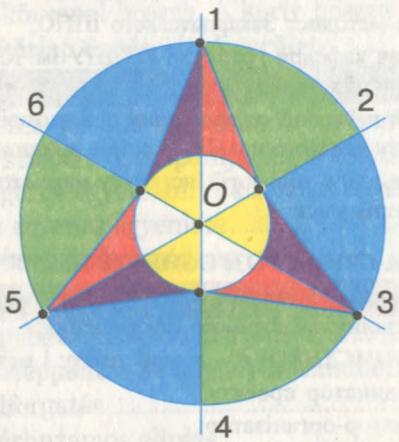
M. I. Burda, N. A. Taraszenkova

MÉRTAN

Tankönyv az általános
oktatási rendszerű magyar tannyelvű
tanintézmények 9. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma



2009-ben ez a tankönyv kapta a legjobb minősítést Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériumának tankönyvpályázatán, amelyet a 12 osztályos iskolák számára hirdettek meg

Csernyivci
Bukrek Kiadó
2009

Zxitai Dávid

ББК 22.151я721
Б91

Перекладено з видання:

М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. Геометрія 9 кл.: Підручн. для загальноосвітн. навч. закл. – К.: Зодіак-ЕКО, 2009. – 240 с.: іл.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ від 2 лютого 2009 р. № 56)

Видано за рахунок державних коштів.

Продаж заборонено

Відповідальні за підготовку до видання підручника:

Н. С. Прокопенко – головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України;

О. О. Литвиненко – методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти

Експерти рукопису підручника:

О. В. Горелова – вчитель-методист ЗОШ № 10, м. Ізмаїл;

К. М. Петечук – вчитель-методист Закарпатського ІППО;

О. М. Сінюкова – викладач кафедри геометрії ПУДПУ ім. К. Ушинського, кандидат фізико-математичних наук;

Т. М. Хмара – провідний науковий співробітник лабораторії математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України, кандидат педагогічних наук;

В. В. Шарко – завідувач відділу топології Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту, розробник концепцій дизайну, художнього оформлення;

Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА – автори тексту і методичного апарату;

Олег КОСТЕНКО – координатор проекту;

Олена ПОПОВИЧ – редактор-організатор;

Андрій ВІКСЕНКО – макет, художнє оформлення;

Валентина МАКСИМОВСЬКА – організатор виробничого процесу;

Галина КУЗНЄЦОВА – економічний супровід проекту;

Роман КОСТЕНКО – маркетингові дослідження підручника;

Андрій КУЗНЕЦОВ – моніторинг апробації підручника

Бурда М. І.

Б91 Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. з угорською мовою навчання / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. Пер. з укр. – Чернівці: Букрек, 2009. – 240 с.: іл.

ISBN 978-966-399-220-4

ББК 22.151я721

© М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, 2009
© Видавництво "Зодіак-ЕКО", оригінал-макет, 2009
© Видавничий дім "Букрек", переклад угорською мовою, 2009

ISBN 978-966-7090-65-4 (укр.)
ISBN 978-966-399-220-4 (угор.)

TARTALOM

Kedves diákok! 4

1. fejezet **ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA**



1. § A 0° és 180° közé eső szög szinusza, koszinusza és tangense 8
2. § Trigonometrikus alapazonosságok 13
3. § A szinusztétel 18
4. § A koszinusztétel 24
5. § Általános háromszögek megoldása 30
6. § A háromszög területképletei 39

2. fejezet **SZABÁLYOS SOKSZÖGEK**



7. § Szabályos sokszögek 50
8. § A szabályos sokszögek beírt és köré írt körei sugarainak képlete 57
9. § Szabályos sokszögek szerkesztése 63
10. § A körvonal hossza. A körív hossza 67
11. § A körlap és részeinek területe 74

3. fejezet **DESCARTES-FÉLE KOORDINÁTÁK A SÍKON**



12. § Descartes-féle koordináták a síkon 84
13. § A szakasz felezőpontjának a koordinátái 90
14. § A görbe egyenlete. A körvonal egyenlete 95
15. § Az egyenes egyenlete 100
16. § A koordináta-módszer 105

4. fejezet **GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK**



17. § Egybevágósági transzformáció 114
18. § Középpontos és tengelyes szimmetria 118
19. § Elforgatás 126
20. § Párhuzamos eltolás 131
21. § Hasonlósági transzformáció. Homotécia 136

5. fejezet **SÍKBELI VEKTOROK**



22. § A vektor fogalma 148
23. § Műveletek vektorokkal 154
24. § A vektor koordinátái 163
25. § A vektorok skaláris szorzata 168
26. § A vektormódszer 174

6. fejezet **A TÉRMÉRTAN ALAPJAI**



27. § Az egyenesek és a síkok kölcsönös helyzete a térben 184
28. § Poliéderek (soklapok) 191
29. § Forgástestek 199

A TANULTAK ISMÉTLÉSE 208
FELELETEK ÉS ÚTMUTATÁSOK 219
TÁRGYMUTATÓ 238

Kedves diákok!

A 8. osztályban megismertétek a négyszög és a háromszög tulajdonságait és sajátosságait, megtanultátok kiszámítani a háromszög és a négyszög területét, új módszereket ismertetek meg a derékszögű háromszög oldalainak és szögeinek kiszámítására, és megtanultátok alkalmazni ezeket a számításokat a gyakorlatban.

Az idén megtudjátok, hogyan kell megoldani a háromszögeket a szinusz- és a koszinusztétel segítségével, illetve a háromszög területének a képletével. Hallani fogtok a szabályos sokszögekről, a mértani transzformációkról, a vektorokról a síkon, és alapismereteket szereztek a térmértanról.

Nézzük, hogyan lehet eredményesen használni a tankönyvet mértantanulás közben! A tananyag hat fejezetre oszlik, a fejezetek pedig paragrafusokra. A paragrafusokban elméleti anyagot és feladatokat találtok. Az elméleti rész tanulásakor fordítsatok különös figyelmet a keretbe foglalt szövegre. Ez tartalmazza a mértani alakzatokra vonatkozó legfontosabb meghatározásokat és tulajdonságokat, amelyeket fontos megértenetek és megjegyeznetek, hogy majd sikeresen alkalmazhassátok őket a feladatok megoldásánál. Az egyéb lényeges tudnivalókat **kövér** betűtípussal szedtük. *Dőlttel* a szakkifejezéseket (tudományos megnevezéseket) emeltük ki.

Ha ellenőrizni szeretnétek, hogyan tanultátok meg a paragrafust, vagy meg szeretnétek ismételni a leckét, akkor ebben a „Fontosabb tudnivalók" rovat lehet a segítségetekre, amit a paragrafus végén találhattok. A fejezetek végén viszont ellenőrző kérdések és szöveges feladatok vannak, amelyek támpontot adhatnak ahhoz, milyen alaposan sajátítottátok el az adott témát.

Olvassátok el a feladatok megoldását megkönnyítő útmutatásokat is, amit a típusfeladatok tartalmaznak.

A tankönyvben található feladatok négy különböző nehézségi fokra oszthatók. Az alapszinthez tartoznak azok, ame-

lyeket (') jellel láttunk el. Ezek olyan felkészítő jellegű feladványok, amelyeket elsősorban azoknak ajánljuk, akik nem elég alaposan tanulták meg az elméleti anyagot. A (°) körrel ellátott sorszámok a közepes nehézségű feladatok mellett állnak. Ezeket mindenkinek meg kell oldania ahhoz, hogy a továbbiakban is eredményesen tanulhassa a mértant. Az általános szintű feladatok sorszámait jelöletlenül hagytuk. Ha megoldjátok ezeket, akkor biztosak lehettek abban, hogy megfelelő szintű tudással rendelkeztek. Csillaggal (*) jelöltük a nehéz feladatokat. Amennyiben a nehéz feladatokat nem tudjátok első nekifutásra megoldani, ne keseredjetek el, legyetek türelmesek és kitartóak. A megoldás öröme mindent kárpótol majd.

A kövér betűvel leírt feladatok megoldását jól jegyezzétek meg! Ezek olyan mértani alapigazságok, amiket sikeresen alkalmazhattok más feladatoknál is.

A „Bővebben" rovat az ismeretek elmélyítésére szolgál.

A tankönyvben különleges rajzokat (piktogramokat) is találtok. A piktogramok megkönnyítik a tájékozódást a tananyagban.

 **Olvasd el!**

 **Hogy írjuk le?**

 **Jól gondold meg!**

 **Mi a teendő?**

 **Jegyezd meg!**

 **Típusfeladat**

Sok sikert kívánunk az új ismeretek megszerzésében, leljetek örömöt a tanulásban!

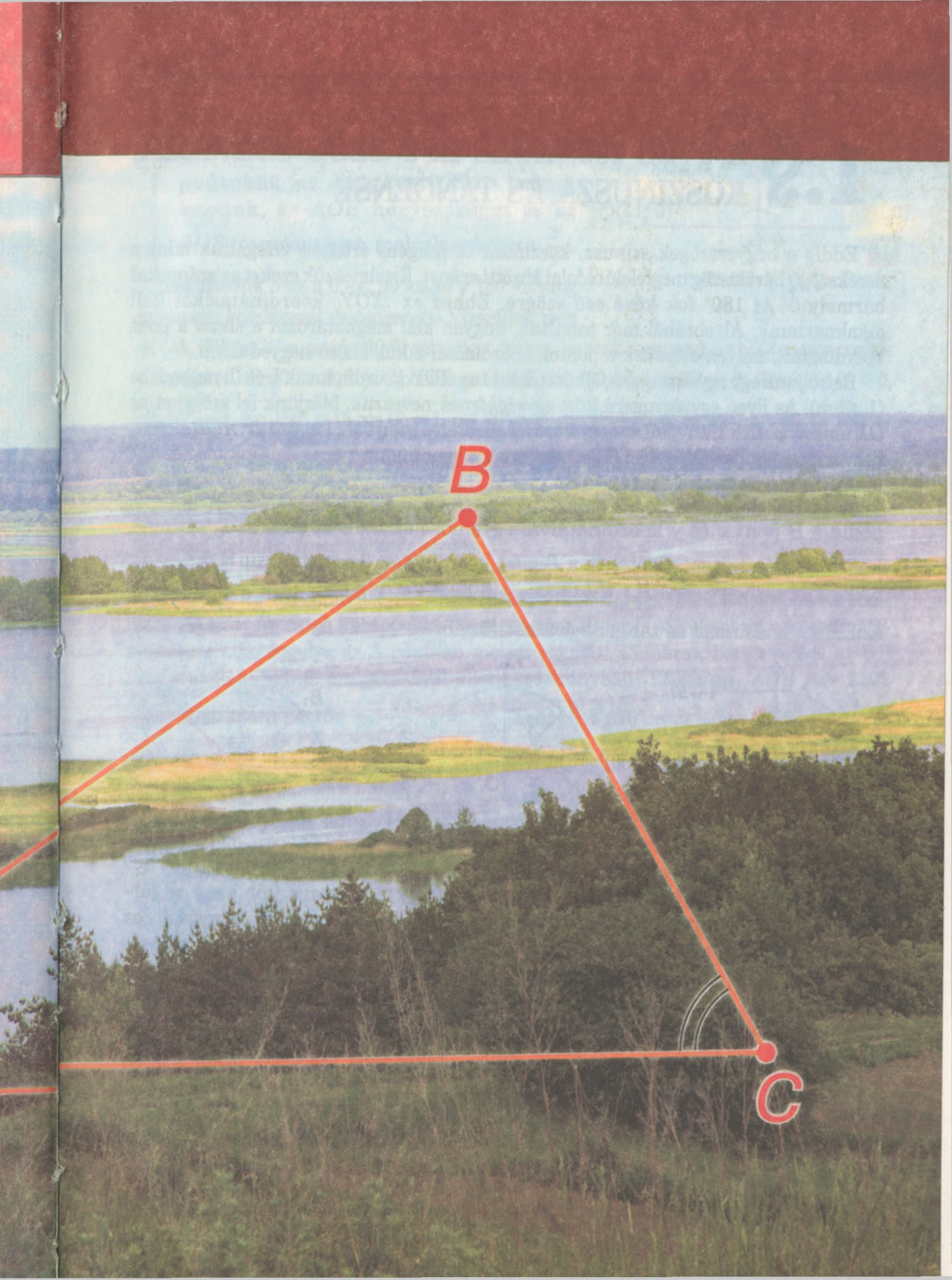
1. FEJEZET

ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

Ebben a fejezetben megtudod:

- hogyan kell meghatározni bármely 0° és 180° fok közé eső szög szinusz, koszinusz, tangens értékét, valamint milyen összefüggés van a háromszög oldalai és szögei között;
- hogyan kell meghatározni a háromszög ismeretlen oldalainak és szögeinek algoritmusát ismert szögei és oldalai alapján;
- hogyan kell alkalmazni az ismert algoritmust a feladatok megoldásánál;
- milyen új képletek léteznek a háromszög területének a meghatározására, és hogyan kell azokat alkalmazni a feladatok megoldásánál



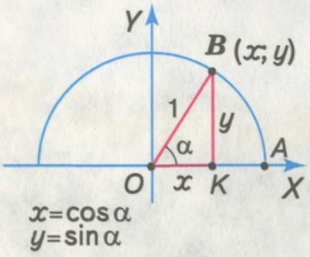

B
C

1. § A 0° ÉS 180° KÖZÉ ESŐ SZÖG SZINUSZA, KOSZINUSZA ÉS TANGENSE

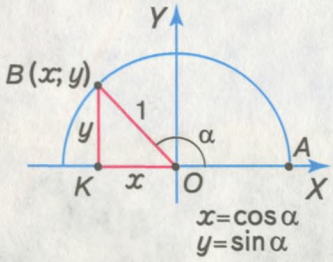
Eddig a hegyesszögek szinusz, koszinusz és tangens értékeit vizsgáltuk mint a derékszögű háromszög megfelelő oldalai közötti arányt. Értelmezzük ezeket az arányokat bármely 0° és 180° fok közé eső szögre. Ehhez az XOY koordinátasíkot kell alkalmaznunk. Algebrából már tanultad, hogyan kell meghatározni a síkon a pont koordinátáit, milyen előjelűek a pontok koordinátái a különböző negyedekben.

