyítani, hogy  $XA = XB$ .

Legyen az  $AB$  szakasz felezőpontja az  $M$  pont. Ha az  $X$  pont illeszkedik az  $M$  pontra (ez lehetsé-



128. ábra

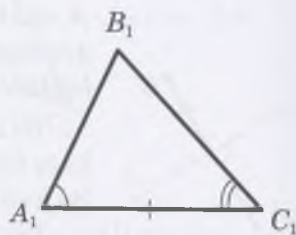
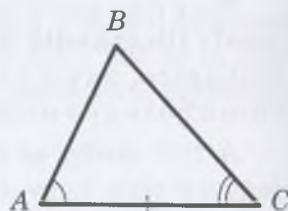
ges, mivel az  $X$  pont az  $a$  egyenes tetszőleges pontja), akkor  $XA = XB$ .

Ha az  $X$  nem esik egybe az  $M$  ponttal, akkor megvizsgáljuk az  $AXM$  és  $BXM$  háromszögeket (128. ábra). Ezekben a háromszögekben az  $AM = MB$ , mivel az  $M$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja, az  $XM$  oldal közös, az  $AMX\angle = BMX\angle = 90^\circ$ , tehát az  $AXM$  és  $BXM$  háromszögek egybevágók két oldaluk és a közbezárt szög alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy az  $XA$  és  $XB$  szakaszok egyenlők, mint az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai. ▲

**8.3. tétel (a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele: egy oldaluk és a rajta fekvő szögeik alapján).** *Ha az egyik háromszög egy oldala és a rajta fekvő két szöge megfelelően egyenlő egy másik háromszög egy oldalával és a rajta fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.*

**Bizonyítás.** ☉ Legyen az  $ABC$  és az  $A_1B_1C_1$  háromszögekben  $AC = A_1C_1$ ,  $A\angle = A_1\angle$ ,  $C\angle = C_1\angle$  (129. ábra). Bebizonyítjuk, hogy  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ .

Úgy helyezzük egymásra az  $ABC$  és az  $A_1B_1C_1$  háromszögeket, hogy az  $A$  pont az  $A_1$  ponttal, az  $AC$  szakasz az  $A_1C_1$  szakasszal essen egybe (ezt megtehetjük, mert  $AC = A_1C_1$ ) és a  $B$  és  $B_1$  csúcsok pedig az  $A_1C_1$  egyeneshez viszonyítva egy félsíkban helyezkedjenek el. Mivel  $A\angle = A_1\angle$  és  $C\angle = C_1\angle$ , ezért az  $AB$  félegyenes az  $A_1B_1$  félegyenessel, a  $CB$  pedig a  $C_1B_1$  félegyenessel esik egybe. Ekkor a  $B$  pont, mint az  $AB$  és  $CB$  félegyenesek közös pontja egybeesik az  $A_1B_1$  és a  $C_1B_1$  félegyenesek közös pontjával, a  $B_1$  ponttal. Tehát az  $ABC$  és az  $A_1B_1C_1$  háromszögek fedik egymást, vagyis egybevágók. ▲

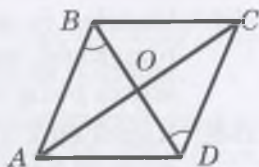


129. ábra



**Feladat.** A 130. ábrán az  $O$  pont a  $BD$  szakasz felezőpontja,  $\angle ABO = \angle CDO$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BC = AD$ .

**Megoldás.** Vizsgáljuk meg az  $AOB$  és  $COD$  háromszögeket. Mivel  $O$  a  $BD$  szakasz felezőpontja, ezért  $BO = OD$ . A feladat feltétele alapján  $\angle ABO = \angle CDO$ . Az  $AOB$  és  $COD$  szögek egyenlők, mint csúcsszögek. Tehát az  $AOB \Delta = COD \Delta$  az oldaluk és a rajta fekvő két szögük alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. Megjegyezzük, hogy  $BD$  az  $ABD$  és  $CDB$  háromszögek közös oldala. A feladat feltételéből az is következik, hogy  $\angle ABD = \angle CDB$ . Tehát az  $ABD$  és  $CDB$  háromszögek egybevágóak a két oldal és a közbezárt szög alapján is, vagyis a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Tehát  $BC = AD$ . ●



130. ábra



1. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának az első ismertetőjelét.
2. Milyen egyenest nevezünk a szakasz felezőmerőlegesének?
3. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a szakasz felezőmerőlegesének pontjai?
4. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának a második ismertetőjelét.

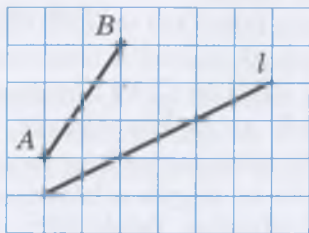


## GYAKORLATI FELADATOK

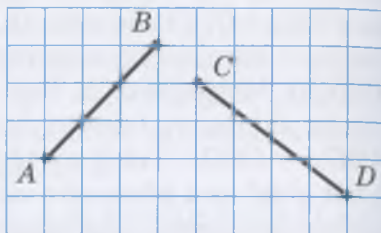
- 154.° Vonalzó és szögmérő segítségével szerkesszettek egy háromszöget, melynek két oldala 3 cm és 6 cm, a köztük lévő szög pedig  $40^\circ$ .
- 155.° Vonalzó és szögmérő segítségével szerkesszettek egy háromszöget, melynek két oldala 3 cm és 4 cm, a köztük lévő szög pedig  $90^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög fajtáját.
- 156.° Vonalzó és szögmérő segítségével szerkesszettek egy háromszöget, melynek egyik oldala 3 cm, ezen az oldalon lévő szögei pedig  $100^\circ$  és  $20^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög fajtáját.



- 157.° Vonalzó és szögmérő segítségével szerkesszettek egy háromszöget, melynek egyik oldala 6 cm, ezen az oldalon lévő szögei pedig  $90^\circ$  és  $45^\circ$ .
- 158.° Rajzoljátok át a füzetetekbe a 131. ábrát. Derékszögű vonalzó és egyszerű vonalzó segítségével határozzátok meg az  $l$  egyenesnek azt a pontját, amely egyenlő távolságra van az  $AB$  szakasz végpontjaitól.



131. ábra



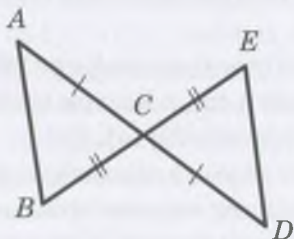
132. ábra

- 159.° Rajzoljátok át a füzetetekbe a 132. ábrát. Derékszögű vonalzó és egyszerű vonalzó segítségével határozzátok meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz az  $A$  és  $B$  pontoktól, és egyidejűleg egyenlő távolságra a  $C$  és  $D$  pontoktól is.

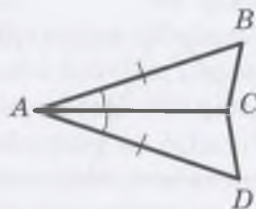


## GYAKORLATOK

- 160.° A 133. ábrán  $AC = DC$ ,  $BC = EC$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = DEC\Delta$ .
- 161.° A 134. ábrán  $AB = AD$ ,  $BAC\angle = DAC\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = ADC\Delta$ .



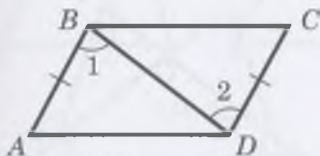
133. ábra



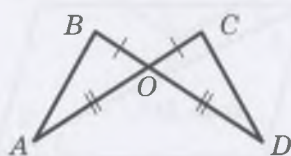
134. ábra

162.° A 135. ábrán  $AB = CD$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $AD = 7$  cm,  $\angle C = 34^\circ$ . Határozzátok meg a  $BC$  szakasz hosszát és az  $A$  szöget.

163.° A 136. ábrán  $AO = OD$ ,  $BO = OC$ . Határozzátok meg az  $OCD$  háromszög  $CD$  oldalát és  $OCD$  szögét, ha  $AB = 8$  cm,  $\angle OBA = 43^\circ$ .



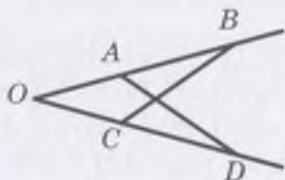
135. ábra



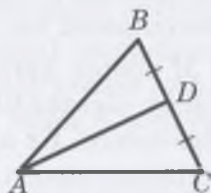
136. ábra

164.° Adott  $OA = OC$ ,  $OB = OD$  (137. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $\angle OAD = \angle OCB$ .

165.° Adott  $\angle ADC = \angle ADB$ ,  $BD = CD$  (138. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $AB = AC$ .



137. ábra

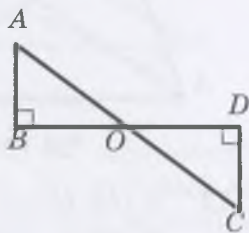


138. ábra

166.° Az  $A$  és  $B$  pontokból, melyek az  $a$  egyeneshez viszonyítva egy félsíkhoz illeszkednek, és egyenlő távolságokra vannak tőle,  $AC$  és  $BD$  merőlegeseket húztak erre az egyenesre. Határozzátok meg az  $ACB$  szöget, ha  $\angle ADC = 25^\circ$ .

167.° Az  $AD$  és  $BC$  szakaszok az  $O$  pontban metszik és felezik egymást. Határozzátok meg az  $ACD$  szöget, ha  $\angle ABC = 64^\circ$ ,  $\angle ACO = 56^\circ$ .

168.° A 139. ábrán  $AB \perp BD$ ,  $CD \perp BD$ , az  $O$  pont pedig a  $BD$  szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy  $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ .

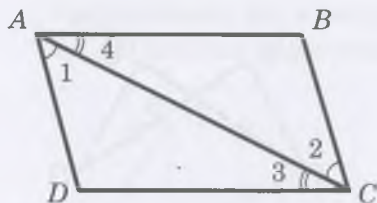


139. ábra

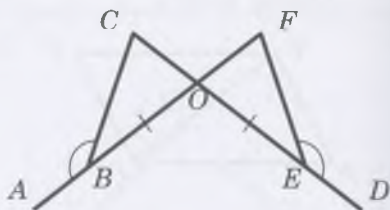


**169.°** A 140. ábrán  $1\angle = 2\angle$ ,  $3\angle = 4\angle$ ,  $AB = 8$  cm,  $BC = 6$  cm. Határozzátok meg az  $ADC$  háromszög  $AD$  és  $CD$  oldalát.

**170.°** A 141. ábrán  $ABC\angle = DEF\angle$ ,  $BO = OE$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BCO\Delta = EFO\Delta$ .



140. ábra



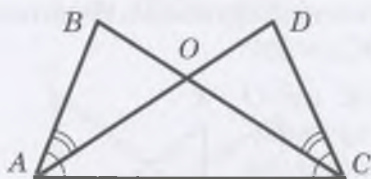
141. ábra

**171.°** A 142. ábrán  $BAO\angle = DCO\angle$ ,  $BAC\angle = DCA\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = CDA\Delta$ .

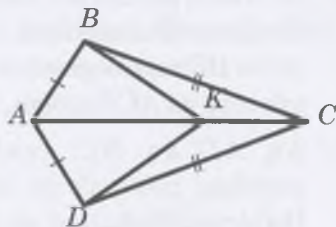
**172.°** A  $B$  szög különböző szárain megjelölték az  $A$  és  $C$  pontokat, a szögfelezőn pedig egy  $D$  pontot úgy, hogy  $ADB\angle = CDB\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AB = BC$ .

**173.°** Az  $M$  ponton keresztül, amely az  $O$  csúcsú szög szögfelezőjéhez illeszkedik, merőleges egyenest fektettek erre a szögfelezőre. Ez az egyenes az adott szög szárait  $A$  és  $B$  pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy  $AM = MB$ .

**174.°** A 143. ábrán  $ABC\Delta = ADC\Delta$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABK\Delta = ADK\Delta$ .

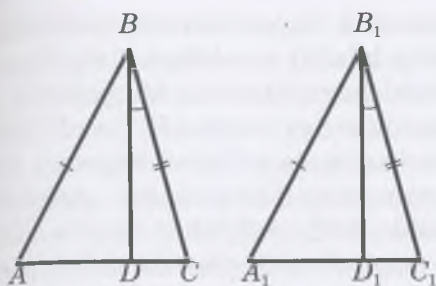


142. ábra

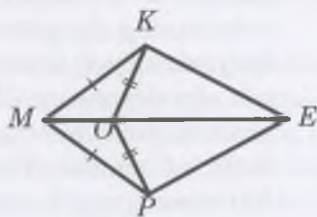


143. ábra

**175.°** A 144. ábrán  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ ,  $DBC\angle = D_1B_1C_1\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $DBC\Delta = D_1B_1C_1\Delta$ .



144. ábra



145. ábra

176.\* A 145. ábrán  $MKO\Delta = MPO\Delta$ . Bizonyítsátok be, hogy  $KOE\Delta = POE\Delta$ .

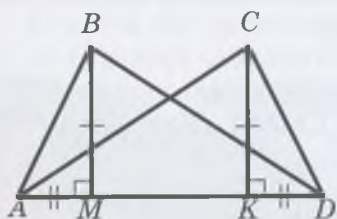
177.\* A 146. ábrán  $BM \perp AD$ ,  $CK \perp AD$ ,  $BM = CK$ ,  $AM = KD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABD\Delta = CDA\Delta$ .

178.\* Bizonyítsátok be, hogy az egybevágó háromszögekben a megfelelő szögek szögfelezői egyenlők egymással.

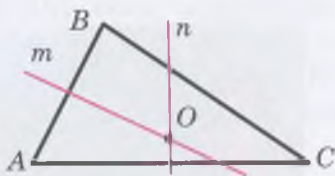
179.\* Bizonyítsátok be, hogy az egybevágó háromszögekben a megfelelő oldalak súlyvonalai egyenlők egymással.

180.\* Az  $ABC$  háromszög  $AM$  súlyvonalának meghosszabbítására felmértek egy  $MK$  szakaszt, melynek hossza az  $AM$  szakasz hosszával egyenlő. Határozzátok meg a  $K$  pont és a  $C$  csúcs közötti távolságot, ha  $AB = 6$  cm.

181.\* Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok az  $O$  pontban metszik és felezik egymást. Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = BAD\Delta$ .



146. ábra



147. ábra

182.\* A 147. ábrán az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $AC$  oldalainak a felezőmerőlegesei az  $m$  és  $n$  egyenesek. Bizonyítsátok be, hogy az  $O$  pont a háromszög minden csúcsától egyenlő távolságra lesz.

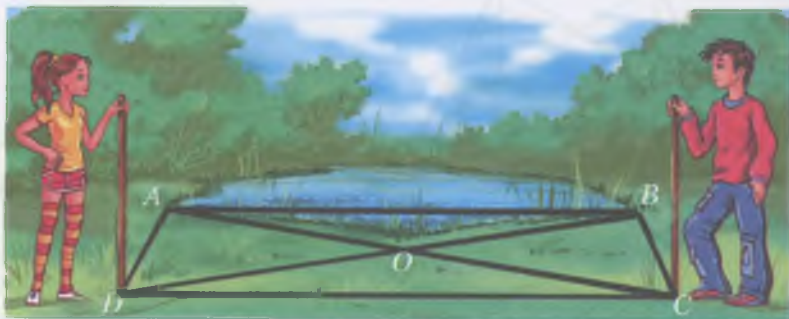


- 183.\* Ahhoz, hogy meghatározzuk a  $B$  pont és a folyó másik partján lévő  $A$  harangtorony közötti távolságot (148. ábra), mérőszalag és asztrolábium használatával megjelölték a helyszínen a  $C$ ,  $D$  és  $E$  pontokat úgy, hogy a  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontok egy egyenesre illeszkedjenek, és a  $C$  pont legyen a  $BD$  szakasz felezőpontja. Aztán megjelölték az  $AE$  egyenest, mely a  $C$  ponthoz illeszkedik,  $\angle ABC = \angle CDE$ . Majd a  $CDE$  háromszög egyik oldalát megmérve meghatározták a  $B$  és az  $A$  pontok közötti távolságot. Melyik oldalát mérték meg? Feleleteteket indokoljátok meg.



148. ábra

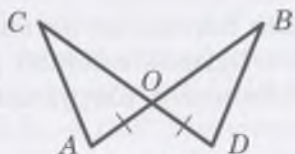
- 184.\* A tó szélességének meghatározására (149. ábra) a partján megjelölték az  $A$  és  $B$  pontokat, aztán a  $C$ ,  $D$  és  $O$  pontokat úgy, hogy az  $O$  pont az  $AC$  és a  $BD$  szakaszok közös felezőpontja legyen. Hogyan lehet meghatározni a tó szélességét? Feleleteteket indokoljátok meg.



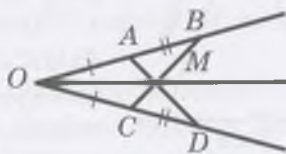
149. ábra



- 185.\*\* Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát egyik oldala, az ehhez az oldalhoz húzott súlyvonala, valamint az adott oldal és a súlyvonal közötti szög alapján.
- 186.\*\* Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát egyik oldala, az oldalon fekvő szöge és az adott szög szögfelezője alapján.
- 187.\*\* Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát a szöge, az adott szög szögfelezője valamint a szögfelező és a háromszög oldala közötti szög alapján. A háromszögnek azt az oldalát számítjuk, melyhez a szögfelezőt húztuk.
- 188.\*\* Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalának felezőmerőlegese az  $AB$  oldalt a  $D$  pontban metszi. Határozzátok meg az  $AD$  szakasz hosszát, ha  $CD = 4$  cm,  $AB = 7$  cm.
- 189.\*\* Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalának felezőmerőlegese a  $BC$  oldalt egy  $M$  pontban metszi. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalának hosszát, ha  $BC = 16$  cm, az  $AMC$  háromszög kerülete pedig 26 cm.
- 190.\*\* A 150. ábrán  $OA = OD$ . Adjatok hozzá a feladathoz még egy feltételt, hogy az  $AOC$  és  $DOB$  háromszögek egybevágók legyenek: 1) a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján;  
2) a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján.
- 191.\*\* Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok az  $O$  pontban metszik és metszéspontjukban felezik egymást. Az  $AC$  szakaszon felvettek egy  $M$  pontot, a  $BD$  szakaszon pedig egy  $K$  pontot úgy, hogy  $AM = BK$ . Bizonyítsátok be: 1)  $OM = OK$ ; 2) az  $M$ ,  $O$  és  $K$  pontok egy egyenesre illeszkednek.
- 192.\*\* Az  $O$  csúcsú szög egyik szárán (151. ábra) megjelölték az  $A$  és  $B$  pontokat, a másikon pedig a  $C$  és a  $D$  pontokat úgy, hogy  $OA = OC$ ,  $OB = OD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $OM$  a  $BOD$  szög szögfelezője, ahol az  $M$  pont az  $AD$  és  $BC$  szakaszok felezőpontja.



150. ábra



151. ábra



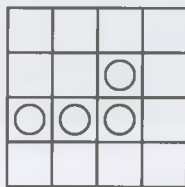
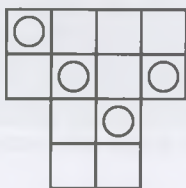
## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

193. Igaz-e az állítás: ha három pontot páronként összekötünk egy egyenessel, akkor három egyenest kapunk?
194. Az  $AOB$  és  $BOC$  szögek megfelelő szögfelezői az  $OD$  és  $OF$  félegyenese,  $AOD\angle : FOC\angle = 2 : 7$ . Határozzátok meg az  $AOD$  és  $FOC$  szögeket.



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

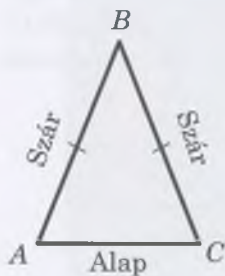
195. A 152. ábrán látható alakzatokat a rácsvonalak mentén vágjátok négy olyan egybevágó részre, hogy mindegyikben csak egy kör legyen.



152. ábra

## 9. Az egyenlő szárú háromszög és tulajdonságai

**Meghatározás.** Azt a háromszöget, melynek két oldala egyenlő, **egyenlő szárú háromszög-nek** nevezzük.



153. ábra

A 153. ábrán az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög látható, melyben  $AB = BC$ .

Az egyenlő szárú háromszög egyenlő oldalait **száraknak**, a harmadik oldalát pedig az egyenlő szárú háromszög **alapjának** nevezzük.

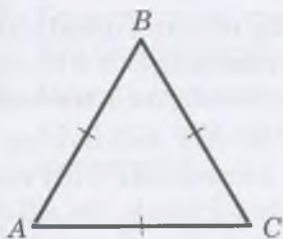
Szárainak közös pontját az **egyenlő szárú háromszög csúcsának** nevezzük (a  $B$  pont



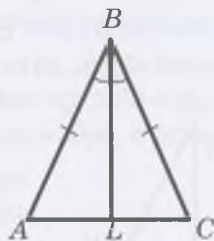
a 153. ábrán). A  $B$  szöget a háromszög **csúcsnál lévő szögének** (szárszögének), az  $A$  és  $C$  szögeket pedig az egyenlő szárú háromszög **alapnál lévő szögeinek** nevezzük.

**Meghatározás.** Azt a háromszöget, melynek minden oldala egyenlő, **egyenlő oldalú háromszögnek** nevezzük.

A 154. ábrán egy  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög látható. Az egyenlő oldalú háromszög az egyenlő szárú háromszögnek egy speciális esete.



154. ábra



155. ábra

**9.1. tétel (az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai).** Az egyenlő szárú háromszögnek: 1) az alapon fekvő szögei egyenlők; 2) az alapra bocsátott szögfelezője a háromszög súlyvonala és magassága is.

**Bizonyítás:** ☺ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  egyenlő szárú háromszöget, melyben  $AB = BC$ , a  $BL$  szakasz a háromszög szögfelezője (155. ábra). Be kell bizonyítani, hogy  $\angle A = \angle C$ ,  $AL = LC$ ,  $BL \perp AC$ .

Az  $ABL$  és  $CBL$  háromszögekben  $BL$  közös oldal,  $\angle ABL = \angle CBL$ , mivel a feltétel szerint a  $BL$  szakasz az  $ABC$  szög szögfelezője, az  $AB$  és  $BC$  szakaszok egyenlők, mint az egyenlő szárú háromszög szárai. Tehát  $ABL\Delta = CBL\Delta$ , a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Ebből az alábbi következtetéseket lehet levonni: 1)  $\angle A = \angle C$ ; 2)  $AL = LC$ ; 3)  $\angle ALB = \angle CLB$ .

Mivel az  $AL$  és  $LC$  szakaszok egyenlők, ezért a  $BL$  szakasz az  $ABC$  háromszög súlyvonala.

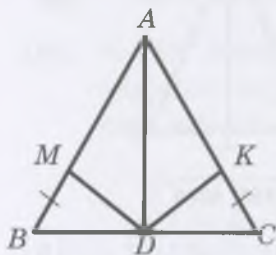
Mivel az  $ALB$  és  $CLB$  szögek mellékszögek, ezért  $\angle ALB + \angle CLB = 180^\circ$ . Figyelembe véve azt, hogy az  $\angle ALB = \angle CLB$  azt kapjuk, hogy  $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$ . Tehát a  $BL$  szakasz az  $ABC$  háromszög magassága. ▲



A 9.1. tételből következik, hogy:

- 1) *a háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek helyezkednek el;*
- 2) *az egyenlő szárú háromszögben a csúcsból az alaphoz húzott szögfelező egyben magasság és súlyvonal is;*
- 3) *az egyenlő oldalú háromszögekben minden szög egyenlő;*
- 4) *az egyenlő oldalú háromszögekben a csúcsból húzott szögfelező egyben magasság és súlyvonal is.*

**Meghatározás.** Ha a háromszög minden oldala különböző hosszúságú, akkor az ilyen háromszöget **különböző oldalú háromszögnek** nevezzük.



156. ábra

**Feladat.** Az  $AD$  szakasz az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög súlyvonala, amelyet az alaphoz húztak. Az  $AB$  és  $AC$  oldalakon jelölték az  $M$  és  $K$  pontokat úgy, hogy  $BM = CK$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AMD$  és  $AKD$  háromszögek egybevágóak.

**Megoldás.** Az  $M$  pont az  $AB$  szakaszra illeszkedik, a  $K$  pont pedig az  $AC$ -re,  $AB = AM + BM$ ,  $AC = AK + CK$  (156. ábra).

Mivel  $AB = AC$  és  $BM = CK$ , ezért  $AM = AK$ .

A  $BAD$  és  $CAD$  szögek egyenlők, mivel az egyenlő szárú háromszög alaphoz bocsátott súlyvonala egyúttal szögfelező is.

Megjegyezzük, hogy  $AD$  az  $AMD$  és  $AKD$  háromszögek közös oldala.

Tehát az  $AMD$  és  $AKD$  háromszögek egybevágóak a két oldal és közbezárt szögük alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának az első ismertetőjele alapján. ●



1. Milyenek lehetnek a háromszögek oldalaik szerint?
2. Milyen háromszögeket nevezünk egyenlő szárúaknak? Egyenlő oldalúaknak? Különböző oldalúaknak?
3. Az egyenlő szárú háromszög mely oldalait nevezzük száraznak?



4. Az egyenlő szárú háromszög mely oldalát nevezzük alapnak?
5. Fogalmazzatok meg az egyenlő szárú háromszög szögeinek tulajdonságát.
6. Fogalmazzatok meg az egyenlő szárú háromszög alaphoz húzott szögfelezőjének tulajdonságát.
7. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a háromszögnek az egyenlő oldalaival szemközti szögei?
8. Fogalmazzatok meg az egyenlő oldalú háromszög szögeinek tulajdonságát.
9. Milyen tulajdonsággal rendelkezik az egyenlő oldalú háromszög egy csúcsából húzott szögfelezője, magassága és súlyvonala?



### GYAKORLATI FELADATOK

196.<sup>o</sup> Rajzoljatok:

- 1) különböző oldalú hegyesszögű háromszöget;
- 2) egyenlő szárú derékszögű háromszöget;
- 3) egyenlő szárú tompaszögű háromszöget.

197.<sup>o</sup> Rajzoljatok:

- 1) különböző oldalú derékszögű háromszöget;
- 2) különböző oldalú tompaszögű háromszöget.

198.<sup>o</sup> Rajzoljatok egyenlő szárú háromszöget, melynek szára 3 cm, csúcsszöge pedig: 1) hegyesszög; 2) derékszög; 3) tompaszög. Az így kapott háromszögekben a száraihoz húzzátok meg a magasságait.

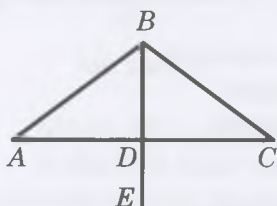


### GYAKORLATOK

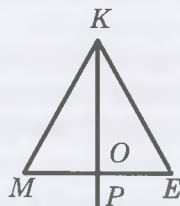
- 199.<sup>o</sup> 1) Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög területét, ha az alapja 13 cm, a szára pedig 8 cm.  
2) Az egyenlő szárú háromszög területe 39 cm, az alapja 15 cm. Határozzátok meg a szárainak hosszát.



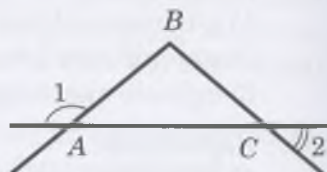
- 200.° Az egyenlő szárú háromszög kerülete 28 cm, a szára pedig 10 cm. Határozzátok meg az alapjának hosszát.
- 201.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalait, ha a kerülete 32 cm, az alapja pedig 5 cm-rel nagyobb, mint a szára.
- 202.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalait, ha a kerülete 54 cm, az alapja pedig 4-szer kisebb, mint a szára.
- 203.° Az  $AC$  alapú  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben  $\angle BCA = 40^\circ$ ,  $\angle ABC = 100^\circ$ ,  $BD$  pedig súlyvonal. Határozzátok meg az  $ABD$  háromszög szögeit.
- 204.° A 157. ábrán  $AB = BC$ ,  $BD$  az  $ABC$  háromszög súlyvonala,  $\angle ABD = 53^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABC$  és  $ADE$  háromszög szögeit.
- 205.° A 158. ábrán  $MK = KE$ ,  $OE = 6$  cm,  $\angle MKE = 48^\circ$ ,  $\angle POE = 90^\circ$ . Határozzátok meg az  $ME$  oldal hosszát, és az  $MKO$  szöget.
- 206.° A 159. ábrán  $AB = BC$ ,  $\angle A = 140^\circ$ . Határozzátok meg a 2-es szöget.



157. ábra

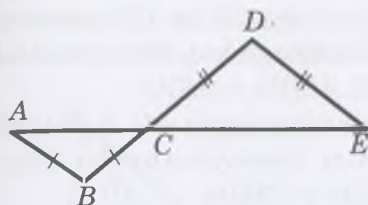


158. ábra

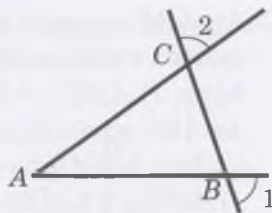


159. ábra

- 207.° Az egyenlő szárú háromszög csúcsszöge  $68^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög szára és az alaphoz húzott súlyvonala közötti szöget.
- 208.° Az egyenlő szárú háromszög csúcsánál lévő szögének mellékszöge  $76^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög szára és az alaphoz húzott magassága közötti szöget.
- 209.° A 160. ábrán  $AB = BC$ ,  $DC = DE$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\angle A = \angle E$ .
- 210.° Az  $A$  szög szarait a  $B$  és  $C$  pontokban metsző egyenes úgy metszi ezeket, hogy  $\angle AB = \angle BC$  (161. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $\angle 1 = \angle 2$ .



160. ábra



161. ábra

211.° A 162. ábrán  $AO = CO$ ,  $\angle AOB = \angle COB$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.

212.° Az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú, melynek az alapja  $AC$ ,  $BD$  a háromszög szögfelezője,  $DM$  pedig a  $BDC$  háromszög szögfelezője. Határozzátok meg az  $ADM$  szöget.

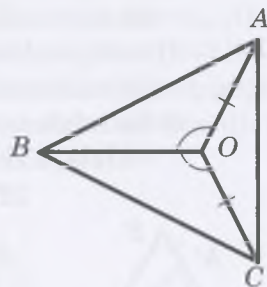
213.° Az egyik tanuló azt állítja, hogy az adott háromszög egyenlő szárú, a másik pedig azt, hogy ez a háromszög egyenlő oldalú.

1) Előfordulhat-e, hogy mindkét tanuló igazat mond?

2) Milyen esetben lesz csak az egyiknek igaza, és melyiknek?

214.° Alkalmazva a háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit, bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságát száruk és a csúcsnál lévő szögük egyenlősége alapján.

215.° Alkalmazva a háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit, bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságát alapjuk és a mellette lévő szögük egyenlősége alapján.



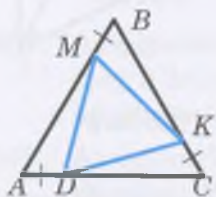
162. ábra

216.° Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AC$  alapján úgy vették fel az  $M$  és  $K$  pontokat, hogy az  $M$  pont az  $A$  és  $K$  pontok közé esik, és eközben  $AM = CK$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $MBK$  háromszög egyenlő szárú.

217.° Az  $MKE$  háromszögben ismert, hogy  $MK = ME$ . A  $KE$  oldalán úgy jelölték az  $F$  és  $N$  pontokat, hogy az  $N$  pont az  $F$  és  $E$  közé került, eközben  $\angle KMF = \angle EMN$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\angle MFN = \angle MNF$ .



- 218.\* Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $CA$  és  $CB$  száraitra felmérték a  $CK$  és  $CM$  egyenlő szakaszokat. Bizonyítsátok be, hogy: 1)  $AMC\Delta = BKC\Delta$ ; 2)  $AMB\Delta = BKA\Delta$ .
- 219.\* Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög alapja  $AC$ . A  $BD$  oldalfelezőjén felvettek egy  $M$  pontot. Bizonyítsátok be, hogy :  
1)  $AMB\Delta = CMB\Delta$ ; 2)  $AMD\Delta = CMD\Delta$ .
- 220.\* Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alap végpontjaiból húzott szögfelezői egyenlők egymással.
- 221.\* Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszögben a szárakhoz húzott oldalfelezők egyenlők egymással.
- 222.\* Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög oldalainak a felezőpontjai egy egyenlő szárú háromszög csúcsai lesznek.
- 223.\* Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög harmadik oldalát, ha a két oldalának a hossza 7 cm és 4 cm. Hány megoldása lesz a feladatnak?
- 224.\* Az egyenlő szárú háromszög egyik oldala 4 cm. Határozzátok meg a másik két oldalát, ha a háromszög kerülete 14 cm.
- 225.\* Igaz-e a következő állítás:  
1) az egyenlő szárú háromszögben a szögfelező magasság és súlyvonal is egyben;  
2) az egyenlő oldalú háromszögben a szögfelező magasság és súlyvonal is egyben;  
3) ha a háromszög kerülete 3-szor nagyobb, mint az egyik oldala, akkor ez a háromszög egyenlő oldalú?



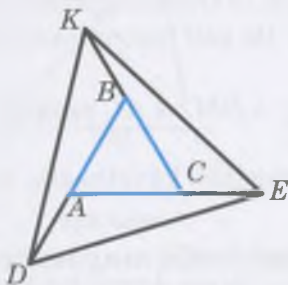
163. ábra

226.\* Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög (163. ábra) oldalain úgy jelölték az  $M$ ,  $K$  és  $D$  pontokat, hogy  $AD = BM = CK$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $MKD$  háromszög egyenlő oldalú.

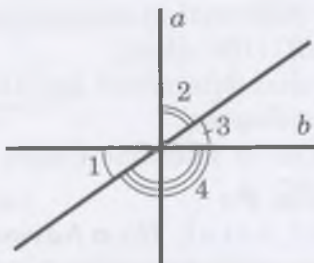
227.\*\* Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  oldalainak meghosszabbításán  $AD$ ,  $BK$  és  $CE$  egyenlő szakaszokat mértek fel. Bizonyítsátok be, hogy a  $DEK$  háromszög egyenlő oldalú.

228.\*\* Az egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm. Ennek az oldalnak a súlyvonala a háromszöget két olyan háromszögre osztja, hogy az egyik kerülete 6 cm-rel kisebb a másik há-

romszög kerületénél. Határozzátok meg az adott háromszög szárát. Hány megoldása lesz a feladatnak?



164. ábra



165. ábra



### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

229. A 165. ábrán  $a \perp b$ ,  $1\angle = 35^\circ$ . Határozzátok meg a 2-es, 3-as és 4-es szögeket.
230. Az  $a$  hosszúságú  $AB$  szakaszt a  $C$  és  $D$  pontok három,  $AC$ ,  $CD$  és  $DB$  szakaszra osztják úgy, hogy  $AC = 2CD$ ,  $CD = 2DB$ . Határozzátok meg: 1) az  $A$  pont és a  $CD$  szakasz felezőpontja közötti távolságot; 2) az  $AC$  és  $DB$  szakaszok felezőpontjai közötti távolságot.



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

231. Rajzoljatok egy olyan hatszöget, melyet egy vágással két háromszögre lehet osztani.

## 10. Az egyenlő szárú háromszögek ismertetőjelei

Az előző pontban megvizsgáltuk az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságait. De hogyan lehet a háromszögek között felismerni az egyenlő szárúakat? Erre a kérdésre felelnek a következő ismertetőjel-tételek.



**10.1. tétel.** *Ha a háromszög súlyvonala magassága is egyben, akkor a háromszög egyenlő szárú.*

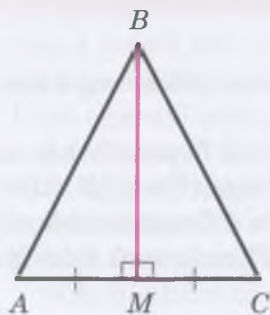
*Bizonyítás.* ☉ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget, melyben a  $BM$  súlyvonal és magasság is egyben. Be kell bizonyítani, hogy  $AB = BC$  (166. ábra).

A tétel feltételéből következik, hogy a  $BM$  az  $AC$  szakasz felezőmerőlegese.

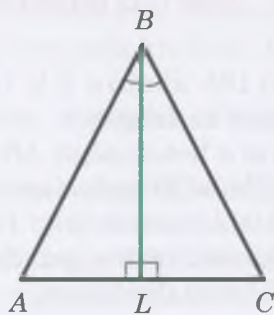
Ekkor a felezőmerőleges tulajdonságából következik, hogy  $AB = BC$ . ▲

**10.2. tétel.** *Ha a háromszög szögfelezője magassága is egyben, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú.*

*Bizonyítás.* ☉ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget, melyben a  $BL$  szögfelező és magasság is. Be kell bizonyítani, hogy  $AB = BC$  (167. ábra).



166. ábra

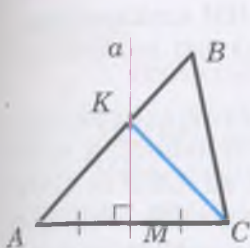


167. ábra

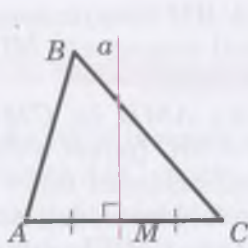
Az  $ABL$  és  $CBL$  háromszögeknek  $BL$  a közös oldala,  $ABL\angle = CBL\angle$  (mivel  $BL$  az  $ABC$  szög szögfelezője),  $ALB\angle = CLB\angle = 90^\circ$  (mivel  $BL$  a háromszög magassága). Tehát az  $ABL$  és  $CBL$  háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. Ezért az  $AB$  és  $BC$  oldalak egyenlők, mint az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai. ▲

**10.3. tétel.** *Ha a háromszög két szöge egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.*

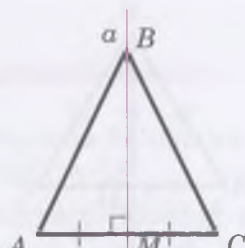
*Bizonyítás.* ☉ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget, melyben  $A\angle = C\angle$ . Be kell bizonyítani, hogy  $AB = BC$ .



168. ábra



169. ábra



170. ábra

Meghúzzuk az  $AC$  oldal  $a$  felezőmerőlegesét. Bebizonyítjuk, hogy az  $a$  egyeneshez a  $B$  csúcs illeszkedik.

Feltételezzük, hogy ez nincs így. Ekkor az  $a$  egyenes egy belső pontjában metszi az  $AB$  (168. ábra) vagy a  $BC$  szakaszt (169. ábra).

Vizsgáljuk meg az első esetet. Legyen  $K$  az  $A$  egyenes és a  $KB$  oldal metszéspontja. Ekkor a felezőmerőleges tulajdonsága alapján (8.2. tétel)  $AK = CK$ . Tehát az  $AKC$  háromszög egyenlő szárú lesz, ebből következik, hogy  $\angle A = \angle ACK$ . A feltétel szerint,  $\angle A = \angle ACB$ . Ebből kapjuk, hogy  $\angle ACB = \angle ACK$ , ami ellentmond a szögmérték alaptulajdonságának (3. pont).

Hasonlóan ellentmondásra jutunk a második esetben is (169. ábra).

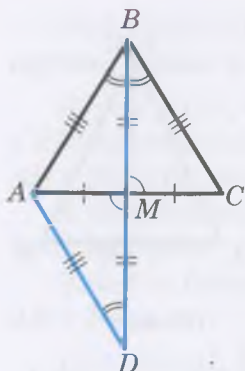
Tehát, a mi feltételezésünk nem helyes. Az  $a$  egyeneshez a  $B$  pont illeszkedni fog (170. ábra). Ekkor a felezőmerőleges tulajdonsága szerint  $BA = BC$ . ▲

Ebből a tételből következik:

- 1)  $a$  háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak fekszenek;
- 2) ha a háromszögben minden szög egyenlő, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

**10.4. tétel.** Ha a háromszög súlyvonala egyben a szögfelezője is, akkor a háromszög egyenlő szárú.

**Bizonyítás.** ☉ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget, melyben a  $BM$  súlyvonal oldalfelező és szögfelező is. Be kell bizonyítani, hogy  $AB = BC$ .



171. ábra

A  $BM$  félegyenesen, a  $BM$  szakasz hosszával megegyező  $MD$  szakaszt mérünk fel (171. ábra).

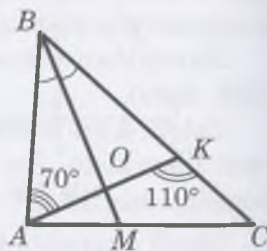
Az  $AMD$  és  $CMB$  háromszögekben:  $AM = MC$  (mivel a  $BM$  oldalfelező); a szerkesztés alapján  $BM = MD$ , az  $AMD$  és  $CMB$  szögek csúcsszögek, ezért egyenlők. Tehát az  $AMD$  és  $CMB$  háromszögek a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján egybevágóak. Tehát az  $AD$  és  $BC$  oldalai, az  $ADM$  és  $CBM$  szögeik egyenlők, mint az egybevágó háromszögek megfelelő elemei.

Mivel a  $BD$  az  $ABC$  szög szögfelezője, ezért  $ABM\angle = CBM\angle$ . Mivel  $CBM\angle = ADM\angle$ , ezért az  $ABM\angle = ADM\angle$ . Ekkor az egyenlő szárú háromszögek ismertetőjele (10.3. tétel) alapján azt kaptuk, hogy a  $DAB$  háromszög egyenlő szárú, innen következik, hogy  $AD = AB$ . És mivel már bizonyította van, hogy  $AD = BC$ , ezért  $AB = BC$ . ▲

**Feladat.** Az  $ABC$  háromszögben megrajzolták a  $BM$  szögfelezőt (172. ábra).  $BAK\angle = 70^\circ$ ,  $AKC\angle = 110^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BM \perp AK$ .

**Megoldás.** Mivel a  $BKA$  és  $AKC$  szögek mellékszögek, ezért  $BKA\angle = 180^\circ - AKC\angle$ . Ekkor  $BKA\angle = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ .

Tehát az  $ABK$  háromszögben megkaptuk, hogy  $BAK\angle = BKA\angle = 70^\circ$ . Ezért az  $ABK$  háromszög egyenlő szárú, melynek  $AK$  az alapja, szögfelezője pedig  $BO$  ( $O$  – az  $AK$  és a  $BM$  metszéspontja), amely magassága is egyben, tehát  $BM \perp AK$ . ●



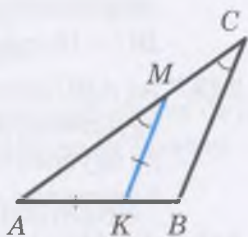
172. ábra



1. Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszög ismertetőjelét.
2. Milyen összefüggés van a háromszögek egyenlő oldalai és egyenlő szögei között?
3. Mit állíthatunk arról a háromszögről, melynek a szögei egymással egyenlők.