Rajzoljunk egy egységsugarú félkört ($R = 1$) az XOY koordinátasík I. és II. negyedébe (1. ábra). Az ilyen egységsugarú kört *egységkörnek* nevezzük. Mérjünk fel szögeket az OX tengely pozitív irányától az óra járásával ellentétes irányban. Legyen az $AOB\angle = \alpha$ hegyesszög, ahol az OB sugár B végpontjának a koordinátái x és y. Húzzuk meg az OX tengelyre merőleges BK szakaszt: $BK \perp OX$ (1. ábra)!

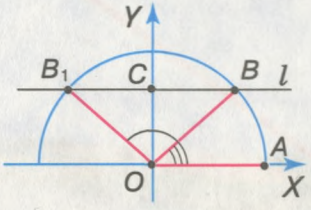
Az OBK derékszögű háromszög OB átfogója 1 egység, $OB = 1$, befogói pedig a B pont x és y koordinátáival egyenlő. Fejezzük ki az α szög szinusz, koszinusz és tangens értékét a B pont koordinátáin keresztül: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$ és $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$! Ezekkel a képletekkel kifejezhetjük a tompaszög szinusz, koszinusz és tangens értékét (2. ábra).



1. ábra



2. ábra



3. ábra

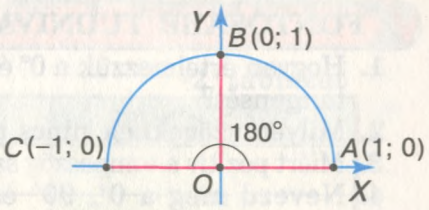
Összességében megállapíthatjuk, hogy **sin α az egységsugarú kör azon sugár-végpontjának az ordinátája, amely α szöget zár be az OX tengely pozitív irányával; cos α ennek a végpontnak az abszcisszája, a tg α pedig az ordináta és az abszcissza aránya.**

? Miért pozitív a tompaszög szinusz értéke és negatív a koszinusz, illetve a tangens értéke? Azért, mert a második negyedben a pontok ordinátája pozitív, az abszcisszája pedig negatív.

Gyakorlat. Egységsugarú félkör segítségével szerkessz olyan szöget, melynek szinusz értéke $\frac{2}{3}$!

Megoldás. Rajzoljunk origó középpontú egységsugarú félkört (3. ábra)! Jelöljük meg az OY tengelyen a $C(0; \frac{2}{3})$ koordinátájú pontot! Húzzunk a C ponton keresztül az OX tengellyel párhuzamos l egyenest! Ez az egyenes egy B és egy

B_1 pontban metszi a körvonalat, melyek koordinátája $\frac{2}{3}$. Kössük össze a B és B_1 pontokat az origóval! Két szöget kapunk, az AOB hegyesszöget és az AOB_1 tompaszöget, melyek szinusza $\frac{2}{3}$.



4. ábra

Határozzuk meg a 0°-os, 90°-os és a 180°-os szög szinuszát, koszinuszát és tangensét! Vizsgáljuk meg az OA, OB és OC sugarakat! Milyen szöget zárnak be ezek a sugarak az OX tengely pozitív irányával (4. ábra)? Az A, B és C pont koordinátái: $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ és $C(-1; 0)$. Tehát $\sin 0° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\sin 180° = 0$; $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = -1$; $\operatorname{tg} 0° = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg} 180° = \frac{0}{-1} = 0$. 90°-os szögnek nincs tangens értéke, mivel nullával osztani nem lehet.

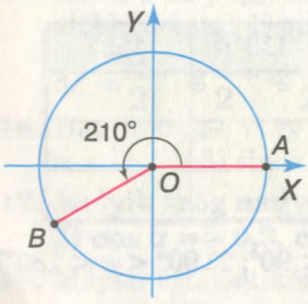
BŐVEBBEN

Felmerülhetett benned néhány kérdés.

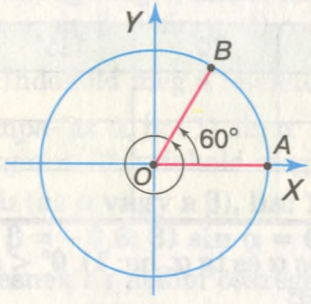
1. *Van-e a 180° és 360° közé eső szögeknek szinusza, koszinusza és tangense?* Van. A szöget úgy is értelmezhetjük, mint a körvonal sugarának a középpont körüli elforgatását. Az origó középpontú egységsugarú ($R = 1$) körvonal és a koordinátarendszer OX tengelye az A pontban metszi egymást (5. ábra). Forgassuk el az OB sugarat 210°-kal az óra járásával ellenkező irányban! Ekkor az $AOB\angle = 210°$. A B pont koordinátái $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Tehát $\sin 210° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\operatorname{tg} 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ha az OB sugár egy teljes kört ír le, akkor az ilyen forgásszög 360°-os.

2. *Lehet-e egy szög 360°-nál nagyobb?* Gondolkodj! Az OB sugár 60°-os szöget zár be az OX tengellyel (6. ábra). Ha az OB sugár még egy teljes kört ír le az óramutató járásával ellentétes irányban, akkor $AOB\angle = 60° + 360° = 420°$.

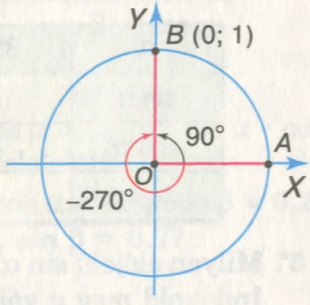
3. *Lehet-e egy szög fokmértéke negatív?* A szög fokmértéke akkor negatív, ha a sugarat az óra járásával megegyező irányban forgatjuk. A 7. ábrán két közös kezdőpontú és közös OA oldalú szög látható. Az egyik –270°-os, a másik 90°-os.



5. ábra



6. ábra

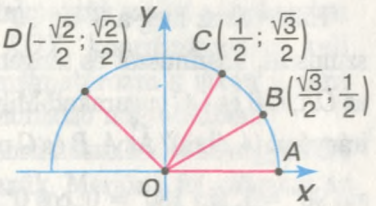


7. ábra

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Hogyan értelmezzük a 0° és 180° közé eső szögek szinuszát, koszinuszát és tangensét?
2. Milyen szögeknek nincs tangense és miért?
3. Miért pozitív a tompaszög szinusza és negatív a koszinusza, illetve a tangense?
4. Nevezd meg a 0°, 90° és 180°-os szögek szinuszát, koszinuszát és tangensét!

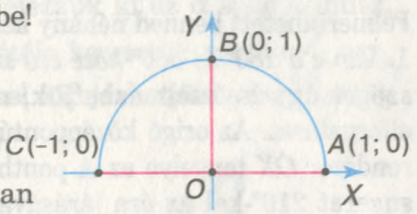
OLDD MEG A FELADATOKAT!



8. ábra

1'. A 8. ábrán egy egységsugarú körvonal fele látható.
1) Nevezd meg a *B*, *C*, *D* pont koordinátáit!
2) Nevezd meg az *OB*, *OC* és *OD* sugaraknak az *OX* tengely pozitív irányával bezárt szögeit!
3) Határozd meg ezen szögek szinusz, koszinusz és tangens értékét!

2'. 1) Nevezd meg a 9. ábrán látható félkör azon sugarát, amely az *OX* tengely pozitív irányával 0°-os, 90°-os, 180°-os szöget zár be!
2) Add meg az alábbi értékeket:
a) sin 0°, sin 90°, sin 180°;
b) cos 0°, cos 90°, cos 180°;
c) tg 0°, tg 180°.



9. ábra

3'. 1) Lehet-e az egységsugarú körnek olyan pontja, melynek abszcisszája 2; 0,5; –1?
2) Lehet-e az egységsugarú körnek olyan pontja, melynek ordinátája 0,8; 1,4; 1?

4°. Rajzolj koordináta-rendszert! Az egység hossza 5 cm! Rajzolj az I. és a II. negyedbe origó középpontú egységsugarú félkört!
1) Szögmérővel jelöld meg a körvonalon az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontokat úgy, hogy az *OA*, *OB*, *OC*, *OD* és *OE* sugarak 35°, 70°, 115°, 130° és 165°-os szöget zárjanak be az *OX* tengely pozitív irányával!
2) Határozd meg az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok koordinátáit!
3) Határozd meg a 35°, 70°, 115°, 130° és 165°-os szögek szinuszát, koszinuszát és tangensét! Töltsd ki az 1. táblázatot!

1. táblázat

α	35°	70°	115°	130°	165°
sin α					
cos α					
tg α					

5°. Milyen előjelű sin α, cos α és tg α, ha: 1) $0° < \alpha < 90°$; 2) $90° < \alpha < 180°$? Indokold meg a választ!

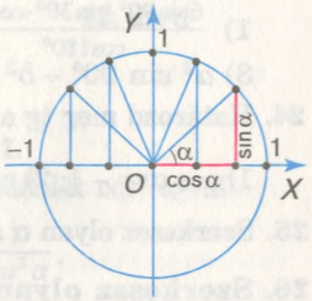
6°. Rajzold át a füzetedbe a 2. táblázatot! Tegyél „+” jelet, ha sin a, cos a vagy tg a pozitív és „–” jelet, ha negatív!

2. táblázat

α	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$
$\sin \alpha$		
$\cos \alpha$		
$\operatorname{tg} \alpha$		

7°. **Hegyesszögű vagy tompaszögű az a szög, melynek: 1) a koszinusza negatív; 2) a koszinusza pozitív; 3) a tangense negatív? Indokold meg a válaszodat!**

8°. Igazold a 10. ábra alapján az alábbi állításokat:
1) ha az a szög fokmértéke 0°-tól 90°-ig növekszik, akkor a megfelelő szinusz értékek 0-tól 1-ig növekednek, a koszinusz értékek pedig 1-től 0-ig csökkennek;
2) ha az a szög fokmértéke 90°-tól 180°-ig növekszik, akkor a megfelelő szinusz értékek 1-től 0-ig, a koszinusz értékek pedig 0-tól –1-ig csökkennek.



10. ábra

9°. Számítsd ki:
1) $3 \cos 0° - 2 \sin 90°$; 2) $4 \sin 0° - 5 \cos 180°$;
3) $6 \sin 90° - 3 \operatorname{tg} 180°$; 4) $8 \sin 180° + 2 \cos 90°$!

10°. Határozd meg sin a-át, ha:
1) $\cos \alpha = -1$; 2) $\cos \alpha = 0$; 3) $\cos \alpha = 1$!

11°. Határozd meg cos α-át, ha: 1) $\sin \alpha = 1$; 2) $\sin \alpha = 0$!

12. **Lehet-e egy szög szinusza vagy koszinusza: 1) – 0,6; 2) 0,8; 3) 3? Indokold meg a válaszodat!**

13. **Lehet-e egy szög tangense: 1) 8; 2) 0,01; 3) 200? Indokold meg a válaszodat!**

14. Az a szög a háromszög egyik szöge. A sin a, cos a és tg a értékek közül melyik lehet negatív és milyen esetben?

15. Ha α, β és γ egy háromszög szögei, akkor milyen előjelű lehet az alábbi összeg: 1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$; 2) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$;
3) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$? Indokold meg a feleletet!

16. Hegyesszög-e vagy tompa- az α, ha: 1) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$; 2) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$; 3) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0$? Indokold meg a feleletet!

17. **Melyik szög nagyobb (az α vagy a β), ha: 1) $\cos \alpha = 0,8$, $\cos \beta = 0,2$; 2) $\cos \alpha = -0,3$, $\cos \beta = -0,6$; 3) $\sin \alpha = 0,4$, $\sin \beta = 0,7$?**

18. Milyen értékek közé esnek az alábbi összegek:
1) $\sin \alpha + 1$; 2) $\cos \alpha + 0,5$; 3) $\sin \alpha + 0,2$?

19. Rendezd növekvő sorrendbe:
1) sin 66°, sin 20°, sin 75°, sin 15°, sin 5°;
2) cos 9°, cos 80°, cos 46°, cos 75°, cos 16°!

20. Rendezd csökkenő sorrendbe:
1) sin 176°, sin 92°, sin 101°, sin 125°, sin 150°;
2) cos 97°, cos 175°, cos 165°, cos 102°, cos 91°!

21. Határozd meg az alábbi különbségek előjelét:
1) sin 145° – sin 169°; 2) cos 178° – cos 153°; 3) tg 163° – tg 121°!

22. Milyen előjelűek a következő szorzatok:
1) cos 10° · sin 120° · tg 105°; 2) sin 40° · cos 153° · tg 15°;
3) tg 110° · tg 160° · sin 150°?

23. Számítsd ki:
1) $\frac{6\sin 90^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 0^\circ}{\cos 180^\circ}$; 2) $8\cos 60^\circ + 2\sin 90^\circ - 10\cos 180^\circ$;
3) $a^2 \sin 90^\circ - b^2 \cos 0^\circ - c^2 \cos 180^\circ$, ha $a = 4, b = 3, c = -5$.

24. Határozd meg tg a értékét, ha:
1) $\cos\alpha = -1$; 2) $\sin\alpha = 1$; 3) $\sin a = \frac{3}{5}$, $\cos a = -\frac{4}{5}$!

25. Szerkessz olyan α szöget, amelyre teljesül: 1) $\sin\alpha = 0{,}4$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$!

26. Szerkessz olyan α szöget, amelyre teljesül: 1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}5$! Hány megoldás létezik?

27*. Igazold, hogy ha $\sin\alpha = \sin\beta$, akkor $\alpha = \beta$ vagy $\alpha = 180^\circ - \beta$!

28*. Létezik-e olyan a szög, melyre teljesül: 1) $\sin\alpha = \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha = -\cos\alpha$?

29*. Mutasd meg az egységsugarú körön, hogy:
1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; 2) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$!

30*. Bizonyítsd be a $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \le 1$ egyenlőtlenséget!

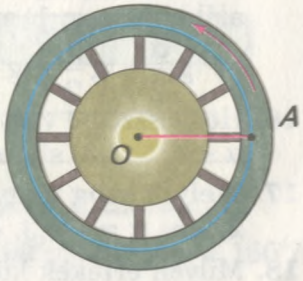
31*. Melyik lehet igaz az alábbi egyenlőségek közül:
1) $\cos\alpha = m + \frac{1}{m}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{mn}}{m+n}$; 3) $\cos\alpha = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$?

32*. Az *ABC* derékszögű háromszög *AB* átfogója 1 egység hosszú. A *C* csúcsból *CD* magasságot húztak. Határozd meg az *AC*, *BC*, *AD*, *BD* és *CD* szakaszokat, ha $BAC\angle = \alpha$!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

33. Hány fokos szöget ír le az óra percmutatója 25 perc alatt?

34*. A dízelmotor lendkereke egy perc alatt 40 fordulatot tesz meg. Mekkora szöget ír le az *OA* küllő (11. ábra) 0,5 másodperc alatt?

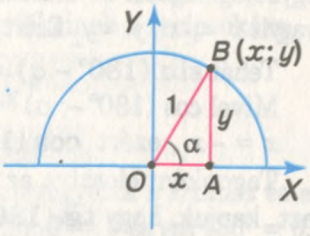


11. ábra

2. § TRIGONOMETRIKUS ALAPAZONOSSÁGOK

Már tudod, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $y = \sin\alpha$ és $x = \cos\alpha$.

Tehát: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



12. ábra

Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat is:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Jelöljük az egységsugarú félkör B pontjának koordinátáit x-szel és y-nal (12. ábra)! Az AOB derékszögű háromszögből: $y^2 + x^2 = 1$.

Mivel $y = \sin\alpha$ és $x = \cos\alpha$, ezért $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Osszuk el a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosság mindkét oldalát $\cos^2\alpha$-val!

Ebből adódik, hogy $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vagyis $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Feladat. Határozzuk meg $\cos\alpha$ és $\operatorname{tg}\alpha$ értékét, ha $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ és $90° < \alpha < 180°$!

Megoldás. Mivel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ezért $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. A $\cos\alpha$ negatív előjelű, mivel α tompaszög, és a tompaszögek koszinusza negatív.

Ebből következik, hogy $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{12}.$$

1. Ahhoz, hogy a $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ és $\operatorname{tg}\alpha$ értékek egyikének ismeretében ki tudjuk számítani a másik két értéket, az alábbi azonosságokat kellalkalmazni:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

2. Ha az α szög tompa, akkor a $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ képlet „–” előjelű.

Igazoljuk azokat az azonosságokat, melyekkel a tompaszögek szinusz, koszinusz és tangens értékei kifejezhetők a hegyesszögek szinusz, koszinusz és tangens értékeivel!

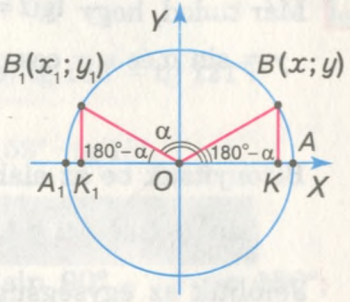
Figyeld meg a 13. ábrát!

Mivel az $AOB_1\angle = \alpha$ szög tompaszög, ezért az $A_1OB_1\angle = 180° - \alpha$ szög hegyes. Mérjük fel az OX tengely pozitív irányától az $AOB\angle = A_1OB_1\angle = 180° - \alpha$ szöget! Húzzuk meg az OX tengelyre merőleges BK és B_1K_1 szakaszokat: $BK \perp OX$, $B_1K_1 \perp OX$! Az OBK és OB_1K_1 derékszögű háromszögek egybevágók átfogójuk és hegyesszögük alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy a megfelelő befogóik egyenlők: $OK = OK_1$, $BK = B_1K_1$, vagyis $x = -x_1$, $y = y_1$. Ezért $\sin(180° - \alpha) = y$, $\sin\alpha = y_1$.

Tehát **$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.** (1)

Mivel $\cos(180° - \alpha) = x$, $\cos\alpha = x_1$, és $x = -x_1$, ezért **$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.** (2)

Tagonként elosztva az (1) és (2) azonosságokat, azt kapjuk, hogy **$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.** (3)



13. ábra

Figyeld meg a következő példákat!

$\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg} 150° = -\operatorname{tg}(180° - 150°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a tompaszög szinusz, koszinusz és tangens értékeit, az alábbi azonosságokkal vissza kell vezetni azokat a hegyesszög szinuszára, koszinuszára és tangensére: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Hogyan lehet kifejezni egy 45°-os szögnél nagyobb hegyesszög szinusz és koszinusz értékét egy 45°-os szögnél kisebb szög szinuszával és koszinuszával? Alkalmazzuk a már ismert azonosságokat: **$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.**

Például: $\sin 80° = \cos(90° - 80°) = \cos 10°$; $\cos 75° = \sin(90° - 75°) = \sin 15°$.

Az alapazonosságokat a 3. táblázatban foglaltuk össze.

3. táblázat

Azonosság	Alkalmazásuk
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,	Az egyik trigonometrikus érték ismeretében meghatározzuk a másik két értéket.
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	Egyszerűsítjük a kifejezéseket.
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	Meghatározzuk a tompaszög szinusz, koszinusz és tangens értékét. Egyszerűsítjük a kifejezéseket.
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	A szinusz és koszinusz értékek táblázatának összeállítása: a 0° és 45° közé eső szögek szinusz értéke a 90° és 45° közé eső szögek koszinusz értékével egyenlő (egy szög szinusza egyenlő pótszögének a koszinuszával). Egyszerűsítjük a kifejezéseket.

BŐVEBBEN

Az a szög szinuszán, koszinuszán és tangensén kívül létezik még a szög kotangense is. Jelölése: *ctg* α. Ez a cos α és a sin α aránya, vagyis $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. ctg 0° és ctg 180° nem létezik, mivel nullával osztani nem lehet.

Külön jelölést vezettek be az a szög szinusz és koszinusz értékeinek a reciprokára.

Koszekánsnak nevezzük a sin a reciprokát: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$,

a *szekáns* pedig a cos α reciprok értéke: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Könnyen belátható, hogy a koszekáns és a szekáns előjele megegyezik a szinusz és a koszinusz előjelével. cosec 0° és cosec 180° nem létezik, mivel sin 0° = 0 és sin 180° = 0. Ugyanígy sec 90° sem létezik, mivel cos 90° = 0.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Igazold a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot!
2. Bizonyítsd be, hogy bármely 0° és 180° közé eső szögre igaz, hogy sin (180° – α) = = sin α, cos (180° – α) = – cos α és tg (180° – α) = – tg α!
3. Magyarázd meg, hogyan lehet kifejezni egy 45°-os szögnél nagyobb hegyesszög szinuszát és koszinuszát egy 45°-os szögnél kisebb szög szinusz és koszinusz értékével!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

35'. Egyszerűsítsd:

1) a) $\sin^2 9° + \cos^2 9°$; b) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
   c) $1 - \sin^2\alpha$; d) $1 - \cos^2\alpha$;
2) a) sin (180° – α); b) cos (180° – α);
   c) tg (180° – α); d) cos (180° – α) + cos α;
3) a) sin (90° – α); b) cos (90° – α);
   c) cos (90° – α) – sin α; d) sin (90° – α) + cos α.

36°. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket: 1) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

2) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; 3) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$; 4) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha$.

37°. Igazold az alábbi azonosságokat:

1) $\operatorname{tg}\alpha \cos\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha$; 2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$;
3) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$; 4) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

38°. Fejezd ki a 110°-os, 125°-os, 150°-os, 165°-os és 176°-os szög szinuszát hegyesszög szinuszával!

39°. Fejezd ki a 105°-os, 120°-os, 122°-os, 145°-os és 160°-os szög koszinuszát hegyesszög koszinuszával!

40°. Határozd meg a 3 sin (180° – α) + 2 cos (180° – α) kifejezés értékét, ha:
1) sin α = 0,6; 2) sin α = 0,4; 3) sin α = 0,2.

41°. Határozd meg a következő szögek szinuszát, koszinuszát és tangensét: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°!

42°. Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $2 \sin 30° + \sqrt{3} \cos 150°$;
2) $\operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 120° \cdot \operatorname{tg} 150°$;
3) $2 \cos 120° + 2 \sin 150°$;
4) $\operatorname{tg} 135° \cdot \sin 135° \cdot \cos 135°$.

43°. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $3 \sin (180° - \alpha) - 2\sin (180° - \alpha)$;
2) $\operatorname{tg} (180° - \alpha) \cdot \sin (90° - \alpha)$;
3) $\sin (180° - \alpha) + \cos (90° - \alpha)$;
4) $\sin (90° - \alpha) + \cos (180° - \alpha)$.

44°. Igazold a következő azonosságokat:

1) $\cos (90° - \alpha) \cdot \sin (180° - \alpha) = \sin^2 \alpha$;
2) $\cos (180° - \alpha) \cdot \sin (90° - \alpha) = -\cos^2 \alpha$;
3) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha$;
4) $\dfrac{\cos(90° - \alpha) \cdot \cos\alpha}{\sin(90° - \alpha) \cdot \sin\alpha} = 1$!

45. Az α mely értékére nem teljesül a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ egyenlőség? Indokold meg a feleletet!

46. Egyszerűsítsd a kifejezéseket:

1) $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
2) $(1 + \sin \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \sin \alpha)$;
3) $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
4) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$;
5) $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;
6) $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (2\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1)$.

47. Igazold az azonosságokat:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$;
2) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$;
3) $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = 1$;
4) $(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.

48. Létezik-e olyan α szög, melyre teljesül:

1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ és $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$
2) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ és $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ és $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$?

49. Számítsd ki a $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin\alpha$ kifejezés értékét, ha:

1) $\sin \alpha = 0{,}5$;
2) $\sin \alpha = 0{,}1$;
3) $\sin \alpha = 0{,}2$!

50. Határozd meg $\cos \alpha$ és $\operatorname{tg} \alpha$ értékeket, ha:

1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ **és** $0° < \alpha < 90°$; **2)** $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ **és** $90° < \alpha < 180°$;

3) $\sin\alpha = 0{,}8$ **és** $0° < \alpha < 90°$!

51. Határozd meg $\sin \alpha$ és $\operatorname{tg} \alpha$ értékeket, ha:

1) $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$; **2)** $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; **3)** $\cos \alpha = -0{,}6$!

52. Határozd meg $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ értékeket, ha: 1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}4$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{11}{60}$!

53. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{2\cos(90°-\alpha)-2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 2) $\frac{2\sin^2(180°-\alpha)+2\cos(90°-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

3) $\frac{\sin^2(90°-\alpha)-\sin(180°-\alpha)\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$; 4) $\frac{\cos(180°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin(90°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°-\alpha)}$!