## GYAKORLATOK

- 232.° Az  $ABC$  háromszög  $BK$  súlyvonala merőleges az  $AC$  oldalra. Határozzátok meg az  $ABC$  szögét, ha  $ABK\angle = 25^\circ$ .
- 233.° Az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalának felezőmerőlegeséhez a  $B$  csúcs illeszkedik. Határozzátok meg a  $C$  szöget, ha  $A\angle = 17^\circ$ .
- 234.° Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $ACB\angle = 90^\circ$ ,  $A\angle = B\angle = 45^\circ$ ,  $CK$  pedig a háromszög magassága. Határozzátok meg az  $AB$  oldalát, ha  $CK = 7$  cm.
- 235.° A 173. ábrán az  $AMK\angle = ACB\angle$ ,  $AK = MK$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.
- 236.° Az egyenes merőleges az  $A$  szög szögfelezőjére, és  $B$  és  $C$  pontokban metszi a szárait. Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.
- 237.° Az  $ABC$  háromszögben az alapon fekvő szögek szögfelezői  $AM$  és  $CK$  félegyenese, amelyek az  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az  $AOC$  háromszög egyenlő szárú.
- 238.° Az  $ABC$  háromszögben a  $BK$  szögfelező egyben a háromszög magassága is. Határozzátok meg a háromszög területét, ha az  $ABK$  háromszög területe 16 cm és a  $BK = 5$  cm.
- 239.° Igazak-e a következő állítások:
- 1) ha az egy csúcsból húzott súlyvonal és a szögfelező nem esik egybe, akkor az ilyen háromszög nem lesz egyenlő szárú;
  - 2) ha a háromszög szögfelezője a szemközti oldalát felezi, akkor ez a háromszög egyenlő szárú?

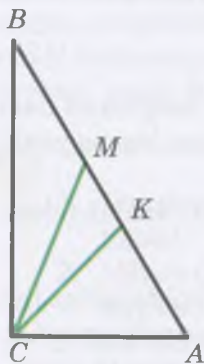


173. ábra

- 240.° Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $BC$  és  $AB$  oldalaihoz húzott  $AE$  és  $CF$  oldalfelezők az  $M$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az  $AMC$  háromszög egyenlő szárú.



- 241.\*** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AB$  és  $BC$  megfelelő oldalain felvették az  $M$  és  $K$  pontokat úgy, hogy  $AB = CK$ . Az  $AK$  és  $CM$  szakaszok az  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az  $AOC$  háromszög egyenlő szárú.
- 242.\*\*** Az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $BC$  megfelelő oldalain felvették a  $D$  és  $E$  pontokat úgy, hogy  $EAC\angle = DCA\angle$ . Az  $AE$  és  $CD$  szakaszok az  $F$  pontban metszik egymást, és  $DF = EF$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.
- 243.\*\*** Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalának  $D$  felezőpontján át az  $ABC$  és  $BAC$  szögek szögfelezőire merőleges egyeneseket húztak. Ezek az egyenesek az  $AC$  és  $BC$  oldalakat megfelelően  $M$  és  $K$  pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy  $AM = BK$ .
- 244.\*\*** Az  $ABC$  háromszög  $AM$  oldalfelezője merőleges a  $BK$  szögfelezőre. Határozzátok meg az  $AB$  oldal hosszát, ha  $BC = 16$  cm.
- 245.\*\*** Az  $ABC$  háromszögben a  $BD$  oldalfelező merőleges egy olyan egyenesre, amelyre a háromszög  $A$  csúcsa illeszkedik, és ez az egyenes felezi az oldalfelezőt. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $AC$  oldalai hosszának az arányát.
- 246.\*\*** Az  $ABC$  háromszögben adott, hogy  $C\angle = 90^\circ$ ;  $A\angle = 67,5^\circ$ ,  $B\angle = 22,5^\circ$ ,  $CK$  az  $ABC$  háromszög szögfelezője,  $CM$  pedig a  $BCK$  háromszög szögfelezője (174. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az  $M$  pont az  $AB$  oldal felezőpontja lesz.



174. ábra

**247.\*** A háromszög oldalainak centiméterekben mért hossza három egymást követő természetes szám. Határozzátok meg az adott háromszög oldalait, ha az egyik oldalfelezője merőleges az egyik szögfelezőjére.

**248.\*** Az  $ABC$  háromszögben adott, hogy  $AB = 3$  cm,  $AC = 6$  cm. A  $BC$  oldalán úgy jelöltek egy  $M$  pontot, hogy  $CM = 1$  cm. Az  $M$  ponthoz illeszkedő egyenes merőleges az  $ACB$  szög szögfelezőjére, és az  $AC$  szakaszt egy  $K$  pontban metszi. Ismert továbbá, hogy



a  $K$  pontra illeszkedő egyenes, amely merőleges a  $BAC$  szög szögfelezőjére, az  $AB$  oldalt egy  $D$  pontban metszi. Határozzátok meg a  $BD$  szakasz hosszát.



## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

249. Az egyenesen egymás után jelölték meg az  $A, B, C, D, E$  és  $F$  pontokat úgy, hogy  $AB = BC = CD = DE = EF$ . Határozzátok meg az  $AB : CF$ ,  $AB : BF$ ,  $BD : AE$  arányok értékét.
250. Határozzátok meg két egyenes metszésekor keletkezett szögeket, ha az egyik  $42^\circ$ -kal nagyobb, mint a másik szög fele.



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

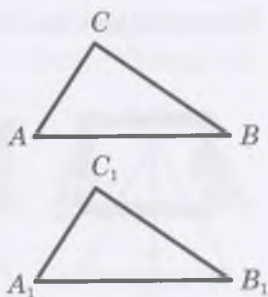
251. A  $4 \times 9$  méretű téglalapot vágjátok két egyenlő részre úgy, hogy ezekből a részekből egy négyzetet lehessen kirakni.

## 11. A háromszög egybevágóságának harmadik ismertetőjele

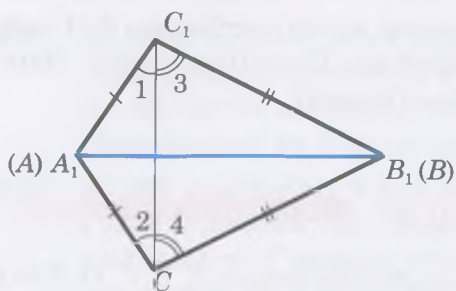
**11.1. tétel (a háromszög egybevágóságának harmadik ismertetőjele: három oldal alapján).** Ha az egyik háromszög három oldala megfelelően egyenlő a másik háromszög három oldalával, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.

*Bizonyítás.* ☉ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögeket (175. ábra), melyekben  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  és  $CA = C_1A_1$  (ezek az egyenlőségek azt mutatják, hogy a háromszögek mely oldalai lesznek a megfelelő oldalak). Bebonyítjuk, hogy  $ABC \Delta = A_1B_1C_1 \Delta$ .

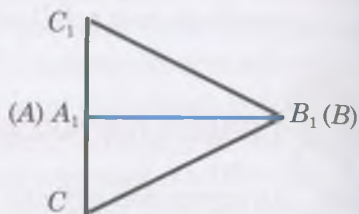
Úgy helyezzük el az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögeket, hogy az  $A$  csúcsa az  $A_1$  csúcsra, a  $B$  csúcs pedig a  $B_1$ -re kerüljön,



175. ábra



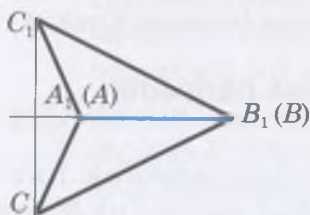
176. ábra



177. ábra

a  $C$  és  $C_1$  csúcsok pedig az  $AB$  egyeneshez viszonyítva különböző félsíkokhoz illeszkednek (176. ábra). Meghúzzuk a  $CC_1$  szakaszt. Mivel  $AC = A_1C$ , ezért a  $C_1A_1C$  háromszög egyenlő szárú lesz, tehát  $1\angle = 2\angle$ . Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy  $3\angle = 4\angle$ .

Tehát az  $A_1C_1B_1\angle = A_1CB_1\angle$ . Ekkor az  $A_1C_1B_1\Delta$  és  $A_1CB_1\Delta$  egybevágóak a két oldaluk és közbezárt szögük alapján, vagyis az első ismertetőjel alapján.



178. ábra

Ezzel a bizonyítást akár befejeztnek tekinthetjük. De mi csak azt az esetet vizsgáltuk, amikor a  $CC_1$  szakaszt az  $A_1B_1$  szakasz egy belső pontban metszi. A valóságban a  $CC_1$  szakasz átmehet az  $A_1B_1$  szakasz egyik végpontján, például az  $A_1$  ponton (177. ábra), vagy az is előfordulhat, hogy az  $A_1B_1$  szakasszal nincs közös pontja (178. ábra).

Ezekben az esetekben a bizonyítás hasonló az előzőhöz. Végezzétek el önállóan. ▲



179. ábra



Távvezetékek oszlópai



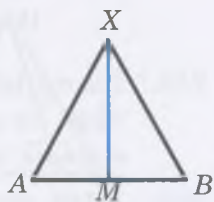
Kijevi tévétorony

**180. ábra. Merev szerkezetek**

A háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjeléből következik, hogy a *háromszög egy merev szerkezet*. Valóban, ha négy pálcát úgy kötünk össze, mint a 179. *a* ábra mutatja, akkor ez a szerkezet nem lesz merev (179. *b*, *c* ábrák). Ha még egy pálcát hozzáteszünk, akkor két háromszöget kapunk (179. *d* ábra), és a keletkezett szerkezet merev lesz. Ezt a tényt széleskörűen alkalmazzák a gyakorlatban (180. ábra).

**11.2. tétel.** *Ha a pont egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, akkor a szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik.*

**Bizonyítás.** ☉ Legyen az  $X$  pont egyenlő távolságra az  $AB$  szakasz végpontjaitól, vagyis  $XA = XB$  (181. ábra). Vizsgáljuk meg az  $AXM$  és  $BXM$  háromszögeket, ahol az  $M$  az  $AB$  szakasz felezőpontja. Ekkor az  $AXM \Delta = BXM \Delta$  a három oldal alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele alapján. Innen  $\angle AMX = \angle BMX$ . E szögek összege  $180^\circ$ , ezért mindegyikük  $90^\circ$ -kal egyenlő. Tehát az  $XM$  az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesese.

**181. ábra**



Megjegyezzük, hogy csak azt az esetet vizsgáltuk meg, amikor az  $X$  pont nem illeszkedik az  $AB$  szakaszra. Ha az  $X$  pont az  $AB$  szakaszra illeszkedik, akkor egybeesik az  $AB$  szakasz felezőpontjával, tehát a felezőmerőlegesre illeszkedik. ▲

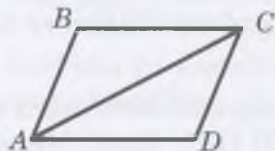


1. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjelét.
2. Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól?

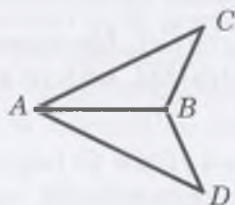


## GYAKORLATOK

- 252.°** A 182. ábrán  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $B\angle = D\angle$ .
- 253.°** A 183. ábrán  $AC = AD$ ,  $BC = BD$ . Határozzátok meg a  $BAC$  szöget, ha  $BAD\angle = 25^\circ$ .
- 254.°** Bizonyítsátok be, hogy két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha az egyik háromszög szára és alapja megfelelően egyenlő a másik háromszög szárával és alapjával.

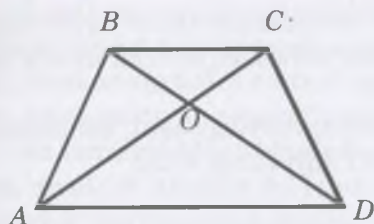


182. ábra

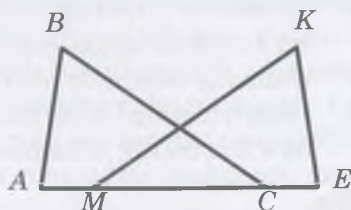


183. ábra

- 255.°** Bizonyítsátok be, hogy két egyenlő oldalú háromszög egybevágó, ha az egyik háromszög oldalai megfelelően egyenlők a másik háromszög oldalaival.
- 256.°** A 184. ábrán  $ABC\Delta = DCB\Delta$ , miközben  $AB = CD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABD\Delta = DCA\Delta$ .



184. ábra



185. ábra

**257.°** A 184. ábrán  $AB = CD$ ,  $AC = BD$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $BOC$  háromszög egyenlő szárú.

**258.°** Az  $M$  és  $N$  pontok az  $AB$  szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra vannak. Bizonyítsátok be, hogy az  $MN$  egyenes az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese.

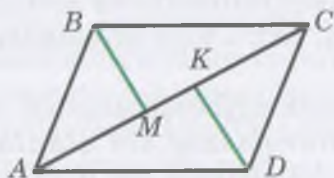
**259.°** A 185. ábrán  $AB = KE$ ,  $BC = KM$ ,  $AM = EC$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $AMK\angle = BCE\angle$ .

**260.°** A 186. ábrán  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ ,  $BM$  az  $ABC$  szög szögfelezője,  $DK$  pedig az  $ADC$  háromszög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy  $ABM\Delta = CDK\Delta$ .

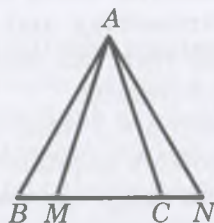
**261.°** Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok az  $O$  pontban metszik egymást úgy, hogy  $OA = OD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = DCB\Delta$ .

**262.°** A  $BD$  és  $B_1D_1$  szakaszok az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek megfelelő szögfelezői,  $AB = A_1B_1$ ,  $BD = B_1D_1$ ,  $AD = A_1D_1$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ .

**263.\*\*** Miki azt állítja, hogy sikerült egy olyan rajzot készítenie, melyen  $AB = AC$  és  $AM = AN$  (187. ábra). Vajon igaza van-e Mikinek?



186. ábra



187. ábra



- 264.\* Ki lehet-e jelenteni, hogy két háromszög akkor egybevágó, ha az egyik háromszög minden oldala egyenlő a másik háromszög valamely oldalával?
- 265.\* Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát, két oldaluk és a harmadik oldalhoz húzott súlyvonal által.



### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

266. Az  $AB$  szakaszon úgy vették fel a  $C$  és  $D$  pontokat, hogy  $AC : BC = 7 : 8$ ,  $AD : BD = 13 : 17$ . Határozzátok meg az  $AB$  szakasz hosszát, ha a  $C$  és  $D$  pontok közötti távolság 2 cm.
267. Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok az  $O$  pontban metszik egymást. Az  $OM$  és  $OK$  félegyenese az  $AOC$  és  $BOC$  szögek megfelelő szögfelezői. Lehet-e az  $MOK$  szög derékszög?



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

268. A négyzetet az átlói mentén négy háromszögre vágták szét (188. ábra). A kapott háromszögekből rakjatok ki két négyzetet.



188. ábra

## 12. Tételek

A tankönyvben egyre szaporodik a tételek száma. Ez nem meglepő, mert a mértan többségében tételekből és azok bizonyításából áll.

Az általunk eddig bizonyított tételek két részből állnak. A tétel első részét (az, ami adva van) a tétel **feltételének** nevezzük, a második részt (az, amit bizonyítani kell) a tétel **következményének** nevezzük.

Például a 8.1. tétel (a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele) feltétele: **az egyik háromszög két oldala és közbezárt szöge egyenlő a másik háromszög két oldalával és közbezárt szögével**, a következménye pedig: **a háromszögek egybevágóak**.



A már ismert tételeket feltételesen két csoportra oszthatjuk: a **tulajdonság-tételekre** és az **ismertetőjel-tételekre**. Például az 1.1. tétel az egymást metsző egyenesek tulajdonságát adja meg, a 9.1. tétel pedig az egyenlő szárú háromszög tulajdonságát.

Az **ismertetőjel-tételek** adják meg azokat az ismertetőjeleket, amelyek alapján fel lehet ismerni az adott alakzatot, vagyis az egyik vagy a másik csoportba lehet azt besorolni.

A háromszögek egybevágóságának ismertetőjel-tételei meghatározzák azokat a feltételeket, amelyek alapján két háromszöget az egybevágó háromszögek csoportjába sorolhatunk. Például a 10.1. – 10.4. tételekben fogalmazódnak meg azok a feltételek, amelyek alapján az egyenlő szárú háromszögek felismerhetők.

Azokat a tételeket, amelyek az axiómákból vagy tételekből *közvetlenül* következnek, **következmény-tételeknek** vagy egyszerűen **következményeknek** nevezzük.

Például a háromszög egyenlő oldalaival szemközti szögek tulajdonsága a 9.1. tétel következménye.

Ha a 8.2. tételben – a felezőmerőleges tulajdonságáról szóló tételben – felcseréljük a feltételt a következménnyel, akkor a 11.2. tételt kapjuk. Azt a két tételt, amelyekben az egyik tételben a feltétel és a következmények felcserélésével megkapjuk a másik tételt, és fordítva, **kölcsönösen fordított (inverz)** tételeknek nevezzük. Ha az egyik tételt **egyenestételnek** nevezünk, akkor a másik lesz a **fordítottja (inverze)**.

Óvatosan kell eljárni a tételek feltétele és következménye felcserélésekor, mert nem mindig kapunk ilyenkor igaz állítást. Például a mellékszögek összegéről szóló 4.1. tétel fordítottja nem lesz igaz. Valóban, ha bármely két szög összege  $180^\circ$ , akkor ezek a szögek nem biztos, hogy mellékszögek.

Már tudjátok, hogy a tétel igaz voltát a logikus gondolatmenet által igazolják, vagyis bizonyítás útján.

Ennek a tankönyvnek az első tételét **indirekt módon** (az ellenkezőt állítva) bizonyítottuk. A módszer neve elárulja a bizonyítás lényegét. Feltételeztük az 1.1. tétel állításának az ellenkezőjét. A feltételezésből kiindulva logikus gondolatmenet által olyan tényt kaptunk, ami ellentmond az egyenesek alaptulajdonságának.

Az indirekt bizonyítási mód alkalmazásával bebizonyítottunk több tétel is, például az 5.1., 10.3. tételeket.



Nagyon fontos, hogy a tétel bizonyítása teljes legyen, vagyis minden lehetséges esetre kiterjedjen. A 11.1. tétel (a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele) bizonyítása során három lehetséges esetet kellett megvizsgálni.

A matematikai kultúra kialakításának legfontosabb része az a képesség, amely lehetővé teszi a bizonyítás minden részletének átlátását. Ha például a 8.2. tétel bizonyításánál nem vizsgáltuk volna külön azt az esetet, amikor az  $X$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja, akkor ebben az esetben az  $AXM$  és  $BXM$  háromszögek vizsgálata lehetetlen lenne.

A 10.4. tétel (az egyenlő szárú háromszög ismertetőjele) bizonyítása során a **kiegészítő szerkesztési módszert** alkalmaztuk: a rajzot olyan elemekkel egészítettük ki, melyekről a tétel feltételében nem esett szó. Ez a módszer nagyon sok feladat megoldása során alkalmazható, és sok tétel bizonyításakor is. Ezért nagyon fontos, hogy megtanuljuk észrevenni az optimális kisegítő szerkesztés lehetőségét, amellyel a kívánt eredmény elérhető.

Hogyan tehetünk szert geometriai szemléletre? Ez egy nem könnyű kérdés, amire nagyon nehéz válaszolni, vagy konkrét tanácsot adni. Mégis azt tanácsoljuk: először is ne legyetek közömbösek a geometria iránt, és szeressétek ezt a csodálatos tantárgyat; másodszor, nagyon sok feladatot oldjatok meg, hogy minél nagyobb tapasztalatra tegyetek szert. Mindehhez sok sikert és kitartást kívánunk!



1. Milyen két részből áll a tétel megfogalmazása?
2. Hogyan nevezzük azt a tételt, amely az alakzat tulajdonságainak felsorolásával teszi felismerhetővé az alakzatot?
3. Hogyan nevezzük azt a tételt, amely közvetlenül az axiómákból vagy más tételekből következik?
4. Hogyan nevezik az olyan tételpárt, amelyekben a feltétel és a következmény fel van cserélve?
5. Miben áll az indirekt bizonyítási mód?
6. A 1.1., 4.2., 5.1. és 8.3. tételek közül melyiket bizonyítják indirekt módon?
7. Miben áll a kisegítő szerkesztési módszer?



## GYAKORLATOK

269.° A 4.1., 8.2., 9.1., 10.3. és 11.2. tételekben nevezzétek meg a feltételt és a következményt.

270.° A 4.1., 8.2., 9.1., 10.3. és 11.2. tételek közül válasszátok ki: 1) a tulajdonság-tételeket; 2) az ismertetőjel-tételeket.

271.° Fogalmazzátok meg a következő állításokkal ellentétes állítást:

- 1) ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor a szögei egyenlők;
- 2) ha két szög csúcsszög, akkor a szögfelezői egymás kiegészítő félegyenesei;
- 3) ha két szög szögfelezői közötti szög derékszög, akkor ezek a szögek mellékszögek;
- 4) ha az egyik háromszög oldala és szemközti szöge megegyezik egy másik háromszög oldalával és szemközti szögével, akkor az ilyen háromszögek egybevágók.

Az előző állítások melyikére mondhatjuk, hogy:

- 1) az egyenes és a fordított állítás is igaz;
- 2) az egyenes állítás igaz, de a fordítottja hamis;
- 3) az egyenes állítás hamis, de a fordítottja igaz?

272.° Fogalmazzátok meg azt az állítást, amely fordítottja az adottnak:

- 1) ha a  $B$  pont az  $A$  és  $C$  pontok között fekszik, akkor  $AB + BC = AC$ ;
- 2) ha két háromszög nem egybevágó, akkor a területük sem egyenlő;
- 3) ha a szög fokmértéke nagyobb, mint  $90^\circ$ , akkor ez a szög tompaszög.

Az előző állításokra melyik lesz igaz:

- 1) az egyenes és a fordított állítás is igaz;
- 2) az egyenes állítás igaz, de a fordítottja hamis;
- 3) az egyenes állítás hamis, de a fordítottja igaz?



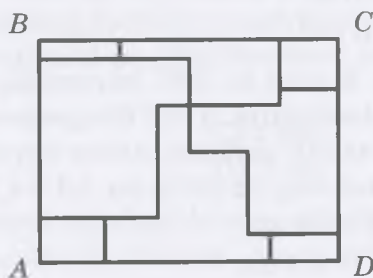
- 273.°** Fogalmazzatok meg azt az állítást, amely tagadja az adottat;
- 1) az  $AB$  szakasz metszi az  $m$  egyenest;
  - 2) az  $ABC$  szög fokmértéke nagyobb  $40^\circ$ -nál;
  - 3) két mellékszög közül legalább az egyik nem nagyobb  $90^\circ$ -nál;
  - 4) az  $OA$  és  $OB$  félegyenesek nem lesznek kiegészítő félegyenesek;
  - 5) a szakasznak csak egyetlen középpontja van.
- 274.°** Fogalmazzatok meg azt az állítást, amely tagadja az adottat;
- 1) az  $ABC$  szög nem derékszög;
  - 2) az  $MKE$  háromszög egyenlő szárú;
  - 3) az egyenes egy pontjába csak egy olyan egyenes húzható, amelyik merőleges az adottra;
  - 4) az  $AC$  félegyenes felezi a  $BAK$  szöget.
- 275.°** Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogyha a háromszög egyetlen magassága sem esik egybe az adott csúcsból bocsátott szögfelezővel, akkor ez a háromszög nem egyenlő szárú.
- 276.°** Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogyha az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $AC$  oldalai nem egyenlők, akkor a  $BD$  oldalfelezője nem lesz a háromszög magassága.
- 277.°** Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogyha két szög fokmértékének különbsége  $1^\circ$ -kal egyenlő, akkor ezek a szögek nem lehetnek mellékszögek.
- 278.°** Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogy a mellékszögek közül legalább az egyik kisebb, mint  $90^\circ$ .
- 279.°** Fogalmazzatok meg, és bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét a szára és a szárához húzott súlyvonala alapján.
- 280.°** Fogalmazzatok meg, és bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét az oldala, az adott oldalhoz húzott súlyvonala és a súlyvonal valamint az adott oldal által közbezárt szög alapján.
- 281.\*\*** Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát súlyvonala és azoknak a szögeknek alapján, amelyekre az súlyvonal felosztja a háromszög szögét.

**ISMÉTLŐ GYAKORLATOK**

282. Az egyenesen jelöljétek az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat. A pontok helyére tegyetek megfelelő relációs jelet a „ $<$ ”, „ $>$ ” vagy „ $=$ ” közül úgy, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:  
1)  $AB + BC \dots AC$ ;                      3)  $AC + BC \dots AB$ .  
2)  $AB + AC \dots BC$ ;
283. A mellékszögek egyikének szögfelezője a szögek közös szarával olyan szöget alkot, amely  $\frac{1}{3}$ -a a másik mellékszögnek. Határozzátok meg a mellékszögek fokmértékeit.

**FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL**

284. Az  $ABCD$  téglalap oldalai 4 cm és 3 cm. Határozzátok meg a téglalapban lévő szakaszok hosszának összegét (189. ábra).



189. ábra

**2. SZÁMÚ FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN**

1. A háromszög hegyesszögű, ha:
- A) szögei között nincs tompaszög;
  - B) mindegyik szöge kisebb a derékszögnél;
  - C) szögei között nincs derékszög;
  - D) mindegyik szöge kisebb, mint a tompaszög.



2. Ha a magasságvonál a háromszögön kívül esik, akkor ez a háromszög:
- derékszögű;
  - tompaszögű;
  - egyenlő oldalú;
  - hegyesszögű.
3. Két háromszög egybevágó, ha:
- az egyik háromszög két oldala egyenlő a másik háromszög két oldalával;
  - az egyik háromszög oldala és két szöge egyenlő a másik háromszög oldalával és két szögével;
  - az egyik háromszög két oldala és a szöge egyenlő a másik háromszög két oldalával és szögével;
  - az egyik háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és általuk közbezárt szöggel.
4. Hány egybevágó háromszögpár van a rajzon:
- 1;
  - 2;
  - 3;
  - 4?



5. Ismert, hogy az  $M$  pont az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalának felezőpontja. A  $BM$  félegyenesen a háromszögen kívül felmérték az  $ME$  szakaszt, amely egyenlő a  $BM$  szakasszal. Határozzátok meg az  $EC$ -t, ha  $AB = 4,2$  cm.
- 2,1 cm;
  - 4,2 cm;
  - 4,8 cm;
  - 8,4 cm.
6. Melyik igaz a következő állítások közül?
- az egyenlő szárú háromszög a különböző oldalú háromszög speciális esete;
  - az egyenlő oldalú háromszög a különböző oldalú háromszög speciális esete;
  - az egyenlő oldalú háromszög az egyenlő szárú háromszög speciális esete;
  - az egyenlő szárú háromszög az egyenlő oldalú háromszög speciális esete.



7. Melyik hamis a következő állítások közül?
- A) ha a háromszög magassága a szemközti oldalt egyenlő szakaszokra osztja, akkor ez a háromszög egyenlő szárú;
  - B) ha a háromszög egy csúcsból bocsátott súlyvonala és szögfelezője nem esik egybe, akkor ez a háromszög nem egyenlő szárú;
  - C) ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor bármelyik magasságának a hossza megegyezik bármelyik szögfelezőjének a hosszával;
  - D) ha a háromszög két szöge egyenlő, akkor a harmadik szögének szögfelezője a szemközti oldalt egyenlő részekre osztja.
8. A háromszög egyenlő oldalú, ha:
- A) az oldala háromszor kisebb, mint a kerülete;
  - B) minden oldala háromszor kisebb, mint a kerülete;
  - C) két magassága egyenlő;
  - D) két szögfelezője egyenlő.
9. Az  $ABC$  ( $AB = BC$ ) egyenlő szárú háromszög kerülete 16 cm. Az  $ABM$  háromszög kerülete, amelyben az  $M$  pont az  $AC$  szakasz felezőpontja, 12 cm. Határozzátok meg a  $BM$  súlyvonal hosszát.
- A) 4 cm;
  - B) 6 cm;
  - C) 2 cm;
  - D) 5 cm.
10. Az  $X$  és  $Y$  pontok mindegyike egyenlő távolságra van az  $AB$  szakasz végpontjaitól. Melyik hamis a következő állítások közül?
- A) az  $XY$  és az  $AB$  egyenesek merőlegesek;
  - B)  $\angle XAY = \angle XBY$ ;
  - C)  $\angle AXB = \angle AYB$ ;
  - D)  $\angle AXY = \angle BXY$ .
11. Az  $M$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja. Az  $X$  pont nem illeszkedik az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesére, ha:
- A)  $XA = XB$ ;
  - B)  $XM = XB$ ;
  - C)  $XM \perp AB$ ;
  - D)  $\angle XAM = \angle XBM$ .



## A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

### Egybevágó alakzatok

Két alakzat akkor egybevágó, ha egymásra helyezve fedik egymást.

### A háromszögek egybevágóságának alaptulajdonsága

Az adott  $ABC$  háromszögnek és egy adott  $A_1M$  félegyenesnek létezik egy olyan  $A_1B_1C_1$  háromszöge, amely egybevágó lesz az  $ABC$  háromszöggel, és igaz, hogy  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$  valamint az  $A_1B_1$  oldal az  $A_1M$  félegyenesen fekszik, a  $C_1$  csúcsa pedig az  $A_1M$  egyeneshez viszonyítva az adott félsíkra illeszkedik.

### Az adott egyenesre merőleges egyenes tétele

Az egyenesre nem illeszkedő ponton át egy és csakis egy az adott egyenesre merőleges egyenes húzható.

### Háromszög magassága

A háromszög csúcsából a szemközti oldalát tartalmazó egyenesre bocsátott merőlegest, a háromszög magasságának nevezzük.

### A háromszög súlyvonala

A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt, a háromszög súlyvonalának nevezzük.

### A háromszög szögfelezője

A háromszög szögfelezőjének azt a szakaszt nevezzük, amely az adott szög szögfelező egyenesének a háromszögben lévő része.

### A háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele: a két oldal és a közbezárt szög alapján

Ha az egyik háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és az általuk közbezárt szöggel, akkor ezek a háromszögek egybevágók.



### **A háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele: az oldala és az azon lévő két szög alapján**

Ha az egyik háromszög oldala és az azon lévő két szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög oldalával és azon lévő két szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.

### **A háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele: a három oldaluk alapján**

Ha az egyik háromszög három oldala megfelelően egyenlő a másik háromszög három oldalával, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.

### **A szakasz felezőmerőlegese**

Azt az egyenest, amely merőleges az adott szakaszra, és a szakasz felezőpontján megy át, a szakasz felezőmerőlegesének nevezzük.

### **Egyenlő szárú háromszögek**

Azt a háromszöget, amelynek két oldala egyenlő, egyenlő szárú háromszögnek nevezzük.

### **Egyenlő oldalú háromszögek**

Azt a háromszöget, amelynek minden oldala egyenlő, egyenlő oldalú háromszögnek nevezzük.

### **Az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai**

Az egyenlő szárú háromszögben:

- 1) az alapon lévő szögek egyenlők;
- 2) az alapra húzott szögfelező egyúttal a háromszög súlyvonala és magassága is.

### **Az egyenlő szárú háromszög ismertetőjelei**

- Ha a háromszög súlyvonala egyúttal magassága is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.
- Ha a háromszög szögfelezője egyúttal a magassága is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.
- Ha a háromszögben két szög egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.



- Ha a háromszög oldalfelelezője egyúttal a szögfelezője is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.

**A háromszögek tulajdonságai, melyek az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságaiból és ismertetőjeleiből következnek**

- A háromszögekben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
- A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak.
- Az egyenlő szárú háromszögben az alapra húzott szögfelező, magasság és súlyvonal egybeesik.
- Az egyenlő oldalú háromszögben minden szög egyenlő.
- Az egyenlő szárú háromszögben az egy csúcsból húzott szögfelező, magasság és súlyvonal egybeesik.
- Ha a háromszögben minden szög egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő oldalú.

## PÁRHUZAMOS EGYENESEK. A HÁROMSZÖG SZÖGEINEK ÖSSZEGE 3.§.



Hogyan állapítható meg két egyenesről, hogy párhuzamos-e vagy sem? Milyen tulajdonságai vannak a párhuzamos egyeneseknek? Mivel egyenlő egy tetszőleges háromszög szögeinek összege? Milyen tulajdonságokkal bír a derékszögű háromszög? A paragrafusból választ kaptok ezekre a kérdésekre.



HA EGY EGYENES ÚGY  
METSZ KÉT EGYENEST,  
HOGY AZ EGYIK OLDALÁN  
KELETKEZŐ BELSŐ  
SZÖGEK ÖSSZEGE KISEBB  
KÉT DERÉKSZÖGNÉL,  
AKKOR E KÉT EGYENES  
A METSZŐNEK EZEN  
OLDALÁN MEGHOSSZABÍTVÁ  
METSZI EGYMÁST.

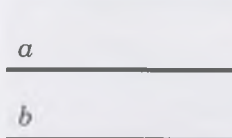


### 13. Párhuzamos egyenesek

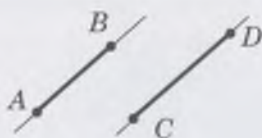
**Meghatározás.** Két egyenes **párhuzamos**, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást.

A 190. ábrán  $a$  és  $b$  párhuzamos egyeneseket ábrázoltak. Ezt így jelölik  $a \parallel b$  (olvassák: az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak, vagy az  $a$  egyenes párhuzamos a  $b$  egyenessel).

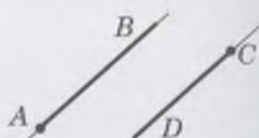
Ha két szakasz párhuzamos egyeneseken fekszik, akkor ezek is párhuzamosak lesznek. A 191. ábrán az  $AB$  és  $CD$  szakaszok párhuzamosak. Ezt így jelölik:  $AB \parallel CD$ .



190. ábra



191. ábra



192. ábra

Ugyanilyen értelemben beszélhetünk két félegyenes, félegyenes és szakasz, szakasz és egyenes párhuzamosságáról. A 192. ábra az  $AB$  és  $CD$  párhuzamos félegyeneseket szemlélteti.

Például, a 192. ábrán  $AB$  és  $CD$  párhuzamos félegyeneseket ábrázoltak.

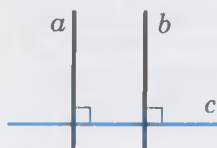
**13.1. tétel (az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele).** Ha két egyenes külön-külön merőleges egy harmadikra, akkor ez a két egyenes párhuzamos egymással.

**Bizonyítás.** ☉ A 193. ábrán az  $a \perp c$  és  $b \perp c$ . Be kell bizonyítani, hogy  $a \parallel b$ .

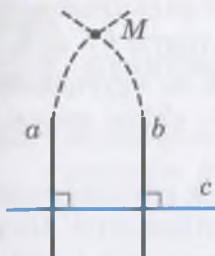
Feltételezzük, hogy az  $a$  és  $b$  egyenesek metszik egymást egy  $M$  pontban (194. ábra). Ekkor az  $M$  ponton át, amely nem illeszkedik a  $c$  egyenesre, az  $a$  és  $b$  egyenesek is átmennek, melyek merőlegesek a  $c$  egyenesre. Ellentmondást kaptunk, mert a ponton

keresztül csak egy merőleges egyenest lehet fektetni az adott egyenesre (7.1. tétel). Vagyis a mi feltevésünk nem volt helyes, tehát  $a \parallel b$ . ▲

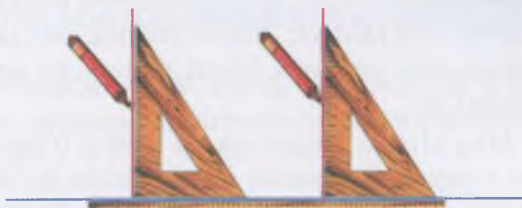
A tétel magyarázatot ad arra, miért tudunk vonalzó és derékszögű vonalzó segítségével párhuzamos egyeneseket húzni a 195. ábrán szemléltetett módon.



193. ábra



194. ábra



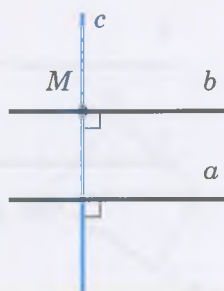
195. ábra

**Következmény.** Az  $a$  egyeneshez nem tartozó  $M$  ponton keresztül az  $a$  egyenessel párhuzamos  $b$  egyenes húzható.

**Bizonyítás.** ☉ Tételezzük fel, hogy az  $M$  pont nem tartozik az  $a$  egyeneshez (196. ábra).

Az  $M$  ponton keresztül egy  $c$  egyenest húzunk, amely merőleges az  $a$  egyenessel (például derékszögű vonalzó segítségével). Ezután az  $M$  ponton át merőlegesen a  $c$ -vel egy  $b$  egyenest húzunk. Az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele (13.1. tétel) alapján azt kapjuk, hogy  $a \parallel b$ . ▲

Húzható-e az  $M$  ponton keresztül (196. ábra) még egy, az  $a$  egyenessel párhuzamos egyenes? Erre a kérdésre az egyenesek párhuzamosságának alaptulajdonsága ad választ.



196. ábra

**Az egyenesek párhuzamosságának alaptulajdonsága (párhuzamossági axióma).** Az adott egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül csak egy olyan egyenes húzható, amely párhuzamos az adattal.

**13.2. tétel.** Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadik egyenessel, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.

**Bizonyítás.** ☉ Legyen  $b \parallel a$  és  $c \parallel a$ . Bizonyítsuk be, hogy  $b \parallel c$ .

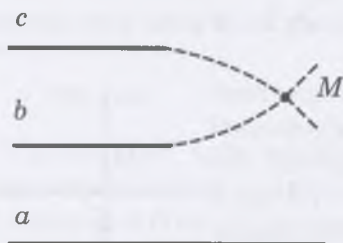
Feltételezzük, hogy a  $b$  és  $c$  egyenesek nem párhuzamosak, tehát metszik egymást egy  $M$  pontban (197. ábra). Akkor azt kaptuk, hogy az  $M$  ponton át két egyenes is átmegy, melyek pár-



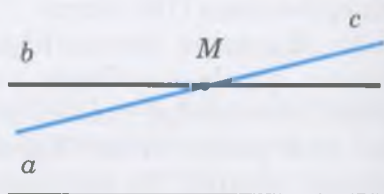
huzamosak az  $a$ -val. Ez ellentmond az egyenesek párhuzamossági axiómájának. Tehát feltételezésünk nem igaz, vagyis  $b \parallel c$ . ▲

**Feladat.** Bizonyítsátok be, hogyha az egyenes, két párhuzamos egyenes közül metszi az egyiket, akkor metszi a másikat is.

**Megoldás.** Legyenek az  $a$  és a  $b$  egyenesek párhuzamosak és a  $c$  egyenes metssze a  $b$  egyenest az  $M$  pontban (198. ábra). Feltételezzük, hogy a  $c$  egyenes nem fogja metszeni az  $a$ -t. Ekkor  $c \parallel a$ . Innen adódik, hogy az  $M$  ponton két olyan egyenes megy át, amely párhuzamos az  $a$ -val, ami ellentmond párhuzamossági axiómájának. Tehát feltételezésünk helytelen, vagyis a  $c$  egyenes metszi az  $a$  egyenest. ●



197. ábra



198. ábra

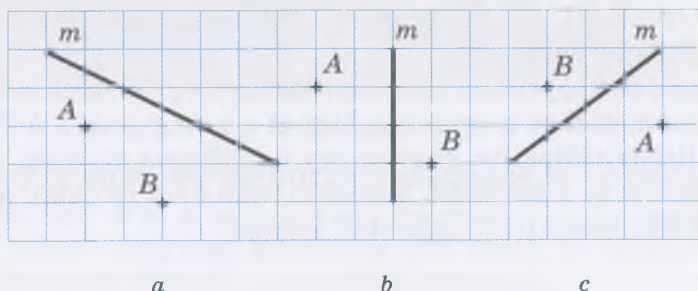


1. Mikor nevezünk két egyenest párhuzamosnak?
2. Hogyan jelöljük a párhuzamos egyeneseket?
3. Hogyan olvassuk az  $m \parallel n$  felírást?
4. Milyen szakaszokat nevezünk párhuzamosnak?
5. Milyen lesz a kölcsönös helyzete annak a két egyenesnek, melyek merőlegesek egy harmadikkal?
6. Fogalmazzátok meg az egyenesek párhuzamossági axiómáját.
7. Milyen lesz a kölcsönös helyzete annak a két egyenesnek, melyek párhuzamosak egy harmadik egyenessel?
8. Ha az egyenes metszi két párhuzamos egyenes közül az egyiket, akkor hogyan helyezkedik el ez az egyenes a másikhoz viszonyítva?



## GYAKORLATI FELADATOK

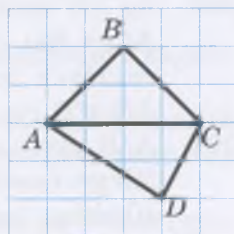
- 285.° Rajzoljátok át a füzetbe a 199. ábrát. Húzzatok az  $A$  és  $B$  pontokon át az  $m$  egyenessel párhuzamos egyeneseket!



199. ábra

- 286.° Rajzoljátok egy háromszöget, és mind-egyik csúcán keresztül fektessetek a háromszög szemben fekvő oldalaival párhuzamos egyeneseket.

- 287.° Rajzoljátok át a füzetbe a 200. ábrát.  $A$   $B$  ponton keresztül rajzoljátok az  $AC$  oldallal párhuzamos  $m$  egyenest, az  $AC$  egyenessel párhuzamosan pedig a  $D$  ponton keresztül egy  $n$  egyenest. Milyen lesz az  $m$  és  $n$  egyenesek kölcsönös helyzete?



200. ábra



## GYAKORLATOK

- 288.° Lehet-e olyan egyenest rajzolni, amely párhuzamos az  $a$  és  $b$  egymást metsző egyenesekkel?
- 289.° Az  $a$  egyenes párhuzamos az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalával. Lehet-e az  $a$  egyenes párhuzamos az  $AC$  oldallal is? És a  $BC$ -vel?
- 290.° Az  $a$  és  $b$  egyenesek metszik egymást. Lehet-e egy olyan  $c$  egyenest fektetni, amely párhuzamos lesz az  $a$  egyenessel, és metszi a  $b$  egyenest?



- 291.<sup>o</sup>** Ki lehet-e jelenteni, hogy két szakasz akkor lesz párhuzamos, ha nincs közös pontjuk?
- 292.<sup>o</sup>** Ki lehet-e jelenteni, hogy csak egyetlen olyan félegyenes létezik, amely az adott egyenessel párhuzamos, és egy adott pont a kezdőpontja?
- 293.\*** Hány olyan szakasz létezik, amely párhuzamos egy adott egyenessel, és átmegy egy adott ponton, amely nem illeszkedik az egyenesre?
- 294.\*** Az  $a$  és  $b$  egyenesek merőlegesek egy  $c$  egyenessel, a  $d$  egyenes metszi az  $a$  egyenest. Metszi-e a  $d$  egyenes a  $b$ -t?
- 295.\*\*** Bizonyítsátok be, hogyha egy tetszőleges egyenes, amely metszi az  $a$  egyenest, metszeni fogja a  $b$ -t is, ekkor az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak lesznek.



### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

- 296.** Az  $AB$  szakaszon úgy vették fel a  $C$  és  $D$  pontokat, hogy  $AC = BD$ . Az  $O$  pont a  $CD$  szakasz felezőpontja. Határozzátok meg a  $C$  és  $D$  pontok közötti távolságot, ha  $AB = 21$  cm,  $AO : OD = 7 : 2$ .
- 297.** A  $B$  pont az  $AC$  egyenesre illeszkedik, a  $BD$  és  $BF$  félegyenesek az  $AC$  egyeneshez viszonyítva különböző fél-síkokban helyezkednek el,  $\angle ABD = 80^\circ$ ,  $\angle ABF = 150^\circ$ ,  $BM$  pedig a  $\angle DBF$  szög szögfelezője. Határozzátok meg az  $\angle MBC$  szög fokmértékét.
- 298.** Az  $ABC$  háromszögben  $CM$  súlyvonal az  $AB$  oldal felével egyenlő,  $\angle A = 47^\circ$ ,  $\angle B = 43^\circ$ . Mivel egyenlő az  $\angle ACB$  szög fokmértéke?