54. Igazold az alábbi azonosságokat:

1) $\frac{\sin(90°-\alpha)}{1-\sin\alpha}-\frac{\sin(90°-\alpha)}{1+\sin\alpha}=2tg\alpha$; 2) $\frac{1-\cos^2(90°-\alpha)}{\sin(180°-\alpha)\cos\alpha}\cdot tg\alpha=1$;

3) $\left(\frac{1}{\cos^2(90°-\alpha)}-1\right)\cdot\operatorname{tg}^2(180°-\alpha)=1$; 4) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2(180°-\alpha)=-1$!

55*. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

1) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 2) $\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha$;

3) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}$; 4) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}$!

56*. Számítsd ki a $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ kifejezés értékét, ha: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0$!

57*. Számítsd ki a $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ kifejezés értékét, ha: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$!

58*. Határozd meg a $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ értékét, ha: $\sin\alpha+\cos\alpha=m$!

59*. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2(180°-\alpha)\sin^2(90°-\alpha)$;

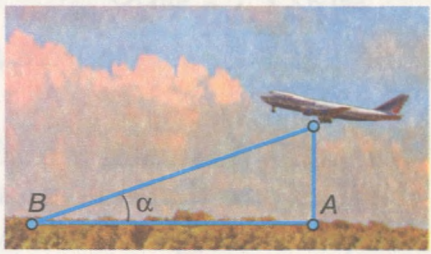
2) $\sin^2\alpha\cdot\sin^2(90°-\alpha)-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$;

3) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2(90°-\alpha)-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

60. Két egyenes útszakasz 47°-os szögben metszi egymást. Az egyik út mentén, a kereszteződéstől 6,5 km-re egy autóbuszmegálló van. Határozd meg a megálló és a másik út közötti legrövidebb távolságot!

61. Az A pont fölött 400 m-re lévő repülőgép megkezdi a leszállást (14. ábra). Hány fokos szög alatt érkezik a repülőgép a kifutópályára, ha a repülőtér 1,2 km-re van az A ponttól?



14. ábra

3.§ A SZINUSZTÉTEL

Már tudod, milyen összefüggés van a derékszögű háromszög oldalai és szögei között. Most megismerkedsz azzal, mi az összefüggés az általános háromszög oldalai és szögei között.

Jelöljük a háromszög oldalait a, b és c-vel, a velük szemben lévő szögeket megfelelően α, β és γ-val vagy $A\angle$, $B\angle$ és $C\angle$-gel!

Szinusztétel: A háromszög oldalai a velük szemben lévő szögek szinuszaival arányosak.

Adva van: $ABC\triangle$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Bizonyítsuk be, hogy: $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle} = \frac{c}{\sin C\angle}$!

Bizonyítás. Az ABC háromszög köré írjunk R sugarú körvonalat (15. ábra)! A háromszög egyik csúcsán keresztül, mondjuk, az A-n, húzzuk meg a körülírt körvonal AC_1 átmérőjét! Az ABC_1 háromszög derékszögű ($B\angle$ – derékszög, mint átmérőre támaszkodó kerületi szög), ezért

$c = 2R \cdot \sin C_1\angle$, vagy $\frac{c}{\sin C_1\angle} = 2R$.

Ha a $C\angle$ hegyesszög (15. ábra), akkor $C\angle = C_1\angle$ (mivel egy ívhez tartozó kerületi ívek) és $\sin C_1\angle = \sin C\angle$.

Ha a $C\angle$ tompaszög (16. ábra), akkor $C_1\angle$ hegyesszög és $C\angle + C_1\angle = 180°$.

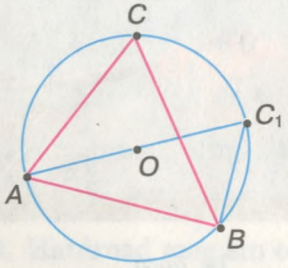
Ebből következik, hogy $C_1\angle = 180° - C\angle$. Tehát, $\sin C_1\angle = \sin(180° - C\angle) = \sin C\angle$.

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\frac{c}{\sin C\angle} = 2R$. (1)

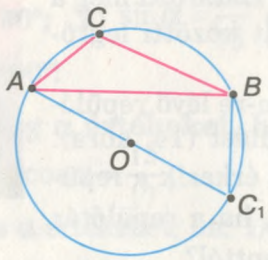
Ha a $C\angle$ derékszög (17. ábra), akkor $c = 2R$, $\sin C\angle = \sin 90° = 1$. Így is teljesül az (1) egyenlőség. Hasonló egyenlőségeket írhatunk le az A és B szögre is.

Tehát bármely ABC háromszögre érvényes, hogy

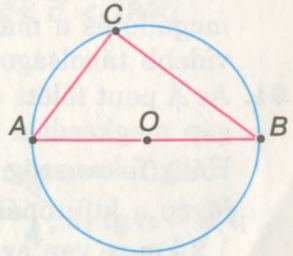
$\frac{a}{\sin A\angle} = 2R$, $\frac{b}{\sin B\angle} = 2R$, $\frac{c}{\sin C\angle} = 2R$, vagyis $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle} = \frac{c}{\sin C\angle}$.



15. ábra



16. ábra



17. ábra

1. következmény: **Bármely háromszögben az oldalak és a szemben lévő szögek szinuszainak aránya a köré írt körvonal kétszeresével egyenlő:**

$$\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle} = \frac{c}{\sin C\angle} = 2R.$$

? Meg lehet-e határozni a háromszög oldalát, ha ismerjük a köré írt körvonal sugarát és az oldallal szembeni szöget? Igen. A szinusztétel 1. következményéből fakadóan $\frac{a}{\sin A\angle} = 2R$. Következésképpen $a = 2R \sin A\angle$. Ugyanígy $b = 2R \sin B\angle$, $c = 2R \sin C\angle$.

2. következmény: **Bármely háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, illetve a nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.**

(Próbáld meg önállóan bebizonyítani! Vizsgáld meg a hegyesszögű és a tompaszögű háromszögek esetét!)

1. feladat. A háromszög egyik oldala $a = 6$, a mellette lévő szögek pedig $B\angle = 80°$ és $C\angle = 30°$. Határozzuk meg a háromszög b oldalát!

Megoldás. $A\angle = 180° - (30° + 80°) = 70°$.

A szinusztétel alapján $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle}$.

Ebből $b = \frac{a \cdot \sin B\angle}{\sin A\angle} = \frac{6 \cdot \sin 80°}{\sin 70°} \approx \frac{6 \cdot 0{,}9848}{0{,}9397} \approx 6{,}3.$

2. feladat. A háromszögben $a = 8$, $b = 4$ és az $A\angle = 48°$. Az $A\angle$ az a oldallal szemben lévő szög. Határozd meg a $B\angle$-et!

Megoldás. Írjuk le a szinusztételt, $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle}$! Fejezzük ki az aránypárból a $\sin B\angle$-et: $\sin B\angle = \frac{b \cdot \sin A\angle}{a} = \frac{4 \cdot \sin 48°}{8} \approx \frac{0{,}7431}{2} \approx 0{,}3716$!

Ennek a szinusz értéknek két szög felel meg: $22°$ és $180° - 22° = 158°$.

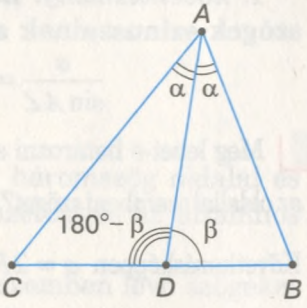
Mivel $a > b$, ezért a második következmény alapján $A\angle > B\angle$. Az $A\angle$ hegyesszög, ezért a $B\angle$ is hegyesszög, tehát $B\angle \approx 22°$.

A szinusztétellel meg lehet határozni a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha ismerjük az egyik oldalt és a mellette lévő két szöget (1. feladat), vagy két oldalt és az egyik oldallal szemben lévő szöget (2. feladat).

BŐVEBBEN

Oldd meg az alábbi feladatot!

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezője a szöget bezáró oldalak arányában osztja a harmadik oldalt.



18. ábra

Megoldás. Használjuk a 18. ábra jelöléseit! Az ABC háromszögben AD szögfelező, ezért $CAD\angle = BAD\angle = \alpha$ és $ADB\angle = \beta$, tehát $ADC\angle = 180° - \beta$. Alkalmazzuk az ABD és ACD háromszögekre a szinusztételt:

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}, \qquad (1)$$

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180° - \beta)}.$$

Mivel $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$, ezért

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}. \qquad (2)$$

Osszuk el az (1) egyenlőséget a (2) egyenlőséggel: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$!

Ezt az állítást kellett igazolni.

Elemezd még egyszer a megoldást! Láthatod, hogy segédjelöléseket alkalmaztunk. Az a és b szög nem szerepelt a feladat adatai között. A szinusztétel alapján leírtuk az (1) és (2) egyenlőségeket. Majd a két egyenlőség megfelelő oldalait elosztottuk egymással, így kiküszöböltük a bevezetett szögeket és megkaptuk a keresett aránypárt. Ezt a módszert *a segédszögek bevezetésének* nevezzük.

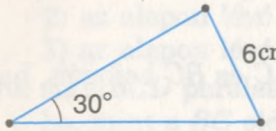
FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a szinusztételt!
2. Hogyan határozható meg a háromszög oldala a háromszög köré írt körvonal sugara és az oldallal szemben lévő szög alapján?
3. Fogalmazd meg a háromszög szögei és a szemben lévő szögek közötti összefüggést!
4. Fogalmazd meg azt a két alapfeladatot, melyek megoldására alkalmazható a szinusztétel!

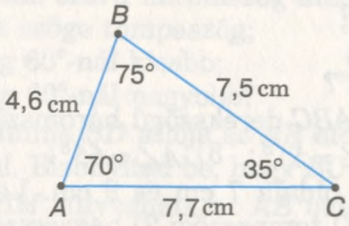
OLDD MEG A FELADATOKAT!

62'. Melyik helyes az alábbi kettősegyenlőségek közül:

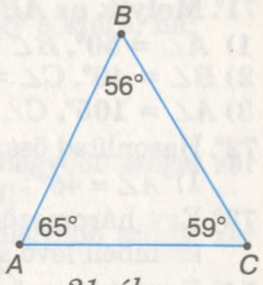
1) $\frac{a}{\sin B\angle} = \frac{b}{\sin A\angle} = \frac{c}{\sin C\angle}$; 2) $\frac{a}{A\angle} = \frac{b}{B\angle} = \frac{c}{C\angle}$; 3) $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle} = \frac{c}{\sin C\angle}$?



19. ábra



20. ábra

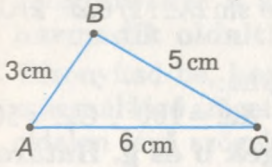


21. ábra

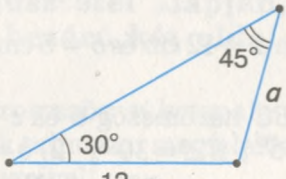
63'. A 19. ábra alapján:
1) írd le a háromszög oldalának és a szemben lévő szög szinuszának az arányát;
2) határozd meg ezt az arányt!

64'. A 20. ábra alapján:
1) írd le a háromszög minden oldalának és a szemben lévő szög szinuszának az arányát;
2) határozd meg a szögek szinuszait;
3) határozd meg mindegyik esetben ezt az arányt, vond le a következtetéseket!

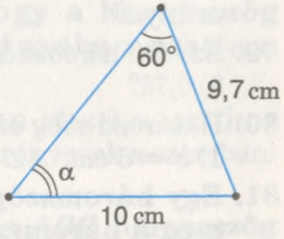
65'. Melyik az *ABC* háromszög (21. ábra) legrövidebb és leghosszabb oldala?



23. ábra



24. ábra



25. ábra

66'. Melyik az *ABC* háromszög (22. ábra) legnagyobb és legkisebb szöge?

67°. Számítsd ki a rajzok adatai alapján:
1) a háromszög a oldalát (23. ábra); 2) az a szöget (24. ábra)!

68°. Határozd meg az *ABC* háromszög *AC* oldalát, ha:
1) $c = 4$ cm, $B\angle = 45°$, $C\angle = 30°$;
2) $a = 6$ cm, $A\angle = 60°$, $B\angle = 45°$;
3) $c = 4$ cm, $A\angle = 65°$, $B\angle = 75°$!

69°. Határozd meg az *ABC* háromszög *A* szögét, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $B\angle = 60°$;
2) $c = 8$ cm, $a = 5$ cm, $C\angle = 30°$;
3) $b = 6$ cm, $a = 4$ cm, $B\angle = 45°$!

70°. Melyik az *ABC* háromszög legnagyobb és legkisebb szöge, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm;
2) $a = b = c$;
3) $a > b > c$?

71°. Melyik az *ABC* háromszög legnagyobb és legkisebb oldala, ha:
1) $A\angle = 50°, B\angle = 20°$;
2) $B\angle = 40°, C\angle = 85°$;
3) $A\angle = 105°, C\angle = 32°$?