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

- 299.** Katinka és Jenő egy négyzet alakú tóhoz értek, melynek közepén egy négyzet alakú sziget van (201. ábra). A parton találtak két deszkát, amelyek kicsit rövidebbek voltak, mint a tó partja és a sziget közötti távolság. Hogyan juthatnak át a szigetre, ha csak ezeket a deszkákat használhatják?



201. ábra

### 14. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei

Ha két,  $a$  és  $b$  egyenest egy harmadik  $c$  egyenessel metszünk, akkor nyolc szög keletkezik (202. ábra). A  $c$  egyenest az  $a$  és  $b$  egyenesek **metsző** egyenesének nevezzük.

A 3 és 6, a 4 és 5 szögeket **egy oldalon fekvő szögeknek** nevezzük.

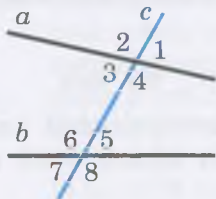
A 3 és 5, 4 és 6 szögeket **különböző oldalon fekvő szögeknek** nevezzük.

A 6 és 2, 5 és 1, 3 és 7, 4 és 8 szögeket **megfelelő szögeknek** nevezzük.

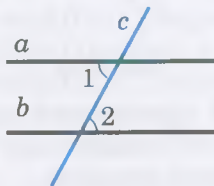
**14.1. tétel.** *Ha két egyenesnek a harmadikkal való metszésekor a különböző oldali szögek egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak.*

**Bizonyítás.** ☺ A 203. ábrán a  $c$  egyenes lesz az  $a$  és  $b$  egyenesek metsző egyenese, az  $1\angle = 2\angle$ . Bebizonyítjuk, hogy  $a \parallel b$ .

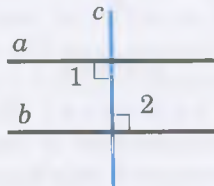
Ha az  $1\angle = 2\angle = 90^\circ$  (204. ábra), akkor az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamossága az egyenesek párhuzamosságának az ismertetőjeléből (13.1. tétel) következik.



202. ábra



203. ábra



204. ábra

Tegyük fel, hogy a  $c$  egyenes az  $a$  és  $b$  egyenesek közül egyikre sem merőleges. Jelöljük meg  $A$  és  $B$ -vel a  $c$  egyenes megfelelő

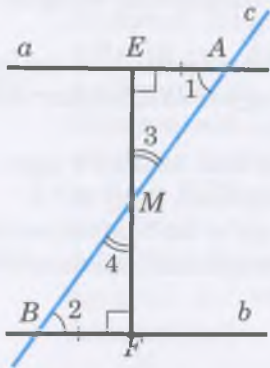


metszéspontjait az  $a$  és  $b$  egyenesekkel. Megjelöljük az  $M$  pontot, amely az  $AB$  szakasz felezőpontja lesz (205. ábra). Az  $M$  ponton keresztül  $ME$  merőlegest bocsátunk az  $a$  egyenesre. Az  $ME$  egyenes és a  $b$  egyenes metszéspontja legyen  $F$ . Ekkor a következőket kaptuk: az 1 és 2 szögek a feladat feltétele alapján egyenlők; a 3 és a 4 szögek pedig egyenlők, mert csúcsszögek. Tehát az  $AME$  és  $BMF$  háromszögek egybevágóak, az oldaluk és a rajta fekvő szögeik alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy  $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$ . Ezzel bebizonyítottuk, hogy az  $a$  és  $b$  egyenesek merőlegesek az  $EF$  egyenesre, tehát párhuzamosak egymással. ▲

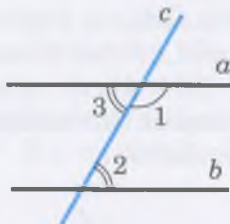
**14.2. tétel.** *Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett egyoldali szögek összege  $180^\circ$ -kal egyenlő, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.*

*Bizonyítás.* ☉ A 206. ábrán a  $c$  egyenes lesz az  $a$  és  $b$  egyenesek metsző egyenese,  $1\angle + 2\angle = 180^\circ$ . Bebizonyítjuk, hogy  $a \parallel b$ .

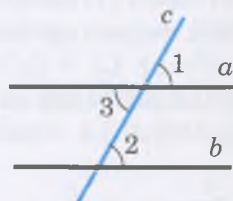
Az 1 és 3 szögek mellékszögek, tehát az  $1\angle + 3\angle = 180^\circ$ . Mivel az  $1\angle + 2\angle = 180^\circ$ , ezért a  $2\angle = 3\angle$ . A 2 és 3 különböző oldalon fekvő szögek, ezért a 14.1. tétel alapján  $a \parallel b$ . ▲



205. ábra



206. ábra



207. ábra

**14.3. tétel.** *Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor a megfelelő szögek egyenlők, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak lesznek.*

*Bizonyítás.* A 207. ábrán a  $c$  egyenes az  $a$  és  $b$  egyenesek metsző egyenese lesz,  $1\angle = 2\angle$ . Bebizonyítjuk, hogy  $a \parallel b$ .

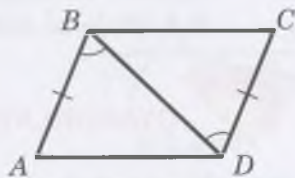
Az 1 és 3 szögek egyenlők, mert csúcsszögek. Mivel  $1\angle = 2\angle$  és  $1\angle = 3\angle$ , innen következik, hogy  $2\angle = 3\angle$ . De a 2 és a

3 szögek különböző oldalon fekvő szögek. Ezért a két egyenes párhuzamosságának ismertetőjele alapján (14.1. tétel)  $a \parallel b$ . ▲

**Feladat.** A 208. ábrán az  $AB = CD$ ,  $\angle ABD = \angle CDB$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BC \parallel AD$ .

**Megoldás.** Az  $ABD$  és  $CDB$  háromszögeknél az adottak alapján ismert, hogy  $AB = CD$ ,  $\angle ABD = \angle CDB$ , a  $BD$  pedig a közös szár. Tehát, az  $ABD$  és  $CDB$  háromszögek egybevágóak két oldaluk és közbezárt szögük alapján, vagyis az első ismertetőjel alapján.

Ekkor  $\angle BDA = \angle DBC$ . Mivel a  $BDA$  és  $DBC$  szögek a  $BC$  és  $AD$  egyeneseket metsző  $BD$  egyenes különböző oldalain fekvő szögei, és ezek egyenlők, tehát  $BC \parallel AD$ . ●



208. ábra

- ?
1. Milyenek kell lenniük két egyenes egy harmadikkal történő metszésénél a különböző oldalakon fekvő szögeknek, hogy az adott egyenesek párhuzamosak legyenek?
  2. Milyenek kell lenniük két egyenes egy harmadikkal történő metszésénél az egy oldalon fekvő szögeknek, hogy az adott egyenesek párhuzamosak legyenek?
  3. Milyenek kell lenniük két egyenes egy harmadikkal történő metszésénél a megfelelő szögeknek, hogy az adott egyenesek párhuzamosak legyenek?



## GYAKORLATI FELADAT

300.° Rajzoljatok két  $AB$  és  $CD$  egyenest. Húzzatok egy  $MK$  egyenest, amely metszi az  $AB$  és  $CD$  egyeneseket. Az  $AB$  és az  $MK$  metszéspontját jelöljük  $O$  betűvel, a  $CD$  és  $MK$  metszéspontját pedig  $E$  betűvel. Pótoljátok ki a szövegben a hiányzó részeket:

- 1) az  $AOM$  szög és ... megfelelő;
- 2) az  $AOE$  szög és ... megfelelő;
- 3) az  $AOE$  szög és ... különböző oldalon fekvő;
- 4) az  $AOE$  szög és ... egy oldalon fekvő

Nevezzétek meg, milyenek (megfelelő, különböző oldalon fekvő vagy egy oldalon fekvő) lesznek a: 1)  $BOM$  és  $DEM$ ; 2)  $BOE$  és  $DEM$ ; 3)  $BOE$  és  $OEC$  szögek.



- 301.°** Rajzoljatok két egyenest és a metsző egyenesüket. Számozzátok meg a szögeket, amelyek az adott egyenesek metszésekor keletkeztek. Soroljátok fel azokat a szög párokat, melyek: 1) megfelelő szögek; 2) egy oldalon fekvő szögek; 3) különböző oldalon fekvő szögek lesznek.

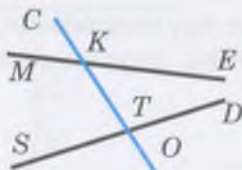


## GYAKORLATOK

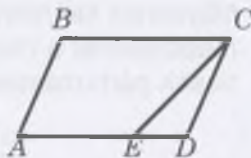
- 302.°** Nevezzétek meg a 209. ábrán lévő összes szög párt, melyek különböző oldalon fekvők, egy oldalon fekvők és megfelelőek.

- 303.°** Írjátok le a 210. ábrán lévő szögek közül melyek:

- 1) egy oldalon fekvő szögei a  $BC$  és  $AD$  egyenesek és az  $AB$  metsző egyenes által alkotott szögeknek;
- 2) egy oldalon fekvő szögei a  $CE$  és  $CD$  egyenesek és az  $AD$  metsző egyenes által alkotott szögeknek;
- 3) különböző oldalon fekvő szögei a  $BC$  és  $AD$  egyenesek és a  $CE$  metsző egyenes által alkotott szögeknek;
- 4) megfelelő szögei a  $CE$  és  $CD$  egyenesek és az  $AD$  metsző egyenes által alkotott szögeknek;
- 5) egy oldalon fekvő szögei a  $BC$  és  $AD$  egyenesek és a  $CE$  metsző egyenes által alkotott szögeknek.

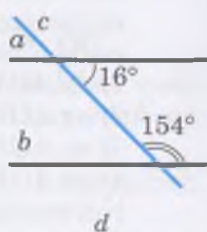
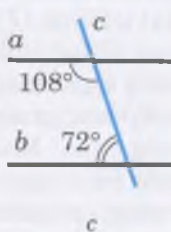
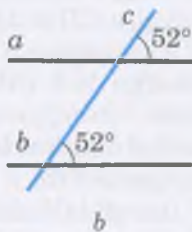
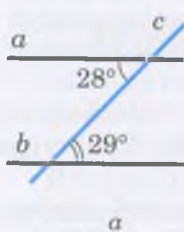


209. ábra



210. ábra

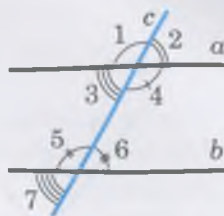
- 304.°** A 211. a–d ábrán lévő  $a$  és  $b$  egyenesek közül melyek lesznek párhuzamosak?



211. ábra

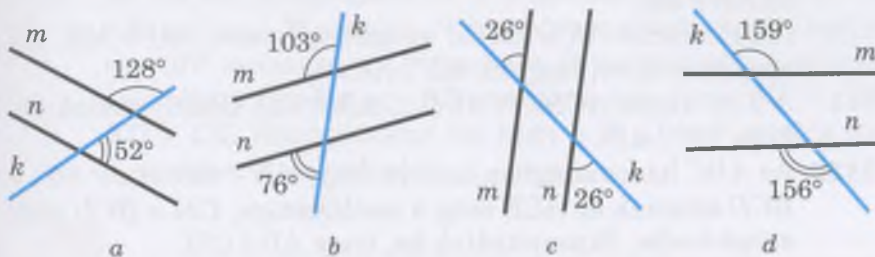
**305.°** Párhuzamosak-e a 212. ábrán lévő  $a$  és  $b$  egyenesek, ha:

- 1)  $3\angle = 6\angle$ ;
- 2)  $2\angle = 6\angle$ ;
- 3)  $4\angle = 125^\circ$ ,  $6\angle = 55^\circ$ ;
- 4)  $2\angle = 35^\circ$ ,  $5\angle = 146^\circ$ ;
- 5)  $1\angle = 98^\circ$ ,  $6\angle = 82^\circ$ ;
- 6)  $1\angle = 143^\circ$ ,  $7\angle = 37^\circ$ ?



212. ábra

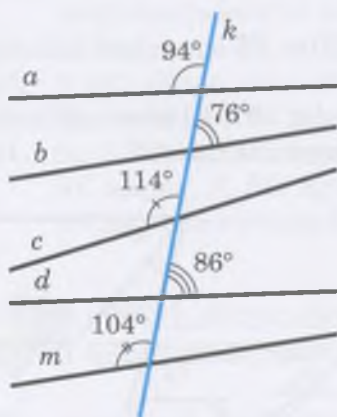
**306.°** A 213.  $a$ – $d$  ábrák melyikén lesznek az  $m$  és  $n$  egyenesek párhuzamosak?



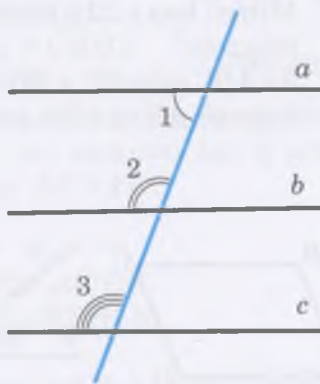
213. ábra

**307.°** A 214. ábrán nevezzétek meg a párhuzamos egyenespárokat.

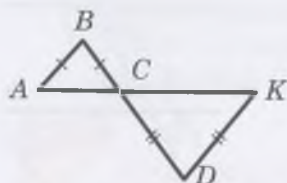
**308.°** Írjátok le a 215. ábrán lévő párhuzamos egyeneseket, ha  $1\angle = 53^\circ$ ,  $2\angle = 128^\circ$ ,  $3\angle = 127^\circ$ .



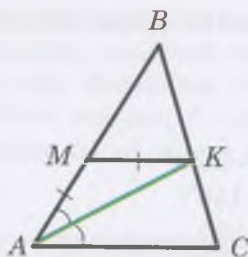
214. ábra



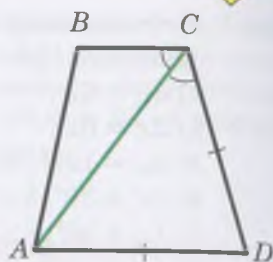
215. ábra



216. ábra

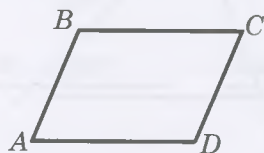


217. ábra

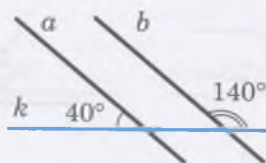


218. ábra

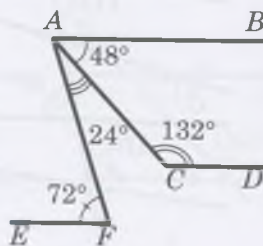
- 309.°** A 216. ábrán  $AB = BC$ ,  $CD = DK$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $AB \parallel DK$ .
- 310.°** A 217. ábrán  $AK$  a  $BAC\angle$  szögfelezője lesz,  $AM = MK$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $MK \parallel AC$ .
- 311.°** A 218. ábrán  $ACB\angle = ACD\angle$ ,  $AD = CD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BC \parallel AD$ .
- 312.°** Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $AB = BC$ ,  $A\angle = 60^\circ$ , a  $BCD$  szögnek az  $ACB$  szög a mellékszöge,  $CM$  a  $BCD$  szög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy  $AB \parallel CM$ .
- 313.°** Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok az  $O$  pontban metszik és felezik is egymást. Bizonyítsátok be, hogy  $AC \parallel BD$ .
- 314.°** A 219. ábrán az  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AB \parallel CD$ .
- 315.°** A 220. ábrán az  $a$ ,  $b$  és  $k$  egyenesek láthatók. Ismert, hogy egy  $m$  egyenes metszi az  $a$  egyenest. Metszi-e az  $m$  egyenes a  $b$ -t?
- 316.°** Milyen lesz a 221. ábrán lévő  $CD$  és  $EF$  egyenesek kölcsönös helyzete?
- 317.\*\*** Az  $ABC$  szög  $60^\circ$ , a  $BCD$  szög pedig  $120^\circ$ . Ki lehet-e jelenteni, hogy az  $AB$  és  $CD$  egyenesek párhuzamosak?



219. ábra



220. ábra



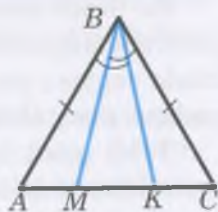
221. ábra

- 318.\*\* Az  $a$  és  $c$  egyenesek közötti szög egyenlő a  $b$  és  $c$  egyenesek közötti szöggel. Ki lehet-e jelteni, hogy az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak?
- 319.\*\* Az  $a$  és  $b$  egyeneseket metsző  $c$  egyenes által keletkezett nyolc szög közül négy szög  $40^\circ$ -os, a többi pedig  $140^\circ$ -os. Ki lehet-e jelteni, hogy az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak?
- 320.\*\* Egy egyenes az  $ABC$  háromszög  $BM$  szögfelezőjét egy  $O$  pontban metszi, amely a  $BM$  szakasz felezőpontja, a  $BC$  oldalát pedig egy  $K$  pontban. Bizonyítsátok be, hogyha  $OK \perp BM$ , akkor  $MK \parallel AB$ .
- 321.\*\* Az  $AM$  és  $CK$  szakaszok az  $ABC$  háromszög súlyvonalai. Az  $AM$  szakasz  $M$  pontján túli meghosszabbításán felmértek egy  $MF$  szakaszt, a  $CK$  szakasz  $K$  pontján túli meghosszabbításán pedig egy  $KD$  szakaszt úgy, hogy  $MF = AM$ ,  $KD = CK$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $B$ ,  $D$  és  $F$  pontok egy egyenesre illeszkednek?



## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

322. Az  $OC$  félegyenes az  $AOB$  szöget két részre osztja úgy, hogy  $\angle AOC : \angle BOC = 3 : 5$ . Határozzátok meg az  $OC$  félegyenes és az  $AOB$  szög mellékszögének szögfelezője közötti szöget, ha  $\angle BOC$  szög  $42^\circ$ -kal nagyobb, mint az  $\angle AOC$  szög.



222. ábra

323. A 222. ábrán  $AB = BC$ ,  $\angle ABK = \angle CBM$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BM = BK$ .
324. Az  $ABC$  és  $ADC$  egyenlő szárú háromszögeknek közös az  $AC$  alapja. A  $BD$  egyenes az  $AC$  szakaszt egy  $E$  pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy  $AE = EC$ .



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

325. Mondjatok példákat arra, amikor a háromszögnek és a négyszögnek a közös része (metszete) nyolcszög.



## EUKLEIDÉSZ ÖTÖDIK POSZTULÁTUMA

A 6. pontban megismerkedtünk azzal, hogy az axióma egy egyértelmű, nyilvánvaló kijelentés. Akkor viszont az 1.1. és az 5.1. tételeket miért nem sorolják az axiómák közé, hiszen ezek is egyértelműek? Erre a kérdésre a felelet kézenfekvő: ha valamilyen kijelentést be lehet bizonyítani axiómák vagy már bizonyított tételekkel, akkor az ilyen kijelentés már tétel lesz és nem axióma.

Ebből az álláspontból vizsgálva, egy nagyon tanulságos történet Eukleidész ötödik posztulátuma (emlékeztetőül: a *Mértan története* fejezetben már megfogalmaztuk az első négy posztulátumot).

### V. posztulá- tum.

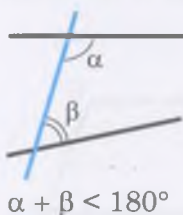
Ha egy egyenes úgy metsz két egyenest, hogy az egyik oldalán keletkező belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor e két egyenes a metszőnek ezen oldalán meghosszabbítva metszi egymást (223. ábra).

Be lehet bizonyítani, hogy az ötödik posztulátum és a 13. pontban megadott egyenesek párhuzamossági axiómája egyenértékűek, vagyis a posztulátumból következik az axióma, az axiómából pedig a posztulátum.

Több mint húsz évszázadon keresztül nagyon sok tudós próbálkozott az ötödik posztulátum bebizonyításával, vagyis levezetni azt a többi euklideszi axióma segítségével. De csak a XIX. század elején jutott el egymástól függetlenül néhány matematikus a következő megállapításra: az az állítás, hogy *az adott egyeneshez egy külső ponton át egyetlen párhuzamos húzható* – axióma.

Nektek úgy tűnhet, hogy ebben nincs semmi különleges: csak a párhuzamossági axiómát kell az eddig ismert axiómákhoz hozzákapcsolni és bizonyíthatók a tételek.

De ha a futball játékszabályaihoz hozzáadunk még egyet, például megengedjük, hogy a játékosok a kezüket is használhassák, akkor egy egészen más játékot kapunk.



223. ábra

Ha az ötödik posztulátum egy elfogadott szabály, és nem tétel, akkor azt helyettesíthetjük egy másik szabállyal.

Így tett a híres orosz matematikus, a kazanyi egyetem professzora, Mikola Ivanovics Lobacsevszkij (1792–1856). Ő csak egy szabályt – az egyenesek párhuzamosságának axiómáját – helyettesítette egy másikkal: *Az egyeneshez egy külső pontból legalább két olyan egyenes húzható, amely nem metszi az adott egyenest.* Az új axióma segítségével építette fel a matematikus a nem euklideszi geometriát.

Hasonló felfedezésre jutott kicsit később Bolyai János (1802–1860) magyar matematikus.



M. I. Lobacsevszkij

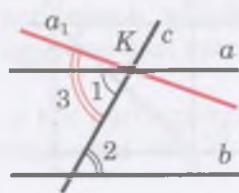
## 15. Párhuzamos egyenesek tulajdonságai

**15.1. tétel (a 14.1. tétel fordítottja).** *Ha két párhuzamos egyenest egy harmadik metsz, akkor a különböző oldalakon lévő szögpárok egyenlők.*

**Bizonyítás.** ☉ A 224. ábrán az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak,  $c$  pedig az őket metsző egyenes. Bebizonyítjuk, hogy  $1\angle = 2\angle$ .

Legyen  $1\angle \neq 2\angle$ . Ekkor a  $K$  ponton keresztül fektetünk egy olyan  $a_1$  egyenest, hogy  $3\angle = 2\angle$  (224. ábra). A 3-as és a 2-es szögek az  $a_1$  és  $b$ , valamint az őket metsző  $c$  egyenesek különböző oldalain fekvő szögei lesznek. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjele alapján (14.1. tétel) az  $a_1 \parallel b$ . Azt kaptuk, hogy a  $K$  ponton keresztül két egyenes megy át, melyek párhuzamosak a  $b$  egyenessel. Ez ellentmond a párhuzamossági axiómának. Vagyis a feltételezésünk nem igaz, tehát  $1\angle = 2\angle$ . ▲

**15.2. tétel (a 14.3. tétel fordítottja (inverze)).** *Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor a megfelelő szögpárokat alkotó szögek egyenlők.*



224. ábra



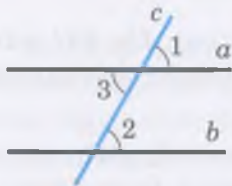
**Bizonyítás.** ☉ A 225. ábrán az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak, a  $c$  egyenes pedig metsző egyenes. Bebonyítjuk, hogy  $1\angle = 2\angle$ .

A párhuzamos egyenesek tulajdonsága (15.1. tétel) alapján a 3-as és a 2-es szögek egyenlők, mint az  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek és a  $c$  metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek. De a 3-as és az 1-es szögek is egyenlők, mint csúcsszögek. Tehát  $1\angle = 2\angle$ . ▲

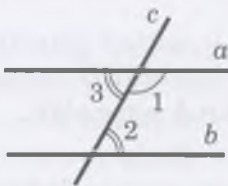
**15.3. tétel (a 14.2. tétel inverze).** *Ha két párhuzamos egyenest egy metsző egyenes metsz, akkor az egyoldali szögek összege  $180^\circ$ .*

**Bizonyítás:** ☉ A 226. ábrán az  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek, a  $c$  egyenes pedig metsző egyenes. Bebonyítjuk, hogy  $1\angle + 2\angle = 180^\circ$ .

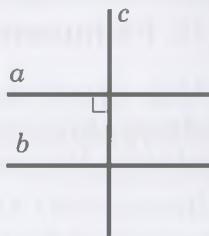
Az egyenesek párhuzamosságának tulajdonsága alapján (15.1. tétel) a 3-as és a 2-es szögek egyenlők, mint az  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek és a  $c$  metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek. De a 3-as és az 1-es szögek mellékszögek, ezért  $1\angle + 3\angle = 180^\circ$ . Tehát  $1\angle + 2\angle = 180^\circ$ . ▲



225. ábra



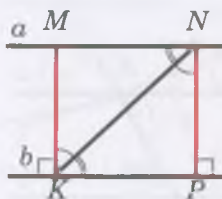
226. ábra



227. ábra

**Következmény.** *Ha az egyenes merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre, akkor merőleges lesz a másikra is (227. ábra).*

Ezt a következményt önállóan bizonyítsátok be.



228. ábra

**1. feladat.** Bizonyítsátok be, hogy a párhuzamos egyeneseknek minden pontja egyenlő távolságra van a másik egyenestől.

**Megoldás.** Legyen  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek (228. ábra), az  $M$  és  $N$  pedig az  $a$  egyenes két tetszőleges pontja. Ezekből  $MK$  és  $NP$  merőlegeseket bocsátunk a  $b$  egyenesre. Bebonyítjuk, hogy  $MK = NP$ .

Megvizsgáljuk az  $MKN$  és  $PNK$  háromszögeket. A  $KN$  szakasz a közös oldaluk. Mivel  $MK \perp b$  és  $NP \perp b$ , ezért  $MK \parallel NP$ , az  $MKN$  és  $PNK$  szögek egyenlők, mint az  $MK$  és  $NP$  párhuzamos egyenesek és a  $KN$  metsző egyenese által alkotott különböző oldali szögek.

Hasonlóan az  $MNK$  és  $PNK$  szögek is egyenlők, mint az  $MN$  és  $NP$  párhuzamos egyenesek és a  $KN$  metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek.

Tehát az  $MKN$  és  $PNK$  háromszögek egybevágóak az oldaluk és a rajtuk lévő két szögük alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele szerint. Ekkor  $MN = NP$ . ●

**Meghatározás.** Két párhuzamos egyenes közötti távolságnak az egyenes bármely pontja és a másik egyenes közötti távolságot nevezzük.

A 228. ábrán például az  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek közötti távolság az  $MK$  szakasz hossza lesz.

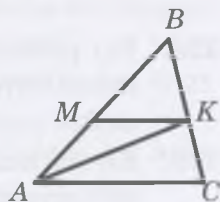
**2. feladat.** A 229. ábrán az  $AK$  szakasz az  $ABC$  háromszög szögfelezője,  $MK \parallel AC$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $AMK$  háromszög egyenlő szárú.

**Megoldás.** Mivel az  $AK$  az  $ABC$  háromszög szögfelezője, ezért  $\angle MAK = \angle KAC$ .

A  $KAC$  és  $MKA$  szögek egyenlők, mint az  $MK$  és  $AC$  párhuzamos egyenesek és az  $AK$  metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek.

Vagyis  $\angle MAK = \angle MKA$ .

Tehát az  $AMK$  háromszög egyenlő szárú. ●



229. ábra

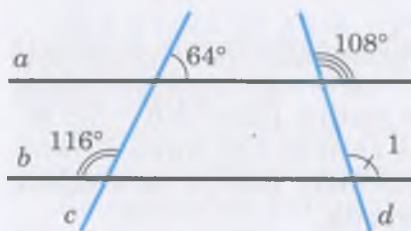
- ?
1. Milyen tulajdonsága van a különböző oldalon lévő szögeknek, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek?
  2. Milyen tulajdonsága van a megfelelő szögeknek, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek?
  3. Milyen tulajdonsága van az egyoldali szögeknek, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek?
  4. Ismert, hogy az egyenes merőleges a két párhuzamos egyenes közül az egyikre. Biztosan merőleges lesz-e a másik egyenesre is?
  5. Mit nevezünk két párhuzamos egyenes közötti távolságnak?



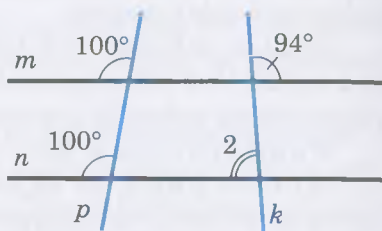
## GYAKORLATOK

**326.<sup>o</sup>** A 230. ábrán határozzátok meg az 1-es szög nagyságát.

**327.<sup>o</sup>** A 231. ábrán határozzátok meg a 2-es szög nagyságát.



230. ábra



231. ábra

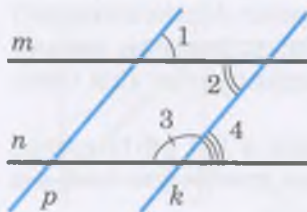
**328.<sup>o</sup>** Két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkezett egyoldali szögek különbsége  $50^\circ$ . Határozzátok meg ezeket a szögeket.

**329.<sup>o</sup>** Két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkezett egyoldali szögek közül az egyik a másiknak a 4-szerese. Határozzátok meg ezeket a szögeket.

**330.<sup>o</sup>** Határozzátok meg minden szög értékét, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek, ha:  
1) az egyik szög  $48^\circ$ ;  
2) két szög fokmértékének az aránya  $2 : 7$ .

**331.<sup>o</sup>** Határozzátok meg minden szög értékét, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek, ha az egyik fokmértéke  $24^\circ$ -kal kisebb, mint a másik.

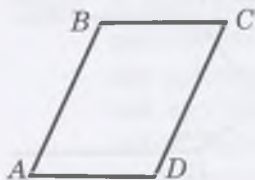
**332.<sup>o</sup>** A 232. ábrán az  $m \parallel n$ ,  $p \parallel k$ ,  $\angle 1 = 50^\circ$ . Határozzátok meg a 2-es, 3-as és 4-es szöget.



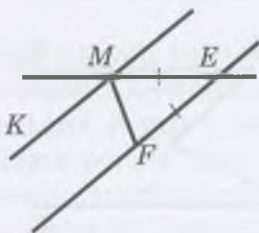
232. ábra

**333.<sup>o</sup>** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszögnek az  $AC$  alapjával párhuzamos egyenes az  $AB$  és  $BC$  szarat megfelelően a  $D$  és  $F$  pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy a  $DBF$  háromszög egyenlő szárú.

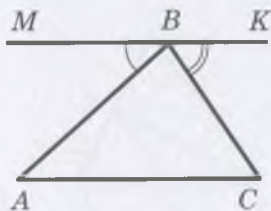
- 334.°** Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög ( $AB = BC$ )  $AC$  és  $BC$  oldalainak meghosszabbításán az  $A$  és  $B$  pontokon túl a  $P$  és  $K$  pontokat úgy vették fel, hogy  $PK \parallel AB$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $KPC$  háromszög egyenlő szárú.
- 335.°** Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok az  $O$  pontban metszik egymást,  $AO = BO$ ,  $AC \parallel BD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $CO = DO$ .
- 336.°** Az  $MK$  és  $DE$  szakaszok az  $F$  pontban metszik egymást,  $DK = ME$ ,  $DK \parallel ME$ . Bizonyítsátok be, hogy  $MEF\Delta = KDF\Delta$ .
- 337.°** Válaszoljatok a kérdésekre.
- 1) Lehetnek-e tompaszögek a két párhuzamos és a metsző egyenesük által keletkezett egyoldali szögek?
  - 2) Lehet-e a két párhuzamos és a metsző egyenesük által keletkezett különböző oldali két szög összege  $180^\circ$ ?
  - 3) Lehetnek-e egyenlő szögek a két párhuzamos és a metsző egyenesük által keletkezett egyoldali szögek?
- 338.\*** A 233. ábrán  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BC = AD$ .
- 339.\*** A 233. ábrán  $BC = AD$ ,  $BC \parallel AD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AB \parallel CD$ .
- 340.\*** A 234. ábrán  $MK \parallel EF$ ,  $ME = EF$ ,  $KMF\angle = 70^\circ$ . Határozzátok meg az  $MEF$  szög fokmértékét.
- 341.\*** A  $ABC$  háromszög  $B$  csúcsán keresztül az  $AC$  egyenessel párhuzamosan egy  $MK$  egyenest fektettek (235. ábra),  $MBA\angle = 42^\circ$ ,  $CBK\angle = 56^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.
- 342.\*** Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsán átmenő, a szemközti oldallal párhuzamos egyenes az  $AC$  oldallal olyan szöget alkot, amely a  $BAC$  szöggel egyenlő. Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.



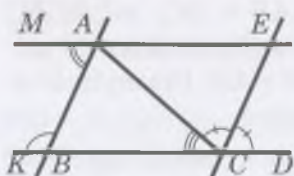
233. ábra



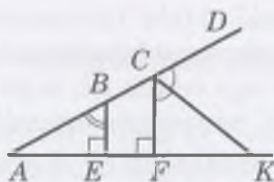
234. ábra



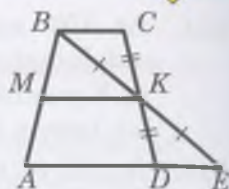
235. ábra



236. ábra



237. ábra



238. ábra

**343.\*** A 236. ábrán az  $\angle MAB = 50^\circ$ ,  $\angle ABK = 130^\circ$ ,  $\angle ACB = 40^\circ$ .  $CE$  az  $\angle ACD$  szög szögfelezője. Határozzátok meg az  $\triangle ACE$  háromszög szögeit.

**344.\*** A 237. ábrán  $BE \perp AK$ ,  $CF \perp AK$ ,  $CK$  az  $\angle FCD$  szög szögfelezője,  $\angle ABE = 62^\circ$ . Határozzátok meg az  $\angle ACK$  szöget.

**345.\*** A 238. ábrán  $BC \parallel MK$ ,  $BK = KE$ ,  $CK = KD$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $AD \parallel MK$ .

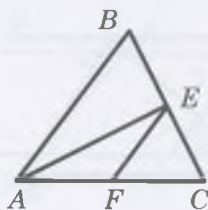
**346.\*** A 239. ábrán  $AB = AC$ ,  $AF = FE$ ,  $AB \parallel EF$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AE \perp BC$ .

**347.\*** Az  $\triangle ABC$  egyenlő szárú háromszög alapja  $AC$ . A  $BD$  szögfelezőjének egy tetszőleges  $M$  pontján keresztül egyeneseket húztak, melyek párhuzamosak az  $AB$  és  $BC$  oldalakkal, és az  $AC$  oldalt megfelelően az  $E$  és  $F$  pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy  $DE = DF$ .

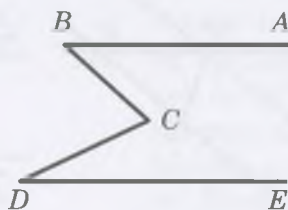
**348.\*\*** A 240. ábrán  $AB \parallel DE$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$ .

**349.\*\*** A 241. ábrán  $AB \parallel DE$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $\angle CDE = 150^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BC \perp CD$ .

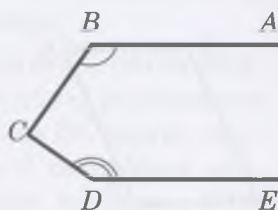
**350.\*\*** Az  $\triangle ABC$  háromszög  $B$  csúcsán át egy egyenest fektettek párhuzamosan a háromszög  $AM$  szögfelezőjével. Ez az egyenes az  $AC$  oldalt egy  $K$  pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy a  $\triangle BAK$  háromszög egyenlő szárú.



239. ábra



240. ábra



241. ábra

- 351." Az  $ABC$  háromszög  $AE$  és  $CF$  szögfelezőinek  $O$  metszéspontján keresztül az  $AC$  egyenessel párhuzamos egyenest fektettünk. Ez az egyenes az  $AB$  oldalt  $M$  pontban, a  $BC$  oldalt pedig  $K$  pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy  $MK = AM + CK$ .
- 352." Az  $ABC$  háromszög  $BAC$  és  $BCA$  szögeinek szögfelezői az  $O$  pontban metszik egymást. Ezen a ponton át az  $AB$  és  $BC$  egyenesekkel párhuzamosan egyeneseket fektetünk, melyek az  $AC$  oldalt megfelelően az  $M$  és  $K$  pontban metszik. Bizonyítsátok be, hogy az  $MOK$  háromszög kerülete az  $AC$  oldal hosszával egyenlő.



## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

353. Az  $AB$  szakaszon úgy jelöltünk egy  $C$  pontot, hogy  $AC : BC = 2 : 1$ . Az  $AC$  szakaszon pedig úgy jelöltünk egy  $D$  pontot, hogy  $AD : CD = 3 : 2$ . Milyen arányban osztja a  $D$  pont az  $AB$  szakaszt?
354. Az  $AC$  és  $BD$  szakaszok egy  $O$  pontban metszik egymást,  $AB = BC = CD = AD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AC \perp BD$ .
355. Az  $MOE$  háromszög  $MO$  oldalán úgy jelöltünk egy  $A$  pontot, a  $TPK$  háromszög  $TP$  oldalán pedig egy  $B$  pontot, hogy  $MA = TB$ . Mekkora a  $BKP$  szög fokmértéke, ha  $MO = TP$ ,  $M\angle = T\angle$ ,  $O\angle = P\angle$ ,  $AEO\angle = 17^\circ$ ?



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

356. A 242. ábrán egy nagyon bonyolult zárt töröttvonal látható. A töröttvonal egy sokszöget határol. A rajzon jelöltek egy tetszőleges pontot. Hogyan lehet leghamarabb meghatározni, hogy a pont a sokszöghöz illeszkedik, vagy nem illeszkedik hozzá?



242. ábra



## 16. A háromszög szögeinek összege. Háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög a síkmértan legfontosabb alakzata. A háromszögek világa nagyon változatos, de a következő tulajdonság minden háromszögre jellemző lesz.

### 16.1. tétel. A háromszög szögeinek összege $180^\circ$ .

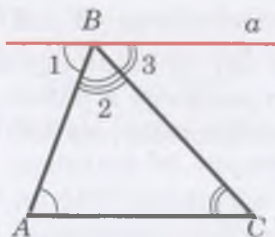
*Bizonyítás.* ☉ Vizsgáljunk meg egy tetszőleges  $ABC$  háromszöget. Be kell bizonyítani, hogy  $A\angle + B\angle + C\angle = 180^\circ$ .

A  $B$  csúcán keresztül egy olyan  $a$  egyenest húzunk, amely párhuzamos az  $AC$  egyenessel (243. ábra). Azt kaptuk, hogy az  $A\angle$  és az  $1\angle$  egyenlők, mint az  $AC$  és  $a$  párhuzamos egyenesek valamint az  $AB$  metsző egyenesek által alkotott (váltószögek) különböző oldalon fekvő szögek. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy  $C\angle = 3\angle$ . De az 1-es, 2-es és 3-as szögek  $B$  csúcsú egyenesszöveget alkotnak. Tehát  $A\angle + ABC\angle + C\angle = 1\angle + 2\angle + 3\angle = 180^\circ$ . ▲

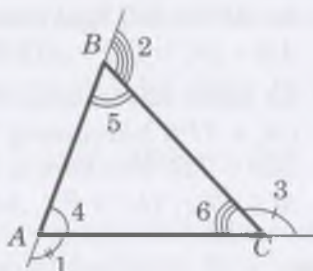
**Következmény.** A háromszög szögei között legalább két hegyesszög van.

Bizonyítások be ezt a következményt önállóan.

Ebből a következményből az is adódik, hogy az egyenlő szárú háromszögnek az alapnál lévő szöge mindig hegyesszög.



243. ábra



244. ábra

**Meghatározás.** A háromszög **külső szögének** azt a szöveget nevezzük, amely mellékszöge a háromszög szögének.

A 244. ábrán az 1-es, 2-es és 3-as szögek lesznek az  $ABC$  háromszög külső szögei.

**16.2. tétel.** A háromszög külső szöge egyenlő a vele mellékszöveget nem alkotó két belső szög összegével.

*Bizonyítás.* ☉ A 244. ábrán az 1-es, 2-es és 3-as szögek az  $ABC$  háromszög külső szögei. Be kell bizonyítani, hogy  $1\angle = 5\angle + 6\angle$ ,  $2\angle = 4\angle + 6\angle$ ,  $3\angle = 4\angle + 5\angle$ .

Bebizonyítjuk a három egyenlőség közül például az elsőt (a többi egyenlőség is hasonlóan bizonyítható be).

A mellékszögek tulajdonságából következik, hogy  $1\angle + 4\angle = 180^\circ$ . A háromszög szögeinek összegéről szóló tétel alapján  $4\angle + 5\angle + 6\angle = 180^\circ$ . Ezekből következik, hogy  $1\angle + 4\angle = 4\angle + 5\angle + 6\angle$ , innen pedig kapjuk, hogy  $1\angle = 5\angle + 6\angle$  ▲

**Következmény.** A háromszög külső szöge nagyobb a vele mellékszöget nem alkotó bármely belső szögnél.

Bizonyítsátok be önállóan ezt a következményt.

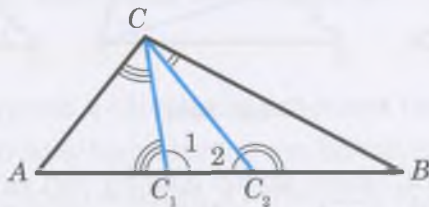
**16.3. tétel (a háromszög-egyenlőtlenség).** A háromszög bármely oldalának hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél.

**Bizonyítás:** ☉ Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget (245. ábra). Be kell bizonyítani, hogy: 1)  $AB < AC + CB$ ; 2)  $AC < AB + BC$ ; 3)  $BC < BA + AC$ .

Bebizonyítjuk az első egyenlőtlenséget (a másik két bizonyítás hasonlóan történik).

Feltételezzük, hogy az az egyenlőtlenség, amit be kell bizonyítani nem igaz. Ekkor  $AB > AC + CB$  vagy  $AB = AC + CB$ .

1) Legyen  $AB > AC + CB$ . Akkor az  $AB$  oldalon fel lehet venni a  $C_1$  és  $C_2$  pontokat úgy, hogy  $AC = AC_1$  és  $BC = BC_2$  (245. ábra). Mivel mi azt feltételeztük, hogyha  $AB > AC + CB$ , ezért  $AB > AC_1 + BC_2$ . Tehát az  $AC_1$  és  $BC_2$  szakaszoknak nincs közös pontja.



245. ábra

Az  $AC_1C$  és  $BC_2C$  hegyesszögek lesznek, mert az  $AC_1C$  és  $BC_2C$  egyenlő szárú háromszögeknek az alapon fekvő megfelelő szögei. Ekkor az 1-es és 2-es szögek tompaszögek lesznek, mint a hegyesszögeknek a mellékszögei. Ellentmondásra jutottunk, mert így a  $C_1CC_2$  háromszögnek két tompaszöge lenne.

2) Hasonlóan bizonyítható (önállóan végezzétek el), hogy az  $AB = AC + CB$  egyenlőséggel is ellentmondásra jutunk. ▲



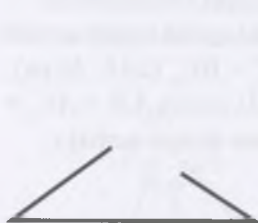
A bebizonyított tételből következik, hogy *amikor három szakasz közül az egyiknek a hossza nem kisebb, mint a másik két szakasz hosszának az összege, akkor ezek a szakaszok nem lehetnek a háromszög oldalai* (246. ábra).

A 23. pontban fogtok megismerni azzal, hogy amikor három adott szakasz közül bármelyik kisebb, mint a másik kettő összege, akkor ezek a szakaszok lehetnek egy háromszög oldalai.

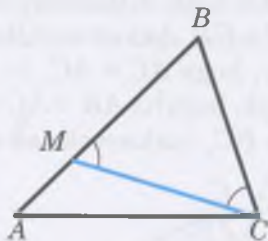
Már tudjátok, hogy a háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, és egyenlő szögekkel szemközt egyenlők a háromszög oldalai (9., 10. pontok). Ezeket a tulajdonságokat a következő tétel egészíti ki.

**16.4. tétel.** *Bármely háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.*

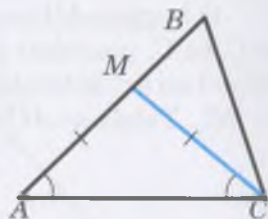
*Bizonyítás.* ☉ 1) Nézzünk egy  $ABC$  háromszöget, melyben  $AB > BC$ . Be kell bizonyítani, hogy  $ACB\angle > A\angle$  (247. ábra).



246. ábra



247. ábra



248. ábra

Mivel  $AB > BC$ , ezért az  $AB$  oldalon van egy olyan  $M$  pont, hogy  $BM = BC$ . Kaptunk egy  $MBC$  egyenlő szárú háromszöget, melyben  $BMC\angle = BCM\angle$ .

Mivel a  $BMC$  szög az  $AMC$  háromszög külső szöge, ezért  $BMC\angle > A\angle$ . Az alábbi egyenlőtlenséglánc bizonyítja a tétel első részét:

$$ACB\angle > MCB\angle = BMC\angle > A\angle.$$

2) Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget, melyben  $C\angle > A\angle$ . Be kell bizonyítani, hogy  $AB > BC$ .

Mivel  $\angle ACB > \angle A$ , ezért az  $\angle ACB$  szöget fel lehet osztani  $\angle ACM$  és  $\angle MCB$  szögekre úgy, hogy  $\angle ACM = \angle A$  (248. ábra). Ekkor az  $\triangle AMC$  háromszög egyenlő szárú lesz,  $MA$  és  $MC$  egyenlő oldalakkal.

A  $BC$  oldalra felírjuk a háromszög-egyenlőtlenséget:  $MC + MB > BC$ . Következőt kapjuk:  $AB = AM + MB = MC + MB > BC$ . ▲

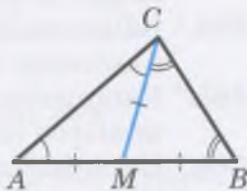
Megjegyezzük, hogy a 16.4. tétel második felét indirekt bizonyítással is be lehet bizonyítani: feltételezzük, hogy  $BC \geq AB$ , és ezután alkalmazzuk a már bebizonyított első részét a tételnek. Végezzétek el önállóan ezt a bizonyítást.

**Feladat.** Az  $\triangle ABC$  háromszög  $CM$  súlyvonala az  $AB$  oldal felével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az  $\triangle ABC$  háromszög derékszögű.

**Megoldás.** A feladat feltétele alapján  $AM = CM$  (249. ábra). Tehát az  $\triangle AMC$  háromszögben az  $A$  és az  $\angle ACM$  szögek egyenlők.

Az  $\triangle ACB$  háromszögben:  $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ . Figyelembe véve, hogy  $\angle A = \angle ACM$  és  $\angle B = \angle BCM$ , ebből azt kapjuk, hogy:  $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180^\circ$ . Mivel  $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$ , ezért  $2\angle ACB = 180^\circ$ . Vagyis  $\angle ACB = 90^\circ$

Tehát az  $\triangle ABC$  háromszög derékszögű. ●



249. ábra



1. Mivel egyenlő a háromszög szögeinek összege?
2. Legalább hány hegyesszög van bármilyen háromszögnek?
3. Milyen szöget nevezünk a háromszög külső szögének?
4. Milyen összefüggés van a háromszög külső szöge és a vele mellékszög nem alkotó belső szögek között?
5. Hasonlítsátok össze a háromszög külső szögét, a vele mellékszög nem alkotó belső szögével.
6. Fogalmazzatok meg a háromszög-egyenlőtlenségről szóló tételt.
7. Fogalmazzatok meg a háromszög oldalai és szögei közötti összefüggésről szóló tételt.



## GYAKORLATOK

- 357.°** Határozzátok meg a háromszög szögét, ha a másik két szöge  $35^\circ$  és  $96^\circ$ .
- 358.°** A háromszög egyik szöge háromszor kisebb, mint a másik, és  $35^\circ$ -kal kisebb, mint a harmadik. Határozzátok meg a háromszög szögeit.
- 359.°** Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha fokmértékük úgy aránylik egymáshoz, mint  $2 : 3 : 7$ .
- 360.°** Határozzátok meg az egyenlő oldalú háromszög szögeit.
- 361.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögeit.
- 362.°** Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge  $63^\circ$ . Határozzátok meg a csúcsánál lévő szögét (szárszögét).
- 363.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögét, ha szárszöge  $104^\circ$ .
- 364.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a szárszöge 4-szer nagyobb, mint az alapon fekvő szöge.
- 365.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az alapon fekvő szöge  $48^\circ$ -kal kisebb, mint a szárszöge.
- 366.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az egyik szöge: 1)  $110^\circ$ ; 2)  $50^\circ$ . Hány megoldása van a feladatnak?
- 367.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az egyik szöge: 1)  $42^\circ$ ; 2)  $94^\circ$ . Hány megoldása van a feladatnak?
- 368.°** Lehetnek-e az alábbi mennyiségek egy háromszög oldalai: 1) 6 cm, 5 cm, 12 cm; 2) 6 cm, 5 cm, 11 cm?
- 369.°** Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $C\angle = 90^\circ$ ,  $AK$  szögfelező,  $BAK\angle = 18^\circ$ . Határozzátok meg az  $AKC$  és  $ABC$  szögek mértékeit.
- 370.°** Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $AB = BC$ ,  $CK$  szögfelező,  $A\angle = 66^\circ$ . Határozzátok meg az  $AKC$  szög mértékét.
- 371.°** Az  $ABC$  háromszög  $AK$  és  $CM$  szögfelezői az  $O$  pontban metszik egymást,  $BAC\angle = 116^\circ$ ,  $BCA\angle = 34^\circ$ . Határozd meg az  $AOC$  szögét.
- 372.°** Az egyenlő szárú  $ABC$  háromszögben, amelynek  $B$  szárszöge  $36^\circ$ -kal egyenlő, meghúzták az  $AD$  szögfelezőt. Bizonyítsátok be, hogy az  $ADB$  és  $CAD$  háromszögek egyenlő szárúak.

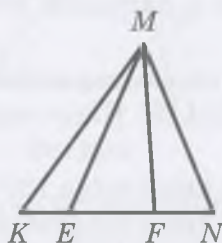
373.° Az  $ABC$  háromszögben megrajzolták a  $BF$  szögfelezőt. Határozzátok meg a  $C$  szögét, ha  $A\angle = 39^\circ$ ,  $AFB\angle = 78^\circ$ .

374.° Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög egyik szöge egyenlő a másik két szögének összegével, akkor az ilyen háromszög derékszögű lesz.

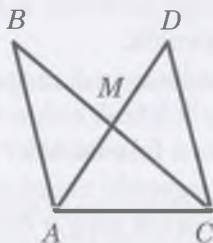
375.° A 250. ábrán nevezzétek meg a külső szögeket:

- 1) az  $MEF$  háromszög  $E$  és  $F$  csúcsainál;
- 2) az  $MKE$  háromszög  $E$  csúcsánál.

376.° A 251. ábrán nevezzétek meg azokat a háromszögeket, melyeknek a külső szöge: 1)  $AMB$  szög; 2)  $BMD$  szög lesz.



250. ábra



251. ábra

377.° A háromszög egyik külső szöge  $75^\circ$ . Mivel lesz egyenlő:

- 1) az ehhez a csúcshoz tartozó belső szöge;
- 2) a vele mellékszöget nem alkotó szögek összege?

378.° Lehet-e a háromszög külső szöge kisebb, mint a vele mellékszöget alkotó szög? A kérdés megválaszolása után adjátok meg a háromszög típusát.

379.° Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha az egyik külső szöge egyenlő a vele mellékszöget alkotó belső szögével.

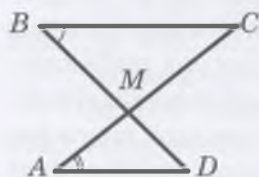
380.° A háromszög egyik külső szöge  $136^\circ$ , a háromszög egyik szöge pedig  $61^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög ismeretlen szögét, amely nem alkot mellékszöget az adott külső szöggel.

381.° A háromszög egyik külső szöge  $154^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög azon szögeit, amelyek nem alkotnak mellékszöget az adott szöggel, és az egyik  $28^\circ$ -kal nagyobb a másiknál.

382.° A háromszög egyik külső szöge  $98^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög azon szögeit, amelyek nem alkotnak mellékszöget az adott szöggel, ha az egyikük 6-szor kisebb, mint a másik.



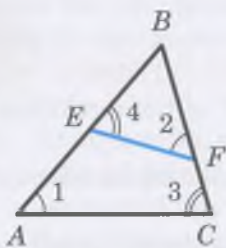
- 383.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a szárszögének külső szöge  $38^\circ$ .
- 384.°** Hasonlítsátok össze az  $ABC$  háromszög szögeit, ha:  
1)  $AB > AC > BC$ ;      2)  $AB = BC$ ,  $BC > AC$ .
- 385.°** Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $A\angle = 34^\circ$ ,  $B\angle = 28^\circ$ . Hasonlítsátok össze az  $AB$ ,  $BC$  és  $AC$  oldalait.
- 386.°** Hasonlítsátok össze az  $ABC$  háromszög oldalait, ha:  
1)  $C\angle > A\angle > B\angle$ ;      2)  $B\angle > C\angle$ ,  $A\angle = B\angle$ .
- 387.°** Bizonyítsátok be, hogyha az egyik háromszög két szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög két szögével, akkor ezeknek a háromszögeknek a harmadik szögük is egyenlők.
- 388.°** Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az egyik külső szöge egyenlő: 1)  $54^\circ$ ; 2)  $112^\circ$ . Hány megoldása lesz a feladatnak?
- 389.°** Az egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge  $130^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög szögeit. Hány megoldása lesz a feladatnak?
- 390.°** A háromszög kerülete 30 cm. Lehet-e az egyik oldala:  
1) 20 cm; 2) 15 cm?
- 391.°** A háromszög két oldalának hossza 7 cm és 9 cm. Lehet-e a háromszög kerülete: 1) 20 cm; 2) 32 cm; 3) 18 cm?
- 392.°** Létezik-e olyan háromszög, melynek egyik oldala 2 cm-rel kisebb a másiknál, és 6 cm-rel kisebb a harmadiknál, ha kerülete 20 cm-rel egyenlő?
- 393.°** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AC$  alapján fekvő szögek szögfelezői az  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az  $AOC$  szög egyenlő az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsánál lévő külső szöggel.



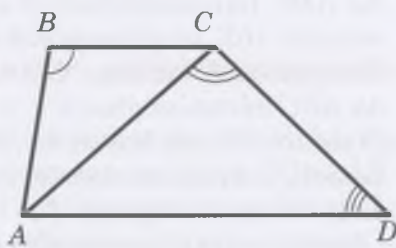
252. ábra

- 394.°** A 252. ábrán  $BC \parallel AD$ ,  $A\angle = 25^\circ$ ,  $B\angle = 55^\circ$ . Határozzátok meg a  $CMD$  szöget.
- 395.°** A  $BC$  alapú  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben a  $BK$  szakasz a háromszög szögfelezője.  $AKB\angle = 105^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög szögeit.

- 396.** Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalán felvettek egy  $D$  pontot úgy, hogy  $BD = BC$ ,  $ACD\angle = 15^\circ$ ,  $DCB\angle = 40^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.
- 397.** Az  $ABC$  háromszög oldalain (253. ábra) felvettek egy  $E$  és  $F$  pontot úgy, hogy  $1\angle = 2\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $3\angle = 4\angle$ .
- 398.** A 254. ábrán  $BC \parallel AD$ ,  $B\angle = 100^\circ$ ,  $ACD\angle = 95^\circ$ ,  $D\angle = 45^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AB = BC$ .



253. ábra



254. ábra

- 399.** Az  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsán keresztül egy egyenest fektettek, amely párhuzamos a háromszög  $AM$  szögfelezőjével és  $K$  pontban metszi az  $AB$  oldalt. Határozzátok meg az  $AKC$  háromszög szögeit, ha  $BAC\angle = 70^\circ$ .
- 400.** Az  $ABC$  háromszögben az  $A$  és  $C$  szögek szögfelezői egy  $O$  pontban metszik egymást. Határozzátok meg az  $AOC$  szöget, ha  $B\angle = 100^\circ$ .
- 401.** Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög szárszöge mellékszögének szögfelezője párhuzamos a háromszög alapjával.
- 402.** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög mellékszögének szögfelezője párhuzamos a háromszög oldalával, akkor ez a háromszög egyenlő szárú lesz.
- 403.** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AC$  alapján fekvő szöge 2-szer nagyobb, mint a szárszöge.  $AM$  a háromszög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy  $BM = AC$ .
- 404.** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög alapja  $AC$ . A  $BC$  oldalán úgy vettek fel egy  $M$  pontot, hogy  $BM = AM = AC$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.
- 405.** Bizonyítsátok be, hogy bármilyen háromszögnek van olyan szöge amely:
- 1) nem kisebb, mint  $60^\circ$ ; 2) nem nagyobb, mint  $60^\circ$ .



- 406.\*** Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha:
- 1) az egyik szöge nagyobb, mint a másik két szögének összege;
  - 2) bármelyik szöge kisebb, mint a másik két szögének összege.
- 407.\*** Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha tetszőleges két szögének összege nagyobb, mint  $90^\circ$ .
- 408.\*** Az  $ABC$  háromszögben  $B \angle$  tompaszög. Az  $AB$  oldal  $A$  csúcsán túli meghosszabbításán felvettek egy  $D$  pontot. Bizonyítsátok be, hogy  $CD > AC$ .
- 409.\*** Az  $ABC$  háromszögben  $C \angle > 90^\circ$ . A  $BC$  oldalán jelöltek egy  $D$  pontot. Bizonyítsátok be, hogy  $AD > AC$ .
- 410.\*\*** Létezik-e olyan háromszög, melynek két szögfelezője derékszögben metszi egymást?
- 411.\*\*** Létezik-e olyan háromszög, melynek az egyik szögfelezője felezi a másikat?
- 412.\*\*** Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit, ha a  $B$  szögének szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre osztja az eredeti háromszöget.
-  **413.\*\*** Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokra teljesül a következő egyenlőség:  $AB = AC + CB$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $C$  pont az  $AB$  szakasz belső pontja.
- 414.\*\*** Az  $m$  egyenesen (255. ábra) határozzátok meg azt a  $C$  pontot, amelytől az  $A$  és  $B$  pontokig mért távolságok összege lehető legkisebb legyen. A feleletet magyarázzátok is meg.
- 415.\*** A háromszög egyik oldala  $2,8$  cm, a másik pedig  $0,6$  cm. Határozzátok meg a háromszög harmadik oldalának hosszát, ha centiméterekben mért értéke egész szám lesz.
- 416.\*** Az  $ABC$  háromszögben  $A \angle = \alpha$ , a  $B$  és  $C$  csúcsánál lévő külső szögek szögfelezői az  $O$  pontban metszik egymást. Határozzátok meg a  $BOC$  szög mértékét.
- 417.\*** Az  $AM$  szakasz az  $ABC$  háromszög súlypontja,  $CAM \angle > BAM \angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AB > AC$ .



255. ábra

- 418.\*** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AB$  és  $BC$  szárain felvettek megfelelően egy  $E$  és  $F$  pontot úgy, hogy  $AC = AF = EF = BE$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.

- 419.\* Az  $ABC$  háromszögben  $AB = 2$  cm,  $A\angle = 60^\circ$ ,  $B\angle = 70^\circ$ . Az  $AC$  oldalán úgy vettek fel egy  $D$  pontot, hogy  $AD = 1$  cm. Határozzátok meg a  $BDC$  háromszög szögeit.
- 420.\* Bizonyítsátok be, hogy a háromszög két oldalának az összege nagyobb a harmadik oldalára bocsátott súlyvonal kétszeresénél.



## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

421. Az egyenesen az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokat úgy vették fel, hogy a  $B$  pont az  $A$  és  $C$  pontok között van, emellett  $BC = 2AB$ . A  $BC$  szakaszon úgy vettek fel egy  $D$  pontot, hogy  $BD : DC = 3 : 7$ . Számítsátok ki az  $AB$  és  $CD$  szakaszok felezőpontjai közötti távolságot, ha a  $CD$  szakasz 16 cm-rel hosszabb a  $BD$ -nél.
422. Az  $ABC$  háromszög  $BM$  súlyvonalán úgy vettek fel egy  $O$  pontot, hogy  $OAC\angle = OCA\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

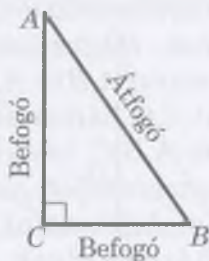
423. Igaz-e a következő állítás: a hatszögnek nincs két olyan átlója, amelyeknek a csúcson kívül nincs közös pontjuk?

## 17. Derékszögű háromszög

A 256. ábrán az  $ABC$  derékszögű háromszög látható, melyben a  $C\angle = 90^\circ$ .

A derékszögű háromszögnek azt az oldalát, amely a derékszöggel szemben fekszik átfogónak, a derékszög szárait alkotó oldalakat pedig **befogóknak** nevezzük (256. ábra).

Két háromszög egybevágóságának bizonyításához az egyenlő elemeinek a meghatározása



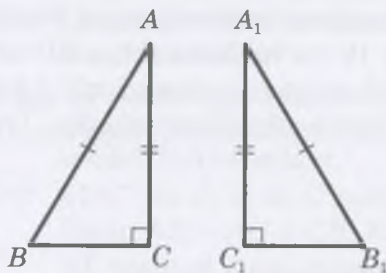
256. ábra



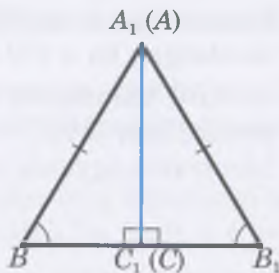
szükséges. Bármilyen két derékszögű háromszög egybevágósághoz az egyik elem mindig adott, ez a derékszögük. Ezért a derékszögű háromszögeknek egyediek lesznek az egybevágóság ismertetőjelei.

**17.1. tétel (a derékszögű háromszögek egybevágósága átfogójuk és befogójuk alapján).** *Ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és befogója megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög átfogójával és befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágók lesznek.*

**Bizonyítás.** Megvizsgáljuk az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögeket, melyeknél  $C\angle = C_1\angle = 90^\circ$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  (257. ábra). Be kell bizonyítani, hogy  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ .



257. ábra



258. ábra

Az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögeket úgy helyezzük el, hogy az  $A$  csúcsa egybeessen az  $A_1$  csúccsal, a  $C$  csúcs pedig a  $C_1$  csúccsal, a  $B$  és  $B_1$  pontok pedig az  $A_1C_1$  egyeneshez viszonyítva különböző félsíkokhoz tartozzanak (258. ábra).

Ekkor  $A_1C_1B\angle + A_1C_1B_1\angle = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . Tehát  $BC_1B_1$  szög egyenesszög lesz, ezért a  $B, C_1, B_1$  pontok egy egyenesre illeszkednek. Megkaptuk a  $BA_1B_1$  egyenlő szárú háromszöget, melynek szárjai  $A_1B$  és  $A_1B_1$ , magassága pedig  $A_1C_1$  (258. ábra). Ekkor az  $A_1C_1$  a háromszög súlyvonala, vagyis  $C_1B = C_1B_1$ . Tehát az  $A_1BC_1$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek egybevágóak az egybevágóság harmadik ismertetőjele alapján. ▲

A feladatok megoldása során érdemes még a derékszögű háromszögek egybevágóságának többi ismertetőjelét is alkalmazni.

**A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele két befogójuk alapján.** Ha az egyik derékszögű háromszög befogói megfelelően egyenlők a másik derékszögű háromszög befogóival, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

**A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele befogójuk és a rajta lévő szögük alapján.** Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és a rajta lévő szöge megfelelően egyenlők a másik derékszögű háromszög befogójával és rajta lévő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

Egyértelmű, hogyha az egyik derékszögű háromszög hegyesszöge egyenlő a másik derékszögű háromszög hegyesszögével, akkor mindkét hegyesszögük egyenlők. Alkalmazva ezt a megállapítást, a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit még két ismertetőjellel lehet kiegészíteni.

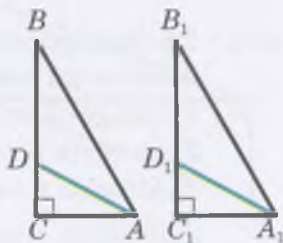
**A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele befogójuk és szemközti hegyesszögük alapján.** Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és a befogóval szemközti hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik háromszög befogójával és szemközti szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

**A derékszögű háromszög egybevágóságának az ismertetőjele az átfogója és hegyesszöge alapján.** Ha a derékszögű háromszög átfogója és hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik háromszög átfogójával és hegyesszögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

**Feladat.** Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát, ha hegyesszögük és ebből a csúcsból húzott szögfelezőjük megfelelően egyenlők.

**Megoldás.** Az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögekben (259. ábra)  $C\angle = C_1\angle = 90^\circ$ ,  $BAC\angle = B_1A_1C_1\angle$ , az  $AD$  és  $A_1D_1$  szakaszok a szögfelezők és  $AD = A_1D_1$ .

Ekkor:  $CAD\angle = \frac{1}{2} BAC\angle = \frac{1}{2} B_1A_1C_1\angle = C_1A_1D_1\angle$ . Mivel  $AD = A_1D_1$ , ekkor az



259. ábra



$ACD$  és  $A_1C_1D_1$  háromszögek egybevágók lesznek az átfogójuk és a hegyesszögük alapján. Ebből következik, hogy  $AC = A_1C_1$  és mivel  $BAC\angle = B_1A_1C_1\angle$ , ezért az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  derékszögű háromszögek egybevágók a befogójuk és a rajta fekvő hegyesszögük alapján. ●



1. Milyen háromszöget nevezünk derékszögűnek?
2. A derékszögű háromszög melyik oldalát nevezzük átfogónak?
3. A derékszögű háromszög melyik oldalát nevezzük befogónak?
4. Fogalmazzatok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét átfogója és befogója alapján.
5. Fogalmazzatok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét két befogója alapján.
6. Fogalmazzatok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét befogója és rajta fekvő szöge alapján.
7. Fogalmazzatok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét befogója és vele szemközti hegyesszöge alapján.
8. Fogalmazzatok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjelét átfogója és hegyesszöge alapján.
9. Mivel egyenlő a derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege?



### GYAKORLATI FELADAT

424.° Derékszögű vonalzó és vonalzó segítségével szerkesszettek derékszögű háromszöget, ha:

- 1) befogói 3 cm és 4 cm;
- 2) az egyik befogója 2,5 cm, rajta lévő szöge  $40^\circ$ ;
- 3) átfogója 6 cm, az egyik hegyesszöge  $70^\circ$ .

Jelöljétek meg a megszerkesztett háromszögeket, és nevezzétek meg mindegyiknek a befogóit és az átfogóját.

**425.°** Derékszögű vonalzó és vonalzó segítségével szerkesszettek egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha:

- 1) befogója 5 cm-rel egyenlő;
- 2) átfogója 4 cm-rel egyenlő.



## GYAKORLATOK

**426.°** A 260. ábrán az  $MKE$  derékszögű háromszög látható, melynek  $K$  a derékszöge. Nevezzétek meg:

- 1) a háromszög befogóit és átfogóját;
- 2) az  $E$  szög melletti befogót;
- 3) az  $M$  szöggel szembeni befogót.

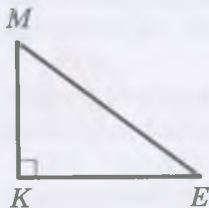
**427.°** A 261. ábrán az  $ABC$  háromszög magassága  $AD$ . Keressetek ezen az ábrán derékszögű háromszögeket, mindegyiknek nevezzétek meg a befogóit és átfogóját.

**428.°** A derékszögű háromszög egyik hegyesszögének a fokmértéke  $43^\circ$ . Határozzátok meg a másik hegyesszögét.

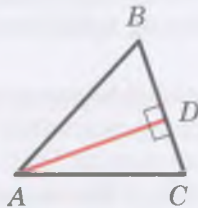
**429.°** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben ( $AB = BC$ )  $AH$  a magasság. Határozzátok meg a  $CAH$  szöget, ha  $B\angle = 76^\circ$ .

**430.°** Az egyenlő szárú háromszögben az alap és a szárhoz húzott magasság közötti szög  $19^\circ$ -kal egyenlő. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit.

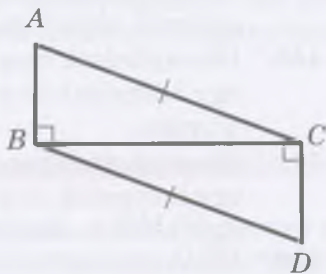
**431.°** A 262. ábrán  $AB \perp BC$ ,  $CD \perp BC$ ,  $AC = BD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AB = CD$ .



260. ábra



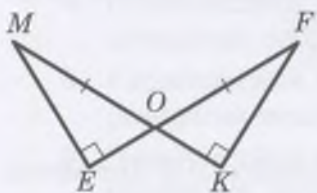
261. ábra



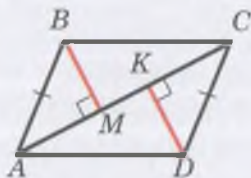
262. ábra



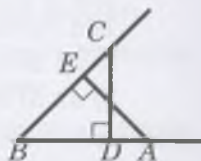
- 432.° A 263. ábrán  $MO = FO$ ,  $\angle MEO = \angle FKO = 90^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\triangle MEO \cong \triangle FKO$ .
- 433.° Az  $A$  és  $B$  pontokból, melyek az  $a$  egyeneshez viszonyítva egyfűlsíkhöz illeszkednek,  $AM$  és  $BK$  merőlegeseket bocsátunk erre az egyenesre,  $AM = BK$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AK = BM$ .
- 434.° A 264. ábrán  $AB = CD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $BM \perp AC$ ,  $DK \perp AC$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BM = DK$ .
- 435.° A 265. ábrán  $AB = BC$ ,  $CD \perp AB$ ,  $AE \perp BC$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BE = BD$ .



263. ábra



264. ábra



265. ábra

- 436.°** A  $B$  csúcsú szög szögfelezőjén felvettek egy  $M$  pontot, melyből  $MD$  és  $MC$  merőlegeseket bocsátottak a szög száraitra. Bizonyítsátok be, hogy  $MD = MC$ .
- 437.° A  $B$  csúcsú szög szárain  $A$  és  $C$  pontokat jelöltek úgy, hogy  $AB = BC$ . Az  $A$  és  $C$  pontokon keresztül merőleges egyeneseket fektettek a  $BA$  és  $BC$  szögszárakra, melyek az  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  szögnek a  $BO$  szögfelezője lesz.
- 438.°** Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög száraihoz húzott szögfelezői egyenlők egymással.
- 439.°** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög két magassága egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő szárú lesz.
- 440.° Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egy befogójuk és a derékszög szögfelezőjének egyenlősége alapján.
- 441.° Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egy befogójuk és a derékszög csúcsából bocsátott magasság egyenlősége alapján.
- 442.° Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egy befogójuk és a rajtuk lévő szög szögfelezőjének egyenlősége alapján.

- 443.\* Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egy befogójuk és a másik befogóhoz húzott súlyvonal egyenlősége alapján.
-  444.\* Bizonyítsátok be, hogy az egybevágó háromszögekben a megfelelő oldalakra húzott magasságok egyenlők.
- 445.\* Bizonyítsátok be a hegyesszögű háromszögek egybevágóságát egy oldaluk és azok végpontjaiból húzott két magasságuk egyenlősége alapján.
- 446.\* Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát egy oldaluk valamint erre az oldalra bocsátott magasságuk és súlyvonaluk egyenlősége alapján.
- 447.\* Az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $BC$  oldalait egy egyenes megfelelően az  $M$  és  $K$  pontban metszi. Ezek a pontok háromszög oldalainak a felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az adott háromszög csúcsai egyenlő távolságra vannak az  $MK$  egyenestől.
- 448.\* Az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $BC$  oldalait egy egyenes megfelelően  $M$  és  $K$  pontokban metszi. Az adott háromszög csúcsai egyenlő távolságra vannak az  $MK$  egyenestől. Bizonyítsátok be, hogy az  $M$  és  $K$  pontok az  $AB$  és  $BC$  szakaszok megfelelő felezőpontjai.
- 449.\*\* Az  $ABC$  háromszög  $AM$  és  $CK$  magasságai egy  $H$  pontban metszik egymást,  $HK = HM$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.
- 450.\*\* Az  $MKN$  háromszög  $ME$  és  $NF$  magasságai egy  $O$  pontban metszik egymást,  $OM = ON$ .  $MF = KE$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $MKN$  háromszög egyenlő oldalú.
- 451.\*\* Ki lehet-e jelenteni, hogy az egyik háromszög két oldala és a harmadikhoz húzott magassága megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és a harmadik oldalához húzott magasságával, akkor ezek a háromszögek egybevágók?
- 452.\*\* Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát két szögük és a harmadik szög csúcsából bocsátott magasságaik egyenlősége alapján.

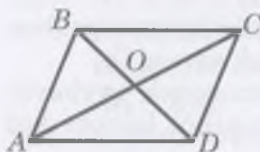


### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

453. Az  $ABC$  és  $DBC$  szögek mellékszögek, a  $BM$  félegyenes az  $ABC$  szöghöz tartozik, a  $BK$  félegyenes pedig a  $DBC$  szöghöz.  $MBC\angle = CBK\angle = 30^\circ$ , a  $DBK$  szög pedig 5-ször nagyobb, mint az  $ABM$  szög. Határozzátok meg az  $ABC$  és  $DBC$  szögeket.



454. Az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $BC$  szárain  $M$  és  $K$  pontokat jelöltek úgy, hogy  $BM = BK$ . Az  $AK$  és  $CM$  szakaszok az  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy:



266. ábra

- 1) az  $AOC$  háromszög egyenlő szárú;
- 2) a  $BO$  egyenes az  $AC$  szakasz felezőmerőlegese.

455. A 266. ábrán  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AO = OC$ .



**FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL**

456. Be lehet-e takarni a síkot olyan burkolólapokkal, amely a 267. ábrán látható?



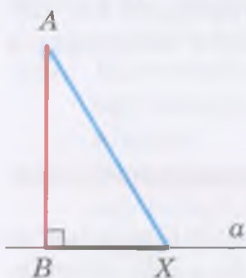
267. ábra

## 18. A derékszögű háromszög tulajdonságai

**18.1. tétel.** *A derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb, mint a befogó.*

**Bizonyítás.** ☉ Bármelyik befogó hegyesszöggel szemben fekszik, az átfogó pedig derékszöggel szemben. A derékszög nagyobb, mint a hegyesszög, és a háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik (16.4. tétel). Ezért az átfogó nagyobb bármelyik befogónál. ▲

**Következmény.** *Ha egy pontból, amely az egyeneshez nem illeszkedik, egy merőlegest és egy ferdét húzunk az egyeneshez, akkor a merőleges hossza kisebb lesz, mint a ferdeé.*



268. ábra

A 268. ábrán az  $AB$  a merőleges, az  $AX$  pedig a ferde,  $AB < AX$ .

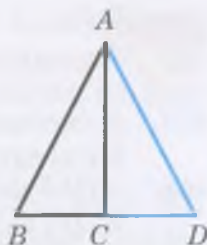
🔑 **1. feladat.** Bizonyítsátok be, a derékszögű háromszögben a  $30^\circ$ -os szöggel szemben fekvő befogó egyenlő az átfogó felével!

**Megoldás.** Vizsgáljuk meg az  $ABC$  háromszöget, melyben  $ACB\angle = 90^\circ$ ,

$BAC\angle = 30^\circ$ . Be kell bizonyítani, hogy

$$BC = \frac{1}{2} AB.$$

A  $BC$  félegyenesre felmérjük a  $CD$  szakaszt, melynek hossza a  $BC$ -vel legyen egyenlő (269. ábra). Megrajzoljuk az  $AD$  szakaszt. Ekkor az  $ABC$  és  $ADC$  háromszögekben kapjuk:  $ACB\angle = ACD\angle = 90^\circ$ , a  $BC$  és  $CD$  egyenlők a szerkesztés alapján, az  $AC$  szakasz a háromszögek közös oldala. Tehát a háromszögek egybevágóak a két oldaluk alapján. Ekkor  $DAC\angle = 30^\circ$ , vagyis a  $BAD\angle = 2DAC\angle = 60^\circ$ . Az  $ABD\angle = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Tehát  $ADB\angle = 60^\circ$  és az  $ABD$  háromszög egyenlő oldalú. Vagyis:  $BC = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AB$ . ●



269. ábra

**2. feladat.** Bizonyítsátok be, hogy amikor a befogó az átfogó felével egyenlő, akkor ezzel a befogóval szemközti szög  $30^\circ$ -os.

**Megoldás.** Megvizsgáljuk az  $ABC$  háromszöget, melyben  $ACB\angle = 90^\circ$ ,  $BC = \frac{1}{2} AB$ . Be kell bizonyítani, hogy  $BAC\angle = 30^\circ$ .

A  $BC$  félegyenesre felmérjük a  $CD$  szakaszt, melynek hossza a  $BC$ -vel egyenlő (269. ábra). Ekkor  $AB = BD$ . Ezenkívül az  $AC$  szakasz a  $BAD$  háromszög súlyvonala és magassága, tehát az egyenlő szárú háromszög ismertetőjele alapján  $AB = AD$ . Innen azt kaptuk, hogy  $AB = BD = AD$ , vagyis a  $BAD$  egyenlő oldalú háromszög, tehát  $BAD\angle = 60^\circ$ .

Mivel az  $AC$  szakasz a  $BAD$  szög szögfelezője, ezért  $BAC\angle = \frac{1}{2} BAD\angle = 30^\circ$ . ●

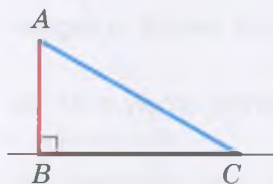


1. A derékszögű háromszög oldalai közül melyik a legnagyobb?
2. Milyen tulajdonsága van annak a befogónak, amely a  $30^\circ$ -os szöggel szemben fekszik?
3. Milyen annak a szögnek a fokmértéke, ami szemben van azzal a befogóval, amely az átfogó felével egyenlő?



## GYAKORLATOK

- 457.° A derékszögű háromszög oldalai 24 cm, 10 cm és 26 cm. Mivel egyenlő a háromszög nagyobb befogója?
- 458.° A  $DEF$  derékszögű háromszög  $DE$  átfogója 18 cm-rel egyenlő.  $D\angle = 30^\circ$ . Határozzuk meg az  $FE$  befogót.
- 459.° Az  $MKC$  derékszögű háromszögben  $M\angle = 90^\circ$ ,  $C\angle = 60^\circ$ ,  $CM = 7$  cm. Határozzátok meg a  $CK$  átfogót.
- 460.° Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszögben a  $D$  pont az  $AB$  oldal felezőpontja. Ebből a pontból  $DE$  merőleget állítottak az  $AC$  oldalra. Milyen részekre osztja fel az  $E$  pont az  $AC$  szakaszt, ha az adott háromszög oldala 16 cm-rel egyenlő?
- 461.° A derékszögű háromszög egyik szöge  $30^\circ$ , az átfogó és a kisebbik befogó különbsége pedig 5 cm. Határozzátok meg a háromszög oldalait.
- 462.° Az  $ABC$  háromszögben adott, hogy  $A\angle = 30^\circ$ ,  $B\angle = 45^\circ$ ,  $CK$  a háromszög magassága,  $AC = 10$  cm. Határozzátok meg a  $BK$  szakasz hosszát.
- 463.° Az  $ABC$  háromszögben adott, hogy  $C\angle = 90^\circ$ ,  $A\angle = 30^\circ$ ,  $CK$  a háromszög magassága,  $BD = 7$  cm. Határozzátok meg az  $AB$  átfogó hosszát.
- 464.° Az  $ABC$  háromszögben adott, hogy  $C\angle = 90^\circ$ ,  $CK$  a háromszög magassága,  $CK = 7$  cm,  $AC = 14$  cm. Határozzátok meg a háromszög  $B$  szögét.
- 465.° A 270. ábrán az  $AB$  merőleges, az  $AC$  pedig ferde,  $AC = 2$  cm. Határozzátok meg az  $ACB$  szög fokmértékét és az  $AB$  merőleges hosszát, ha ez centiméterekben megadva egész szám lesz.
- 466.° Az egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm, egyik szöge pedig  $120^\circ$ . Határozzátok meg a háromszögnek azt a magasságát, melyet az alapnál lévő csúcsból bocsátunk.
- 467.° A  $BC$  alapú  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben meghúzták a  $BM$  magasságot, melynek hossza 7,5 cm.  $MBC\angle = 15^\circ$ . Határozzátok meg a háromszög szárát.



270. ábra

- 468.° Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög  $AM$  és  $BK$  szögfelezői egy  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy  $AO : OM = 2 : 1$ .

469.\*\* Az  $ABC$  háromszögben  $C\angle = 90^\circ$ ,  $B\angle = 30^\circ$ . Az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese az  $AB$  szakaszt egy  $M$  pontban, a  $BC$  szakaszt pedig egy  $K$  pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy  $MK = \frac{1}{3} BC$ .

470.\*\* Az  $MKE$  háromszögben adott, hogy  $K\angle = 90^\circ$ ,  $E\angle = 30^\circ$ ,  $KE = 12$  cm. Határozzátok meg az  $MC$  szögfelező hosszát.

471.\*\* Az  $ABC$  háromszögben ismertek:  $C\angle = 90^\circ$ ,  $BAC\angle = 60^\circ$ , az  $AD$  szakasz szögfelező, a  $CD$  szakasz 3 cm-rel kisebb a  $BD$ -nél. Határozzátok meg az  $AD$  szögfelezőt.

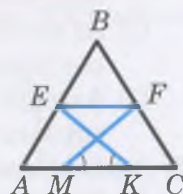


## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

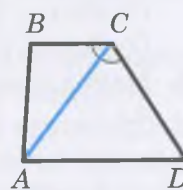
472. A 271. ábrán  $AB = BC$ ,  $AM = KC$ ,  $AKE\angle = FMC\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $FBE$  háromszög egyenlő szárú.

473. Az  $ABC$  háromszög  $A$  és  $B$  csúcsain át egyeneseket fektettek, melyek merőlegesek az  $ACB$  szög szögfelezőjére. A szögfelezők a  $BC$  és  $AC$  egyeneseket megfelelően az  $M$  és  $K$  pontokban metszik. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög területét, ha  $AC > BC$ ,  $CM = 6$  cm,  $BK = 2$  cm,  $AB = 7$  cm.

474. A 272. ábrán  $BC \parallel AD$ , a  $CA$  félegyenes a  $BCD$  szög szögfelezője,  $AD = 9$  cm,  $AC = 8$  cm. Határozzátok meg a  $CAD$  háromszög területét.



271. ábra



272. ábra



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

475. Vágd szét a háromszöget négy részre úgy, hogyha hármat tükröznünk közülük, akkor össze lehessen rakni egy ugyanilyen háromszöget.



### 3. SZÁMÚ FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

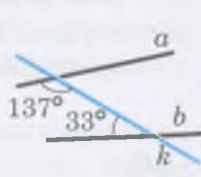
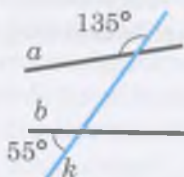
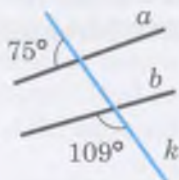
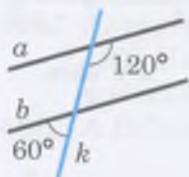
1. Melyik igaz a következő állítások közül?
  - A) Ha két szakasznak nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak lesznek.
  - B) Ha két félegyenesnek nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak lesznek.
  - C) Ha a félegyenesnek és a szakasznak nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak lesznek.
  - D) Ha két egyenesnek nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak lesznek.
2. A következő állítások közül melyik igaz?
  - A) Az egyeneshez nem illeszkedő ponton át csak egy olyan szakasz húzható, amely párhuzamos ezzel az egyenessel.
  - B) Az egyeneshez nem illeszkedő ponton át csak egy olyan félegyenes húzható, amely párhuzamos ezzel az egyenessel.
  - C) Az egyeneshez nem illeszkedő ponton át végtelen sok egyenes húzható, amely nem párhuzamos ezzel az egyenessel.
  - D) Az egyeneshez nem illeszkedő ponton át csak két olyan egyenes húzható, amely párhuzamos ezzel az egyenessel.
3. A következő állítások közül melyik igaz?
  - A) Ha  $a \parallel b$  és  $b \parallel c$ , akkor  $a \parallel c$ .
  - B) Ha  $a \perp b$  és  $b \perp c$ , akkor  $a \parallel c$ .
  - C) Ha  $a \perp b$  és  $b \perp c$ , akkor  $a \perp c$ .
  - D) Ha  $a \parallel b$  és  $c \perp b$ , akkor  $c \perp a$ .
4. Melyik rajzon lesznek párhuzamosak az  $a$  és  $b$  egyenesek?
 

A)

B)

C)

D)



5. Melyik állítás hamis?
  - A) Ha az egyik különböző oldali szögpár összege megegyezik a szögpár összegével, akkor az egyenesek nem párhuzamosak.
  - B) Ha a különböző oldali szögek nem egyenlők, akkor az egyenesek nem párhuzamosak.





### A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

#### Párhuzamos egyenesek

Két egyenest párhuzamosnak nevezünk, ha nem metszik egymást.

#### Párhuzamos egyenesek alaptulajdonsága (párhuzamossági axióma)

Az egyenesre nem illeszkedő ponton át az adott egyeneshez egyetlen párhuzamos egyenes húzható.

#### Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjele

- Két egyenes, amelyek merőlegesek egy harmadik egyenesre, párhuzamosak egymással.
- Ha két egyenes külön-külön merőleges egy harmadikra, akkor ez a két egyenes párhuzamos egymással.
- Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett különböző oldali szögek egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak.
- Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett egyoldali szögek összege  $180^\circ$ -kal egyenlő, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.
- Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett megfelelő szögek egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak.

#### Két egyenes párhuzamosságának tulajdonságai

Ha két egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor:

- a különböző oldalon fekvő szögpárok egyenlők;
- a megfelelő szögpárok egyenlők;
- az egyoldali szögpárok összege  $180^\circ$ .

#### Párhuzamos egyenesek közötti távolság

Két párhuzamos egyenes közötti távolságnak az egyik egyenes bármely pontjának a másik egyeneshez mért távolságát nevezzük.

#### Háromszög szögeinek összege

A háromszög szögeinek összege  $180^\circ$ .



## A háromszög külső szöge

A háromszög külső szögének azt a szöget nevezzük, amely mellékszöge a háromszög szögének.

A háromszög külső szöge egyenlő a háromszög adott szöggel nem szomszédos belső szögeinek összegével.

A háromszög külső szöge nagyobb bármelyik vele mellékszöget nem alkotó belső szögénél.

## Háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög bármely oldala kisebb a másik két oldal összegénél.

## Háromszögek szögeinek és oldalainak összehasonlítása

Minden háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög, a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.

## Átfogó és befogó

A derékszögű háromszögben a derékszöggel szemközti oldalt átfogónak, a derékszög melletti oldalakat pedig befogóknak nevezzük.

## A derékszögű háromszög egybevágóságának ismertetőjele

- *Átfogó és befogó alapján:* ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és befogója megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög átfogójával és befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.
- *A két befogó alapján:* ha az egyik derékszögű háromszög két befogója megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög két befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.
- *A befogó és a rajta fekvő szöge alapján:* ha az egyik derékszögű háromszög befogója és rajta fekvő szöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és rajta fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.
- *A befogó és a szemközti szöge alapján:* ha az egyik derékszögű háromszög befogója és szemközti szöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és szemközti szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.



- *Az átfogó és a hegyesszöge alapján:* ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és hegyesszögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

### **Derékszögű háromszögek tulajdonságai**

- Az átfogó nagyobb, mint a befogó.
- A  $30^\circ$ -os szöggel szemkötti befogó egyenlő az átfogó felével.
- Ha a befogó az átfogó felével egyenlő, akkor a befogóval szemkötti szög  $30^\circ$ -os.

## KÖRVONAL ÉS KÖRLAP 4.§.

Ebben a paragrafusban a körvonal tulajdonságaival fogtok megismerkedni. Megtanuljátok a körvonal és az egyenes, valamint a körvonal és a háromszög kölcsönös helyzetét. Megismerkedtek olyan különleges alakzatokkal, melyeknek minden pontja egy és ugyanazon tulajdonságokkal rendelkezik.





## 19. A pontok mértani helye. Körvonal és körlap

A pontok bármilyen halmaza egy mértani alakzatot alkot. Bármilyen alakzatot nagyon egyszerű ábrázolni: bármit amit lerajzoltok – az egy mértani alakzat lesz (273. ábra). De nem célszerű olyan alakzatot tanulmányozni, mely kaotikus pontthalmazokból áll. Ezért célszerű azokkal az alakzatokkal foglalkozni, amelyek közös tulajdonságú pontokból tevődnek össze. Az ilyen alakzatokat **a pontok mértani helyének** nevezzük.



273. ábra

**Meghatározás.** A **pontok mértani helyének (PMH)** az összes olyan pontok halmazát nevezzük, melyek közös tulajdonsággal rendelkeznek.

A PMH-t ábrázolni a következőképpen lehet: megadnak egy bizonyos tulajdonságot, és ezután a fehér síkra piros színnel ábrázolják *azokat a pontokat*, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal. A kapott „piros alakzat”, lesz a PMH.

Például, jelöljünk két pontot, az **A**-t és a **B**-t. Minden pontra megadjuk a tulajdonságot: egyidejűleg illeszkedjenek az **AB** és a **BA** félegyenesekre.

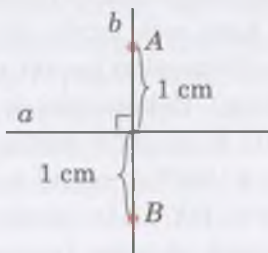


Érthető, hogy ezzel a tulajdonsággal csak az  $AB$  szakasz pontjai rendelkeznek, és csak ezek (274. ábra). Ezért az  $AB$  szakasz azon pontok mértani helye lesz, amelyek rendelkeznek a fenti tulajdonsággal.

Megvizsgáljuk az  $a$  és  $b$  merőleges egyeneseket. Minden pontra a következő tulajdonságot adjuk meg: illeszkedjen a  $b$  egyenesre, és 1 cm távolságra legyen az  $a$  egyenestől. Szemmel látható, hogy az  $A$  és  $B$  pontok (275. ábra) kielégítik ezt a feltételt. Az is érthető, hogy az  $A$  és  $B$  pontoktól különböző egyetlen más pont sem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Tehát a keresett PMH egy olyan alakzat lesz, amely két  $A$  és  $B$  pontból áll (275. ábra).



274. ábra



275. ábra

Ahhoz, hogy valamilyen tulajdonsággal rendelkező pontok halmazát PMH-nek nevezhessük, be kell bizonyítani két, kölcsönösen fordított tételt:

1) **egyenes tétel:** az adott ponthalmaz minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal;

2) **fordított tétel:** ha a pont rendelkezik az adott tulajdonsággal, akkor az adott halmazhoz fog tartozni.

**19.1. tétel.** *A szakasz felezőmerőlegese az adott szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye lesz.*

**Egyenes tétel:** *A szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól.*

**Bizonyítás.** ☉ A 8.2. tétel alapján a szakasz felezőmerőlegesének minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal

**Fordított tétel:** *Ha a pont egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, akkor a szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik.*



**Bizonyítás.** ☉ A 11.2. tétel alapján, ha a pont rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor a felezőmerőlegeshez illeszkedik. ▲

**19.1. tétel.** *A szögfelező azon pontok mértani helye, melyek egyenlő távolságra vannak a szög száraitól.*

**Egyenes tétel:** *A szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szög száraitól.*

**Bizonyítás.** ☉ Természetes, hogy a szög csúcsa rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

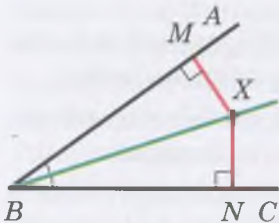
Megvizsgálunk bármilyen  $X$  pontot, amely az  $ABC$  szög csúcsával nem esik egybe és a szögfelezőjéhez illeszkedik.  $XM$  és  $XN$  merőlegeseket bocsátunk megfelelően a  $BA$  és a  $BC$  szárakra (276. ábra). Bebizonyítjuk, hogy  $XM = XN$ .

A  $BXM$  és  $BXN$  derékszögű háromszögekben a  $BX$  – közös,  $MBX\angle = NBX\angle$ , mivel a  $BX$  az  $ABC$  szög szögfelezője. Tehát a  $BXM$  és  $BXN$  háromszögek egybevágóak az átfogójuk és a hegyesszögük alapján. Innen következik, hogy  $XM = XN$ . ▲

**Fordított tétel.** *Ha a pont egyenlő távolságra van a szög száraitól, akkor az adott szög szögfelezőjére illeszkedik.*

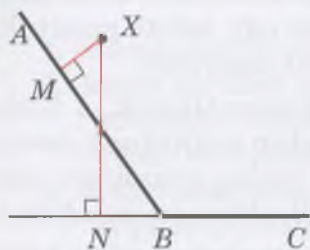
**Bizonyítás.** ☉ Természetesen a szög csúcsa rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Megvizsgálunk egy bármilyen  $X$  pontot, amely az  $ABC$  szögben helyezkedik el, nem esik egybe a csúcsával, és egyenlő távolságra van a szög száraitól (276. ábra). A  $BA$  és  $BC$  szárakra megfelelően  $XM$  és  $XN$  merőlegeseket bocsátunk. Be kell bizonyítani, hogy  $MBX\angle = NBX\angle$ .

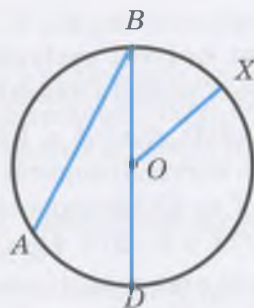


276. ábra

A  $BXM$  és  $BXN$  derékszögű háromszögekben a  $BX$  közös átfogó lesz, az  $XM$  és  $XN$  szakaszok egyenlők a feltétel alapján. Tehát a  $BXM$  és  $BXN$  háromszögek egybevágóak az átfogó és a befogó alapján. Innen  $MBX\angle = NBX\angle$ . ▲



277. ábra



278. ábra

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyítása akkor lesz teljes, ha azt is megmutatjuk, hogy a pont egyenlő távolsága a szög száraitól kizárja azt a lehetőséget, amikor az  $M$  és  $N$  pontok közül az egyik a szög szárának a meghosszabbítására illeszkedik (277. ábra). Ezt az esetet a matematika szakkörön megvizsgálhatjátok.

Megjegyezzük még azt is, hogy a bebizonyított tétel az egyenesszögre is igaz lesz.

**Meghatározás.** **Körvonalnak** nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek távolsága egy adott ponttól egy megadott pozitív számmal lesz egyenlő.

Az adott pontot a körvonal **középpontjának** nevezzük. A 278. ábrán az  $O$  pont a körvonal középpontja.

Bármilyen szakaszt, amely a körvonal pontját a középpontjával köti össze, a körvonal **sugarának** nevezzük. Ennek a szakasznak a hosszát is a körvonal sugarának szokták nevezni. A 278. ábrán az  $OX$  szakasz lesz a sugár. A meghatározásból az is következik, hogy az adott körvonal minden sugara egyenlő.

A körvonal két pontját összekötő szakaszt **húrnak** nevezzük. A 278. ábrán az  $AB$  és  $BD$  szakaszok húrok lesznek. Azt a húr, amely a körvonal középpontjára illeszkedik, a körvonal **átmérőjének** nevezzük. A 278. ábrán a  $BD$  szakasz a körvonal átmérője. A  $BD = 2OX$ , vagyis a körvonal átmérője kétszer nagyobb a sugaránál.

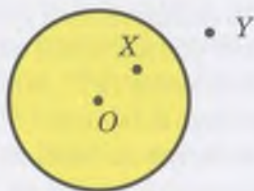
A 6. osztályos matematikából már tudjátok, hogy a körvonallal határolt alakzatot körlapnak nevezzük (279. ábra). Most már a pontok mértani helyével is meg lehet adni a körlap meghatározását.



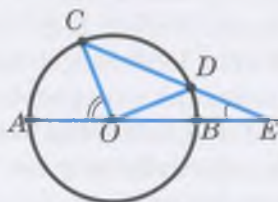
**Meghatározás.** **Körlapnak** nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek távolsága egy adott ponttól egy megadott pozitív számnál nem lesz nagyobb.

Az adott pontot a **körlap középpontjának**, a körlapot határoló körvonal sugarát pedig a **körlap sugarának** nevezzük.

Ha  $X$  az  $O$  középpontú  $R$  sugarú körlap tetszőleges pontja, akkor  $OX \leq R$  (279. ábra). Ha  $OX < R$ , akkor azt mondják, hogy az  $X$  pont arra a körlapra illeszkedik, melyet az adott körvonal határol. Az  $Y$  pont nem illeszkedik a körlapra (279. ábra). Ebben az esetben azt mondják, hogy az  $Y$  pont a körlapot határoló körvonalon kívül fekszik.



279. ábra



280. ábra

A körlap meghatározásából az is következik, hogy a körlapot határoló körvonal a körlaphoz tartozik.

A **körlap húrja és átmérője** a körlapot határoló körvonal húrja és átmérője lesz.

**Feladat.** Az  $O$  középpontú körvonal  $CD$  húrjának meghosszabbításán egy  $E$  pontot jelöltek úgy, hogy a  $DE$  szakasz hossza egyenlő a körvonal sugarával. Az  $OE$  egyenes az adott körvonalat az  $A$  és  $B$  pontokban metszi (280. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $\angle AOC = 3\angle CEO$

**Megoldás.** Legyen  $\angle CEO = \alpha$

Mivel az  $ODE$  háromszög egyenlő szárú, ezért  $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$ .

Az  $ODC$  szög az  $ODE$  háromszög külső szöge. Ezért  $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$ .

Mivel a  $COD$  háromszög egyenlő szárú, ezért  $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$ .

Az  $\angle AOC$  szög a  $COE$  háromszög külső szöge. Tehát  $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$ , vagyis  $\angle AOC = 3\angle CEO$  ●



1. Milyen ponthalmazt nevezünk a pontok mértani helyének?
2. Milyen két tételt kell ahhoz bebizonyítani, hogy közös tulajdonsággal rendelkező ponthalmazt a pontok mértani helyének nevezhessük?
3. Milyen alakzat lesz a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye?
4. Milyen alakzat lesz azon pontok mértani helye, melyek a szög száraitól egyenlő távolságra lesznek?
5. Mit nevezünk körvonalnak?
6. Mit nevezünk a körvonal sugarának?
7. Mit nevezünk a körvonal húrjának?
8. Mit nevezünk a körvonal átmérőjének?
9. Milyen a kapcsolat a körvonal átmérője és a sugara között?
10. Mit nevezünk körlapnak?
11. A körvonalhoz tartozik-e a középpontja?
12. A körlaphoz tartozik-e a középpontja?
13. Milyen egyenlőtlenség teljesül bármely olyan  $A$  pontra, amely az  $O$  középpontú és  $R$  sugarú körlaphoz tartozik?
14. Milyen egyenlőtlenség teljesül bármely olyan  $BA$  pontra, amely az  $O$  középpontú és  $R$  sugarú körlaphoz nem tartozik?



## GYAKORLATI FELADATOK

- 476.<sup>o</sup> Rajzoljatok egy  $O$  középpontú és 3,5 cm sugarú körvonalat. Jelöljétek rajta:
- 1) olyan  $A$  és  $B$  pontot, melyekre teljesül, hogy  $OA < 3,5$  cm,  $OB < 3,5$  cm;
  - 2) olyan  $C$  és  $D$  pontot, melyekre teljesül, hogy  $OC = 3,5$  cm,  $OD = 3,5$  cm;
  - 3) olyan  $E$  és  $F$  pontot, melyekre teljesül, hogy  $OE > 3,5$  cm,  $OF > 3,5$  cm.
- 477.<sup>o</sup> Rajzoljatok egy 3 cm-es  $AB$  szakaszt. Határozzátok meg azt a pontot, amely az  $AB$  szakasz mindkét végpontjától 2 cm távolságra lesz. Hány ilyen pont létezik?

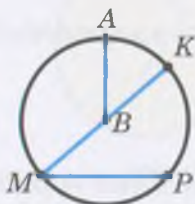


- 478.° Rajzoljatok egy 4 cm hosszúságú  $CD$  szakaszt. Határozzátok meg azt a pontot, amely a  $C$  ponttól 2,5 cm távolságra, a  $D$  ponttól pedig 3,5 cm távolságra van. Hány ilyen pont létezik?
- 479.° Rajzoljatok egy 7 cm-es átmérőjű körvonalat. Jelöljétek a körvonalon egy  $A$  pontot. Határozzátok meg a körvonalnak azt a pontját, amely az  $A$  ponttól 4 cm távolságra lesz.



## GYAKORLATOK

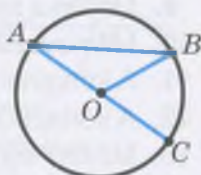
- 480.° A 281. ábrán egy  $B$  középpontú körvonal látható. Nevezzétek meg a körvonal sugarát, húrját és átmérőjét. Hány sugar látható az ábrán, és hány húr?



281. ábra

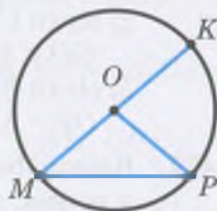


282. ábra



283. ábra

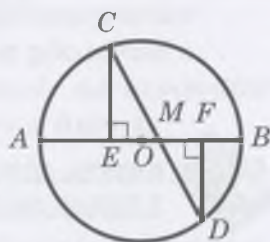
- 481.° Az  $O$  középpontú körben az  $AB$  és  $CD$  húrok egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy  $AOB\angle = COD\angle$ .
- 482.° A 282. ábrán egy  $O$  középpontú körvonal látható.  $COD\angle = MOK\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $CD$  és  $MK$  húrok egyenlők.
- 483.° Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok a körvonal átmérői. Bizonyítsátok be, hogy  $BAC\angle = CDB\angle$ .
- 484.° Az  $MK$  és  $EF$  szakaszok egy  $O$  középpontú körvonal átmérői,  $MK = 12$  cm,  $ME = 10$  cm. Határozzátok meg az  $FOK$  háromszög területét.
- 485.° Az  $AC$  és  $AB$  szakaszok, megfelelően az  $O$  középpontú körvonal átmérője és húrja lesz,  $BAC\angle = 26^\circ$  (283. ábra). Határozzátok meg a  $BOC$  szög mértékét.
- 486.° Az  $MP$  és  $MK$  szakaszok, megfelelően az  $O$  középpontú körvonal átmérője és húrja lesz,  $POK\angle = 84^\circ$  (284. ábra). Határozzátok meg az  $MPO$  szög mértékét.



284. ábra



- 487.° Az  $AB$  és  $AC$  szakaszok, megfelelően a körvonal átmérője és húrja lesz, az  $AC$  húr egyenlő a körvonal sugarával. Határozzátok meg a  $BAC$  szöget.
- 488.° A  $CD$  szakasz egy  $O$  középpontú körvonal átmérője lesz. A körvonalon egy  $E$  pontot jelöltek úgy, hogy  $COE\angle = 90^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $CE = DE$ .
- 489.° Mivel egyenlő annak a körnek az átmérője, amelyről tudjuk, hogy 4 cm-rel nagyobb, mint az adott körvonal sugara?
- 490.° Az  $AB$  és a  $CD$  szakaszok a körvonal átmérői. Bizonyítsátok be, hogy  $AC \parallel BD$ .
- 491.\* A húr a körvonal átmérőjét  $30^\circ$ -os szög alatt metszi és felossza azt egy 4 cm és 10 cm-es szakaszra. Határozzátok meg a körvonal középpontja és e húr közötti távolságot.
- 492.\* A  $CD$  húr az  $AB$  átmérőt egy  $M$  pontban metszi,  $CE \perp AB$ ,  $DF \perp AB$ ,  $AMC\angle = 60^\circ$ ,  $ME = 18$  cm,  $MF = 12$  cm (285. ábra). Határozzátok meg a  $CD$  húr hosszát.
- 493.\*\* Határozzátok meg azon adott sugarú körvonalak középpontjainak mértani helyét, melyek az adott pontot tartalmazzák.
- 494.\*\* Határozzátok meg azon körvonalak középpontjainak mértani helyét, melyek az adott két pontot tartalmazzák.
- 495.\*\* Határozzátok meg azon pontok mértani helyét, melyek egyenlő távolságra vannak két egymást metsző egyenestől.
- 496.\*\* Határozzátok meg a közös alapú egyenlő szárú háromszögek csúcsainak mértani helyét.
- 497.\*\* Határozzátok meg két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyét.
- 498.\*\* Határozzátok meg az adott egyenestől megadott távolságra lévő pontok mértani helyét.
- 🔑 499.\*\* Az  $AB$  szakasz egy körvonal átmérője, az  $M$  pont az adott körvonal tetszőleges pontja, de különbözik az  $A$  és  $B$  pontoktól. Bizonyítsátok be, hogy  $AMB\angle = 90^\circ$ .
- 500.\* Adott az  $A$  és  $B$  pont. Határozzátok meg azon  $X$  pontok mértani helyét, melyekre  $AX > BX$ .
- 501.\* Adott az  $A$  és  $B$  pont. Határozzátok meg azon  $X$  pontok mértani helyét, melyekre  $AX > AB$ .



285. ábra



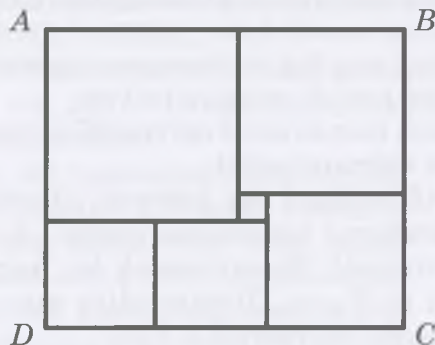
## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

502. Az  $AC$  alapú egyenlő szárú  $ABC$  háromszögben  $AD$  és  $CE$  szögfelezőket rajzoltunk. Bizonyítsátok be, hogy  $AE = ED$ .
503. Az  $O$  pontból az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokon keresztül  $OA$ ,  $OB$  és  $OC$  félegyeneseket húztunk. Ismert, hogy  $OA = OB = OC$ ,  $AOB\angle = 80^\circ$ ,  $BOC\angle = 110^\circ$ ,  $AOC\angle = 170^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.
504. Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalán úgy jelöltünk egy  $M$  pontot, hogy  $BM = CM$ , az  $MK$  félegyenese az  $AMC$  szög szögfelezője lesz. Bizonyítsátok be, hogy  $MK \parallel BC$ .
505. A hegyesszögű háromszög egyik külső szöge  $160^\circ$ . Határozzátok meg azon egyenesek közötti szöget, melyek tartalmazzák a háromszög másik két csúcsából bocsátott magasságokat.



## FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

506. A 286. ábrán egy  $ABCD$  téglalap látható, amelyet négyzetekből raktak ki. Határozzátok meg a legnagyobb négyzet oldalát, ha a legkisebb négyzet oldala 1 egység lesz.



286. ábra



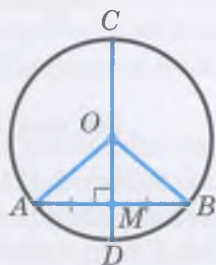
## 20. A körvonal tulajdonságai. A körvonal érintője

**20.1. tétel.** *A körvonal átmérője, amely merőleges a húrra, felezi ezt a húst.*

**Bizonyítás.** ☉ Ha a húr átmérője e körnek, akkor a tétel állítása szemmel látható lesz.

A 287. ábrán egy  $O$  középpontú körvonal látható, melynek  $CD$  átmérőjét metszi egy  $M$  pontban az  $AB$  húr, amely nem átmérője a körnek,  $CD \perp AB$ . Bebizonyítjuk, hogy  $AM = MB$ .

Meghúzzuk az  $OA$  és az  $OB$  sugarakat. Az  $AOB$  háromszög egyenlő szárú ( $AO = OB$ ), melyben az  $OM$  szakasz magasság, tehát oldalfelező is, vagyis  $AM = MB$ . ▲



287. ábra

**20.2. tétel.** *A körvonal átmérője, amely az átmérőtől különböző húst felezi, merőleges lesz erre a húrra.*

Bizonyítsátok be ezt a tételt önállóan. Gondolkozzatok el azon, hogy igaz-e ez az állítás akkor is, ha a húr átmérő lesz.

A 288. ábrán látható az egyenes és a kör kölcsönös helyzetének összes esete: nincs közös pontjuk (288. a ábra), két közös pontjuk van (288. b ábra), egy közös pontjuk van (288. c ábra).

**Meghatározás.** Azt az egyenest, amelynek a körrel csak egy közös pontja van, a kör **érintőjének** nevezzük.

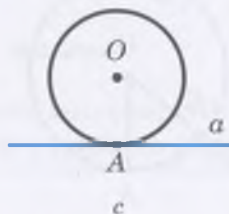
A 288. c ábrán az  $a$  egyenes érintője az  $O$  középpontú körvonalnak, az  $A$  pont pedig az **érintési pont**.



a

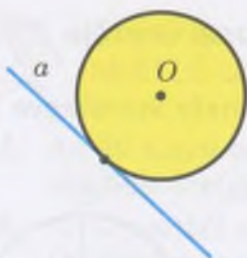


b

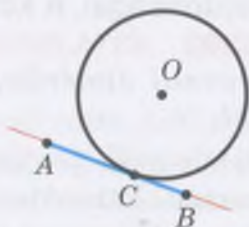


c

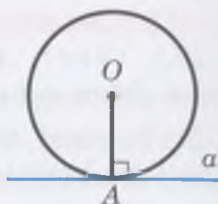
288. ábra



289. ábra



290. ábra



291. ábra

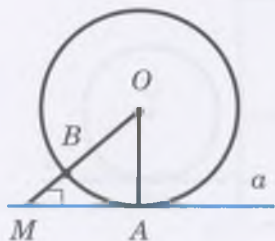
A körvonal érintőjének azzal a körlappal, melyet az adott körvonal határol, csak egy közös pontja van. Ezért úgy is mondhatjuk, hogy ez az egyenes az adott körvonallal határolt **körlap érintője** is. A 289. ábrán az  $a$  egyenes az  $O$  középpontú körlap érintője.

Ha a szakasz (félegyenes) a kör érintőjéhez tartozik, és az adott körrel van közös pontja, akkor úgy is mondhatjuk, hogy a szakasz (félegyenes) *érinti* a körvonalat. Például a 290. ábrán az  $AB$  szakasz a  $C$  pontban érinti a körvonalat.

**20.3. tétel (az érintő tulajdonsága).** *A körvonal érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.*

**Bizonyítás.** ☉ A 291. ábra egy  $O$  középpontú körvonalat ábrázol, ahol az  $A$  pont az érintési pontja az  $a$  egyenesnek és a körvonalnak. Be kell bizonyítani, hogy  $OA \perp a$ .

Tételezzük fel, hogy ez nem így van, vagyis az  $OA$  szakasz ferde az  $a$  egyeneshez viszonyítva. Ekkor az  $O$  pontból egy  $OM$  merőlegest bocsátunk az  $a$  egyenesre (292. ábra). Mivel az  $A$  pont az egyetlen közös pontja az  $a$  egyenesnek és az  $O$  középpontú körlapnak, melyet az adott körvonal határol, ezért az  $M$  pont nem illeszkedik erre a körlapra. Innen következik, hogy  $OM = MB + OB$ , ahol a  $B$  pont a körvonal és az  $OM$  merőleges metszéspontja. Az  $OA$  és az  $OB$  szakaszok egyenlők, mivel a kör sugarai. Ezekből azt kapjuk, hogy az  $OM > OA$ . Ellentmondásra jutottunk: az  $OM$  merőleges hosszabb az  $OA$  ferdénél.



292. ábra

Tehát,  $OA \perp a$ . ▲

**20.4. tétel (az érintő ismertetőjele).** *Ha az egyenes, amely a körvonal egy pontjára illeszkedik, és merőleges ehhez a ponthoz húzott sugárra, akkor ez az egyenes az adott körvonal érintője lesz.*

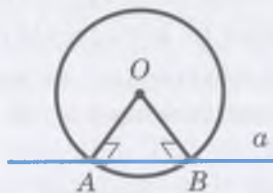
**Bizonyítás.** ☉ A 291. ábrán egy  $O$  középpontú körvonal látható, melyben az  $OA$  az adott kör sugara, és az  $A$  pont illeszkedik az  $a$  egyenesre,  $OA \perp a$ . Bebizonyítjuk, hogy az  $a$  egyenes az adott körvonal érintője lesz.

Legyen az  $a$  egyenes nem érintő, tehát az adott körvonnallal van még egy  $B$  közös pontja is (293. ábra). Ekkor az  $OA$  és  $OB$  szakaszok egyenlők, mint a körvonal sugarai, tehát az  $AOB$  háromszög egyenlő szárú. Innen következik, hogy  $OBA\angle = OAB\angle = 90^\circ$ . Tehát ellentmondásra jutottunk: az  $AOB$  háromszögnek két derékszöge van. Vagyis az  $a$  egyenes a körvonal érintője lesz. ▲

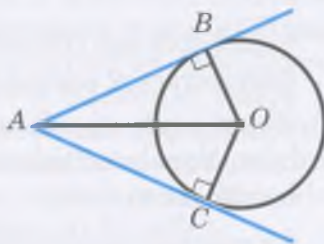
**Következmény.** *Ha a körvonal középpontjának távolsága az egyeneshez a körvonal sugarával egyenlő, akkor ez az egyenes az adott kör érintője lesz.*

Bizonyítsátok be önállóan ezt a következményt.

🔑 **Feladat.** Bizonyítsátok be, hogyha az adott pontból a körhöz két érintőt húzunk, akkor az adott pont és az érintési pontok közötti szakaszok egyenlők.



293. ábra



294. ábra

**Megoldás.** A 294. ábrán egy  $O$  középpontú körvonal látható. Az  $AB$  és  $AC$  egyenesek az érintői, a  $B$  és  $C$  pontok az érintési pontok. Be kell bizonyítani, hogy  $AB = AC$ .

Meghúzzuk az érintési pontokba az  $OB$  és  $OC$  sugarakat. Az érintő tulajdonsága (20.3. tétel) alapján  $OB \perp AB$  és  $OC \perp AC$ .



Az  $AOB$  és  $AOC$  derékszögű háromszögekben az  $OB$  és az  $OC$  befogók egyenlők, mint a körvonal sugarai, az  $AO$  pedig a közös átfogó lesz. Tehát az  $AOB$  és az  $AOC$  háromszögek egybevágóak az átfogó és a befogó alapján. Ebből következik, hogy  $AB = AC$ . ●



1. Hogyan ossza fel az átmérő a rá merőleges húrt?
2. Mivel egyenlő az átmérőtől különböző húr és az adott húr felező átmérő közötti szög fokmértéke?
3. Írjátok le az egyenes és a körvonal kölcsönös helyzetének különböző eseteit.
4. Milyen egyenest nevezünk a körvonal érintőjének?
5. Milyen tulajdonsággal rendelkezik az a sugár, amelyet a körvonal és az érintője érintési pontjába húztak?
6. Fogalmazzátok meg a körvonal érintőjének ismertetőjelét.
7. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a körhöz egy pontból húzott érintők?



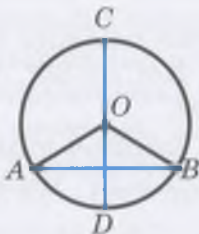
#### GYAKORLATI FELADATOK

- 507.° Rajzoljatok egy  $O$  középpontú körvonalat, és egy  $AB$  húrt. A négyzetrácsok segítségével osszátok fel két egyenlő részre.
- 508.° Rajzoljatok egy  $O$  középpontú körvonalat, és egy  $CD$  húrt. Vonalzó alkalmazásával, húzzátok meg a  $CD$  húrra merőleges átmérőt.
- 509.° Rajzoljatok egy tetszőleges sugarú kört, jelöljétek rajta az  $A$  és  $B$  pontokat. A vonalzót és a füzet négyzetrácsait felhasználva rajzoljátok meg azokat az egyeneseket, melyek az  $A$  és  $B$  pontokban érintik a körvonalat.
- 510.° Rajzoljatok egy  $a$  egyenest, melyen jelöljétek egy  $M$  pontot. Felhasználva a füzet négyzetrácsait, a vonalzót és a körzőt, rajzoljatok egy 3 cm-es sugarú kört, amely az  $M$  pontban érinti az  $a$  egyenest. Hány ilyen kört lehet rajzolni?

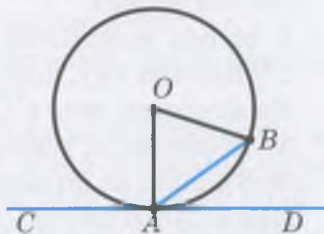


## GYAKORLATOK

- 511.° A 295. ábrán egy  $O$  középpontú kör látható, melynek  $CD$  átmérője merőleges az  $AB$  húrra. Bizonyítsátok be, hogy  $\angle AOD = \angle BOD$ .



295. ábra

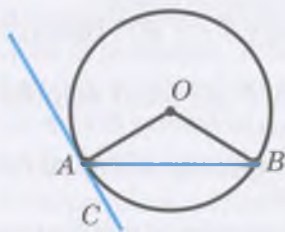


296. ábra

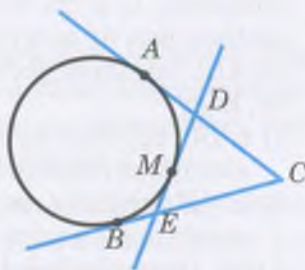
- 512.° Bizonyítsátok be, hogy a körvonal egyenlő húrjai egyenlő távolságra vannak a körvonal középpontjától.
- 513.° Bizonyítsátok be, hogy amikor a körvonal húrjai egyenlő távolságra vannak a középponttól, akkor ezek a húrok egyenlők lesznek.
- 514.° Ki lehet-e jelteni, hogy az az egyenes, amely merőleges a kör sugarára, ennek a körnek az érintője lesz?
- 515.° A  $CD$  egyenes az  $A$  pontban érinti az  $O$  középpontú körvonalat, az  $AB$  szakasz a körvonal húrja lesz,  $\angle BAD = 35^\circ$  (296. ábra). Határozzátok meg a  $\angle AOB$  szöget.
- 516.° A  $CD$  egyenes az  $A$  pontban érinti az  $O$  középpontú körvonalat, az  $AB$  szakasz a körvonal húrja lesz,  $\angle AOB = 80^\circ$  (296. ábra). Határozzátok meg a  $\angle BAC$  szöget.
- 517.° Adott egy 6 cm átmérőjű körvonal. Az  $a$  egyenes a középpontjától: 1) 2 cm-re; 2) 3 cm-re; 3) 6 cm-re lesz. Melyik esetben lesz az  $a$  egyenes a körvonal érintője?
- 518.° Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $\angle C = 90^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy:
- 1) a  $BC$  egyenes az  $A$  középpontú körvonal érintője lesz, amelyhez illeszkedik a  $C$  pont;
  - 2) az  $AB$  egyenes nem lesz a  $C$  középpontú körvonal érintője, amelyre az  $A$  pont illeszkedik.
- 519.° Bizonyítsátok be, hogy a körvonal átmérője nagyobb, mint bármelyik húrja, ha az nem átmérő lesz.



- 520.\* Az  $O$  középpontú körvonalban a sugár felezőpontján át egy  $AB$  merőleges húr rajzoltak. Bizonyítsátok be, hogy  $AOB \angle = 120^\circ$ .
- 521.\* Határozzátok meg a körvonal  $OA$  és  $OB$  sugarai közötti szöget, ha a körvonal  $O$  középpontja és az  $AB$  húr közötti távolság 2-szer kisebb, mint: 1) az  $AB$  húr hossza; 2) a kör sugara.
- 522.\* A körben meghúzták az  $AB$  átmérőt valamint az  $AC$  és  $CD$  húrokat úgy, hogy  $AC = 12$  cm,  $BAC \angle = 30^\circ$ ,  $AB \perp CD$ . Határozzátok meg a  $CD$  húr hosszát.
- 523.\* Az  $M$  pontból a körhöz  $MA$  és  $MB$  érintőket húztak, az  $A$  és  $B$  pontok az érintési pontok,  $OAB \angle = 20^\circ$ . Határozzátok meg az  $AMB$  szöget.
- 524.\* Az  $AB$  húr hossza egyenlő a kör sugarával, végpontjain keresztül két érintőt húztak, melyek egy  $C$  pontban metszik egymást. Határozzátok meg az  $ACB$  szöget.
- 525.\* Az  $O$  középpontú körvonal  $C$  pontján keresztül a körhöz érintő van húzva,  $AB$  a kör átmérője. Az  $A$  pontból az érintőre  $AD$  merőlegest bocsátottak. Bizonyítsátok be, hogy az  $AC$  félegyenes a  $BAD$  szög szögfelezője lesz.
- 526.\* Az  $AC$  egyenes az  $A$  pontban érinti az  $O$  középpontú körvonalat (297. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $BAC$  szög 2-szer kisebb, mint az  $AOB$  szög.
- 527.\* Az  $AB$  és  $AC$  szakaszok megfelelően a körvonal húrja és átmérője,  $ABC \angle = 30^\circ$ . Az  $A$  ponton keresztül a körvonalhoz egy érintő van húzva, amely a  $BC$  egyenest a  $D$  pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az  $ABD$  egyenlő szárú háromszög lesz.



297. ábra



298. ábra.



- 528.\* Ismert, hogy az  $AB$  átmérő felezi a  $CD$  húrt, de nem lesz merőleges vele. Bizonyítsátok be, hogy a  $CD$  szintén a körvonal átmérője lesz.
- 529.\*\* Határozzátok meg az adott egyenest egy adott pontban érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét.
- 530.\*\* Határozzátok meg az adott szög mindkét szárát érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét.
- 531.\*\* Határozzátok meg az adott egyenest érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét.
- 532.\*\* Az egyenesek, amelyek az  $O$  középpontú körvonalat az  $A$  és  $B$  pontokban érintik, egy  $K$  pontban metszik egymást,  $AKB\angle = 120^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AK + BK = OK$ .
-  533.\*\* Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalát a körvonal egy  $M$  pontban érinti, a másik két oldalnak meghosszabbítását is érinti ez a körvonal. Bizonyítsátok be, hogy a  $BC$  és  $BM$  szakaszok összege az  $ABC$  háromszög félkerületével lesz egyenlő.
- 534.\*\* A  $C$  ponton keresztül a körvonalhoz  $AC$  és  $BC$  érintőket húztak,  $A$  és  $B$  pontok az érintési pontok (298. ábra). A körön felvettek egy tetszőleges  $M$  pontot, amely egy félsíkban lesz a  $C$  ponttal az  $AB$  egyeneshez viszonyítva, és az  $M$  ponton keresztül is érintőt húztunk a körhöz, amely az  $AC$  és  $BC$  egyeneseket megfelelően  $D$  és  $E$  pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy a  $DEC$  háromszög kerülete független az  $M$  pont helyzetétől.

**ISMÉTLŐ GYAKORLATOK**

535. Bizonyítsátok be, hogy a szakasz  $M$  felezőpontja, melynek végpontjai párhuzamos egyenesekre illeszkednek, bármilyen szakasz felezőpontja lesz, amelyre az  $M$  pont illeszkedik, végpontjai pedig illeszkednek az adott egyenesekre
536. Az  $AB$  és  $CD$  szakaszok egy egyenesen vannak, és közös felezőpontjuk van. Az  $M$  pontot úgy választották meg, hogy az  $AMB$  egyenlő szárú háromszög, melynek  $AB$  az alapja. Bizonyítsátok be, hogy a  $CMD$  háromszög is egyenlő szárú, melynek  $CD$  lesz az alapja.



537. Az  $MPK$  háromszög  $MK$  oldalán jelöltek egy  $E$  és egy  $F$  pontot úgy, hogy az  $E$  pont az  $M$  és  $F$  pontok között helyezkedik el,  $ME = EP$ ,  $PF = FK$ . Határozzátok meg az  $M$  szögét, ha  $EPF\angle = 92^\circ$ ,  $K\angle = 26^\circ$ .
538. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszögben meghúzták a  $BM$  szögfelezőt. Az  $M$  pontból a  $BC$  oldalra pedig  $MK$  merőlegest bocsátottak. Ekkor  $ABM\angle = KMC\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

539. Állapítsátok meg, milyen szabály szerint vannak elhelyezve a 299. ábrán lévő alakzatok. Milyen alakzat kerül a következő helyre?

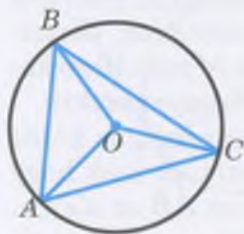


299. ábra

## 21. A háromszögbe és köré írt körvonalak

**Meghatározás.** Azt a körvonalat, amely a háromszög minden csúcán átmegy, a háromszög **köré írható** körvonalnak nevezzük.

A 300. ábrán egy olyan körvonal látható, amely a háromszög köré lett írva. Ebben az esetben azt is mondják, hogy **a háromszög körbe van írva**.



300. ábra

A 300. ábrán az  $O$  pont annak a körvonalnak a középpontja, melyet az  $ABC$  háromszög köré írtunk. Az  $OA$ ,  $OB$  és  $OC$  szakaszok a körvonal sugarai, ezért  $OA = OB = OC$ . Tehát **a háromszög köré írható körvonal középpontja egyenlő távolságra van mindegyik csúcától**.

### 21.1. tétel. Bármilyen háromszög köré írható kör.

**Bizonyítás.** ☺ A bizonyításhoz elegendő bemutatni, hogy tetszőleges  $ABC$  háromszögre létezik egy olyan  $O$  pont, amely egyenlő távolságra van mindegyik csúcsától. Ekkor az  $O$  pont a háromszög köré írt kör középpontja lesz, az  $OA$ ,  $OB$  és  $OC$  szakaszok pedig a sugarai.

A 301. ábrán egy tetszőleges  $ABC$  háromszög látható. Megrajzoljuk az  $AB$  és  $AC$  oldalak felezőmerőlegeseit, ezek megfelelően a  $k$  és  $l$  egyenesek lesznek. Legyen az  $O$  pont ezeknek az egyeneseknek a metszéspontja. Mivel az  $O$  pont a  $k$  felezőmerőlegesre illeszkedik, ezért  $OA = OB$ . Mivel az  $O$  pont az  $l$  felezőmerőlegesre illeszkedik, ezért  $OA = OC$ . Tehát  $OA = OB = OC$ , vagyis az  $O$  pont egyenlő távolságra lesz a háromszög mindegyik csúcsától. ▲

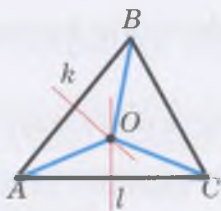
Megállapítjuk, hogy a háromszög köré csak egyetlen körvonal írható. Ez abból következik, hogy a  $k$  és  $l$  felezőmerőlegeseinek csak egy közös metszéspontja van (301. ábra). Tehát létezik egy és csakis egy pont, amely egyenlő távolságra van a háromszög mindegyik csúcsától.

**1. következmény.** A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszik egymást.

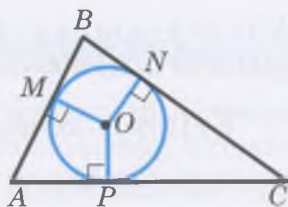
**2. következmény.** A háromszög köré írható körvonal középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek a metszéspontja lesz.

**Meghatározás.** A háromszögbe írható körnek azt a körvonalat nevezzük, mely érinti a háromszög minden oldalát.

A 302. ábrán egy háromszögbe írt körvonal látható. Ebben az esetben azt is mondják, hogy a háromszöget a körvonal köré írták.



301. ábra



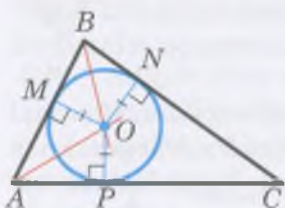
302. ábra



A 302. ábrán az  $O$  pont az  $ABC$  háromszögbe írt körvonal középpontja lesz, az  $OM$ ,  $ON$ ,  $OP$  szakaszok a körvonal sugarai, melyek az érintési pontokba vannak húzva,  $OM \perp AB$ ,  $ON \perp BC$ ,  $OP \perp AC$ . Mivel  $OM = ON = OP$ , ezért a beírt kör középpontja egyenlő távolságra van a háromszög minden oldalától.

### 21.2. tétel. Bármilyen háromszögbe lehet kört írni.

**Bizonyítás.** ☉ A 303. ábrán egy tetszőleges  $ABC$  háromszög látható. Megrajzoljuk az  $A$  és  $B$  szögeinek a szögfelezőit, megjelöljük a metszéspontjukat egy  $O$  ponttal. Az  $ABC$  háromszög  $AB$ ,



303. ábra

$BC$  és  $CA$  oldalaira az  $O$  pontból  $OM$ ,  $ON$  és  $OP$  merőlegeseket bocsátunk. Mivel az  $O$  pont az  $A$  szög szögfelezőjére illeszkedik, ezért a szögfelezőről szóló tétel (19.2. tétel) alapján  $OM = OP$ . Hasonlóan, az  $O$  pont a  $B$  szög szögfelezőjére illeszkedik, ezért  $OM = ON$ . Legyen  $OM = r$ . Ekkor  $OM = ON = OP = r$ . Ezért az  $O$  pont a háromszög minden oldalától  $r$  távolságra lesz. A körvonal érintőjéről szóló tétel

következményéből (a 20.4. tétel következménye) az következik, hogy az  $O$  pont lesz az  $r$  sugarú körvonal középpontja, amely érinteni fogja az  $AB$ ,  $BC$  és  $AC$  oldalakat. ▲

Megjegyezzük, hogy a háromszögbe csak egy körvonal írható. Ez abból következik, hogy az  $A$  és  $B$  szögek szögfelezői (303. ábra) csak egy pontban metszik egymást. Tehát csak egy olyan pont létezik, amely egyenlő távolságra van a háromszög oldalaitól.