72°. Hasonlítsd össze az *ABC* derékszögű háromszög *AC* és *BC* befogóit, ha:
1) $A\angle = 46°$; 2) $B\angle = 51°$; 3) $A\angle = 65°$!

73°. Egy háromszög két oldala 7 cm és 9 cm. Lehet-e a 7 cm-es oldallal szemben lévő szög: 1) tompaszög; 2) hegyesszög; 3) derékszög?

74°. Egy háromszög oldalainak hossza 4 cm, 5 cm és 6 cm. Lehet-e a 4 cm-es oldallal szemben lévő szög: 1) 60°-osnál nagyobb; 2) 60°-os; 3) 60°-osnál kisebb?

75°. Az *ABC* háromszög legkisebb oldala a *BC* oldal. Lehet-e az *A* szög fokmértéke: 1) 61°; 2) 60°; 3) 59°?

76°. Határozd meg a háromszög köré írt körvonalnak a sugarát, ha a háromszög 3 cm-es oldalával szembeni szög: 1) 120°; 2) 30°; 3) 135°!

77°. Egy háromszög köré írt körvonal sugara 8 cm. Határozd meg a háromszög azon oldalának a hosszát, amely a: 1) 150°; 2) 45°; 3) 60°-os szöggel szemben van!

78. Egy háromszög oldalainak az aránya 1 : 2 : 3. Mekkora az oldalak aránya?

79. Az *ABC* háromszögben $a = 12$ cm és $b = 5$ cm. Lehet-e $\sin B\angle$: 1) 0,25; 2) 0,5; 3) 0,75?

80. Határozd meg az *ABC* háromszög *a* és *c* oldalát, ha:
1) $b = 5$ cm, $A\angle = 45°$, $B\angle = 30°$; 2) $b = 1$ cm, $A\angle = 100°$, $C\angle = 50°$!

81. Egy háromszögben az *a* oldal melletti szögek b és g. Határozd meg a háromszög másik két oldalát!

82. Határozd meg az *ABC* háromszög *B* és *C* szögét, ha:
1) $c = 20$ cm, $a = 40$ cm, $A\angle = 30°$; 2) $c = 30$ cm, $a = 40$ cm, $A\angle = 45°$!

83. Az *ABCD* paralelogrammában $AD = 8$ cm, $BD = 4$ cm és $A\angle = 22°$. Határozd meg a: 1) $BDC\angle$-et; 2) $DBC\angle$-et!

84. Egy paralelogramma *d* átlója egyik szögét a és b szögre osztja. Határozd meg a paralelogramma oldalait!

85. Határozd meg az *ABC* háromszög oldalait, ha $A\angle = 45°$, $C\angle = 30°$ és az *AD* magasság 3 cm!

86. Határozd meg az *ABC* háromszög *b* és *c* oldalát, ha:
1) $a = 8$ cm, $A\angle : B\angle : C\angle = 4 : 2 : 3$;
2) $a = 6$ cm, $A\angle : B\angle : C\angle = 3 : 5 : 4$!

87. Egy egyenlő szárú háromszög alapja *a*, a hozzá tartozó szögek a. Határozd meg az alapon lévő szög szögfelezőjét, ha:
1) $a = 6$ cm és $a = 30°$; 2) $a = 7$ cm és $a = 20°$!

88. Az *ABC* háromszögben $A\angle = 45°$ és $C\angle = 30°$. Határozd meg az *a* és *c* oldalt, ha: 1) $a - c = 5$; 2) $a + c = 4$!

89. Mi hosszabb, az egyenlő szárú háromszög alapja vagy a szára, ha:
1) a háromszög egyik szöge tompaszög;
2) az alapon lévő szög 60°-nál kisebb;
3) az alapon lévő szög 60°-nál nagyobb?

90. Az $ABCD$ paralelogramma BD átlója az AB oldallal nagyobb szöget zár be, mint a BC oldallal. Bizonyítsd be, hogy $BC > AB$!

91. Az ABC háromszög BM súlyvonala az AB oldallal nagyobb szöget zár be, mint a BC oldallal. Bizonyítsd be, hogy $BC > AB$!

92. Az ABC derékszögű háromszögben a derékszög C csúcsából meghúzták a CM súlyvonalat. Az $ACM\angle > 45°$. Melyik befogó hosszabb, az AC vagy a BC?

93. Egy egyenlőszárú háromszög alapja a, a szára b. Számítsd ki a háromszög köré írt körvonal R sugarát, ha: 1) $a = 24$ cm, $b = 13$ cm; 2) $a = 12$ cm, $b = 10$ cm!

94. Egy húrtrapéz átlója 4 cm. Határozd meg a trapéz köré írt körvonal sugarát, ha az egyik szöge: 1) 135°; 2) 30°; 3) 120°!

95*. Egy egyenlőszárú trapéz kisebbik alapja a hosszú szárával egyenlő. Hosszabbik alapja 10 cm, egyik szöge 70°. Számítsd ki a trapéz kerületét!

96*. Határozd meg annak a trapéznak a területét, melynek alapjai a és b $(a > b)$, az a oldal melletti szögei pedig α és β !

97*. Bizonyítsd be a szinusztétel alapján, hogy a háromszög szögfelezője a szöget bezáró két oldal arányában osztja a harmadik oldalt!

98*. Bizonyítsd be, hogy a háromszög súlyvonala olyan részekre osztja a csúcsnál lévő szöget, melyek szinuszai megfelelően arányosak a szembeni oldalon lévő szögek szinuszaival!

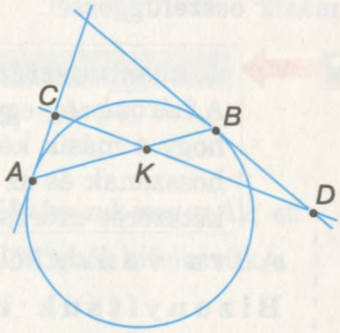
99*. Bizonyítsd be a szinusztétel alapján, hogy az ABC háromszög AA_1, BB_1 és CC_1 súlyvonalait az O metszéspontjuk 2 : 1 arányban osztja, a háromszög csúcsától számítva!

100*. Egy körvonal AB húrjának K pontján keresztül egy egyenest húztak. Ez az egyenes az A és B pontba húzott érintőket C és D pontban metszi (25. ábra). Bizonyítsd be, hogy $AC \cdot KD = BD \cdot KC$!

101*. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD, az A szög pedig nagyobb a B szögnél. Bizonyítsd be, hogy ha $AB > CD$, akkor $BC > AD$!

102*. Az $ABCD$ $(AB \| CD)$ trapéz átlóinak metszéspontja az O pont. Bizonyítsd be, hogy ha $AC > BD$, akkor $AO > BO$ és $CO > DO$!

103*. Egy egyenlőszárú háromszög alapja a, szárszöge α. Határozd meg annak a körvonalnak a sugarát, amely átmegy a háromszögbe írt körvonal középpontján és az alap csúcsain!



25. ábra

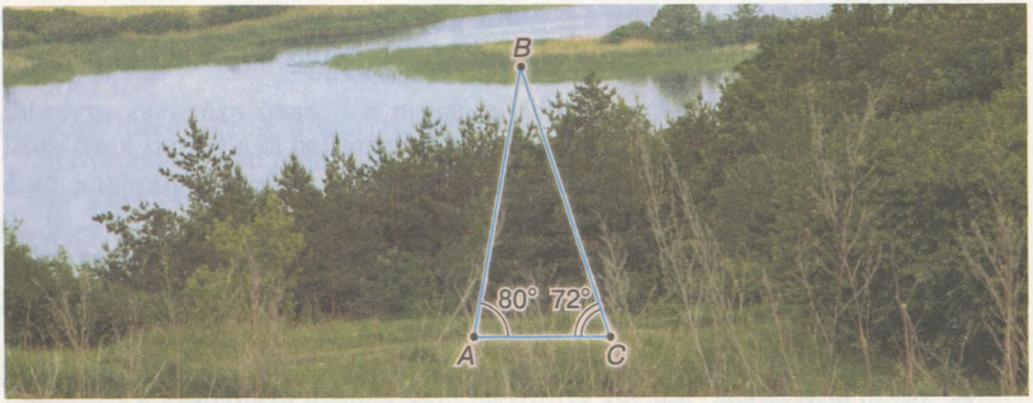
104*. Egy egyenlőszárú trapéz alapjai 1 cm és 3 cm, a szára pedig 2 cm. Határozd meg a trapéz köré írt körvonal sugarát!

105*. A D pont az ABC háromszög AC oldalának egyik belső pontja. Bizonyítsd be, hogy az ABD és DBC háromszögekbe írt körvonalak sugarainak aránya független a D pont helyétől!

106*. Az O pont az $ABCD$ érintőnégyszög átlóinak metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy az AOB és COD háromszögek köré írt körvonalak sugarainak összege a BOC és az AOD háromszögek köré írt körvonalak sugarainak összegével egyenlő!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

107. Határozd meg az A és a megközelíthetetlen B pont közötti távolságot, ha $AC = 50$ m, $CAB\angle = 80°$ és $ACB\angle = 72°$ (26. ábra)!



26. ábra

4.§ A KOSZINUSZTÉTEL

Ismerkedjünk meg az általános háromszögek oldalai és szögei közötti másik összefüggéssel.

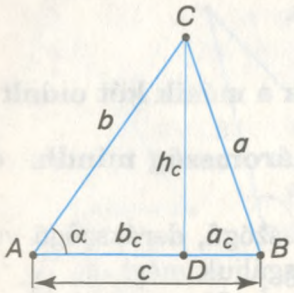
A koszinusztétel

A háromszög egyik oldalának a négyzetét úgy számíthatjuk ki, hogy a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk a két oldal hosszának és az általuk közbezárt szög koszinuszának a kétszeres szorzatát!

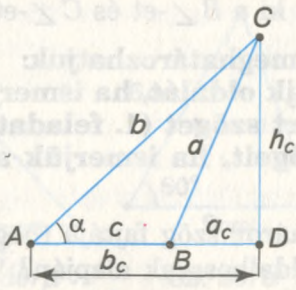
Adva van: ABC háromszög, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Bizonyítsuk be: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle$!

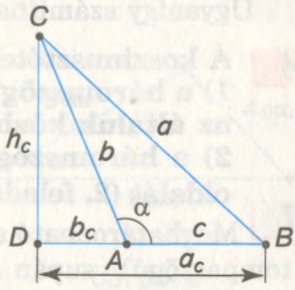
Bizonyítás: Az A szög tompaszög, hegyesszög vagy derékszög lehet. Vizsgáljuk meg ezeket az eseteket külön-külön!



27. ábra



28. ábra



29. ábra

1. Legyen az *A* szög hegyesszög. Húzzuk meg az *AB* oldalra (27. ábra) vagy az oldal meghosszabbítására (28. ábra) a *CD* magasságot. Jelöljük a *BC* és az *AC* oldal *AB* egyenesre eső vetületeit megfelelően a_c-val és b_c-vel, illetve a *CD* magasságot h_c-vel. A *BCD* derékszögű háromszögből $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)
Határozzuk meg h_c^2-et és a_c^2-et! Az *ACD* derékszögű háromszögből $h_c^2 = b^2 - b_c^2$.
Továbbá $a_c = c - b_c$ (27. ábra) vagy $a_c = b_c - c$ (28. ábra).
Mindkét esetben $a_c^2 = (c - b_c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^2$.
Helyettesítsük be a kapott kifejezéseket az (1) egyenlőségbe:
$a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 - 2cb_c + c^2$! Az *ACD* derékszögű háromszögből $b_c = b\cos A$. Tehát $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos A\angle$.

2. Legyen az *A* szög tompaszög (29. ábra). Ugyanúgy, mint az első esetben, húzzuk meg a *CD* magasságot, ekkor a *BCD* derékszögű háromszögből $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)
Ezután határozzuk meg h_c^2-et és a_c^2-et! $h_c^2 = b^2 - b_c^2$ (az *ACD* derékszögű háromszögből), $a_c^2 = (c + b_c)^2 = c^2 + 2cb_c + b_c^2$. Helyettesítsük be a kapott kifejezéseket az (1) egyenlőségbe, azt látjuk, hogy
$a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 + 2cb_c + b_c^2 = b^2 + 2cb_c + c^2$.
Az *ACD* derékszögű háromszögből $b_c = b \cdot \cos(180° - A\angle) = -b \cdot \cos A\angle$.
Tehát $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle$.

3. Legyen az *A* szög derékszög. Ebben az esetben $\cos A\angle = \cos 90° = 0$. A Pitagorasz-tétel alapján
$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle$.

1. feladat.
A háromszögben $a = 5$, $b = 8$ és az oldalak által közbezárt szög: $C\angle = 60°$.
Határozzuk meg a c oldal hosszát!

Megoldás. A koszinusztételt alkalmazva
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C\angle = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 49$, $c = \sqrt{49} = 7$.

2. feladat.
Adott a háromszög három oldala: $a = 5$, $b = 6$ és $c = 7$. Határozzuk meg az $A\angle$-et!