**1. következmény.** A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.

**2. következmény.** A háromszögbe írt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja lesz.



**Feladat.** Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű három-

szögbe írt körvonal sugara az  $r = \frac{a+b-c}{2}$  képlettel határozható meg,

ahol  $r$  – a beírt körvonal sugara,  $a$ ,  $b$  – befogók,  $c$  – átfogó.



**Megoldás.** Az  $ABC$  háromszögben:  $ACB\angle = 90^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , az  $O$  pont a beírt kör középpontja,  $M$ ,  $E$  és  $K$  a körvonal megfelelő érintési pontjai a  $BC$ ,  $AC$  és  $AB$  oldalakkal (304. ábra).

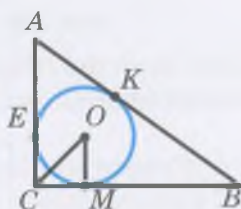
Az  $OM$  szakasz az érintési pontba húzott körvonal sugara. Ezért  $OM \perp BC$ .

Mivel az  $O$  pont a beírt kör sugara, ezért a  $CO$  félegyenes az  $ACB$  szög szögfelezője, tehát  $OCM\angle = 45^\circ$ . A  $CMO$  háromszög egyenlő szárú háromszög lesz. Innen  $CM = OM = r$ .

Az egy pontból húzott érintő szakaszok tulajdonságait felhasználva kapjuk:  $CE = CM$ . Mivel  $CM = r$ , ebből következik, hogy  $CE = r$ . Tehát  $AK = AE = b - r$ ;  $BK = BM = a - r$ .

Mivel  $AK + BK = AB$ , ebből kapjuk, hogy  $b - r + a - r = c$ . Innen következik, hogy

$$2r = a + b - c; \quad r = \frac{a + b - c}{2}. \quad \bullet$$



304. ábra



1. Mit nevezünk a háromszög köré írható körvonalnak?
2. Milyen háromszöget nevezünk körbe írt háromszögnek?
3. Milyen háromszög köré írható körvonal?
4. Milyen pont lesz a háromszög köré írt kör középpontja?
5. Milyen kört nevezünk a háromszögbe írtnak?
6. Milyen háromszöget nevezünk a kör köré írt háromszögnek?
7. Milyen háromszögbe írható körvonal?
8. Milyen az a pont, amely a háromszögbe írt kör középpontja lesz?



## GYAKORLATI FELADATOK

540.° Rajzoljatok egy különböző oldalú hegyesszögű háromszöget.

- 1) A füzet négyzetrácsait és a vonalzó skáláját felhasználva határozzátok meg az adott háromszög köré írt kör középpontját.
- 2) Írjátok a háromszög köré kört.



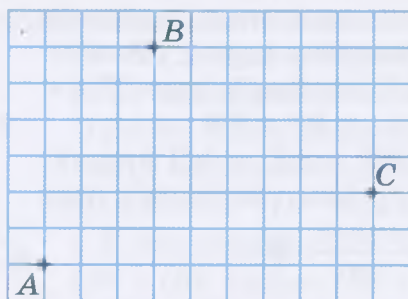
Végezzétek el az 1. és 2. feladatokat a különböző oldalú derékszögű és tompaszögű háromszögekre is.

**541.°** Rajzoljatok:

- 1) egy egyenlő szárú hegyesszögű háromszöget;
- 2) egy egyenlő szárú tompaszögű háromszöget.

Végezzétek el az 1. és 2. feladatokat az 540. gyakorlatból.

**542.°** Rajzoljátok át a füzetbe a 305. ábrát. Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontokon keresztül rajzoljatok egy körvonalat, eközben használhattok vonalzó, négyzetrácsos lapot és körzőt.



305. ábra

**543.°** Rajzoljatok egy különböző oldalú háromszöget.

- 1) Vonalzót és szögmérőt alkalmazva határozzátok meg a háromszögbe írt kör középpontját.
- 2) A füzetlap négyzetrácsait felhasználva határozzátok meg a beírt körnek és a háromszög oldalainak az érintési pontjait.
- 3) Rajzoljátok meg az adott háromszögbe írt körvonalat.

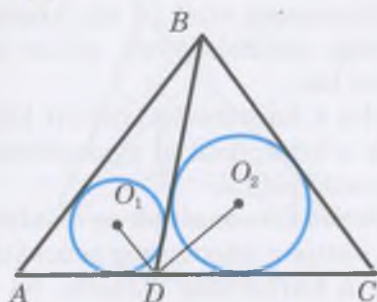
**544.°** Rajzoljatok egy egyenlő szárú háromszöget. Végezzétek el az 543. gyakorlat 1., 2. és 3. feladatát az adott háromszögön.



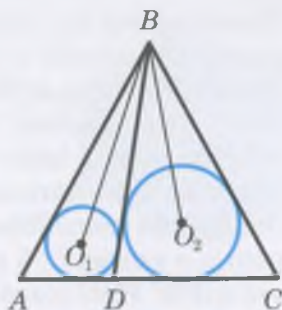
## GYAKORLATOK

**545.°** Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög köré írható kör középpontja az alapra bocsátott oldalfelezőre illeszkedik.

**546.°** Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög köré írható kör középpontja az alapra bocsátott magasságra illeszkedik.

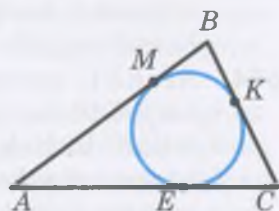


306. ábra



307. ábra

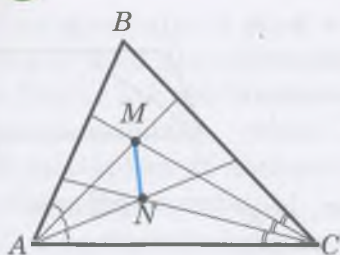
- 547.°** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszögbe írt körvonal középpontja a magasságra illeszkedik, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú.
- 548.°** Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszög köré írt körvonal középpontja a szögfelezők metszéspontja lesz.
- 549.°** A 306. ábrán az  $ABD$  és  $CBD$  háromszögekbe írt körvonalak középpontjai megfelelően  $O$  és  $O_1$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $O_1DO_2$  szög derékszög lesz.
- 550.°** A 306. ábrán az  $ABD$  és  $CBD$  háromszögekbe írt körvonalak középpontjai megfelelően  $O$  és  $O_1$ .  $\angle ABC = 50^\circ$ . Határozzátok meg az  $O_1BO_2$  szög fokmértékét.
- 551.°** Az  $ABC$  háromszög köré írt kör  $O$  középpontján keresztül egy egyenest fektettek, amely merőleges az  $AC$  oldalra, és az  $AB$  oldalát egy  $M$  pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy  $AM = MC$ .
- 552.°** Az  $ABC$  háromszögbe egy olyan kör van írva (308. ábra), amely  $M$ ,  $K$  és  $E$  pontokban érinti az oldalait,  $BK = 2$  cm,  $KC = 4$  cm,  $AM = 8$  cm. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög területét.
- 553.°** Az  $ABC$  háromszögbe egy olyan kör van írva (308. ábra), amely  $M$ ,  $K$  és  $E$  pontokban érinti az oldalait,  $AB = 13$  cm,  $BC = 8$  cm,  $BK = 3$  cm. Határozzátok meg az  $AC$  oldal hosszát.
- 554.°** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik a háromszög magasságára, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú lesz.



308. ábra



- 555.\*** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt kör középpontja illeszkedik a háromszög oldalfelezőjére, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú lesz.
- 556.\*** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt körvonalának és a beírt körének a középpontjai egybeesnek, akkor az ilyen háromszög egyenlő oldalú.
- 557.\*** Az egyenlő szárú háromszögbe írt körvonalnak az érintési pontja a szárat  $7 : 5$  arányba osztja a háromszög csúcsától számítva. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha a kerülete  $68$  cm.
- 558.\*** Az  $ABC$  kör köré írt háromszög kerülete  $52$  cm, az  $AB$  oldalra illeszkedő érintési pont az adott oldalt az  $A$  csúctól számítva  $2 : 3$  arányba osztja. A  $BC$  oldal érintési pontja a  $C$  csúctól  $6$  cm távolságra van. Határozzátok meg a háromszög oldalait.
- 559.\*** A háromszög szögei  $30^\circ$ ,  $70^\circ$  és  $80^\circ$ , és kör van bele írva. Határozzátok meg annak a háromszögnek a szögeit, amelynek a csúcsai az adott háromszög és a belé írt körvonal érintési pontjai lesznek.
- 560.\*** Az egyenlő szárú  $ABC$  háromszögbe kört írtak, amely  $M$  és  $N$  pontokban érinti az  $AB$  és  $BC$  oldalait. Bizonyítsátok be, hogy  $MN \parallel AC$ .
- 561.\*** Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt körvonal középpontja az oldalára illeszkedik, akkor az ilyen háromszög derékszögű lesz.
- 562.\*\*** Az  $ABC$  háromszögbe kör van írva, amely az  $M$  pontban érinti az  $AB$  oldalát,  $BC = a$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AM = p - a$ , ahol a  $p$  az  $ABC$  háromszög félkerülete lesz.
- 563.\*\*** Az egyenlő oldalú háromszögbe, melynek oldala  $a$ , kör van írva. Ehhez a körhöz egy érintőt húztak, amely metszi a háromszög két oldalát. Határozzátok meg annak a háromszögnek a kerületét, amelyet ez az érintő vág le az adott háromszögből.
- 564.\*** Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszögnek ( $AB = BC$ ) az alapja  $10$  cm. Ebbe kört írtak, és ehhez a körhöz három érintőt húztak, amelyek levágják az  $ADK$ ,  $BEF$  és  $CMN$  háromszögeket az adott háromszögből. A keletkezett háromszögek kerületeinek az összege  $42$  cm. Mennyi lesz az adott háromszög szárának a hossza?

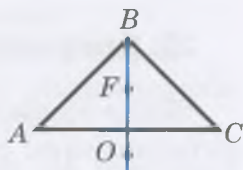


309. ábra



310. ábra

- 565.\* Az  $ABC$  háromszögben a  $BD$  oldalfelező,  $AB = 7$  cm,  $BC = 8$  cm. Az  $ABD$  és  $BDC$  háromszögekbe körvonalat írtak. Határozzátok meg az érintési pontok távolságát a  $BD$  szakasztól.
- 566.\* Az  $ABC$  háromszög  $BAC$  és  $ACB$  szögei három-három egyenlő részre van osztva (309. ábra). Bizonyítsátok be, hogy  $AMN\angle = CMN\angle$ .
- 567.\* A szög  $B$  csúcsát nem tudjuk elérni (310. ábra). Szögmérő és skála nélküli vonalzó felhasználásával szerkesszettek egy egyenest, amely tartalmazza a  $B$  szög szögfelezőjét.
- 568.\* Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög beírt és körülírt köreinek középpontjai megfelelően az  $F$  és  $O$  pontok lesznek (311. ábra). Ezek a pontok a háromszög  $AC$  alapjától egyenlő távolságra vannak. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.



311. ábra

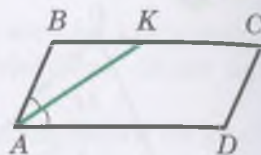


## ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

569. Az  $ABC$  szögnek a szögfelezője a szög szárával olyan szöget alkot, amely egyenlő lesz az  $ABC$  szög mellékszögével. Határozzuk meg az  $ABC$  szöget.
570. Az egyenlő szárú háromszögben az alap csúcsából meghúzták a háromszög magasságát, az alap másik csúcsából pedig a szögfelezőt. A magasság és a szögfelező metszéspontjában keletkezett szögek egyike  $64^\circ$ . Határozzátok meg az adott háromszög szögeit.



571. A 312. ábrán a  $BC \parallel AD$ ,  $AB = 3$  cm,  $BC = 10$  cm. A  $BAD$  szög szögfelezője a  $BC$  szakaszt egy  $K$  pontban metszi. Határozzátok meg a  $BK$  és  $KC$  szakaszok hosszát.



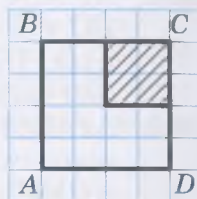
312. ábra

572. Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $AB = BC$ ,  $AM$  és  $CK$  pedig a háromszög oldalfelőzői. Bizonyítsátok be, hogy  $MK \parallel AC$ .



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

573. Az  $ABCD$  négyzetből kivágták a bevonalkázott alakzatot (313. ábra). Osszátok fel négy egyenlő alakzatra a négyzet maradék részét.



313. ábra

## 22. Szerkesztési feladatok<sup>1</sup>

Skálás vonalzóval, körzővel, szögmérővel, a 314. ábrán látható görbevonalzóval már nagyon sokszor kellett különböző mértani szerkesztéseket végeznetek.

Lehet-e kevesebb eszközzel geometriai szerkesztéseket végezni? Kiderült, nagyon sok esetben a szerkesztéshez elegendő a körző és a *skála nélküli vonalzó* is. Például ahhoz, hogy megszerkesszük a szög szögfelezőjét, egyáltalán nem szükséges a szögmérő, olyan vonalzóval is el lehet végezni a szakaszt felezését, amelyen nincs skála.

Érdemes-e a mai világban, amikor olyan pontos eszközöket hoztak létre és számítógép programok is rendelkezésünkre állnak, melyek segítségével a legbonyolultabb méréseket és



314. ábra

<sup>1</sup> Nem kötelező tananyag



szerkesztéseket is el lehet végezni, olyan egyszerű eszközöket használni, mint a körző és a vonalzó? A gyakorlatban természetesen nem. Ezért a mérnökök, építészek, formatervezők nagyon sok ilyen eszközt használnak.

A mértanban az alakzatok szerkesztésénél a következő szabályokat alkalmazzák:

- 1) a szerkesztéseket körzővel és olyan vonalzóval végzik, amelyiken nincs skála;
- 2) vonalzó segítségével az adott ponton keresztül lehet egyenest rajzolni, és két ponton keresztül, például az  $A$  és  $B$  ponton át megrajzolható az  $AB$  egyenes;
- 3) körző segítségével lehet kört rajzolni, ha adott a kör középpontja és sugara, amely egy adott szakasz hosszával egyenlő.

Ha a feladatban meg kell szerkeszteni valamilyen alakzatot, akkor azt csak a fenti szabályok alkalmazásával lehet elvégezni.

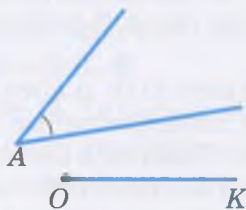
**A szerkesztési feladatot elvégezni** annyit jelent, hogy összeállítani a feladat megoldásához szükséges munkatervet (*algoritmust*); megvalósítani a munkatervet, elkészíteni a szerkesztést; bebizonyítani, hogy a kapott alakzat lesz a keresett.

Vizsgáljuk meg a szerkesztési feladatok legfontosabbjait.

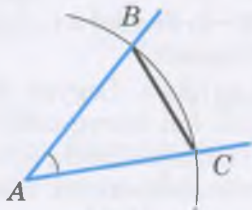
 **1. feladat.** Szerkesszetek egy adott szöggel egyenlő szöveget, melynek egyik szára az adott félegyenes lesz.

**Megoldás.** A 315. ábrán az  $A$  szög és egy  $OK$  félegyenes látható. Meg kell szerkeszteni egy szöveget, amely egyenlő lesz az  $A$ -val, az egyik szára pedig az  $OK$  félegyenes.

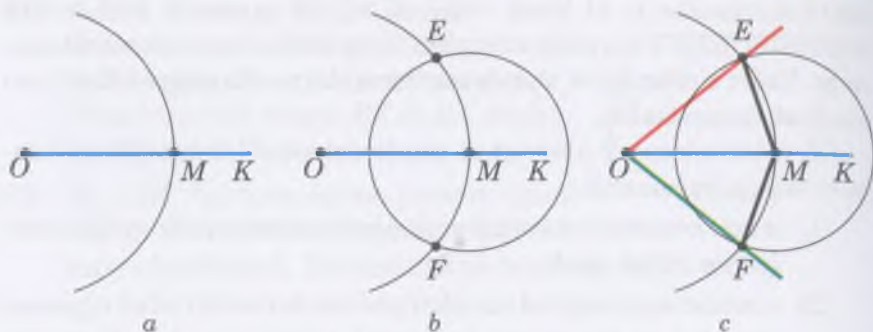
Rajzolunk egy tetszőleges  $r$  sugarú kört, melynek középpontja az  $A$  pont lesz. A kör és az  $A$  szög szárainak metszéspontját jelöljük  $B$  és  $C$ -vel (316. ábra). Ekkor  $AB = AC = r$ .



315. ábra



316. ábra



317. ábra

Rajzolunk egy  $O$  középpontú és  $r$  sugarú kört. Az  $OK$  félegyenest a kör egy pontban metszi, legyen ez az  $M$  pont (317. *a* ábra). Ezután az  $M$  pontból rajzolunk egy  $BC$  sugarú körvonalat. Legyen az  $O$  és  $M$  középpontú körvonalak metszéspontja  $E$  és  $F$  (317. *b* ábra). Megrajzoljuk az  $OE$  és  $OF$  félegyeneseiket (317. *c* ábra).

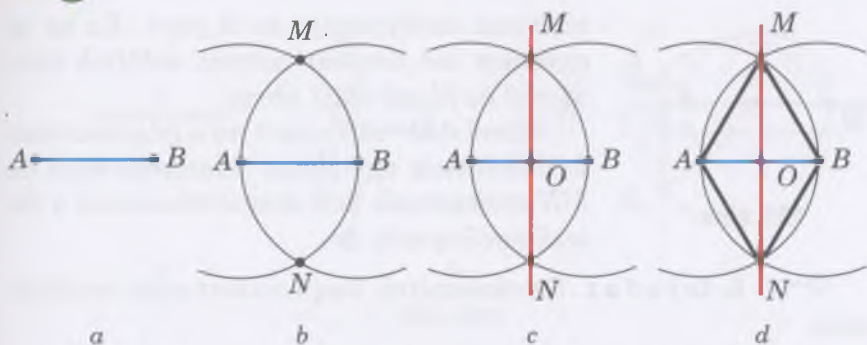
Bebizonyítjuk, hogy az  $EOM$  és az  $FOM$  szög is a keresett szög lesz. Bebizonyítjuk, hogy például az  $EOM\angle = BAC\angle$ .

Megvizsgáljuk az  $ABC$  (316. ábra) és az  $OEM$  (317. *c* ábra) háromszögeket. Adott:  $AB = OE = r = AC = OM$ . A szerkesztésből következik, hogy  $EM = BC$ . Tehát az  $ABC$  és  $OEM$  háromszögek egyenlők három oldaluk alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele alapján. Ebből következik, hogy  $EOM\angle = BAC\angle$ . Ehhez hasonlóan azt is be lehet bizonyítani, hogy  $BAC\angle = FOM\angle$ . ●

Mi két olyan szöget, az  $EOM$  és az  $FOM$  szerkesztettünk, melyek mindegyike kielégíti a feladat feltételeit. Ezek a szögek egyenlők. Ilyen esetekben úgy tekintik, hogy a szerkesztési feladatnak egy megoldása van.

**2. feladat.** Szerkesszétek meg az adott szakasz felezőmerőlegesét.

**Megoldás.** Legyen  $AB$  az adott szakasz (318. *a* ábra). Megrajzolunk két körvonalat, melyeknek a középpontjai az  $A$  és  $B$  pontok, sugaruk pedig az  $AB$  szakasz lesz. Ezeknek a körvonalaknak a metszéspontjait megjelöljük  $M$ -mel és  $N$ -nel (318. *b* ábra). Meghúzzuk az  $MN$  egyenest (318. *c* ábra). Bebizonyítjuk, hogy az  $MN$  lesz a keresett egyenes.



318. ábra

A szerkesztésből következik, hogy  $MA = MB = AB$  és  $NA = NB = AB$  (318. d ábra). Tehát az  $M$  és  $N$  pontok az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. Ezért az  $MN$  egyenes lesz az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese. ●

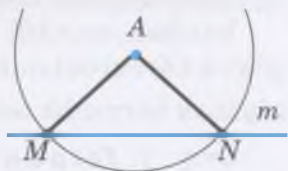
**Megjegyzés.** Mivel az  $MN$  egyenes az  $AB$  szakaszt az  $O$  felezőpontjában metszi, ezért a következő feladatokat is a fenti feladatok alapján oldjuk meg.

🔑 **3. feladat.** Felezzétek meg az adott szakaszt.

🔑 **4. feladat.** Adott egy egyenes, és egy pont, amely nem illeszkedik az egyenesre. Ezen a ponton keresztül fektessetek egy egyenest, amely merőleges az adott egyenesre.

**Megoldás.** Legyen  $m$  az adott egyenes,  $A$  pedig a rajta kívüli pont. Rajzolunk egy olyan kört, melynek a középpontja az  $A$  pont, és két pontban metszi az  $m$  egyenest. Megjelöljük ezeket a pontokat  $M$ -mel és  $N$ -nel (319. ábra).

Mivel  $AM = AN$ , ezért az  $A$  pont illeszkedik az  $MN$  szakasz felezőmerőlegesére. Megszerkesztve ezt a felezőmerőlegest (lásd a 2. feladatot), ezzel megoldjuk a feladatunkat. ●



319. ábra

🔑 **5. feladat.** Adott egy egyenes, és egy pont, amely illeszkedik az egyenesre. Ezen a ponton keresztül fektessetek egy egyenest, amely merőleges az adott egyenesre.

**Megoldás.** Legyen  $m$  az adott egyenes,  $A$  pedig az egyenesre illeszkedő pont. Rajzoljunk egy tetszőleges sugarú körvonalat,



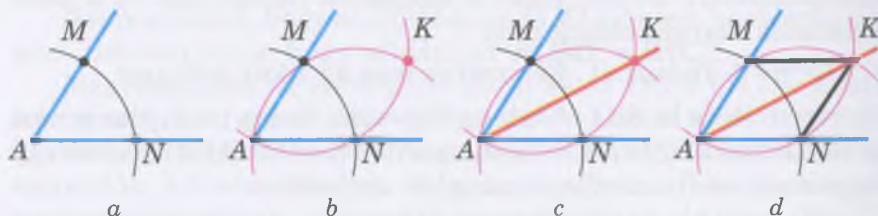
320. ábra

melynek középpontja az  $A$  pont. Ez az  $m$  egyenest két pontban metszi. Jelöljük őket  $M$ -mel és  $N$ -nel (320. ábra).

Mivel  $AM = AN$ , ezért mi a feladatunkat átalakítottuk egy olyan feladattá, ahol az  $MN$  szakasznak kell megszerkeszteni a felezőmerőlegesét. ●

**6. feladat.** Szerkesszék meg az adott szög szögfelezőjét.

**Megoldás.** Legyen  $A$  az adott szög. Rajzolunk egy tetszőleges sugarú körvonalat, melynek középpontja az  $A$  pont. Ez a kör a szög szárait két pontban metszi. Jelöljük ezeket a metszéspontokat  $M$ -mel és  $N$ -nel (321. a ábra). Ugyanezzel a sugárral rajzolunk még két kört, melyeknek a középpontjai  $M$  és  $N$  pont lesz. Ezek a körvonalak  $A$  és  $K$  pontokban metszik egymást (321. b ábra). Meghúzzuk az  $AK$  félegyenest (321. c ábra).



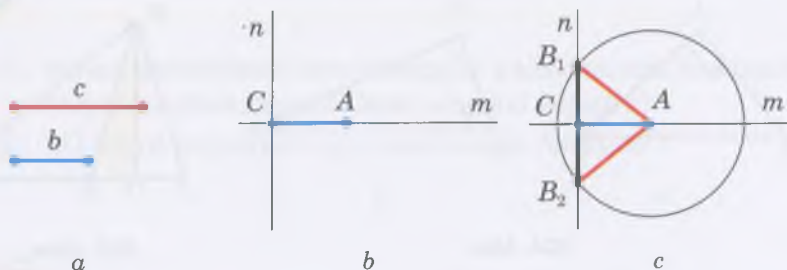
321. ábra

Bebizonyítjuk, hogy az  $AK$  félegyenes lesz a keresett szögfelező.

Valóban, az  $AMK$  és  $ANK$  háromszögek (321. d ábra) egybevágók a három oldaluk alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele szerint. Tehát  $\angle MAK = \angle NAK$  ●

**7. feladat.** Szerkesszék derékszögű háromszöget átfogója és befogója alapján.

**Megoldás.** Legyen két szakasz  $b$  és  $c$ , ahol  $b < c$  (322. a ábra). Mivel az átfogó nagyobb, mint a befogó, ezért az átfogó a nagyobbik szakasz lesz ezek közül, a befogó pedig a kisebbik. Tehát egy olyan  $ABC$  derékszögű háromszöget kell szerkeszteni, melyben  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ .



322. ábra

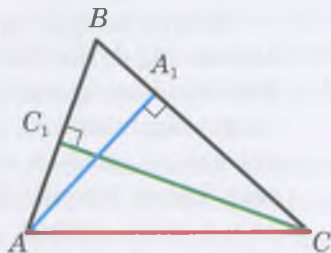
Rajzolunk két merőleges  $m$  és  $n$  egyenest.  $C$  pont lesz a metszéspontjuk. Az  $m$  egyenesen felmérjük a  $CA$  szakaszt, amely a  $b$  befogóval lesz egyenlő (322.  $b$  ábra). Rajzoljunk egy  $A$  középpontú körvonalat, melynek sugara megegyezik a  $c$  átfogóval. A körvonal az  $n$  egyenest két pontban metszi, ezek legyenek  $B_1$  és  $B_2$  (322.  $c$  ábra). Az  $ACB_1$  és  $ACB_2$  háromszögek lesznek a keresett háromszögek.

Mivel az  $ACB_1$  és  $ACB_2$  háromszögek egybevágók, ezért a feladatnak egyetlen megoldása lesz. ●

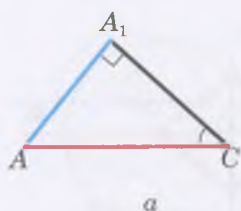
**8. feladat.** Szerkesszettek háromszöget oldala, és a másik két oldal magassága alapján.

*Megoldás.* A 323. ábrán egy  $ABC$  háromszög látható, melynek magasságai  $AA_1$  és  $CC_1$ . Ha ismertek az  $AC$ ,  $AA_1$  és  $CC_1$  szakaszok, akkor meg lehet szerkeszteni az  $AA_1C$  és  $CC_1A$  háromszögeket az átfogó és a befogó alapján (lásd a 7. feladatot).

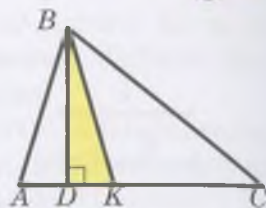
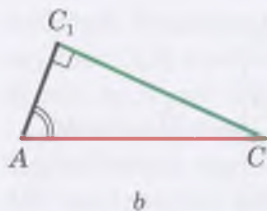
A fenti gondolatmenetet a **szerkesztési feladat analízisének** nevezzük, amely segít a szerkesztés tervének elkészítésében.



323. ábra



324. ábra



325. ábra

Megszerkesszük az  $AA_1C$  derékszögű háromszöget, melyben az  $AC$  átfogó megegyezik az adott oldallal, és az  $AA_1$  befogó az egyik adott magassággal (324. *a* ábra). A megszerkesztett  $ACA_1$  háromszögnek egyik szöge, az adott oldal melletti szög, megegyezik a keresett háromszög szögével. Hasonló szerkesztéssel meg lehet kapni a keresett háromszögnek az adott oldalra fekvő másik szögét is. A 324. *b* ábrán ez a szög  $C_1AC$  szög lesz.

Most már csak az  $ABC$  háromszög megszerkesztése maradt hátra, az  $AC$  oldala és a rajta fekvő két szög alapján. Ezt a szerkesztést önállóan végezzétek el. ●

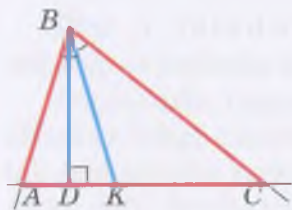
**9. feladat.** Szerkesszettek háromszöget, ha adott egyik szöge, és ebből a szögből bocsátott szögfelezője és magassága.

*Megoldás.* Elvégezzük ennek a szerkesztési feladatnak az elemzését. A 325. ábrán egy  $ABC$  háromszög látható, melyben a  $BD$  szakasz magasság, a  $BK$  pedig szögfelező.

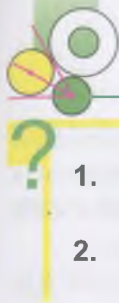
Ha ismert a  $BD$  és  $BK$  szakaszok hossza, akkor a  $BDK$  derékszögű háromszöget meg lehet szerkeszteni a befogó és átfogó alapján. Szintén megállapítjuk, hogyha ismert az  $ABC$  szög, akkor meg lehet szerkeszteni az  $ABK$  és  $KBC$  szögeket, melyek

mindegyike  $\frac{1}{2}ABC\angle$  lesz. Innen megkapjuk a szerkesztés tervét.

Szerkesztünk egy derékszögű  $BDK$  háromszöget, melyben a  $BK$  átfogó a szögfelezővel lesz egyenlő, a  $BD$  befogó pedig a magasság lesz (326. ábra). Szerkesztünk két szöget, melyek mindegyike az adott szög felével egyenlő és ezeknek a szögeknek a közös száruk a  $BK$  félegyenes. A rajzon ezek az  $ABK$  és  $KBC$  szögek lesznek. Az  $ABC$  lesz a keresett háromszög. ●



326. ábra



1. Milyen eszközökkel lehet elvégezni a szerkesztési feladatot? Milyen szerkesztéseket lehet ezekkel végezni?
2. Mit jelent megoldani egy szerkesztési feladatot?



## GYAKORLATOK

- 574.° Rajzoljatok: 1) hegyesszöget; 2) tompaszöget. Szerkesszetek olyan szöget, amely egyenlő a megrajzolttal.
- 575.° Rajzoljatok egy  $ABC$  hegyesszöget és egy  $DK$  félegyenest. Szerkesszetek egy  $MDK\angle$ -t, amelyre igaz:  $MDK\angle = 2\,ABC\angle$ .
- 576.° Osszátok fel az adott szakaszt négy egyenlő részre.
- 577.° Rajzoljatok egy tetszőleges szöget. Osszátok fel azt négy egyenlő részre.
- 578.° Szerkesszetek: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ ; 3)  $75^\circ$ ; 4)  $120^\circ$  szöget.
- 579.° Szerkesszetek: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $22^\circ 30'$ ; 3)  $15^\circ$  szöget.
- 580.° Rajzoljatok: 1) hegyesszögű háromszöget; 2) tompaszögű háromszöget. Szerkesszék meg ennek a háromszögnek mindegyik magasságát.
- 581.° Rajzoljatok egy  $ABC$  háromszöget. Szerkesszék meg: 1) az  $AM$  magasságát; 2)  $BD$  oldalfelezőjét; 3)  $CK$  szögfelezőjét.
- 582.° Az adott ponton keresztül, amely nem illeszkedik egy adott egyenesre, rajzoljatok párhuzamos egyenest vele.
- 583.° Szerkesszetek háromszöget:  
1) két oldala és közbezárt szöge alapján;  
2) oldala és rajta fekvő két szöge alapján.
- 584.° Szerkesszetek adott sugarú körvonalat, amely érinti egy adott pontban az adott egyenest.
- 585.° A szög adott pontján keresztül fektessetek olyan egyenest, amely a szög száraiból egyenlő szakaszokat metsz ki.
- 586.° Szerkesszetek érintőt a körhöz, amely egy adott ponton megy át.
- 587.° Szerkesszetek körvonalat, amely egy adott szög szarait érinti.



- 588.°** Adott egy  $30^\circ$ -os szög. Szerkesszettek egy adott sugarú körvonalat, melynek a sugara is adott, a körvonal középpontja a szög egyik szárára illeszkedik, és a körvonal érinti a szög másik szárát.
- 589.°** Szerkesszettek körvonalat, amely érinti az adott szög szárait, és az egyik szárát egy adott pontban.
- 590.°** Szerkesszettek derékszögű háromszöget:
- 1) két befogója alapján;
  - 2) átfogója és hegyesszöge alapján;
  - 3) befogója és a rajta fekvő hegyesszöge alapján.
- 591.°** Szerkesszettek derékszögű háromszöget befogója és szemben fekvő hegyesszöge alapján.
- 592.°** Szerkesszettek egyenlő szárú háromszöget:
- 1) szára és a csúcsnál lévő szöge alapján;
  - 2) az alapra bocsátott magasság és a csúcsnál lévő szöge alapján;
  - 3) az alapja és az alaphoz tartozó oldalfelelező alapján;
  - 4) az alapja és a szárra bocsátott magassága alapján.
- 593.°** Szerkesszettek egyenlő szárú háromszöget:
- 1) az alapja és az alapján fekvő szöge alapján;
  - 2) szára és az alapján fekvő szöge alapján;
  - 3) szára és az alapra bocsátott magassága alapján.
- 594.°** Szerkesszettek egyenlő szárú derékszögű háromszöget:
- 1) befogója alapján;
  - 2) átfogója alapján.
- 595.°** Szerkesszettek körvonalat, melynek középpontja egy adott pont lesz, amely az adott hegyesszög egyik szárára illeszkedik, és a szög másik szárából egy adott hosszúságú szakaszt metsz ki.
- 596.°** Hogyan lehet megfelelni egy olyan szakaszt, amelynek hossza többszöröse a körző végei közti legnagyobb lehetséges távolságnak?
- 597.°** Szerkesszettek derékszögű háromszöget:
- 1) hegyesszöge és ennek a szögnek a szögfelezője alapján;
  - 2) befogója és az átfogóra bocsátott magassága alapján.
- 598.°** Szerkesszettek derékszögű háromszöget:
- 1) befogója és a másik befogóhoz húzott oldalfelelező alapján;
  - 2) hegyesszöge és a derékszög csúcsából bocsátott magassága alapján.



- 599.\* Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget az alapja és a beírt körvonal sugara alapján.
- 600.\* Szerkesszetek háromszöget oldala, mellette lévő szöge, és ennek a szögnek a csúcsából bocsátott szögfelezője alapján.
- 601.\* Szerkesszetek háromszöget oldala, a másik oldalához húzott oldalfelezője, és az adott oldal valamint az oldalfelező közti szöge alapján.
- 602.\* Szerkesszetek háromszöget oldala, a mellette lévő hegyes szöge és az adott oldalra bocsátott magassága alapján.
- 603.\* Szerkesszetek háromszöget két oldala és ezek közül az egyikre bocsátott magassága alapján. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 604.\* Szerkesszetek háromszöget oldala, valamint az adott oldal egyik végpontjából bocsátott oldalfelező és a magasság alapján. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 605.\* Szerkesszetek háromszöget magassága és annak a két szögnek az alapján, melyet ez a magasság alkot az oldalaival, valamint közös csúcsuk van a magassággal. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 606.\* Szerkesszetek háromszöget két oldala és a harmadik oldalára bocsátott magassága alapján. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 607.\* Szerkesszetek háromszöget két oldala és az egyik oldallal szemközti szöge alapján. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 608.\* Szerkesszetek háromszöget oldala, rajta fekvő szöge és az adott oldalhoz húzott oldalfelezője alapján. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 609.\*\* Szerkesszetek háromszöget szöge és a másik két csúcsából bocsátott magasságai alapján.
- 610.\*\* Szerkesszetek háromszöget két magassága és azon szöge alapján, amelyből az adott magasságok közül az egyiket bocsátották. Hány megoldása lesz ennek a feladatnak?
- 611.\*\* Szerkesszetek derékszögű háromszöget befogója és a beírt körvonal sugara alapján.



- 612.\*** Szerkesszettek háromszöget oldala, rajta fekvő szöge és a beírt körvonal sugara alapján.
- 613.\*** Szerkesszettek háromszöget a beírt körvonal sugara és azon szakaszok alapján, melyekre a beírt körvonal érintési pontja osztja az egyik oldalát.
- 614.\*** Szerkesszettek háromszöget oldala és az erre az oldalra bocsátott magassága és oldalfelezője alapján.
- 615.\*** Szerkesszettek háromszöget, ha adva van három pont, melyek a háromszögbe írt körvonal érintési pontjai lesznek.
- 616.\*** Hogyan kell az  $54^\circ$ -os szöget három egyenlő részre felosztani?



### ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

- 617.** Az  $ABC$  háromszögben ismert, hogy  $AB = BC$ , az  $AE$  és  $CF$  szakaszok a szögfelezői lesznek. Bizonyítsátok be, hogy  $EF \parallel AC$ .
- 618.** Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit, ha:
- 1)  $A\angle + B\angle = 110^\circ$ ,  $A\angle + C\angle = 85^\circ$ ;
  - 2)  $C\angle - A\angle = 29^\circ$ ,  $A\angle + C\angle = 121^\circ$ .
- 619.** Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB$  átfogójának felezőmerőlegese a  $BC$  befogót az  $M$  pontban metszi. Ismert, hogy  $MAC\angle : MAB\angle = 8 : 5$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög hegyesszögeit.
- 620.** Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha valamelyik külső szöge nagyobb a vele mellékszöget nem alkotó két belső szögénél:
- 1)  $60^\circ$ -kal, a másiknál  $40^\circ$ -kal;
  - 2)  $25^\circ$ -kal, a másiknál  $35^\circ$ -kal.



### FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

- 621.** A lapra rajzoltak egy egyenlő oldalú háromszöget, és teljesen befedték két másik egyenlő oldalú háromszöggel, melyek különböző méretűek voltak. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög eltakarásához elegendő lenne az egyik háromszög.



## 23. A pontok mértani helye módszer alkalmazása a szerkesztési feladatoknál<sup>1</sup>

Az ismert, hogyha a kék és a sárga színt összekeverjük, akkor zöldet fogunk kapni.

A síkon olyan pontokat kell ábrázolni, melyek egyidejűleg kétféle tulajdonsággal rendelkeznek. Ha az egyik tulajdonsággal rendelkező pontokat kékre festjük, a másik tulajdonsággal rendelkezőket pedig sárgára, akkor érthető, hogy a zöld pontok mindkét tulajdonsággal fognak rendelkezni. Ebben rejlik a pontok mértani helyének (PMH) módszere. Ezzel a módszerrel megoldunk néhány feladatot.



**1. feladat.** Szerkesszettek háromszöget, ha adott a háromszög három oldala.

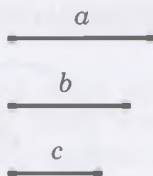
*Megoldás.* Legyen adott három szakasz, melyeknek a hossza  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (327. ábra). Meg kell szerkeszteni az  $ABC$  háromszöget, ha  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ .

Rajzolunk egy tetszőleges egyenest. Körző segítségével felmérjük rá a  $BC$  szakaszt, melynek hossza  $a$  (328. ábra). A feladat megoldásához már csak a háromszög harmadik csúcsának, az  $A$  pontnak a megszerkesztése szükséges.

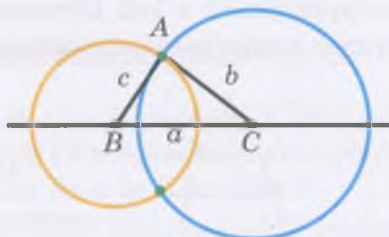
Felhasználjuk azt, hogy az  $A$  pontnak egyszerre két feltételnek kell megfelelnie:

1) olyan pontnak kell lennie, hogy a  $B$  ponttól  $c$  távolságra lévő pontok mértani helyéhez tartozzon, vagyis a  $c$  sugarú körvonal pontjaihoz (a 328. ábrán ez a sárga kör lesz);

2) olyan pontnak kell lennie, hogy a  $C$  ponttól  $b$  távolságra lévő pontok mértani helyéhez tartozzon, vagyis a  $b$  sugarú körvonal pontjaihoz (a 328. ábrán ez a kék kör lesz).



327. ábra



328. ábra

<sup>1</sup> Nem kötelező tananyag



Az  $A$  pontnak a keletkezett két zöld pont közül bármelyiket tekinthetjük.

A keletkezett  $ABC$  háromszög lesz a keresett, mivel kielégíti  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$  feltételeket. ●

A szerkesztés fenti leírásából az következik, ha az adottak közül bármelyik szakasz hossza kisebb, mint a másik két szakasz hosszának összege, akkor ezek a szakaszok a háromszög oldalai lehetnek.

**2. feladat.** Szerkesszettek egy alakzatot, melynek minden pontja egy adott szöghöz tartozik, egyenlő távolságra van a szög száraitól és  $a$  távolságra a szög csúcsától.

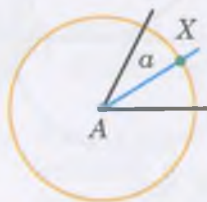
*Megoldás.* A keresett pont egyszerre két mértani hely pontjaihoz tartozik: a szög szögfelezőjéhez és egy  $a$  sugarú körvonalhoz, melynek középpontja a szög csúcsa.

Megszerkesszük a szög szögfelezőjét és az adott körvonalat (329. ábra). Metszéspontjuk a keresett  $X$  pont lesz. ●

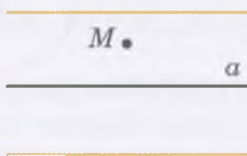
**3. feladat.** Szerkesszétek meg az adott  $R$  sugarú körvonal középpontját, ha az adott  $M$  pont illeszkedik a körre és egy adott  $a$  egyenest is érint.

*Megoldás.* Mivel a kör érinti az  $a$  egyenest, ezért a középpontja  $R$  távolságra lesz ettől az egyenestől. Az adott egyenestől adott távolságra lévő pontok mértani helye két párhuzamos egyenes lesz (498. példa). Tehát a körvonal középpontját a sárga egyeneseken (330. ábra) kell keresni.

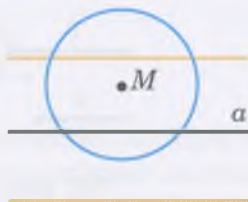
Az egy adott  $M$  pontra illeszkedő  $R$  sugarú körvonal középpontjai, az  $M$  középpontú  $R$  sugarú körvonal pontjainak mértani helye lesz (331. ábra kék körvonala.) Ezért a keresett körvonal középpontjának a kék körvonal valamely pontjának és a sárga egyenes pontjának a metszéspontját tekintjük (331. ábra).



329. ábra



330. ábra



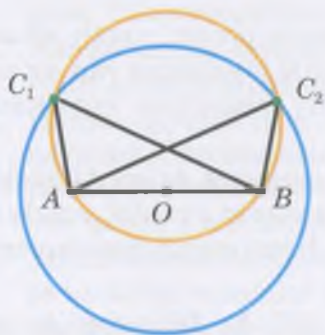
331. ábra



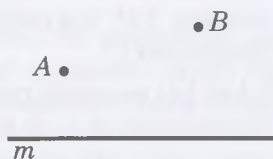
Azt az esetet, amikor az adott pont az adott egyenesre illeszkedik, önállóan vizsgáljátok meg. ●

**4. feladat.** Szerkesszettek háromszöget egyik oldala, az erre az oldalra húzott oldalfelezője és a körülírt körvonal sugara alapján.