Megoldás. Az $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle$ egyenlőségből kifejezzük a $\cos A\angle$-et: $\cos A\angle = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} \approx 0{,}7143$.
Ebből következik, hogy $A\angle \approx 44° 25'$.

Ugyanígy számíthatjuk ki a $B\angle$-et és $C\angle$-et is.

A koszinusztétellel meghatározhatjuk:
1) a háromszög egyik oldalát, ha ismerjük a másik két oldalt és az általuk közbezárt szöget (1. feladat);
2) a háromszög szögeit, ha ismerjük a háromszög mindhárom oldalát (2. feladat).

Meghatározható-e a háromszög fajtája (hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű) csupán az oldalhosszak alapján? Vizsgáljuk meg!

Ha az $A\angle$ hegyesszög, akkor $\cos A\angle > 0$ és $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle < b^2 + c^2$.

Ha az $A\angle$ derékszög, akkor $\cos A\angle = \cos 90° = 0$ és $a^2 = b^2 + c^2$.

Ha az $A\angle$ tompaszög, akkor $\cos A\angle < 0$ és $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle > b^2 + c^2$.

Tehát az, hogy a háromszög egyik szöge hegyes-, derék- vagy tompaszög lesz, attól függ, hogy a szemben lévő oldal négyzete kisebb, egyenlő vagy nagyobb a másik két oldal négyzeteinek összegénél.

Vegyünk például egy háromszöget, amelynek oldalai 2 cm, 3 cm és 4 cm. A derék- vagy tompaszög csak a leghosszabb oldallal lehet szemben. Ezért a 4 cm-es oldallal szemben lévő szög fajtáját kell meghatározni: $4^2 > 2^2 + 3^2$. Tehát ez a szög tompaszög, vagyis a háromszög tompaszögű.

BŐVEBBEN

1. Elemezd az $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle$ egyenlőséget!

$b\cos A\angle$ abszolút értéke az AC oldal AB oldalra eső b_c vetületével (27. ábra) vagy a meghosszabbításával (28. ábra) egyenlő. A szorzat előjele az A szögtől függ. Ha az A szög hegyes, akkor „+" jelet, ha tompa, akkor „–" jelet írunk. Helytálló az alábbi **következmény**: a háromszög egyik oldalának a négyzete a másik két oldal négyzeteinek az összegével egyenlő „+"az egyik és a másik oldal vetületének a kétszerese. „+" jelet akkor írunk, ha az oldallal szembeni szög tompaszög, „–" jelet pedig akkor, ha a szög hegyes.

2. A koszinusztételt néha a Pitagorasz-tétel általánosításaként is emlegetik. Ez azzal magyarázható, hogy Pitagorasz tétele a koszinusztétel részesete. Ha a háromszög A szöge derékszögű, akkor $\cos A\angle = \cos 90° = 0$ és az $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\angle$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a^2 = b^2 + c^2$.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

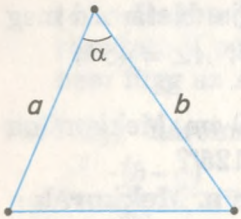
1. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a koszinusztételt!
2. Fogalmazd meg azt a két alapfeladatot, melyek megoldására alkalmazható a koszinusztétel!
3. Hogyan lehet meghatározni a háromszög fajtáját szögei szerint, ha ismered mind a három oldalát?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

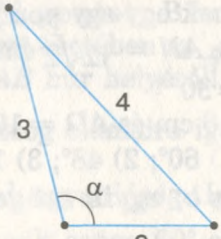
108'. Az alábbi állítások közül melyik igaz:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B\angle$; 2) $b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos B\angle$; 3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C\angle$?

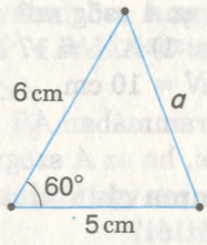
109'. Írd le a koszinusztétel alapján az x oldal négyzetét (30. ábra)!



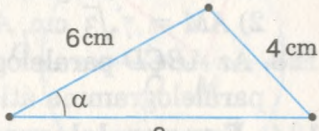
30. ábra



31. ábra



32. ábra



33. ábra

110'. Fejezd ki a cos $B\angle$-et a $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B\angle$ egyenlőségből!

111'. A 31. ábra alapján számítsd ki cos α-át!

112°. Az ABC háromszög oldalai a, b és c. Írd le a koszinusztétel alapján a háromszög keresett oldalának a négyzetét:
1) b, ha $B\angle = 45°$; 2) c, ha $C\angle = 60°$; 3) a, ha $A\angle = 30°$!

113°. Számítsd ki a rajz adatai alapján:
1) a háromszög a oldalát (32. ábra);
2) a háromszög α szögét (33. ára)!

114°. Határozd meg az *ABC* háromszög ismeretlen oldalát, ha:
1) $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $A\angle = 60°$;
2) $a = 4$ cm, $b = 2\sqrt{2}$ cm, $C\angle = 45°$;
3) $a = 8\sqrt{3}$ cm, $c = 10$ cm, $B\angle = 30°$!

115°. Számítsd ki az ABC háromszög szögeinek koszinuszát, ha:
1) $a = 8$ cm, $b = 9$ cm, $c = 10$ cm; 2) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm;
3) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm!

116°. Számítsd ki az *ABC* háromszög szögeit, ha:
1) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 3$ cm; 2) $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm;
3) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm!

117°. Az a mely értékeire lesz a szöggel szembeni oldal négyzete: 1) kisebb a másik két oldal négyzeteinek összegénél; 2) egyenlő a másik két oldal négyzeteinek az összegével; 3) nagyobb a másik két oldal négyzeteinek az összegénél?

118°. Állapítsd meg a háromszög fajtáját (a szögei szerint) a háromszög szögeinek meghatározása nélkül, ha oldalainak a hossza:
1) 11 cm, 17 cm, 21 cm; 2) 8 cm, 10 cm, 12 cm; 3) 0,3 cm, 0,5 cm, 0,4 cm!

119. Határozd meg az ABC háromszög legnagyobb szögét, ha:
1) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm; 2) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm;
3) $a = 40$ cm, $b = 13$ cm, $c = 37$ cm!

120. Számítsd ki az ABC háromszög ismeretlen oldalát, ha:
1) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $C\angle = 120°$; 2) $a = 2$ cm, $c = 3\sqrt{3}$ cm, $B\angle = 150°$;
3) $b = 8$ cm, $c = 12$ cm, $A\angle = 115°$!

121. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög átfogójának a négyzete a befogók négyzeteinek az összegével egyenlő!

122. Az M és az N pont az A szög szárainak egy-egy pontja. Határozd meg az MN távolságot, ha: 1) $AM = 17$ cm, $AN = 12\sqrt{2}$ cm, $A\angle = 45°$; 2) $AM = 7\sqrt{3}$ cm, $AN = 10$ cm, $A\angle = 30°$!

123. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 6$ cm és $AD = 10$ cm. Mekkorák a paralelogramma átlói, ha az A szög: 1) 60°; 2) 48°; 3) 125°?

124. Egy paralelogramma oldalai a és b, egyik szöge a. Mekkorák a paralelogramma átlói?

125. Az ABC derékszögű háromszög befogói $AC = 4$ cm és $BC = 3$ cm. A BC befogóra egyenlő oldalú BCD háromszöget szerkesztettek. Határozd meg az AD távolságot (vizsgálj meg két esetet)!

126. Egy háromszög két oldala 8 cm és 15 cm, az általuk közbezárt szög 120°. Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal?

127. Számítsd ki az ABC háromszög ismeretlen oldalát, ha: 1) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\sin C\angle = 0{,}8$; 2) $b = 4$ cm, $c = 10$ cm, $\sin A\angle = 0{,}6$! Hány megoldása van a feladatnak?

128. Vizsgáld meg az $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ képlet segítségével, hogyan változik az a oldal hossza, ha a b és a c oldal hosszát nem változtatjuk, az a szög mértékét viszont 0°-tól 180°-ig növeljük!

129. a, b és c az ABC háromszög három oldala. Bizonyítsd be: 1) ha $a^2 < b^2 + c^2$, akkor az $A\angle$ hegyesszög; 2) ha $a^2 > b^2 + c^2$, akkor az $A\angle$ tompaszög!

130. Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma-átlók négyzetének összege az oldalai négyzeteinek összegével egyenlő!

131. Egy paralelogramma átlói úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 5, oldalai pedig 13 cm és 16 cm. Mekkorák az átlók?

132. Egy paralelogramma oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 2, átlói pedig 9 cm és 13 cm. Mekkorák az oldalak?

133. Egy paralelogramma egyik oldala 1 cm-rel hosszabb a másiknál, átlói 7 cm és 11 cm. Mekkorák a paralelogramma oldalai?

134. Egy trapéz alapjai 6 cm és 11 cm. Az egyik szára 8 cm és 60°-os szöget zár be az alappal. Határozd meg a trapéz átlóit!

135*. Egy háromszög egyik oldala 26 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal 15 cm és 30 cm. Mekkora a harmadik súlyvonal?

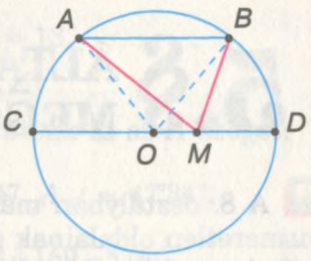
136*. Bizonyítsd be, hogy a háromszög súlyvonala kiszámítható az $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ képlettel!

137*. Egy paralelogramma szögfelezője az oldalát két 5 cm hosszúságú szakaszra osztja. Az egyik átlója 9 cm. Mekkora a másik átló?

138*. Egy R sugarú körvonalat két kisebb, egybevágó r sugarú körvonal érinti. Az egyik belülről, a másik kívülről. Az érintési pontok íve 60°-os. Mekkora a távolság a két kisebbik körvonal középpontjai között?

139*. Egy O középpontú körvonal AB húrja párhuzamos a CD átmérővel (34. ábra). Az átmérőn vagy annak a meghosszabbításán felvettünk egy

tetszőleges M pontot. Bizonyítsd be, hogy rögzített M pont esetében az $AM^2 + BM^2$ összeg nem függ az AB húr helyétől!



34. ábra

140*. Egy háromszög oldalaira igaz az $\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$ egyenlőség. Igazold, hogy a háromszög egyik szöge 60°-os!

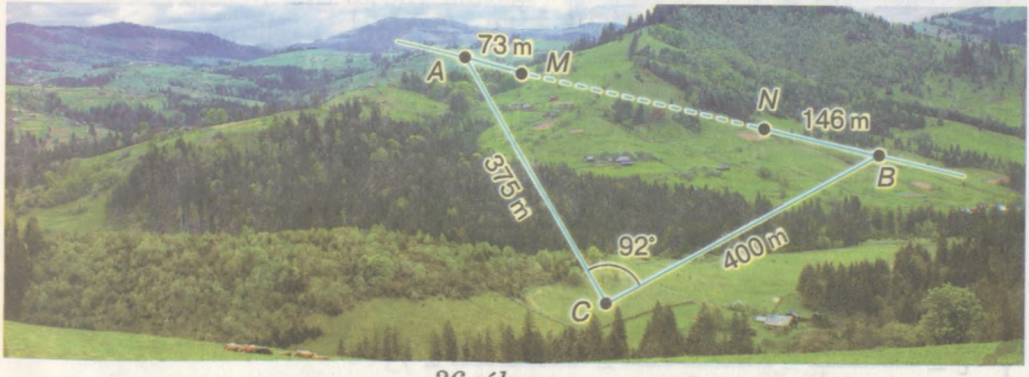
GYAKORLATI ALKALMAZÁS

141. A focimeccsen a labda az A pontban van (35. ábra), a kapufák talppontjának számító B és C ponttól 4,5 m-re és 9,4 m-re. Egy játékos épp a kapura rúgja a labdát. Határozd meg az a szöget, melynél a labda bekerül a 7 m-es kapuba!



35. ábra

142*. A vasútvonal építésén alagutat kell fúrni az AB szakaszon (36. ábra). Magyarázd meg az ábrán feltüntetett adatok alapján, hogyan kell kijelölni az alagút nyomvonalát és milyen hosszú lesz az. Mekkora alagutat kell építeni?



36. ábra

5. § ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

A 8. osztályban már oldottál meg feladatot a derékszögű háromszögek ismeretlen oldalainak és szögeinek a meghatározására. Ezek a feladatok az általános háromszög megoldásának részesetei.

Az általános háromszög megoldása azt jelenti, hogy a háromszög ismert oldalai és szögei alapján meghatározzuk az ismeretlen oldalakat és szögeket.

Az általános háromszög megoldásakor a következő esetek lehetségesek: 1) adott két oldal és az általuk közbezárt szög; 2) ismert egy oldal és a hozzá tartozó két szög; 3) adva van három oldal; 4) ismert két oldal és az egyik oldalhoz tartozó szög.

1. feladat. **Adva van:** $b = 93, c = 65, A\angle = 42°$.

Számítsuk ki: a, $B\angle$, $C\angle$!

Megoldás. 1) a koszinusztétel alapján:

$$a^2 = 93^2 + 65^2 - 2 \cdot 93 \cdot 65 \cdot \cos 42° = 8649 + 4225 - 12090 \cdot 0{,}7431 \approx 3890,$$

$$a \approx \sqrt{3890} \approx 62{,}4.$$

2) Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$\cos B\angle = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{3890 + 4225 - 8649}{2 \cdot 62{,}4 \cdot 65} \approx -0{,}0658\,!$$

Tehát a B szög tompaszög.

Határozzuk meg a B_1 hegyesszöget, melynek koszinusza 0,0658. $B_1\angle \approx 86°13'$.

Ebből $B\angle = 180° - B_1\angle = 180° - 86°13' \approx 93°47'$.

3) $C\angle = 180° - A\angle - B\angle \approx 180° - 42° - 93°47' \approx 44°13'$.

2. feladat. **Adva van:** $c = 40, A\angle = 28°, B\angle = 31°$.

Számítsuk ki: a, b, $C\angle$!

Megoldás. 1) $C\angle = 180° - 28° - 31° = 121°$.

2) az $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{b}{\sin B\angle}$ aránypárból fejezzük ki a b oldalt:

$$b = \frac{a \sin B\angle}{\sin A\angle} = \frac{40 \cdot \sin 31°}{\sin 28°} \approx \frac{40 \cdot 0{,}5150}{0{,}4695} \approx 43{,}9\,!$$

3) az $\frac{a}{\sin A\angle} = \frac{c}{\sin C\angle}$ aránypárból fejezzük ki a c oldalt:

$$c = \frac{a \sin C\angle}{\sin A\angle} = \frac{40 \cdot \sin 121°}{\sin 28°} \approx \frac{40 \cdot 0{,}8572}{0{,}4695} \approx 73 \cdot$$

3. feladat. **Adva van:** $a = 18, b = 24, c = 13$.

Számítsuk ki: $A\angle, B\angle, C\angle$.

Megoldás. 1) A koszinusztétel alapján számítsuk ki az A szöget:

$$\cos A\angle = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{576+169-324}{2\cdot 24\cdot 13} = \frac{421}{624} \approx 0{,}6747, A\angle \approx 47°34'.$$

2) a koszinusztétel alapján: $\cos B\angle = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{324+169-576}{2\cdot 24\cdot 13} \approx -0{,}1330$.

Határozzuk meg azt a B_1 hegyesszöget, melynek a koszinusza 0,1330. $B_1\angle \approx 82°21'$. Ebből következik, hogy $B\angle = 180° - B_1\angle = 180° - 82°21' \approx 97°39'$.

3) $C\angle = 180° - A\angle - B\angle = 180° - 47°34' - 97°39' \approx 34°47'$.

4. feladat. **Adva van:** $a = 70, b = 65, A\angle = 40°$.

Számítsuk ki: $c, B\angle, C\angle$.

Megoldás. 1) a szinusztétel alapján:

$$\sin B\angle = \frac{b\sin A\angle}{a} = \frac{65\cdot \sin 40°}{70} \approx \frac{65\cdot 0{,}6428}{70} \approx 0{,}5969.$$

Ennek a szinusz értéknek két szög felel meg: a 36°39′ és a 143°21′. Mivel $a > b$, ezért $A\angle > B\angle$. Az A szög hegyesszög, ezért a $B\angle$ is hegyesszög: $B\angle \approx 36°39'$.

2) $C\angle = 180° - 36°39' - 40° \approx 103°21'$.

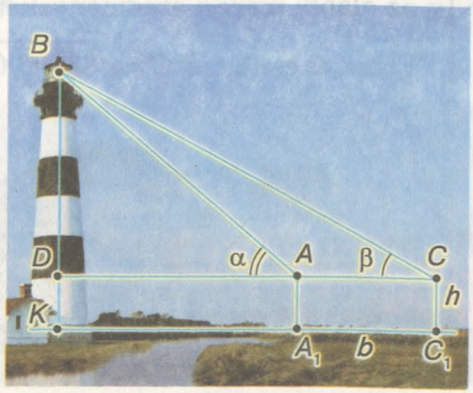
3) $c = \frac{a\sin C\angle}{\sin A\angle} = \frac{70\cdot \sin 103°21'}{\sin 40°} = \frac{70\cdot 0{,}9730}{0{,}6428} \approx 105{,}9$.

A gyakorlati feladatok megoldása a háromszög megoldásán alapszik.

1. Megközelíthetetlen tárgyak magasságának meghatározása.

Feladat. Határozzuk meg a folyó túloldalán lévő torony magasságát (37. ábra)!

Megoldás. Jelöljük ki a torony alapján átmenő egyenesen az A_1 és a C_1 pontot! Mérjük le az A_1C_1 távolságot: $A_1C_1 = b$. $DAB\angle = \alpha$, $DCB\angle = \beta$. Az ABC háromszögben a szinusztétel szerint $AB = \frac{AC\cdot \sin\beta}{\sin B\angle}$. Az ABD derékszögű háromszögben $BD = AB\cdot \sin\alpha$.



37. ábra

Tehát $BD = \dfrac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Adjuk hozzá a BD magassághoz a mérőműszerünk $AA_1 = DK = h$ magasságát, így a torony magasságát az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$BK = BD + DK = \frac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h.$$

Tételezzük fel, hogy az alábbi mérési eredményeket kaptuk: $b = 12$ m, $h = 1{,}5$ m, $\alpha = 42°$, $\beta = 37°$.

Ebben az esetben $BK = \dfrac{12 \cdot \sin 42° \cdot \sin 37°}{\sin 5°} + 1{,}5 \approx \dfrac{12 \cdot 0{,}6691 \cdot 0{,}6018}{0{,}0872} + 1{,}5 \approx 56{,}9$ (m).

2. A megközelíthetetlen pont távolságának meghatározása.

Feladat. Határozzuk meg az A és a megközelíthetetlen B pont közötti távolságot (38. ábra)!

Megoldás. Válasszunk ki a terepen egy olyan C pontot, melyből látható a B pont és megmérhető az AC távolság:

$AC = b$, $BAC\angle = \alpha$, $BCA\angle = \gamma$! Számítsuk ki a B szöget: $B\angle = 180° - \alpha - \gamma$!

A szinusztétel alapján: $AB = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(180° - (\alpha + \gamma))} = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$. Tételezzük fel, hogy az alábbi mérési eredményeket kaptuk: $b = 90$ m, a $= 46°$, $\gamma = 25°$.

Ekkor $AB = \dfrac{90 \cdot \sin 25°}{\sin 71°} \approx \dfrac{90 \cdot 0{,}4226}{0{,}9455} \approx 40{,}2$ (m).

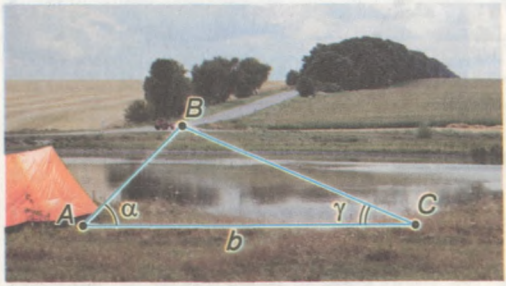
3. Két megközelíthető pont közötti távolság meghatározása (ha nem végezhető el közvetlen mérés).

Feladat. Határozzuk meg a B és C pont közötti távolságot, melyeket egy víztározó választ el!

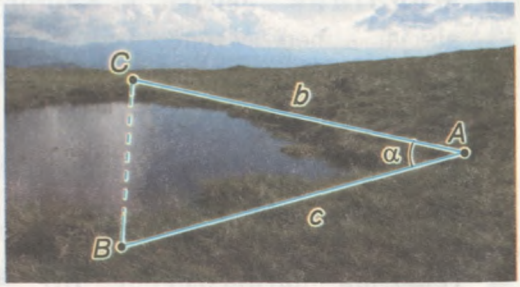
Megoldás. Válasszunk a helyszínen egy olyan A pontot, amelytől le lehessen mérni mind az AB, mind az AC távolságot: $AB = c$, $AC = b$ és $BAC\angle = \alpha$.

A koszinusztétel alapján: $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. Tételezzük fel, hogy az alábbi mérési eredményeket kaptuk: $b = 88$ m, $c = 90$ m, a $= 28°$.

Ebben az esetben $BC = \sqrt{88^2 + 90^2 - 2 \cdot 88 \cdot 90 \cdot \cos 28°} \approx 43{,}1$ (m).



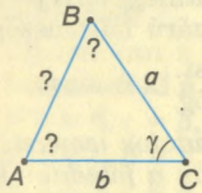
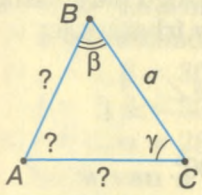
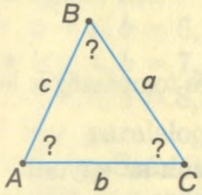
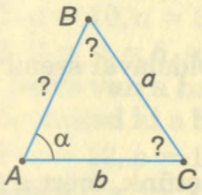
38. ábra



39. ábra

Az általános háromszög megoldásának algoritmusát a 4. táblázatban foglaltuk össze.

4. táblázat

A feladat feltétele		A megoldás algoritmusa
	Adva van: $AC = b$, $BC = a$, $C\angle = \gamma$. Meghatározandó: AB, $A\angle$, $B\angle$.	1) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A\angle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $B\angle = 180° - A\angle$.
	Adva van: $BC = a$, $B\angle = \beta$, $C\angle = \gamma$. Meghatározandó: AC, AB, $A\angle$.	1) $A\angle = 180° - \beta - \gamma$, 2) $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin A\angle}$, 3) $AB = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin A\angle}$.
	Adva van: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Meghatározandó: $A\angle$, $B\angle$, $C\angle$.	1) $\cos A\angle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B\angle = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $C\angle = 180° - A\angle - B\angle$.
	Adva van: $BC = a$, $AC = b$, $A\angle = \alpha$. Meghatározandó: AB, $B\angle$, $C\angle$.	1) $\sin B = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a}$, 2) $C\angle = 180° - \alpha - B\angle$, 3) $AB = \frac{a\cdot\sin C\angle}{\sin\alpha}$.

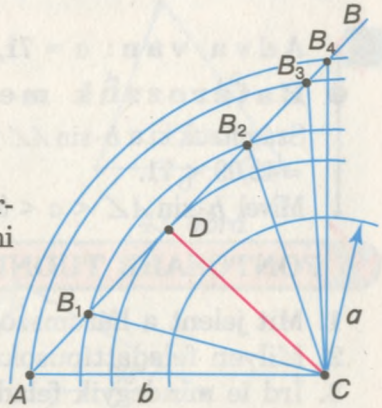
BŐVEBBEN

Elemezzük a 4. feladattípust!

Adva van: a, b, $A\angle$.

Határozzuk meg: c, $B\angle$, $C\angle$!

Emlékezz vissza, hogyan kell háromszöget szerkeszteni két oldala és az egyik oldallal szembeni szög alapján! Az A szög egyik szárára felmérjük az $AC = b$ szakaszt (40. ábra), majd a C pontból, mint középpontból, meghúzzuk az a sugarú körvonalat. A következő esetek lehetségesek: 1) A körvonal nem metszi az A szög AB szárát. A feladatnak nincs megoldása.



40. ábra

2) A körvonal a D pontban érinti az AB félegyenest.
A feladatnak egy megoldása van, az ACD derékszögű háromszög.

3) A körvonal a B_1 és a B_2 pontban metszi az A szög AB szárát.
A feladatnak két megoldása van, az AB_1C és az AB_2C háromszög.

4) A körvonal a B_3 pontban metszi az A szög szárát és átmegy az A ponton.
A feladatnak egy megoldása van, az AB_3C egyenlőszárú háromszög.

5) A körvonal a B_4 pontban metszi az AB félegyenest.
A feladatnak egy megoldása van, az AB_4C háromszög.

Felmerülhet a kérdés: *vajon nem lehet-e csupán az adatok ismeretében, szerkesztés nélkül meghatározni, hány megoldása van a feladatnak?*

Figyeljük meg, hogy ha $A\angle < 90°$, akkor az ACD derékszögű háromszögben (40. ábra) $CD = b\sin A\angle$. Ekkor az 1) – 5) eseteket így írhatjuk le:

1) $a < CD$, vagyis $a < b \cdot \sin A\angle$.
A feladatnak nincs megoldása, mivel $\sin B\angle = \frac{b\sin A\angle}{a} > 1$.

2) $a = b \cdot \sin A\angle$. $\sin B\angle = \frac{b\sin A\angle}{a} = 1$, ezért $B\angle = 90°$.
A feladatnak egy megoldása van.

3) $b \cdot \sin A\angle < a < b$.
A feladatnak két megoldása van, mivel a B szög hegyesszög és tompaszög is lehet.

4) $a = b$.
A feladatnak egy megoldása van. $A\angle = B\angle$, mivel ezek az egyenlő szárú háromszög alapon lévő szögei.