*Megoldás.* Szerkesztünk egy adott sugarú körvonalat, és meghúzzuk az  $AB$  hűrt benne, amelynek hossza megegyezik a keresett háromszög oldalával. Ekkor a húr végpontjai a keresett háromszög két csúcsa lesz. Érthető, hogy a háromszög harmadik csúcsának egyidejűleg illeszkednie kell a megszerkesztett körvonalra (sárga körhöz) és az  $O$  középpontú körvonalra is, ha ennek a körnek a középpontja az  $AB$  szakasz felezőpontja, és a sugara egyenlő az adott oldalfelező hosszával (ez lesz a kék körvonal). Az  $ABC_1$  és  $ABC_2$  háromszögek (332. ábra) mindegyike a megszerkesztendő háromszög lesz. Mivel ezek egybevágók, ezért a feladatnak egyetlen megoldása van. ●



332. ábra



333. ábra



## GYAKORLATOK

- 622.° Adott az  $m$  egyenes, és a rá nem illeszkedő  $A$  és  $B$  pont (333. ábra). Szerkesszék meg az  $m$  egyenesen azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz az  $A$  és  $B$  pontoktól.
- 623.° Az  $A$  és  $B$  pontok az  $m$  egyenesre illeszkednek. Szerkesszék meg egy olyan pontot, amely az egyenestől  $a$  távolságra lesz, az  $A$  és  $B$  pontoktól pedig egyenlő távolságra. Hány megoldása van ennek a feladatnak?



- 624.°  $A$   $B$  és  $C$  pontok az  $A$  szög különböző száraira illeszkednek, és  $AB \neq AC$ . Szerkesszék meg a szöghöz tartozó  $M$  pontot, amely egyenlő távolságra lesz a száraitól, és  $MB = MC$ .
- 625.°  $A$   $B$  és  $C$  pontok az  $A$  szög különböző száraira illeszkednek. Szerkesszék meg azt a  $D$  pontot, amely a szöghöz tartozik, egyenlő távolságra van a száraitól és kielégíti a  $DC = BC$  egyenlőséget. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 626.° Szerkesszék meg egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a szára.
- 627.° Az adott körvonalnak szerkesszék meg a középpontját.
- 628.° Szerkesszék meg adott sugarú kört, melynek középpontja egy adott egyenesre illeszkedik, és a körvonalhoz egy adott pont is illeszkedjen.
- 629.° Szerkesszék meg adott sugarú körvonalat, amelyre két adott pont is illeszkedik.
- 630.° Határozzátok meg az összes olyan pontot, amely az adott körvonalra illeszkedik, és egyenlő távolságra van az adott szakasz két végpontjától. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 631.° Adott két egymást metsző  $m$  és  $n$  egyenes, és egy  $AB$  szakasz. Szerkesszék meg az  $m$  egyenesen azt a pontot, amely az  $n$  egyenestől  $AB$  távolságra lesz. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 632.° Az  $ABC$  háromszögben  $C\angle = 90^\circ$ . Az  $AC$  befogóján szerkesszék meg azt a  $D$  pontot, amely az  $AB$  egyenestől  $CD$  távolságra lesz.
- 633.° Szerkesszék meg egy egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a körülírt körének sugara. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 634.° Szerkesszék meg egy háromszöget, ha adott két oldala és az egyik ismert oldalának az oldalelezője.
- 635.° Szerkesszék meg egyenlő szárú háromszöget, ha ismert a szára és a szárához húzott oldalelezője.
- 636.° Az adott körvonalon szerkesszék meg azt a pontot, amely adott távolságra lesz egy adott egyenestől. Hány megoldása van ennek a feladatnak?



- 637.\*\* Az adott körvonalon szerkesszettek egy pontot, amely egyenlő távolságra van két adott egymást metsző egyenestől. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 638.\*\* Két párhuzamos egyenes között adott egy pont. Szerkesszettek egy körvonalat, amelyre az adott pont illeszkedik, és a körvonal érinti az adott egyeneseket. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 639.\*\* Szerkesszettek egy körvonalat, amelyre az adott  $A$  pont illeszkedik, és egy adott  $B$  pontban érinti az adott  $m$  egyenest.
- 640.\*\* Adott két párhuzamos egyenes és egy őket metsző egyenes. Szerkesszettek egy kört, amely érinti ezt a három egyenest.
- 641.\*\* Szerkesszettek egy háromszöget, ha adott két oldala és a köré írt körvonal sugara. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 642.\*\* Szerkesszettek egy háromszöget, ha adott az oldala, az erre az oldalra bocsátott magassága és a köré írt körvonal sugara. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 643.\*\* Szerkesszettek egyenlő oldalú háromszöget, ha adott a körülírt körvonalának sugara.
- 644.\* Három egyenes nem egy pontban, de páronként metszik egymást. Szerkesszettek meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz mindhárom egyenestől. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 645.\* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, ha adott a befogója és az átfogó valamint a másik befogójának összege.
- 646.\* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és a befogók összege.
- 647.\* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és a befogók különbsége.
- 648.\* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, ha adott a befogója és az átfogó valamint a másik befogó különbsége.
- 649.\* Szerkesszettek egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a szárának valamint az alapra bocsátott magasságának a különbsége.
- 650.\* Szerkesszettek háromszöget egyik oldala, rajra fekvő szöge és a másik két oldal összege alapján.
- 651.\* Szerkesszettek háromszöget egyik oldala, rajra fekvő szöge és a másik két oldal különbsége alapján.



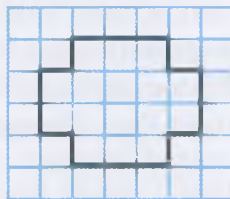


662. Az  $ABC$  háromszögben a  $C$  derékszögének csúcsából  $CH$  magasságot és  $CM$  szögfelezőt húztak. A  $HM$  szakasz hossza kétszer kisebb, mint a  $CM$  szakaszé. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög hegyesszögeit.
663. A 335. ábrán  $BD = DC$ ,  $DN \perp BC$ ,  $BDM\angle = MDA\angle$ . Határozzátok meg az  $MBN$  és  $BMD$  szögek összegét.



**FIGYELJÉTEK MEG,  
RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK,  
KÉPZELJÉTEK EL**

664. A 336. ábrán lévő alakzatot vágjátok három olyan nem négyzet alakú részre, hogy ezekből a részekből ki lehessen rakni egy négyzetet.



336. ábra



## FEJEZETEK A MÉRTANI SZERKESZTÉSEK TÖRTÉNETÉBŐL

Valamilyen eredmény eléréséhez a legkevesebb eszközt felhasználni mindig is a legmagasabb képzettséget kívánt meg. Az ókori Görögországban nagyon fejlett volt a mértani szerkesztések művészete, ezekhez csak két eszközt használtak: lécet, melynek a széle egyenes volt (vonalzó) és két kihegyezett pálcát, melyek az egyik végükön össze voltak kötve (körző). Az, hogy a használat ezekre az eszközökre korlátozódott az ókori görög tradícióból ered, mert az egyenest és a kört az ókori görögök a legharmonikusabb alakzatoknak tekintették. Így Eukleidész az *Elemek* című könyvében leírja azokat a mértani alakzatokat, amelyeket körzővel és vonalzóval meg lehet rajzolni.

Nagyon sok szerkesztési feladat létezik. Ezek közül néhányat már megismerkedtetek. De van három olyan szerkesztési feladat, amelynek nagyon fontos szerepe volt a matematika fejlődésében. Ezek a feladatok híresek lettek.



**A kör négyszögesítése.** Szerkesszettek olyan négyzetet, melynek területe az adott körlap területével egyenlő.

**Szögharmadolás.** Az adott szöget három egyenlő részre osztani.

**A kocka megkettőzése.** Olyan kockát szerkeszteni, melynek térfogata az adott kocka térfogatának a duplája.

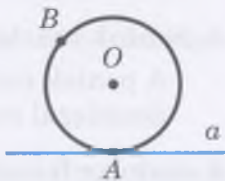
Ezek a feladatok évezredekig nem hagyták nyugodni az embereket. Az ókori idők olyan híres tudósai próbálták megoldani ezeket, mint kósi Hippokratész, knidoszi Eudoxosz, Eukleidész, Eratoszthenész Pentatlosz, Pergai Apollóniosz, Hérón, Papposz, Platón, Arkhimédész, valamint az újkor olyan kimagasló tudósai, mint René Descartes, Francois Viète, Isaac Newton. Csak a XIX. század közepén nyert bizonyítást, hogy ezeket megoldani nem lehet, vagyis csak körző és vonalzó alkalmazásával nem lehet elvégezni a szerkesztést. Erre az eredményre nem geometriai, hanem algebrai módszerekkel jutottak, vagyis egyenletekre vezették vissza a geometriai feladatokat.

Amikor a szerkesztési feladatokat oldottátok meg, különösen a csillagos feladatoknál, gyakran találkozottok azzal a nehézséggel, hogy a szerkesztő eszközök száma korlátozva van. Ezért az a javaslat, hogy tovább kell szűkíteni az eszközök felhasználását, elég furcsának tűnhet. A X. században egy perzsa matematikus, Abu l-Vafá Muhammad ibn Muhammad al-Búzdzsáni, olyan feladatok megoldását írta le, amelyben a szerkesztést vonalzóval és körzővel úgy is el lehet végezni, hogy a szerkesztés közben a körző szárainak nyílását nem változtatjuk meg. Elég furcsának tűnik az a tétel, melyet 1797-ben egy olasz matematikus, Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) tett közzé: *minden, ami megszerkeszthető körzővel és vonalzóval, az megszerkeszthető csak körzővel is.* Mascheroni bevezette a következőt: mivel csak körzővel egyenes nem rajzolható, ezért az egyenest akkor tekintjük megszerkesztettnek, ha meg van szerkesztve bármilyen két pontja.

A XX. században találták meg a Georg Mohr (1640–1697) dán tudós könyvét, melyben ő szintén leírja a csak körzővel való szerkesztéseket. Ezért a fentebb megfogalmazott tételt Mohr – Mascheroni tételnek nevezik.

## 4. SZÁMÚ FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

- Adott három nem egy egyenesen fekvő pont. Hány pontból áll a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye?  
A) végtelen sok; B) 2; C) 1; D) egyetlen egy sem
- Adott három egy egyenesen fekvő pont. Hány pontból áll a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye?  
A) 1; B) 2; C) végtelen sok; D) egyetlen egy sem
- Hány pontot tartalmaz azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek a szög száraitól és a csúcsától is egyenlő távolságra van?  
A) 1; B) 2; C) végtelen sok; D) egyetlen egy sem
- Az  $X$  pont egy  $O$  középpontú  $R$  sugarú körvonal egyik pontja. A következő állítások közül melyik a hamis?  
A)  $OX \leq R$ ; B)  $OX \geq R$ ; C)  $OX < R$ ; D)  $OX = R$
- Az egyenesnek és az  $O$  középpontú  $R$  sugarú körnek két közös pontja van. Milyen alakzatot képeznek az egyenesnek azon  $X$  pontjai, melyekre teljesül az  $OX \geq R$ ?  
A) szakasz; C) félegyenes;  
B) két félegyenes; D) egyenes
- A rajzon egy  $a$  egyenes látható, amely  $A$  pontban érinti az  $O$  középpontú kört. A körvonalon megjelöltünk egy  $B$  pontot, az  $X$  az  $a$  egyenes tetszőleges pontja. A következő állítások közül melyik a hamis?  
A)  $OX > OB$ ; B)  $OX \geq OA$ ; C)  $OX \geq OB$ ; D)  $OX = OB$
- Melyik állítás igaz?  
A) Ha két húr merőleges egymásra, akkor az egyik átmérő lesz.  
B) Ha két húr metszéspontjuk által feleződnek, akkor egymásra merőlegesek lesznek.  
C) Ha a húr végpontján áthaladó érintő merőleges rá, akkor ez a húr átmérő lesz.  
D) Ha az egyik húr felezi a másikat, akkor ez a húr átmérő is.





8. A háromszög köré írt körvonal középpontja metszéspontja:  
A) a háromszög magasságainak;  
B) a háromszög súlyvonalainak;  
C) a háromszög oldalfelező merőlegeseinek;  
D) a háromszög szögfelezőinek.
9. A háromszögbe írt körvonal középpontja metszéspontja:  
A) a háromszög magasságainak;  
B) a háromszög súlyvonalainak;  
C) a háromszög az oldalfelező merőlegeseinek;  
D) a háromszög szögfelezőinek.
10. A háromszögbe írt és a háromszög köré írt kör középpontjai egybeesnek:  
A) az egyenlő szárú háromszögeknél;  
B) az egyenlő oldalú háromszögeknél;  
C) a derékszögű háromszögeknél;  
D) a különböző oldalú háromszögeknél.

#### A 4. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

##### A pontok mértani helye (PMH)

A pontok mértani helyének (PMH) nevezzük az adott tulajdonsággal rendelkező összes pontok halmazát.

##### A szakasz felezőmerőlegese, mint PMH

A szakasz felezőmerőlegesének azon pontok mértani helyét nevezzük, melyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól.

##### A szögfelező, mint PMH

A szög szögfelezőjének azon pontok mértani helyét nevezzük, melyek a szöghöz tartoznak, és egyenlő távolságra vannak a szög száraitól.

##### Körvonal

Körvonalnak nevezzük azoknak a pontoknak a mértani helyét, melyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól.



## **Körlap**

Körlapnak nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek egy adott ponttól adott pozitív számnál nem nagyobb távolságra vannak.

## **Körvonal húrja**

Azt a szakaszt, amely a körvonal két pontját köti össze, húrnak nevezzük.

## **Körvonal átmérője**

Azt a húrta, amely keresztülmegy a körvonal középpontján, átmérőnek nevezzük.

## **A kör tulajdonságai**

A körvonal átmérője, amely merőleges a húrta felezi azt. Ha a kör átmérője felezi az átmérőtől különböző húrta, akkor merőleges erre a húrta.

## **Körvonal érintője**

Azt az egyenest, melynek a körvonallal csak egy közös pontja van, a körvonal érintőjének nevezzük.

## **Körvonal érintőjének tulajdonsága**

A körvonal érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárta.

## **A körvonal érintőjének ismertetőjele**

Az az egyenes, amely a körvonal egy pontjában metszi a kört és merőleges az ehhez a ponthoz húzott sugárta, az adott körvonalnak az érintője lesz.

Ha a körvonal középpontja és az egyenes közötti távolság a kör sugarával egyenlő, akkor ez az egyenes az adott kör érintője lesz.

## **A körvonalhoz egy pontból húzott érintők tulajdonsága**

Ha egy adott pontból a körhöz két érintőt húznak, akkor az adott pontot az érintési pontokkal összekötő szakaszok egymással egyenlők.



### Háromszög köré írt körvonal

A körvonalat a háromszög köré írtnak nevezzük, ha a háromszög mindegyik csúcsa illeszkedik a körre.

### Háromszög köré írt körvonal középpontja

A háromszög köré írt körvonal középpontja a háromszög oldalai felezőmerőlegeseinek a metszéspontja.

### Háromszögbe írt körvonal

A körvonalat a háromszögbe írtnak nevezzük, ha a háromszög mindegyik oldalát érinti.

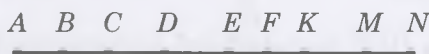
### Háromszögbe írt körvonal középpontja

Háromszögbe írt körvonal középpontja a szögfelezőinek a metszéspontja.

## A 7. OSZTÁLYOS MÉRTAN ISMÉTLÉSI FELADATAI

### Legegyszerűbb geometriai alakzatok és tulajdonságaik

- 665.** Az  $a$  hosszúságú szakaszt 5 egyenlő részre osztották. Határozzátok meg a két szélső szakasz felezőpontjai közötti távolságot.
- 666.** A  $C$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja,  $AB = 10$  cm. Az  $AB$  egyenesen határozzátok meg azt az  $X$  pontot, amelyre teljesül az  $AX + BX + CX = 12$  cm.
- 667.** A  $D$  pont az  $MK$  szakasz felezőpontja,  $MK = 16$  cm. Az  $MK$  egyenesen határozzátok meg azt az  $Y$  pontot, amelyre teljesül az  $MY + KY + DY = 30$  cm.
- 668.** Az egyenesen 10 pontot jelöltek:  $A, B, C, D, E, F, M, N, K, P$ . Hány olyan szakasz keletkezett, melynek az  $A$  pont lesz az egyik végpontja? Összesen hány szakasz keletkezett, melyeknek a végpontjai az adott pontok lesznek? Függ-e attól a szakaszok száma, hogy ezek a pontok egy egyenesre illeszkednek, vagy nem függ?
- 669.** A 337. ábrán  $AN = 24$  cm,  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FK$ ,  $KM = MN$ ,  $DF = 6$  cm. Határozzátok meg a  $BM$  szakasz hosszát.



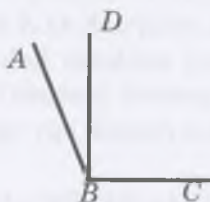
337. ábra

- 670.** Rajzoljatok egy  $MKE$  szöget, amely  $120^\circ$ . Húzzátok meg a  $KC$  félegyenest úgy, hogy  $MKC\angle = 60^\circ$ . Határozzátok meg a  $CKE$  szöget és állapítsátok meg a fajtáját. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 671.** Az  $ABC$  és  $CBD$  mellékszögek fokmértéke úgy aránylanak egymáshoz, mint  $5 : 4$ . Határozzátok meg az  $ABC$  és  $ABD$  szögek szögfelezői közötti szöget. Hány megoldása van ennek a feladatnak?
- 672.** Két szögnek közös szára van és más közös pontjuk nincs. Mellékszögek-e ezek, ha: 1) fokmértékük úgy aránylik egymáshoz, mint  $11 : 19$  és az egyik  $32^\circ$ -kal nagyobb, mint a másik; 2) a fokmértékük úgy aránylik egymáshoz, mint  $7 : 3$  és az egyik  $72^\circ$ -kal kisebb mint a másik?

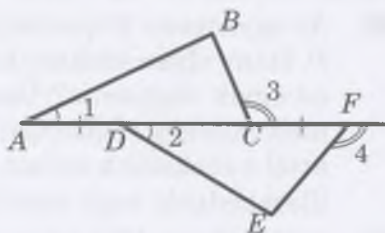
673. A 338. ábrán  $BD \perp BC$ . Az  $ABD$  és  $DBC$  szögek szögfelezői közti szög  $55^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABD$  szöget.

### Háromszögek

674. A háromszög kerülete  $87\text{ cm}$ , az egyik oldala  $a\text{ cm}$ , a másik pedig  $b\text{ cm}$ . Adjatok meg egy kifejezést a harmadik oldal meghatározására. Számítsátok ki a harmadik oldalt, ha  $a = 27$ ,  $b = 21$ .
675. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög területét, ha  $AB + BC = 27\text{ cm}$ ,  $AB + AC = 28\text{ cm}$ ,  $BC + AC = 29\text{ cm}$ .
676. A 339. ábrán  $1\angle = 2\angle$ ,  $3\angle = 4\angle$ ,  $AD = CF$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = DEF\Delta$



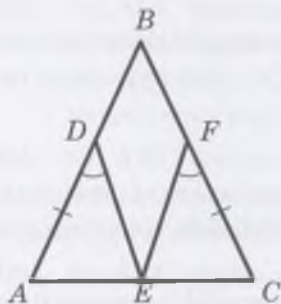
338. ábra



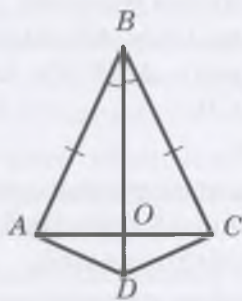
339. ábra

677. Az  $ABC$  és  $DEF$  hegyesszögű háromszögekben megrajzolták a  $BM$  és  $EK$  súlyvonalakat. Ismert, hogy  $BC = EF$ ,  $ABC\angle = DEF\angle$ ,  $C\angle = F\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy: 1)  $BMC\Delta = EFK\Delta$ ; 2)  $ABM\Delta = DEK\Delta$ .
678.  $BD$  és  $B_1D_1$  az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  hegyesszögű háromszögek megfelelő magasságai. Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ , ha  $BD = B_1D_1$ ,  $AD = A_1D_1$ ,  $CD = C_1D_1$ .
679. Az  $ABC$  és  $MKE$  háromszögekben ismert, hogy  $AB = MK$ ,  $BC = KE$ ,  $B\angle = K\angle$ . Az  $AB$  szakaszon felvettek egy  $F$  pontot, az  $MK$  szakaszon pedig egy  $P$ -t úgy, hogy  $ACF\angle = MEP\angle$ . Milyen lesz a  $CF$  szakasz hossza, ha  $PE = 15\text{ cm}$ ?
680. Az  $ABC$  és  $DEF$  háromszögekben ismert, hogy  $AC = DF$ ,  $BC = EF$ ,  $C\angle = F\angle$ . A  $BAC$  és  $ABC$  szögek szögfelezői egy  $O$  pontban metszik egymást, a  $DEF$  és  $EDF$  szögek szögfelezői pedig egy  $M$  pontban. Bizonyítsátok be, hogy  $AOB\Delta = DME\Delta$ .

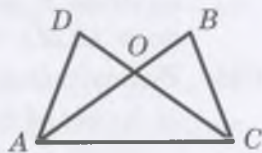
681. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $BC$  alapja  $B$  csúcsán túli meghosszabbításán felvettek egy  $M$  pontot úgy, hogy  $MBA\angle = 128^\circ$ . Határozzátok meg az  $AC$  szár és az  $ACB$  szög szögfelezője közötti szöget.
682. Az  $A$  és  $B$  pontokból, amelyek az  $m$  egyeneshez képest azonos félsíkra illeszkednek,  $AC$  és  $BD$  merőlegeseket bocsátottak erre az egyenesre. Az  $A$  és  $B$  pontok egyenlő távolságra vannak az  $m$  egyenestől, az  $O$  pont pedig a  $CD$  szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy az  $AOB$  háromszög egyenlő szárú.
683. A 340. ábrán  $AB = BC$ ,  $AD = FC$ ,  $ADE\angle = CFE\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $E$  pont az  $AC$  szakasz felezőpontja.
684. Az  $ABC$  és  $ADC$  egyenlő szárú háromszögeknek közös az  $AC$  alapja. Bizonyítsátok be, hogy a  $BD$  egyenes az  $AC$  szakasz felezőmerőlegese lesz.
685. A 341. ábrán  $AB = BC$ ,  $ABO\angle = CBO\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $DAO\angle = DCO\angle$ .
686. A 342. ábrán  $OA = OC$ ,  $OD = OB$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $DAC\angle = BCA\angle$ .



340. ábra

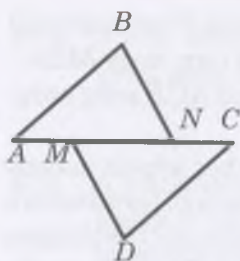


341. ábra



342. ábra

687. Az  $O$  pont az  $ABC$  háromszög  $AC$  és  $BC$  oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja. Bizonyítsátok be, hogy: 1) az  $O$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja; 2)  $ACB\angle = A\angle + B\angle$ .
688. Az  $ABC$  háromszöget a súlyvonal két olyan háromszögre osztja, amelyek kerületei egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.



343. ábra

**689.** Az  $ABC$  háromszögben  $AB = BC$ ,  $BD$  pedig a súlyvonal. Az  $ABC$  háromszög kerülete 50 cm, az  $ABD$  háromszögé pedig 40 cm. Határozzuk meg az  $BD$  súlyvonal hosszát.

**690.** Az  $ABC$  háromszög  $AC$  és  $BC$  oldalain megfelelően jelöltük az  $F$  és  $K$  pontokat. Bizonyítsátok be, hogyha  $AFB$  és  $AKB$  háromszögek egyenlők, valamint az  $AK$  és  $BF$  a háromszögek megfelelő oldalai, akkor az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú

**691.** A 343. ábrán  $AM = CN$ ,  $AB = CD$ ,  $BN = DM$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABN\angle = CDM\angle$ .

**692.** Az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek súlyvonalai  $AM$  és  $A_1M_1$  egyenlők,  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ . Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ .

### Párhuzamos egyenesek. A háromszög szögeinek összege

**693.** Az  $a$  egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül három egyenest fektettek. Bizonyítsátok be, hogy ezek közül legalább kettő metszi az adott  $a$  egyenest.

**694.** Az  $ABC$  háromszög  $AB$  és  $AC$  oldalain megfelelően jelölték az  $M$  és  $K$  pontokat,  $AMK\angle = ABC\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AKM\angle = ACB\angle$ .

**695.** Bizonyítsátok be:

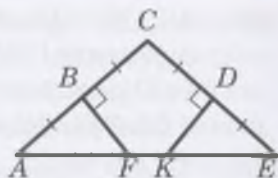
- 1) ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor a keletkezett különböző oldalakon fekvő szögek szögfelezői is párhuzamosak;
- 2) ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, a keletkezett két egyoldali szög szögfelezői merőlegesek lesznek.

**696.** Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor milyen lesz a megfelelő szögek szögfelezőinek kölcsönös helyzete?

**697.** A háromszög egyik csúcsán keresztül a szemközti oldallal párhuzamosan egy egyenest fektettek. Ez az egyenes a háromszög másik két oldalával egyenlő szögeket alkot. Bizonyítsátok be, hogy az adott háromszög egyenlő szárú lesz.

698. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AC$  és  $BC$  oldalainak a  $C$  csúcs utáni meghosszabbításán megfelelően jelölték az  $E$  és  $D$  pontokat úgy, hogy  $DE \parallel AB$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $CDE$  háromszög is egyenlő szárú lesz.
699. Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalán felvették az  $M$  és  $K$  pontokat (az  $M$  pont a  $B$  és  $K$  pontok között helyezkedik el) úgy, hogy  $KAC\angle = B\angle$ ,  $BAM\angle = C\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $MAK$  háromszög egyenlő szárú lesz.
700. Az egyenlő szárú háromszög alapjára bocsátott magasság 2-szer kisebb az alapnál. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit.
701. Az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalán felvették az  $O$  pontot úgy, hogy  $AB = AO$ . Ismeretes, hogy az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsánál lévő külső szöge  $160^\circ$  és a  $C\angle = 40^\circ$ . Bizonyítsátok be, hogy  $BO = CO$ .
702. Az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalának meghosszabbításain az  $A$  és  $C$  pontok mögött megfelelően felvették az  $M$  és  $K$  pontokat úgy, hogy  $AM = AB$ ,  $CK = BC$ . Határozzátok meg az  $MBK$  szöget, ha  $BAC\angle = 60^\circ$ ,  $ACB\angle = 80^\circ$ .
703. Az  $ABC$  háromszög  $AC$  oldalával párhuzamos egyenes az  $AB$  és  $AC$  oldalakat megfelelően az  $M$  és  $K$  pontokban metszi úgy, hogy  $AM = MK$ . Ismert, hogy  $B\angle = 65^\circ$ ,  $C\angle = 45^\circ$ . Határozzátok meg a  $KAC$  szöget.
704. Az  $ABC$  háromszögben adott, hogy  $A\angle = 55^\circ$ ,  $B\angle = 75^\circ$ . Határozzátok meg a  $C$  csúcsból bocsátott magasság és háromszög szögfelezője közötti szöget.
705. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög ( $AB = BC$ )  $AD$  és  $BK$  magasságainak metszéspontja  $H$ ,  $AHB\angle = 128^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.
706. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög ( $AB = BC$ )  $AD$  és  $CM$  magasságainak metszéspontja  $H$ ,  $AHC\angle = 140^\circ$ . Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit.
707. A derékszögű háromszög egyik hegyesszöge  $42^\circ$ . Határozzátok meg a derékszög szögfelezője és a háromszög átfogója közötti kisebbik szöget.

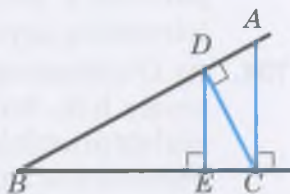
708. A  $C$  és  $D$  pontokból, melyek az  $m$  egyeneshez képest azonos félsíkra illeszkednek,  $CE$  és  $DF$  merőlegeket állítottak az adott egyenesre,  $CF = DE$ . Bizonyítsátok be, hogy  $CE = DF$ .



344. ábra

709. A 344. ábrán  $AB = BC = CD = DE$ ,  $BF \perp AC$ ,  $DK \perp CE$ . Bizonyítsátok be, hogy  $AF = EK$ .
710. Az  $ABC$  háromszögnek  $BM$  és  $CK$  magasságai  $H$  pontban metszik egymást,  $ABC\angle = 35^\circ$ ,  $ACB\angle = 83^\circ$ . Határozzátok meg a  $BHC$  szöget.
711. A derékszögű háromszög derékszögének csúcsából bocsátott magasság és szögfelező közötti szög  $12^\circ$ . Határozzátok meg az adott háromszög hegyesszögeinek mértékét.
712. Az  $ABC$  egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóján  $M$  és  $K$  pontokat vettek fel úgy, hogy  $AC = AM$  és  $BC = BK$ . Határozzátok meg az  $MCK$  szög mértékét.
713. A derékszögű háromszög derékszögének csúcsából az átfogóra merőlegest állítottak. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett két háromszögnek és az adott háromszögnek a megfelelő hegyesszögei egyenlők.
714. Az  $ABC$  és  $DEF$  háromszögekben ismert, hogy  $A\angle = D\angle$ ,  $B\angle = E\angle$ , a  $BM$  és  $EN$  magasságok egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy  $ABC\Delta = DEF\Delta$ .
715. Az  $ABC$  háromszög  $AM$  és  $CK$  magasságainak metszéspontja  $O$ ,  $OK = OM$ ,  $BAM\angle = ACK\angle$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő oldalú.
716. Az egyenlő szárú háromszög két magassága a metszéspontjuknál  $100^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit.
717. Az  $ABC$  háromszögben az  $ACB$  szög derékszög,  $CH$  az adott háromszög magassága,  $CD$  a  $BCH$  háromszög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy  $AC = AD$ .
718. Az egyenlő szárú háromszög egyik szögéből bocsátott szögfelező és a magasság közötti szög  $15^\circ$ . Határozzuk meg az adott háromszög szögeit. Hány megoldása van a feladatnak?
719. Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB$  átfogójának meghosszabbításán az  $A$  és  $B$  pontok mögött felvettek egy  $D$  és  $E$  pontokat úgy, hogy  $AC = AD$ ,  $BC = BE$ . Határozzátok meg a  $DCE$  szög mértékét.

720. Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszögben az  $AC$  oldal  $M$  felezőpontjából  $MK$  merőlegest bocsátottak a  $BC$  oldalra. Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög területét, ha  $KC = 3$  cm.
721. A derékszögű háromszög egyik szöge  $60^\circ$ , az átfogójának és a kisebbik befogójának összege pedig 27 cm. Határozzátok meg a háromszög oldalait.
722. Az  $ABC$  háromszögről tudjuk, hogy  $C\angle = 90^\circ$ ,  $A\angle = 15^\circ$ ,  $BC = 11$  cm. Az  $AC$  befogón felvettek egy olyan  $M$  pontot, ahol  $BMC\angle = 30^\circ$ . Határozzátok meg az  $AM$  szakasz hosszát.
723. A  $B$  szög egyik szárán megjelölték a  $D$  és az  $A$  pontokat, a másik szárán pedig az  $E$  és  $C$  pontokat (345. ábra) úgy, hogy  $AC \perp BC$ ,  $DE \perp BC$ ,  $CD \perp AB$ . Határozzátok meg a  $DE$  szakaszt, ha  $B\angle = 30^\circ$ ,  $AC = 12$  cm.
724. Határozzátok meg azt a szöget, melyek az egyenlő oldalú háromszög oldalfelezőit tartalmazó egyenesek között keletkeznek.



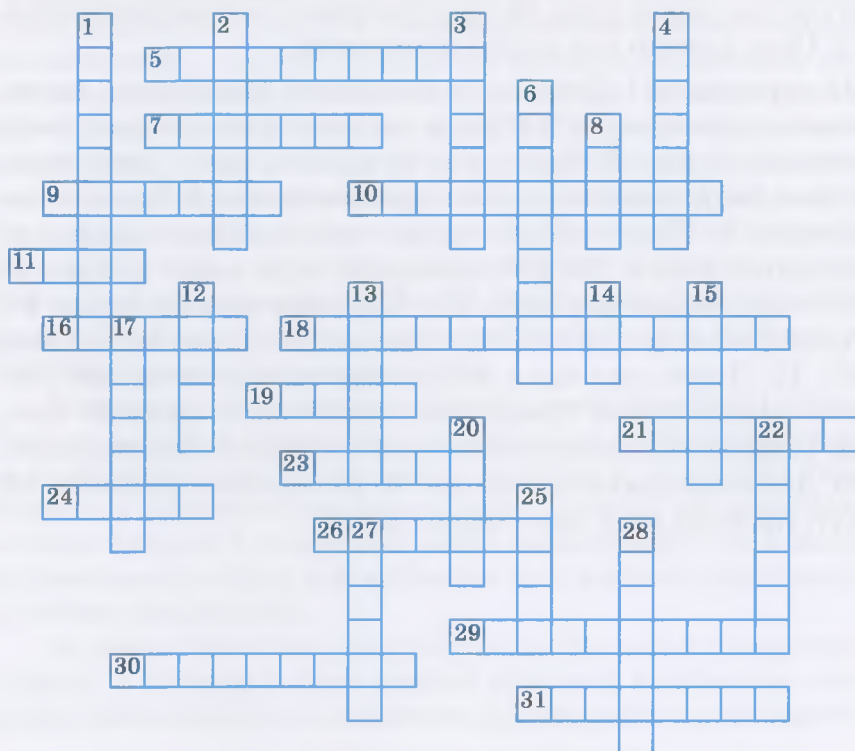
345. ábra

### Körvonal és körlap

725. Az  $O$  középpontú körnek az  $AC$  átmérőjére, valamint az  $AB$  és  $BC$  húrokra igaz az  $AB = BC$  egyenlőség. Határozzátok meg az  $AOB$  szöget.
726. Az  $AB$  és  $CD$  átmérői az  $O$  középpontú körnek merőlegesek egymásra. Az  $AB$  átmérőn az  $O$  pont különböző oldalán felvették az  $E$  és  $F$  pontokat úgy, hogy  $CE = DF$ . Bizonyítsátok be, hogy  $OE = OF$ .
727. Az  $O$  középpontú körvonalban  $MK$  és  $NP$  nem párhuzamos húrokat rajzoltak, ahol  $MK = NP$ , az  $A$  és  $B$  pontok az  $MK$  és  $NP$  húrok megfelelő felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az  $OAB\angle = OBA\angle$ .
728. A körben  $AB$  és  $BC$  húrokat húztak úgy, hogy mindegyik hossza megegyezik a kör sugarával. Határozzátok meg az  $ABC$  szöget?
729. Bizonyítsátok be, hogy az átmérő végpontjaira illeszkedő érintők párhuzamosak.

730. Az  $AB$  átmérő az  $MN$  és  $PK$  húrokat felezi, melyeknek hossza nem egyenlő az átmérő hosszával. Bizonyítsátok be, hogy  $MN \parallel PK$ .
731. Bizonyítsátok be, hogy a körvonal középpontja egyenlő távolságra van a körvonal bármelyik érintőjétől.
732. Az  $A$  ponton keresztül az  $O$  középpontú körhöz  $AM$  és  $AK$  érintőket húztak, amelyek az  $M$  és  $K$  pontokban érintik a körvonalat. Az  $OA$  szakasz és a kör metszéspontja a szakasz felezőpontja lesz. Határozzátok meg az  $MAK$  szöget.
733. Az egyenes párhuzamos az  $AC$  húrral, és érinti egy  $B$  pontban a körvonalat. Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú.
734. Az  $O$  középpontú körvonal  $OC$  sugara az  $AB$  szakaszt felezi, amely nem átmérője a körnek. A  $C$  ponton keresztül a körhöz érintőt húzunk. Bizonyítsátok be, hogy ez az érintő párhuzamos az  $AB$  húrral.
735. A körvonal középpontja illeszkedik egy szög szögfelezőjéhez, a szárait a körvonal két-két pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy azok a szakaszok, melyet a körvonal kimetsz a szög száraiból, egyenlők lesznek.
736. Az  $M$  ponton keresztül az  $O$  középpontú körvonalhoz  $MK$  és  $ME$  érintőket húztak, ahol a  $K$  és  $E$  az érintési pontok,  $\angle OMK = 30^\circ$ ,  $MK = 6$  cm. Határozzátok meg a  $KE$  húr hosszát.
737. Bizonyítsátok be, hogy a kör húrja, amely merőleges egy másik húrra és a kör középpontjára illeszkedik, az adott körvonal átmérője lesz.
738. A körben  $AB$  átmérőt valamint  $AC$  és  $BD$  húrokat rajzoltak úgy, hogy  $AC \parallel BD$ . Bizonyítsátok be, hogy a  $CD$  a körvonal átmérője lesz.
739. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszögben  $AB = BC$ ,  $O$  a beírt kör középpontja, az  $AC$  és  $AB$  oldalak  $D$  és  $E$  pontjai a beírt körvonal érintési pontjai.  $\angle ABC = 48^\circ$ . Határozzátok meg a  $\angle DOE$  szög mértékét.
740. Az  $ABC$  háromszögbe írt körvonal  $K$ ,  $M$  és  $E$  pontban megfelelően érinti az  $AB$ ,  $BC$  és  $AC$  oldalakat,  $AK = BM = CE$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  háromszög egyenlő oldalú lesz.

741. Az  $ABC$  háromszög  $AD$  és  $CE$  szögfelezői az  $O_1$  pontban metszik egymást, a  $DEB$  háromszög  $EF$  és  $DK$  szögfelezői pedig az  $O_2$ -ben. Bizonyítsátok be, hogy a  $B$ ,  $O_1$  és  $O_2$  pontok egy egyeneshez illeszkednek.
742. Fejtsd meg a keresztrejtvényt.



**По горизонталі:** 5. Прямі, які не перетинаються. 7. Два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші — доповняльні промені. 9. Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. 10. Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого. 11. Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не більша за дане число. 16. Відрізок, який сполучає точку кола з його центром. 18. Прямі, при перетині яких утворюються прямі кути. 19.

Відрізок, що сполучає дві точки кола. **21.** Коло, яке проходить через усі вершини трикутника. **23.** Перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. **24.** Точка, рівновіддалена від усіх точок кола. **26.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **29.** Промінь з початком у вершині кута, який ділить кут на два рівних кути. **30.** Кут, суміжний із кутом трикутника. **31.** Сума довжин усіх сторін трикутника.

**По вертикалі:** **1.** Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту. **2.** Одна із частин, на які довільна точка розбиває пряму. **3.** Хорда, яка проходить через центр кола. **4.** Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника. **6.** Геометрична фігура. **8.** Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки. **12.** Кут, градусна міра якого більша за  $90^\circ$ , але менша від  $180^\circ$ . **13.** Одиниця виміру кутів. **14.** Геометрична фігура. **15.** Кут, градусна міра якого дорівнює  $90^\circ$ . **17.** Пряма, яка має з колом одну спільну точку. **20.** Сторона прямокутного трикутника, прилегла до прямого кута. **22.** Твердження, правильність якого приймають без доведення. **25.** Давньогрецький математик. **27.** Автор книги «Начала». **28.** Кут, градусна міра якого менша від  $90^\circ$ .

## BARÁTKOZUNK A SZÁMÍTÓGÉPPEL

Az 5. és a 6. osztályban a matematika tanulása során már használtuk a számítógépet, és meggyőződünk arról, hogy megbízható segítőnk lehet. A számítógép segít a mértan elsajátításában is.

A mértan az alakzatokat tanulmányozza: szakaszokat, háromszögeket, téglalapokat, téglatesteket, gömböket és más alakzatot. Ezért célszerű megtanulnia a **vektorgrafikus** rajzolóprogramok alkalmazását, melyek segítségével mértani alakzatokat rajzolhatunk és szerkesztéseket is végezhetünk. Ilyen program a *CorelDraw*, *Visio* stb. A fejezet rajzainak elkészítéséhez a tanár segítségével válasszatok grafikai rajzprogramot. A kiválasztott szoftver segítségével elkészíthetők azoknak a feladatoknak a rajzai is, melyek megoldásán éppen dolgoztok. Ha valamilyen beszámolót kell készíteni, vagy érdekes üzenetet akartok a barátaitoknak küldeni, akkor **prezentációkészítő programot** alkalmazhattok (például a *PowerPointot*). Ennek segítségével akár kisfilmet is készíthettek a mértani alakzatokról.

Nagyon sok olyan program létezik, amely hozzájárul ahhoz, hogy az iskolások könnyebben elsajátítsák a matematikát: ezek a multimédiás oktatóprogramok, melyeket a geometriai szerkesztések elkészítéséhez használnak. Ilyeneket az interneten is lehet keresni. De megfelelő tudás megszerzésével és készség fejlesztésével önállóan is készíthettek ilyen szoftvert, amely segíti a mértan elsajátítását.

Az alábbi feladatokat meg tudjátok oldani a számítógép segítségével. A többségük olyan mértani alakzatok szerkesztése, melyeket elkészíthettek a kiválasztott grafikai szoftver segítségével.

### A pont és az egyenes

1. Már tudjátok, hogy a mértanban a pontnak nincs mérete. Ezért a pontot csak feltételeken kis körlapként ábrázolják, a grafikus szerkesztés során (lásd az 1. pont ábráit) vagy pixelként (képpont) a képernyőn. Ugyanígy a monitoron ábrázolt egyenesnek van szélessége (a vonal a geometriában szélesség nélküli).

Sajátítsátok el a grafikai szoftver lehetőségeit a pont és az egyenesek ábrázolására, tanuljátok meg, hogyan kell két ponton keresztül egyenest szerkeszteni.

2. Sajátítsátok el, hogyan kell a pontokat és az egyeneseket a latin ábécé nagy- és kisbetűivel jelölni.

### **A szakasz és hossza**

3. Ábrázoljatok két pontot, szerkesszettek szakaszt, melynek az adott két pont lesz a végpontja.
4. Állapítsátok meg, hogy a grafikai szoftver hogyan adja meg a szakasz hosszát.
5. Szerkesszettek adott hosszúságú szakaszt.
6. Határozzátok meg azt az eszközt, amely segítségével mozgatni és forgatni lehet az adott alakzatot.
7. Szerkesszettek két szakaszt, majd egymásra helyezéssel hozzátok fedésbe őket.
8. Ábrázoljátok azt a rajzot, amely illusztrálja a szakasz hosszának legfontosabb tulajdonságát. Állapítsátok meg, a szakaszok hosszának megállapításával, hogy teljesül-e ez a tulajdonság.
9. Az általatos választott grafikai program rendelkezik-e olyan eszközzel, amely képes meghatározni a szakasz felezőpontját?

### **Félegyenes. Szög**

10. Szerkesszettek különböző szögeket. Keressétek meg azt az eszközt, amellyel meg lehet határozni a szög mértékét, és egy adott fokmértékű szöget lehet szerkeszteni.
11. Ábrázoljátok azt a rajzot, amely illusztrálja a szög mérésének legfontosabb tulajdonságát. Állapítsátok meg, hogy teljesül-e ez a tulajdonság, a megszerkesztett szög mértékének megállapításával.
12. Keressétek meg azt a rajzeszközt, amelynek segítségével tudtok körívet rajzolni. Rajzoljatok néhány szöget, és az azonos méretű szögeket azonos számú körívvel jelöljétek. Figyeljétek meg, hogy a rajzokon különböző alakzatok más-más vastagsággal vannak jelölve. Keressétek meg azt az eszközt, amely lehetőséget ad a vonal vastagságának megváltoztatására.
13. Ábrázoljatok mellékszögeket és csúcsszögeket.

### **Merőleges egyenesek**

14. Keressétek meg azt az eszközt, amellyel a grafikai szoftver segítségével merőleges egyeneseket lehet szerkeszteni. Szerkesszettek merőleges egyeneseket ezzel az eszközzel.
15. Rajzoljatok egy egyenest és az egyenesre illeszkedő pontot. Ezen a ponton keresztül rajzoljatok merőleges egyenest az adott egyenesre.

16. Rajzoljatok egy egyenest és az egyenesre nem illeszkedő pontot. Ezen a ponton keresztül rajzoljatok merőleges egyenest az adott egyenesre.

### **Háromszög. A háromszög magassága, súlyvonala, szögfelezője**

17. Ahhoz, hogy megrajzoljunk egy háromszöget, általában először megrajzolunk három szakaszt, melyek a háromszög oldalai lesznek. Rajzoljátok meg ezt a három szakaszt. Keresétek meg azt az eszközt, amely lehetőséget ad egy alakzattá, háromszöggé összeragasztani a szakaszokat.
18. Rajzoljatok egy hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszöget.
19. Keresétek meg azt az eszközt, amely lehetőséget ad lemásolni a már elkészített alakzatot, és azt az eszközt, amellyel lehetséges mozgatni és elforgatni az alakzatot. Segítségükkel ábrázoljatok egybevágó háromszögeket.
20. Szerkesszettek egy tetszőleges háromszöget, és mindegyik csúcsából húzzátok meg a magasságát, súlyvonalait és szögfelezőjét. Milyen eszközöket kellene alkalmazni, hogy a szerkesztés pontos legyen? Végezzétek el ezt a szerkesztést a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszögekre is.

### **Egyenlő szárú háromszög**

21. Szerkesszettek egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszögeket. A rajzszerkesztő milyen lehetőségei teszik egyszerűbbé a szerkesztést?
22. Hogyan lehet alkalmazni a 10.3. tételt az egyenlő szárú háromszögek szerkesztésénél?

### **A háromszögek egybevágóságának ismertetőjelei**

23. Szerkesszettek két olyan háromszöget, melyeknek a két oldaluk és a közbezárt szögük megfelelően egyenlő egymással.
24. Rajzoljatok egy szakaszt, és szerkesszétek meg a felezőmerőlegesét.
25. Szerkesszettek két háromszöget, melyeknek oldala és a rajta fekvő szögei megfelelően egyenlők egymással. Hogyan lehetne szemléltetni azt, hogy a háromszögek egybevágók?
26. Készítsetek olyan rajzot, amely bemutatja a felezőmerőleges tulajdonságát. Vegyetek fel néhány pontot a felezőmerőlegesen.

Milyen eszközzel lehet ellenőrizni, hogy ezek a pontok egyenlő távolságra lesznek a szakasz végpontjaitól?

### **Párhuzamos egyenesek**

27. Az előző feladatokat végrehajtva megismerkedtetek azokkal az eszközökkel, melyek segítségével mértani alakzatokat tudtok másolni, mozgatni és szerkeszteni. Hogyan kell ezeknek az eszközöknek az alkalmazásával párhuzamos egyeneseket szerkeszteni?
28. Találjátok ki, hogyan szerkeszthetők párhuzamos egyenesek a 13.1. tétel alkalmazásával.
29. Rajzoljatok egy egyenest, és egy rá nem illeszkedő pontot. Rajzoljátok meg az adott egyenessel párhuzamos egyenest, amely illeszkedik erre a pontra. Nagybírástok meg a keletkezett rajzot. Lehet-e ezzel a rajzzal meggyőzően illusztrálni az egyenesek párhuzamossági axiómáját? Miért? Ez a példa azt mutatja, hogy minden mértani szerkesztés, amit a papíron vagy a számítógépen készítünk, eléggé esetleges. Ezért hiába a legcsodálatosabb rajz, nem a rajzra kell támaszkodni, hanem a matematikai tényekre és bizonyításra.
30. Alkalmazva a 14.1. – 14.3. tételeket, szerkesszettek néhány pár párhuzamos egyenest. A grafikus program alkalmazásával győződjetek meg arról, hogy az egyenesek tényleg párhuzamosak-e.
31. Készítsetek néhány olyan rajzot, melyek illusztrálják a párhuzamos egyenesek tulajdonságait. A grafikus program alkalmazásával győződjetek meg arról, hogy ezek a tulajdonságok tényleg teljesülnek.
32. Rajzoljatok két párhuzamos egyenest. Hogyan állapítható meg a köztük lévő távolság?

### **A háromszög szögeinek összege**

33. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget. Szerkesszétek meg az összes külső szögét. Alkalmazva a grafikus program eszközeit, állapítsátok meg a megszerkesztett szögek fokmértékét.

### **Derékszögű háromszög**

34. Rajzoljatok egy derékszögű háromszöget, és jelöljétek vékony ívvel a derékszögét (lásd a 256. ábrát).

35. Szerkesszettek háromszögpárt, amely illusztrálja a derékszögű háromszögek egybevágóságát. Jelöljétek a rajzon egyforma számú vonalakkal az egyenlő oldalakat, és egyforma számú ívekkel az egyenlő szögeket.
36. Szerkesszettek derékszögű háromszöget, melynek hegyesszöge  $30^\circ$ . Ellenőriztétek, hogy igaz-e a 18.1. tétel állítása és a 1. pont 18. feladatának állítása.

### Kör és körlap

37. Ismerkedjétek meg a körvonalat és a körlapot ábrázoló eszközökkel. Mivel különbözik a körvonal és a körlap ábrázolása? Milyen eszköz szükséges ahhoz, hogy az ábrázolt körvonalból körlapot készítsünk?
38. Rajzoljatok körvonalat, és húzzátok meg húrját és átmérőjét. A körvonal ábrázolásakor milyen eleme szükséges ahhoz, hogy az átmérőt pontosan megrajzolhassuk?
39. Rajzoljatok körvonalat és jelöljétek rajta egy pontot. Milyen eszközt kell alkalmazni ahhoz, hogy megrajzolhassuk az adott pontban a körvonal érintőjét?

### A háromszögbe és köré írt körvonal

40. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget. Szerkesszétek meg a háromszögbe és a köré írt körvonalat úgy, hogy ne alkalmazzátok a 21. pontban tanult elméleti ismereteket. Ezután szerkesszétek meg ugyanezeket a köröket, alkalmazva a 21.1. és 21.2. tételeket. Sikerül-e a szerkesztést gyorsabban és pontosabban elkészíteni?

### Szerkesztési feladatok

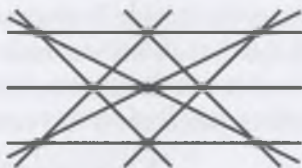
41. A szerkesztési feladatok megoldása során körzőt és vonalzót használunk. Ha grafikus szoftverrel akarjátok elkészíteni a szerkesztést, akkor milyen eszközöket lehet felhasználni a körző és a vonalzó helyett?
42. Ismerjétek meg azokat az eszközöket, amelyekkel különböző mértani alakzatok különböző színben ábrázolhatók.
43. Az általatok választott rajzszerkesztő rendelkezik-e olyan eszközzel, amely lehetővé teszi a mértani testek metszetének automatikus meghatározását?

## MEGOLDÁSOK ÉS ÚTMUTATÁSOK

14. 1 pont vagy 4 pont vagy 6 pont. 15. A lehetséges metszéspon-  
tok száma legalább 1, legfeljebb pedig 10. 16. 346. ábra.  
17. 12 pont. 18. 347. ábra. 39. 8 cm vagy 56 cm. 41. 1) Az  $EF$  sza-  
kasz minden pontja; 2) az  $A$  és  $B$  pontok (348. ábra); 3) ilyen  
pontok nem léteznek. 42. Ilyen pontból kettő van. Ezek közül az  
egyik egy olyan belső pontja az  $AB$  szakasznak, hogy  $AC : BC =$   
 $= 1 : 2$ , a másik egy olyan  $A$  pont, amely a  $BC$  szakasz középpontja  
lesz. 43. 4 cm. 44. a) 4 pont; b) 3 pont; c) 4 pont; d) 3 pont.  
46. Útmutatás. Alkalmazzátok az egyenlőséget: 1)  $13 - 2 \cdot 5 = 3$ ;  
2)  $3 \cdot 5 - 13 = 2$ ; 3)  $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$ .

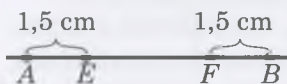


346. ábra

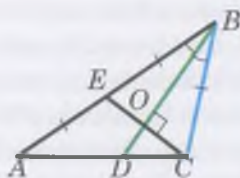


347. ábra

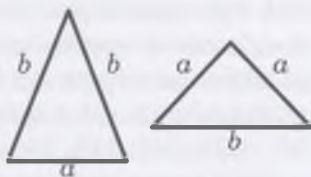
47. Útmutatás. Alkalmazzátok az egyenlőséget: 1)  $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 =$   
 $= 8$ ; 2)  $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$ . 69.  $60^\circ$ . 70.  $108^\circ$ . 73.  $68^\circ$ . 74.  $153^\circ$ .  
75. 1)  $6^\circ$ ; 2)  $0,5^\circ$ . 77.  $50^\circ$  vagy  $110^\circ$ . 78.  $77^\circ$  vagy  $163^\circ$ . 82. Útmutatás.  
Bármilyen félegyenestől kezdve rakjátok egymás mellé 14-szer az  
adott szöget. Az így kapott szög  $2^\circ$ -kal lesz nagyobb, mint az egye-  
nesszög. 83. 1) Útmutatás. Használjátok azt, hogy  $19^\circ \cdot 19 = 361^\circ$ .  
84. Igen. Útmutatás. Feltételezzük, hogy ilyen szög nem létezik, és  
ekkor ellentmondásra fogunk jutni. 105.  $90^\circ$ . 106.  $180^\circ$ . 107.  $75^\circ$ .  
108.  $108^\circ$ ,  $72^\circ$ . 109.  $136^\circ$ ,  $44^\circ$ . 123. 1)  $124^\circ$ ; 2)  $98^\circ$ . 124.  $126^\circ$ . 128.  $70^\circ$ ,  
 $160^\circ$ . 129. 1) Útmutatás.  $90^\circ = 17^\circ \cdot 5 + 5^\circ$ . 149. 48. cm. 150. 13 cm.  
152.  $120^\circ$ . 188. 3 cm. 189. 10 cm. 191. 2) Útmutatás. Bizonyítsátok  
be, hogy  $\angle AOM = \angle BOK$ . Az  $\angle AOB$  szög  
egyenesszög lesz. Ekkor  $\angle AOM + \angle MOB =$   
 $= 180^\circ$ . Innen  $\angle MOB + \angle BOK = 180^\circ$ .  
194.  $20^\circ$ ,  $70^\circ$ . 223. 4 cm vagy 7 cm.  
224. 4 cm és 6 cm vagy 5 cm és 5 cm.



348. ábra



349. ábra



350. ábra

228. 26 cm vagy 14 cm. 230. 1)  $\frac{5a}{7}$ ; 2)  $\frac{9a}{14}$ . 243. *Útmutatás.*

Alkalmazzátok azt, hogyha a szögfelező egyúttal magasság is, akkor a háromszög egyenlő szárú lesz, bizonyítsátok be hogy a  $MAD$  és  $KBD$  háromszögek egyenlő szárúak. 244. 8 cm. 245.  $AB : AC = 1 : 2$ . 247. 2 cm, 3 cm, 4 cm. *Útmutatás.* A  $BD$  szakasz az  $ABC$  háromszög szögfelezője (349. ábra), a  $CE$  szakasz a súlyvonala,  $BD \perp CE$ . Bizonyítsuk be, hogy  $CBE$  háromszög egyenlő szárú ( $BC = BE$ ). Ekkor  $AB = 2BC$  és a következő esetek lehetségesek:  $AB - BC = 1$  cm vagy  $AB - BC = 2$  cm. 248. 2 cm. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a  $KMC$  és  $KDA$  háromszögek egyenlő szárúak lesznek. 264. Nem. *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg a 350. ábrán lévő háromszögeket. 265. *Útmutatás.* Legyen  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  az adott háromszögek.  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ , az  $AM$  és  $A_1M_1$  szakaszok az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek megfelelő oldalfelezői. Az  $AM$  és  $A_1M_1$  szakaszok meghosszabbításán az  $M$  és  $M_1$  pontok után megfelelően felmérjük az  $MD$  és  $M_1D_1$  olyan szakaszokat, hogy  $MD = AM$  és  $M_1D_1 = A_1M_1$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $AC = BD$  és  $A_1C_1 = B_1D_1$ . Aztán bizonyítsátok be, hogy az  $ABD$  és  $A_1B_1D_1$ ,  $MBD$  és  $M_1B_1D_1$  és végül az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek egybevágók. 281. *Útmutatás.* Legyen az  $AM$  és  $A_1M_1$  szakaszok az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek megfelelő súlyvonalai,  $AM = A_1M_1$ ,  $BAM\angle = B_1A_1M_1\angle$ ,  $CAM\angle = C_1A_1M_1\angle$ . Az  $AM$  és  $A_1M_1$  szakaszok  $M$  és  $M_1$  pontokon túli meghosszabbítására felmérjük az  $MD$  és  $M_1D_1$  olyan szakaszokat, hogy  $MD = AM$  és  $M_1D_1 = A_1M_1$ . Bizonyítsátok be, hogy az  $AC = BD$  és  $A_1C_1 = B_1D_1$ . Aztán bizonyítsátok be, hogy az  $ABD$  és  $A_1B_1D_1$ , egybevágók, innen már könnyen megkapjuk, hogy  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$  háromszögek is egybevágók. 293. Végtelen sok. 295. *Útmutatás.* Feltételezzük, hogy az  $a$  és  $b$  egyenesek metszik egymást. Kivá-

lasztunk egy tetszőleges pontot az  $a$  egyenesen, amelyik nem az  $a$  és  $b$  egyenesek metszéspontja lesz. A kiválasztott ponton keresztül lehet olyan egyenest fektetni, amelyik metszi az  $a$  egyenest és párhuzamos a  $b$ -vel, amely ellentmond a feltételnek. **296.** 6 cm. **297.**  $35^\circ$ . **298.**  $90^\circ$ . **317.** Nem. **320.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a  $BKM$  háromszög egyenlő szárú. **321.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy  $BF \parallel AC$  és  $BD \parallel AC$ , alkalmazzátok az egyenesek párhuzamosságának axiómáját. **322.**  $111^\circ$  vagy  $69^\circ$ . **340.**  $40^\circ$ . **343.**  $40^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $70^\circ$ . **344.**  $121^\circ$ . **348.** *Útmutatás.* Húzzatok a  $C$  ponton keresztül az  $AB$ -vel párhuzamos egyenest. **351.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy az  $\hat{AMO}$  és  $\hat{CKO}$  háromszögek egyenlő szárúak. **353.**  $AD : DB = 2 : 3$ . **396.**  $25^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $100^\circ$ . **399.**  $35^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $110^\circ$ . **400.**  $140^\circ$ . **403.** *Útmutatás.* Határozzátok meg az  $ABC$  háromszög szögeit és bizonyítsátok be, hogy  $AMB$  és  $MAC$  egyenlő szárú háromszögek. **404.**  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ . **405.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok az indirekt bizonyítás módszerét. **407.** Hegyesszögű. *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg sorba a háromszög szögeit. Mivel két másik szög összege nagyobb, mint  $90^\circ$ , ezért a vizsgált szög kisebb lesz, mint  $90^\circ$ . Mivel mindegyik szög kisebb, mint  $90^\circ$ , ezért a háromszög hegyesszögű lesz. **408.** *Útmutatás.* A  $DAC$  háromszög  $DAC$  szöge tompaszög. Tehát  $DC > AC$ . **410.** Nem. **412.**  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  vagy  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ . **414.** *Útmutatás.* Vegyetek az  $m$  egyenesen egy bármilyen  $X$  pontot és hasonlítsátok össze az  $AX + BX$  összeget az  $AB$  szakasz hosszával. **415.** 3 cm. **416.**  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . **417.** *Útmutatás.* Az  $AM$  oldalfelező  $M$ -en túli meghosszabbítására felmérjük az  $MD$  szakaszt, amely egyenlő ezzel a súlyvonallal, és vizsgáljátok meg az  $ABD$  háromszöget. **418.**  $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$ ,  $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$ ,  $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$ . **419.**  $90^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ . *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg a  $DAK$  háromszöget, ahol a  $K$  pont az  $AB$  szakasz felezőpontja. **421.** 36 cm. **449.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be az  $AKH$  és a  $CMH$  háromszögek egybevágóságát. **450.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy  $MEN \Delta = NFM \Delta$ . Innen következik, hogy  $MK = NK$ . Ezenkívül  $KE = FM = NE$ . Tehát  $MK = MN$ . **451.** Nem. **453.**  $50^\circ$ ,  $130^\circ$ . **465.**  $30^\circ$ , 1 cm. **466.** 9 cm. **467.** 15 cm. **470.** 8 cm. **471.** 6 cm. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy az  $ADB$  háromszög egyenlő szárú. **473.** 21 cm. **491.** 1,5 cm.

492. 60 cm. 493. Adott sugarú és adott középpontú körvonal. 494. Annak a szakasznak a felezőmerőlegese, amely az adott pontokat köti össze. 495. Két egyenes, amely az adott egymást metsző egyenesek által alkotott négy szög szögfelezői lesznek. 496. Az adott alap felezőmerőlegésének minden pontja, kivéve a merőleges és az alap metszéspontját. 497. Annak a szakasznak a felezőmerőlegese, amely merőleges az adott egyenesekre, és amelyre a szakasz végpontjai illeszkednek. 498. Párhuzamos egyenes pár, melyek mindegyike megadott távolságra van az adott egyenestől. 499. *Útmutatás.* Kössétek össze az  $M$  pontot a körvonal  $O$  középpontjával. Vizsgáljátok meg az  $AOM$  és  $BOM$  háromszögeket. 500. A  $B$  pontot tartalmazó félsík minden pontja, amelynek a határvonala az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese lesz, kivéve a félsík határvonalát. 501. A sík minden olyan pontja, amelyek nem tartoznak az  $A$  középpontú  $AB$  sugarú körlaphoz. 503.  $55^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $40^\circ$ . 505.  $20^\circ$ . 521. 1)  $90^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ . 522. 12 cm. 523.  $40^\circ$ . 524.  $120^\circ$ . 529. Az adott egyenesre merőleges, az adott ponton áthaladó egyenes minden pontja, kivéve az adott pontot. 530. A szögfelező minden pontja, kivéve a szög csúcsát. 531. A sík minden pontja, kivéve az adott egyenes pontjait. 532. *Útmutatás.* Az  $OAK$  háromszöget vizsgálva bizonyítsátok be, hogy  $OK = 2AK$ . 533. *Útmutatás.* Alkalmazzatok a körvonalhoz egy adott pontból húzott érintő tulajdonságait. 537.  $18^\circ$ . 557. 24 cm, 24 cm, 20 cm. 558. 20 cm, 14 cm, 18 cm. 559.  $50^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $75^\circ$ . 562. *Útmutatás.* Alkalmazzatok a körhöz egy adott pontból húzott érintők tulajdonságát. 563.  $a$ . 564. 16 cm. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett háromszögek kerületeinek összege egyenlő az adott háromszög kerületével. 565. 0,5 cm. *Útmutatás.* Legyen az  $M_1$  és  $M_2$  pontok azoknak a körvonalaknak az érintési pontjai, melyeket az  $ABD$  és  $DBC$  háromszögekbe írtak. A  $DM_1$  és  $DM_2$  szakaszokra alkalmazzatok az 562. feladat eredményét. 566. *Útmutatás.* Alkalmazzatok azt, hogy a háromszög szögfelezői, a jelen esetben az  $AMC$ -jé is, egy pontban metszik egymást. 567. *Útmutatás.* Jelöljétek a szög különböző szárain az  $M$  és  $N$  pontot. Rajzoljátok meg a  $BMN$  és  $BNM$  szögek szögfelezőit. A szög különböző szárain jelöljétek az  $E$  és  $F$  pontot. Rajzoljátok meg a  $BEF$  és  $BFE$  szögek szögfelezőit. 568.  $36^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $108^\circ$ . *Útmutatás.* Alkalmazzatok azt, hogy az  $FAO$  és  $BOA$  háromszögek egyenlő szárúak. 570.  $52^\circ$ ,

$52^\circ$ ,  $76^\circ$ . **571.** 3 cm, 7 cm. **595.** *Útmutatás.* A szög szárán fekvő ponton keresztül fektessetek merőleges egyenest a szög másik szárához. **597.** *Útmutatás.* Szerkesszettek egy derékszögű háromszöget, melynek átfogója egyenlő az adott szögfelezővel, a hegyesszöge pedig az adott szög felével. **599.** *Útmutatás.* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, melynek egyik befogója az adott alap felével egyenlő, a másik pedig a kör sugarával. **602.** *Útmutatás.* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, az adott magassággal egyenlő befogó és szemben lévő hegyesszöge alapján, amely az adott szöggel egyenlő. **604.** *Útmutatás.* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, amelynek az átmérője az adott oldallal egyenlő, a befogó pedig az adott magassággal. **611.** *Útmutatás.* Szerkesszettek derékszögű háromszöget, amelynek az egyik befogója a befogó és a sugár különbsége lesz, a másik befogó pedig a sugárral egyenlő. Akkor a másik befogóval szemközti szög a keresett háromszög hegyesszögének a felével lesz egyenlő. **615.** *Útmutatás.* Szerkesszettek körvonalat az adott három ponton keresztül. **616.** Szerkesszettek egy  $60^\circ$ -os szöget. Ezután alkalmazzátok a következő egyenlőséget:  $6^\circ = 60^\circ - 54^\circ$ . **618.** 1)  $15^\circ$ ,  $95^\circ$ ,  $70^\circ$ ; 2)  $46^\circ$ ,  $59^\circ$ ,  $75^\circ$ . **619.**  $25^\circ$ ,  $65^\circ$ . **620.** 1) hegyesszögű; 2) tompaszögű. **631.** *Útmutatás.* A keresett pont az  $n$  egyenestől  $AB$  távolságra lévő PMH-hez tartozik. A PMH olyan párhuzamos egyenespár, melyek az  $n$  egyenessel párhuzamosak. Az egyeneseket metsző  $m$  egyenes metszéspontjai kielégítik a feltételt. A feladatnak két megoldása van. **638.** *Útmutatás.* Rajzoljatok egy szakaszt, amely merőleges lesz a két párhuzamos egyenesre, és az  $A$  és  $B$  végpontjai ezekre az egyenesekre illeszkednek. Akkor a keresett körvonal középpontja két PMH-hez tartozik: az első az  $A$  és  $B$  pontoktól egyenlő távolságra lévő pontokhoz és a másik az  $\frac{1}{2} AB$  távolságra az adott ponttól. **639.** *Útmutatás.* Az adott egyenest  $B$  pontban érintő körvonalak középpontjainak mértani helye egy egyenes lesz, amely merőleges az adottra és ezen a ponton átmegy (az adott  $B$  pont a PMH-hez nem tartozik). Az  $A$  és  $B$  pontokon áthaladó körvonalak középpontjainak mértani helye az  $AB$  szakasz felezőmerőlegese lesz. **645.** *Útmutatás.* Szerkesszettek meg a  $BCD$  derékszögű háromszöget, melyben a  $BC$  befogó az adott befogóval lesz egyenlő, a  $DC$  befogó pedig az átfogó és a másik befogó összegével. Akkor a keresett  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsa a  $BD$  szakasz

felezőmerőlegesére illeszkedik. **646. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADB$  háromszöget, melyben  $D\angle = 45^\circ$ , a  $DB$  oldal egyenlő az adott befogók összegével, az  $AB$  oldal pedig az adott átfogóval.

**647. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADB$  háromszöget, melyben  $D\angle = 135^\circ$ ,  $DB$  oldal egyenlő az adott befogók különbségével, az  $AB$  oldal pedig az adott átfogóval.

**648. Útmutatás.** Szerkesszék meg a  $DBC$  háromszöget, melyben  $C\angle = 90^\circ$ ,  $CB$  befogó az adott befogóval legyen egyenlő, és a  $CD$  befogó pedig az átfogó és a másik befogó különbségével. Ekkor a keresett  $A$  csúcs a  $DB$  szakasz felezőmerőlegesére fog illeszkedni.

**650. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADC$  háromszöget, melynek  $AC$  oldala az adottal egyenlő, a  $DC$  oldal legyen a két másik oldal összege, a  $DCA$  szög pedig egyezzen meg az adottal.

**651. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADC$  háromszöget, melyben az  $AC$  oldal az adott oldallal egyenlő, a  $C$  szög az adott szöggel egyenlő, a  $DC$  oldal pedig a két másik oldal különbségével. A keresett  $ABC$  háromszög  $B$  csúcsa az  $AD$  oldal felezőmerőlegesére illeszkedik. A leírt szerkesztést abban az esetben lehet alkalmazni, ha a  $C$  szög a nagyobbik ismeretlen oldalra fekvő szög lesz.

**652. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADC$  háromszöget, amelyben  $D\angle = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ , ahol  $\beta$

az adott szög, az  $AC$  oldal egyenlő az adott oldallal, az  $AD$  oldal pedig az adott oldalak különbségével. Akkor a keresett  $B$  csúcs a  $DC$  oldal felezőmerőlegesére fog illeszkedni.

**653. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADC$  háromszöget, amelyben  $D\angle = \frac{\beta}{2}$ , ahol

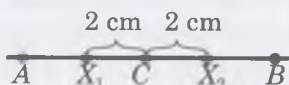
$\beta$  az adott szög legyen, az  $AC$  oldal egyenlő az adott oldallal, az  $AD$  oldal pedig az adott oldalak összegével. Ekkor a keresett  $B$  csúcs a  $DC$  oldal felezőmerőlegeséhez fog illeszkedni.

**654. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADC$  háromszöget, amelyben az  $AC$  oldal egyenlő az adott oldallal, a  $DC$  oldal az ismeretlen oldalak összege lesz,  $DAC\angle = 90^\circ + \alpha$ , ahol  $\alpha$  a feltételben szereplő szögek különbségének a fele.

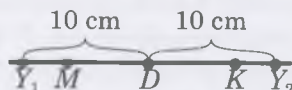
**656. Útmutatás.** Szerkesszék meg a derékszögű háromszöget a magassággal egyenlő befogója, valamint az adottal egyenlő szemben fekvő szöge alapján. Ennek a háromszögnek az átfogója lesz a keresett háromszög egyik oldala.

Ekkor a feladatot a 650. feladat alapján kell megoldani. **657. Útmutatás.** Szerkesszék meg a  $BDM$  derékszögű háromszöget, melyben a

$BM$  átfogó az adott súlyvonallal egyenlő, a  $BD$  befogó pedig az adott magassággal. Ekkor a keresett háromszög körülírt körvonalának középpontja arra az egyenesre illeszkedik, amelyre az  $M$  pont illeszkedik és amely merőleges a  $DM$  szakaszra. **658. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ABD$  háromszöget, melyben az  $AB$  és  $AD$  oldalak egyenlők az adott két oldallal, a  $BD$  oldal pedig 2-szer



351. ábra



352. ábra

nagyobb, mint az adott súlyvonal. **659. Útmutatás.** Szerkesszék meg az  $ADC$  háromszöget, melyben az  $AC$  egyenlő az adott oldallal, az  $AD$  oldal pedig 2-szer nagyobb, mint az adott oldalfelező, a  $D$  pontból húzott magasság az adott magassággal egyenlő. Mutassátok meg, hogy a keresett  $DC$  oldal lesz az egyik ismeretlen oldala a keresett háromszögnek. **661.**  $65^\circ$ . **662.**  $15^\circ$ ,  $75^\circ$ . **663.**

$180^\circ$ . **665.**  $\frac{4a}{5}$ ... **666.** Az  $X_1$  és  $X_2$  pontok a 351. ábrán láthatók.

**667.** Az  $Y_1$  és  $Y_2$  pontok a 352. ábrán láthatók. **670.**  $60^\circ$  vagy  $180^\circ$ . Két megoldása van. **671.**  $40^\circ$  vagy  $140^\circ$ . Két megoldása van. **673.**  $20^\circ$ . **675.** 42 cm. **689.** 15 cm. **700.**  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ . **702.**  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $110^\circ$ . **703.**  $35^\circ$ . **704.**  $10^\circ$ . **705.**  $52^\circ$ ,  $52^\circ$ ,  $76^\circ$ . **706.**  $70^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $40^\circ$ . **711.**  $33^\circ$ ,  $57^\circ$ . **712.**  $45^\circ$ . **716.**  $50^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $80^\circ$  vagy  $80^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $20^\circ$ . **718.**  $70^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $40^\circ$  vagy  $50^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $80^\circ$ . **719.**  $135^\circ$ . **722.** 22 cm. **723.** 9 cm. **724.**  $60^\circ$ . **728.**  $120^\circ$ . **732.**  $60^\circ$ . **736.** 6 cm. **738. Útmutatás.** Legyen  $O$  a körvonal középpontja. Bizonyítsátok be, hogy  $COD\angle = 180^\circ$ . **739.**  $114^\circ$ . **741. Útmutatás.** Bizonyítsátok be, hogy az  $O_1$  és  $O_2$  pontok a  $B$  szög szögfelezőjére illeszkednek.

### Az Önellenőrzés teszt formában feladatainak megoldása

| A feladat sorszáma | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|--------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 1                  | C | D | A | C | C | C | B | B | C | B  | C  |
| 2                  | B | B | D | D | B | C | B | B | A | C  | B  |
| 3                  | D | C | C | A | A | B | C | C | B | C  | B  |
| 4                  | C | D | A | C | B | A | C | C | D | B  | —  |

## TÁRGYMUTATÓ

- Adott egyenesre merőleges  
     egyes szerkesztése 177  
 Adott szöggel egyenlő  
     szög szerkesztése 175  
 Alaptulajdonság 47  
 Átfogó 133  
 Axióma 47  
 Axióma az egyenesek  
     párhuzamosságáról 105  
 Befogó 133  
 Csúcsszögek 37  
 Derékszög 30  
 Derékszögek tulajdonságai 37  
 Derékszögű háromszögek  
     egybevágóságának  
     ismertetőjelei 134, 135  
 Egy oldalon lévő szögek 109  
 Egyállású szögek  
     tulajdonságai 110  
 Egybevágó alakzatok 59  
 Egybevágó háromszögek 57  
 Egyenes tétel 93  
 Egyenes 12  
 Egyenesek alaptulajdonsága 12  
 Egyenesek közötti szög 42  
 Egyenesek párhuzamosságának  
     ismertetőjelei 104, 109  
 Egyenlő szög 27  
 Egyenlő oldalú háromszög 75  
 Egyenlő szakaszok 17  
 Egyenlő szárú  
     háromszög alapja 74  
 Egyenlő szárú háromszög  
     alapnál lévő szöge 75  
 Egyenlő szárú háromszög  
     csúcshöge 75  
 Egyenlő szárú háromszög szára 74  
 Egyenlő szárú háromszög  
     szögeinek csúcsa 75  
 Egyenlő szárú  
     háromszög tulajdonságai 75  
 Egyenlő szárú háromszög 74  
 Egyenlő szárú háromszögek  
     ismertetőjelei 82  
 Egyenlő szögek 27  
 Egymást metsző egyenesek 13  
 Egységnyi szög 27  
 Egységszakasz 17  
 Érintési pont 159  
 Érintők tulajdonságai 160  
 Félegyenes kezdőpontja 25  
 Félegyenes 25  
 Felezőmerőleges szerkesztése 176  
 Felezőmerőlegesek  
     metszéspontja 167  
 Felső határvonala 27  
 Felső 27  
 Ferde 43  
 Fok 27  
 Fordított tétel 93  
 Háromszög 56  
 Háromszög oldala 56  
 Háromszög kerülete 56  
 Háromszög köré írt  
     körvonal középpontja 168  
 Háromszög köré írt körvonal 166  
 Háromszög külső szöge 124  
 Háromszög külső szögének  
     tulajdonságai 124  
 Háromszög magassága 59  
 Háromszög súlyvonala 59  
 Háromszög szerkesztése adott  
     oldalai alapján 178 – 180  
 Háromszög szöge 56  
 Háromszög szögeinek összege 124  
 Háromszög szögének csúcsa 56  
 Háromszögbe írt körvonal  
     középpontja 168  
 Háromszögbe írt  
     körvonal 167  
 Háromszög szögfelezője 59  
 Háromszög-egyenlőtlenség 125  
 Háromszögek egybevágóságának  
     alaptulajdonsága 58  
 Háromszögek egybevágóságának  
     ismertetőjelei 65, 66, 87  
 Hegyesszög 30  
 Hegyesszögű háromszög 56  
 Hosszegység 18

|                                              |     |                                    |          |
|----------------------------------------------|-----|------------------------------------|----------|
| Indirekt bizonyítás                          | 93  | Párhuzamos egyenesek               |          |
| Ismertetőjel tétel                           | 93  | tulajdonságai                      | 109, 110 |
| Kiegészítő félegyenesek                      | 25  | Párhuzamos félegyenesek            | 104      |
| Kölcsönösen fordított tételek                | 93  | Párhuzamos szakaszok               | 104      |
| Kör köré írt háromszög                       | 167 | Perc                               | 29       |
| Kör sugara                                   | 153 | Pont                               | 12       |
| Körbe írt háromszög                          | 166 | Pont és egyenes közötti távolság   | 43       |
| Körlap                                       | 154 | Pontok közötti távolság            | 19       |
| Körlap átmérője                              | 154 | Pontok mértani helye               | 150      |
| Körlap érintője                              | 160 | Pontok mértani helyének módszere   | 185      |
| Körlap húrja                                 | 154 | Posztulátum                        | 50       |
| Körlap középpontja                           | 154 | Pótszerkesztés módszere            | 94       |
| Körlap sugara                                | 154 | Síkmértan                          | 10       |
| Körvonal                                     | 153 | Szakasz                            | 17       |
| Körvonal átmérője                            | 153 | Szakasz belső pontja               | 17       |
| Körvonal érintője                            | 159 | Szakasz felezése                   | 177      |
| Körvonal érintőjének ismertetőjelei          | 161 | Szakasz felezőmerőlegese           | 65       |
| Körvonal húrja                               | 153 | Szakasz felezőpontja               | 19       |
| Körvonal középpontja                         | 153 | Szakasz hossza                     | 18       |
| Körvonal tulajdonságai                       | 159 | Szakasz hosszának alaptulajdonsága | 19       |
| Következmény                                 | 93  | Szakasz végpontjai                 | 17       |
| Következmény tétel                           | 93  | Szakaszok összege                  | 19       |
| Különböző oldalon fekvő szögek tulajdonságai | 109 | Szerkesztési feladatok elemzése    | 175      |
| Különböző oldalon lévő szögek                | 109 | Szög                               | 26       |
| Különböző oldalú háromszög                   | 76  | Szög csúcsa                        | 26       |
| Másodperc                                    | 29  | Szög fokmértéke                    | 28       |
| Megfelelő szögek tulajdonságai               | 110 | Szög mértéke                       | 28       |
| Megfelelő szögek                             | 109 | Szög szára                         | 26       |
| Meghatározás                                 | 13  | Szögek összege                     | 30       |
| Mellékszögek tulajdonságai                   | 36  | Szögfelező szerkesztése            | 178      |
| Mellékszögek                                 | 36  | Szögfelező                         | 27       |
| Merőleges                                    | 43  | Szögfelezők metszéspontja          | 168      |
| Merőleges egyenesek                          | 41  | Szögmértékének alaptulajdonsága    | 30       |
| Merőleges félegyenesek                       | 42  | Tétel                              | 13       |
| Merőleges szakaszok                          | 42  | Tétel feltétele                    | 92       |
| Merőleges talppontja                         | 43  | Tétel következménye                | 92       |
| Mérőszalag                                   | 18  | Tompaszög                          | 30       |
| Mértan                                       | 10  | Tompaszögű háromszög               | 57       |
| Metsző                                       | 109 | Tulajdonság tétel                  | 93       |
| Párhuzamos egyenesek                         | 104 | Vonás                              | 30       |
| Párhuzamos egyenesek alaptulajdonsága        | 105 |                                    |          |
| Párhuzamos egyenesek közötti távolság        | 119 |                                    |          |

## MATEMATIKAI KIFEJEZÉSEK EREDETE

|                                         |                                                                                  |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Axióma</b> [Аксиома]                 | – a görög <i>axios</i> szóból ered – jelentése elismerésre méltó                 |
| <b>Szögfelező</b><br>[Бисектриса]       | – a latin <i>bis</i> – jelentése kétszeres és a <i>secrix</i> – jelentése metsző |
| <b>Geometria</b><br>[Геометрія]         | – a latin <i>geo</i> – jelentése föld és a <i>metreo</i> – jelentése mérés       |
| <b>Átfogó</b> [Гипотенуза]              | – a latin <i>gipotenusa</i> – jelentése ami összeköt                             |
| <b>Fok</b> [Градус]                     | – a latin <i>gradus</i> – lépés, lépcső                                          |
| <b>Átló</b> [Діагональ]                 | – a görög <i>dia</i> – keresztül, át és a <i>gonium</i> – szög                   |
| <b>Átmérő</b> [Діаметр]                 | – a görög <i>diametros</i> – átmérő                                              |
| <b>Befogó</b> [Катет]                   | – a görög <i>katetos</i> – függő ón, függőleges irány                            |
| <b>Négyszeg</b> [Квадрат]               | – a latin <i>quadratus</i> – négyszög (a <i>quattuor</i> – négy)                 |
| <b>Kocka</b> [Куб]                      | – a görög <i>kybos</i> – dobókocka                                               |
| <b>Matematika</b><br>[Математика]       | – a görög <i>mathematike</i> (a <i>mathema</i> – tudás, tudomány)                |
| <b>Súlyvonal</b><br>[Медіана]           | – a görög <i>medius</i> – középső                                                |
| <b>Méter</b> [Метр]                     | – a francia <i>mètre</i> – mérőpálca vagy a görög <i>metron</i> – mérték         |
| <b>Párhuzamosság</b><br>[Паралельність] | – a görög <i>parallelos</i> – aki közel megy                                     |
| <b>Kerület</b><br>[Периметр]            | – a görög <i>peri</i> – körül és a <i>metreo</i> – mérni                         |
| <b>Mérőleges</b><br>[Перпендикуляр]     | – a latin <i>perpendicularis</i> – függőleges                                    |
| <b>Síkmértan</b><br>[Планіметрія]       | – a görög <i>planum</i> – sík                                                    |
| <b>Arány</b><br>[Пропорція]             | – a latin <i>proportio</i> – összefüggés                                         |
| <b>Sugár</b> [Радіус]                   | – a latin <i>radius</i> – küllő a kerékben, fénysugár                            |
| <b>Tétel</b> [Теорема]                  | – a görög <i>theoreo</i> – megvizsgálni, meggondolni                             |
| <b>Szögmérő</b><br>[Транспортер]        | – a latin <i>transportaro</i> – átvinni, átfordítani                             |
| <b>Álakzat</b> [Фігура]                 | – a latin <i>figura</i> – kinézet, kép                                           |
| <b>Képlet</b> [Формула]                 | – a latin <i>formula</i> – forma, szabály                                        |
| <b>Húr</b> [Хорда]                      | – a görög <i>chorde</i> – húr, idegszál                                          |
| <b>Középpont</b><br>[Центр]             | – a latin <i>centrum</i> – a körző leszűrődő ága                                 |
| <b>Körző</b> [Циркуль]                  | – a latin <i>circulus</i> – kör                                                  |

## TARTALOM

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>A szerzőktől.....</i>                                                               | 3   |
| <i>Egyezményes jelek .....</i>                                                         | 7   |
| <i>Bevezető. Mit tanulmányoz a mértan? .....</i>                                       | 8   |
| <b>1. §. A legegyszerűbb mértani alakzatok és tulajdonságai .....</b>                  | 11  |
| 1. Pontok az egyenesen .....                                                           | 12  |
| 2. A szakasz és hossza.....                                                            | 17  |
| 3. Félegyenes. Szög. Szögek mérése.....                                                | 25  |
| 4. Mellék- és csúcsszögek.....                                                         | 36  |
| 5. Merőleges egyenesek .....                                                           | 41  |
| 6. Axiómák.....                                                                        | 46  |
| • <i>A mértan történetéből .....</i>                                                   | 48  |
| 1. Számú feladat. Önellenőrzés teszt formában.....                                     | 51  |
| <i>Az 1. paragrafus összefoglalása.....</i>                                            | 53  |
| <b>2. §. Háromszögek .....</b>                                                         | 55  |
| 7. Egybevágó háromszögek. A háromszögek<br>magassága, súlyvonala és szögfelezője ..... | 56  |
| 8. A háromszögek egybevágóságának első és második<br>ismertetőjele (alapesete) .....   | 64  |
| 9. Az egyenlő szárú háromszög és tulajdonságai.....                                    | 74  |
| 10. Az egyenlő szárú háromszögek ismertetőjelei.....                                   | 81  |
| 11. A háromszögek egybevágóságának harmadik<br>ismertetőjele .....                     | 87  |
| 12. Tételek .....                                                                      | 92  |
| 2. számú feladat. Önellenőrzés teszt formában.....                                     | 97  |
| <i>A 2. paragrafus összefoglalása .....</i>                                            | 100 |
| <b>3. §. Párhuzamos egyenesek.</b>                                                     |     |
| <b>A háromszög szögeinek összege.....</b>                                              | 103 |
| 13. Párhuzamos egyenesek.....                                                          | 104 |
| 14. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei ....                                  | 109 |
| • <i>Eukleidész ötödik posztulátuma.....</i>                                           | 116 |
| 15. Párhuzamos egyenesek tulajdonságai.....                                            | 117 |
| 16. A háromszög szögeinek összege.<br>Háromszög-egyenlőtlenség .....                   | 124 |
| 17. Derékszögű háromszög .....                                                         | 133 |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 18. A derékszögű háromszög tulajdonságai.....                                    | 140        |
| 3. számú feladat. Önellenőrzés teszt formában.....                               | 144        |
| A 3. paragrafus összefoglalása .....                                             | 146        |
| <b>4. §. Körvonal és körlap .....</b>                                            | <b>149</b> |
| 19. A pontok mértani helye. Körvonal és körlap.....                              | 150        |
| 20. A körvonal tulajdonságai. A körvonal érintője.....                           | 159        |
| 21. A háromszögbe és köré írt körvonalak.....                                    | 166        |
| 22. Szerkesztési feladatok .....                                                 | 174        |
| 23. A pontok mértani helye módszer alkalmazása a szerkesztési feladatoknál ..... | 185        |
| ● Fejezetek a mértani szerkesztések történetéből .....                           | 191        |
| 4. számú feladat. Önellenőrzés teszt formában.....                               | 193        |
| A 4. paragrafus összefoglalása .....                                             | 194        |
| A 7. osztályos mértan ismétlési feladatai.....                                   | 197        |
| ● Barátkozunk a számítógéppel .....                                              | 207        |
| Megoldások és útmutatások.....                                                   | 212        |
| Az önellenőrzés teszt formában feladatainak megoldása.....                       | 218        |
| Tárgymutató.....                                                                 | 219        |
| Matematikai kifejezések eredete.....                                             | 221        |

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович  
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович  
ЯКІР Михайло Семенович

## ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів  
з навчанням угорською мовою

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено**

Переклад з української мови

Перекладачі *Поллої Дезидер Федорович,*  
*Штерр Аттіла Адальбертович, Кулін Юдіт Імріївна*

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*

Редактор *Б.Б. Ковач*

Художнє оформлення та дизайн *Ю. В. Висоцького*

Коректор *Г. М. Турканич*

Формат 60×90/16.

Ум. друк. арк. 14,0. Обл.-вид. арк. 13,15.

Тираж 900 пр. Зам. № 95П

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”  
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014  
[www.svit.gov.ua](http://www.svit.gov.ua), e-mail: [office@svit.gov.ua](mailto:office@svit.gov.ua), [svit\\_vydav@ukr.net](mailto:svit_vydav@ukr.net)

Друк ТДВ „Патент”, 88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011