5) $a > b$.
A $B\angle$ hegyesszög, mivel ez a háromszög rövidebb oldalával szemben lévő szög.
A feladatnak egy megoldása van.

Ha viszont az $A\angle > 90°$, akkor az 5). esetről beszélhetünk, mert a tompaszöggel szemben mindig a háromszög leghosszabb oldala található.

Figyeljük meg az alábbi példát:

Adva van: $a = 71, b = 96, A\angle = 26°$.

Határozzuk meg: $c, B\angle, C\angle$.

Számítsuk ki a $b \cdot \sin A\angle$ kifejezés értékét! $b \cdot \sin A\angle = 96 \cdot \sin 26° \approx 96 \cdot 0{,}4384 \approx$
$\approx 42{,}09 < 71$.

Mivel $b \cdot \sin A\angle < a < b$, ezért a feladatnak két megoldása van.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mit jelent a háromszög megoldása?
2. Milyen feladattípusokat sorolunk a háromszög megoldásához?
3. Írd le mindegyik feladattípus megoldásának az algoritmusát!
4. Nevezz meg néhány gyakorlati feladatot!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

143. A 41–43. ábrák alapján írd le azt a képletet, amellyel kiszámítható az x oldal!

144. Számítsd ki a 44. és a 45. ábra alapján a háromszögek ismeretlen oldalait és szögeit!

145°. Adva van a háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög. Számítsd ki a háromszög másik két szögét és harmadik oldalát, ha:

1) $a = 6, c = 8, \beta = 30°$;
2) $b = 4, c = 5, \alpha = 60°$;
3) $a = 3, b = 2, \gamma = 45°$;
4) $a = 5, b = 7, \gamma = 105°$;
5) $b = 3, c = 4, \alpha = 120°$!

146°. Adva van a háromszög egyik oldala és a rajta lévő két szög. Számítsd ki a háromszög harmadik szögét és a másik két oldalt, ha:

1) $a = 4, \beta = 30°, \gamma = 45°$;
2) $c = 2, \alpha = 45°, \beta = 60°$;
3) $a = 7, \beta = 30°, \gamma = 48°$;
4) $b = 10, \alpha = 20°, \gamma = 110°$;
5) $c = 5, \alpha = 28°, \beta = 122°$!

147°. Adva van a háromszög három oldala. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha:

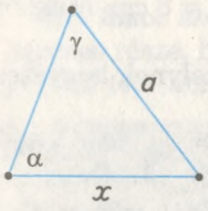
1) $a = 3, b = 6, c = 5$;
2) $a = 4, b = 3, c = 6$;
3) $a = 4, b = 7, c = 5$;
4) $a = 2, b = 3, c = 4$;
5) $a = 6, b = 8, c = 7$!

148°. Egy paralelogramma egyik átlója d, egyik oldala a, a köztük lévő szög pedig α. Számítsd ki az ismeretlen átló hosszát, a paralelogramma másik oldalát és a szögeit, ha:

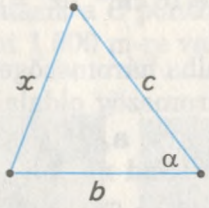
1) $d = 10, a = 6, \alpha = 20°$;
2) $d = 12, a = 5, \alpha = 35°$;
3) $d = a = 5, \alpha = 32°$!

149. Adva van a háromszög két oldala és az egyikkel szemben lévő szög. Számítsd ki a háromszög másik két szögét és a harmadik oldalát, ha:

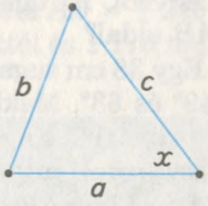
1) $a = 12, b = 10, \alpha = 40°$;
2) $a = 40, c = 30, \alpha = 45°$;
3) $b = c = 15, \gamma = 75°$;
4) $a = 30, c = 20, \alpha = 30°$;
5) $a = 20, b = 13, \beta = 65°$!



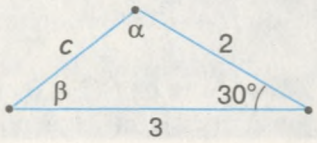
41. ábra



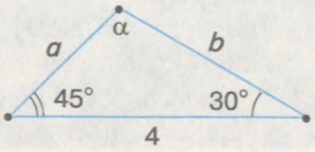
42. ábra



43. ábra



44. ábra



45. ábra

5. táblázat

a	5	3	2	
b	4			5
c	8		4	8
α				
β		35°	40°	
γ		30°		20°

150. Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c, a szögei pedig α, β, γ. Rajzold át az 5. táblázatot és töltsd ki!

151. Számítsd ki a háromszögek ismeretlen oldalait és szögeit, ha:
1) $a - b = 5, A\angle = 54°, B\angle = 13°$; 2) $b + c = 7, A\angle = 29°, B\angle = 47°$;
3) $c - a = 3, B\angle = 44°, C\angle = 102°$!

152. Számítsd ki a háromszögek ismeretlen oldalait és szögeit, ha:
1) $a = 7, b = 23, m_c = 9{,}6$; 2) $a = 15, c = 18, m_b = 11{,}3$;
3) $a = 13, b = 15, m_c = 12{,}3$!

153. Egy paralelogramma átlói d_1 és d_2, az általuk bezárt szög a. Határozd meg a háromszög oldalait, ha:
1) $d_1 = 12$ cm, $d_2 = 6$ cm, a = 35°; 2) $d_1 = 4$ cm, $d_2 = 10$ cm, a = 140°!

154. Mekkorák az ABC háromszög szögfelezői, ha:
1) $AC = 7, A\angle = 60°, C\angle = 40°$; 2) $BC = 5, B\angle = 45°, C\angle = 70°$!

155. Egy háromszög középső oldala egy-egy egységgel különbözik a rövidebb és a hosszabb oldaltól. Mekkorák a háromszög oldalai, ha a legnagyobb oldal középső oldalra eső vetülete 9 cm?

156. Az egyenlőszárú ABC derékszögű háromszög AB átfogóját úgy hosszabbították meg, hogy $BD = BC$, és a D pontot összekötötték a C ponttal. Határozd meg az ADC háromszög oldalait, ha $BC = a$!

157. Az ABC háromszög területe 16 cm^2, $AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm. Mekkora az AB oldal?

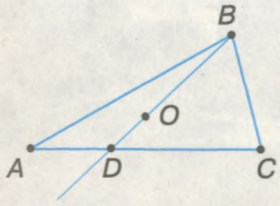
158. Egy 38 cm sugarú körvonalba háromszöget írtak, melynek hegyesszögei 49° és 63°. Mekkorák a háromszög oldalai?

159. Az ABC háromszög $A\angle = a$, $B\angle = b$, a háromszög köré írt körvonal sugara R. Határozd meg a háromszög oldalait!

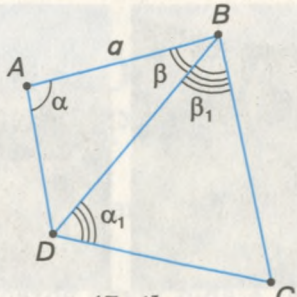
160. Egy háromszög egyik oldala 21 cm, a másik két oldal aránya 3 : 8, az általuk bezárt szög pedig 60°. Számítsd ki a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit!

161. Az $ABCD$ trapéz $(BC \| AD)$ alapjai 60 cm és 18 cm, szárai 28 cm és 35 cm. Mekkorák a trapéz szögei?

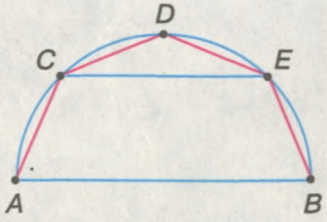
162*. Az ABC háromszögben $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm és $BC = 6$ cm. Határozd meg a B csúcs és a háromszög magasságainak metszéspontja közötti távolságot!



46. ábra



47. ábra



48. ábra

163*. Az M pont egy 60°-os szög egyik belső pontja. A szög csúcsa az A pont. Az M pont a és b távolságra van a szög száraitól. Mekkora az AM szakasz hossza?

164*. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AB = AC = b$ és az $A\angle = 30°$ (46. ábra). A B csúcson és a háromszög köré írt körvonal középpontján átmenő félegyenes az AC oldalt a D pontban metszi. Határozd meg a BD szakasz hosszát!

165*. Mekkorák annak a trapéznak az átlói, melynek alapjai 23,8 cm és 43,5 cm, a hosszabbik alapon lévő szögei pedig 63°54′ és 71°18′?

166*. Határozd meg annak a trapéznak a területét, amelynek az alapjai a és b ($a > b$), az alapon lévő szögei pedig α és β!

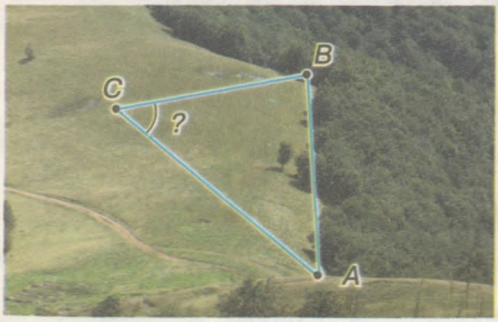
167*. Számítsd ki a 47. ábra adatai alapján az $ABCD$ négyszög BC oldalának a hosszát!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

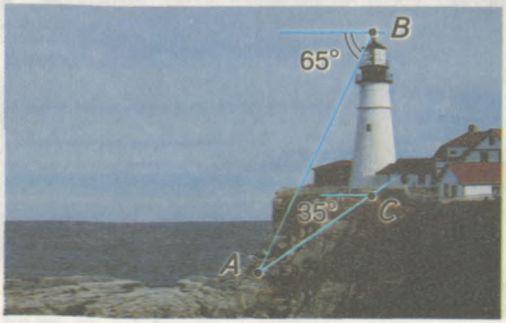
168. Egy manzárdszoba tetejét úgy tervezték meg, hogy az $AB = 11{,}5$ m szakaszra (ez a tetőszerkezet szélessége, 48. ábra) körvonalat írtak. A félkört 4 egyenlő részre osztották, majd az A, C, D, E és B pontokat összekötötték. Számítsd ki:

1) a lejtős rész AC és CD szakaszainak a hosszát; 2) a keresztgerenda CE szakaszának a hosszát; 3) a tetőszerkezet meredekségét, az AC és CD szakaszok hajlásszögét!

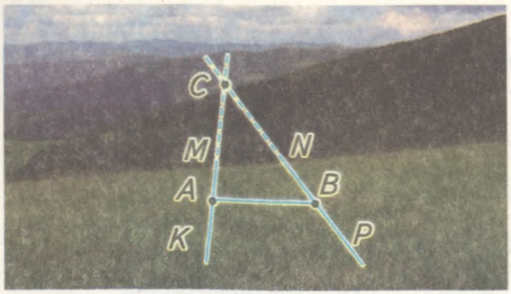
169. Hány fokos szög alatt látszik a C pontból az erdőszél $AB = 1\,240$ m-es egyenes része, ha a C pont 1 600 m-re van az A ponttól és 1 170 m-re a B ponttól (49. ábra)?



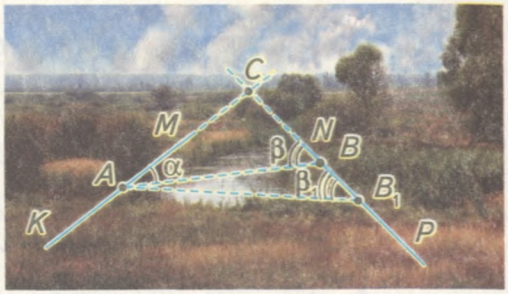
49. ábra



50. ábra



51. ábra



52. ábra

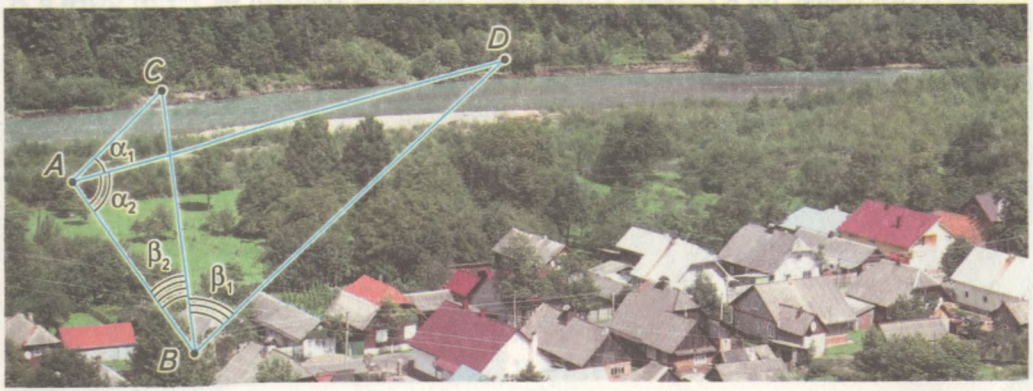
170. Ahhoz, hogy a terepen meghatározzák a szög nagyságát, a szárakra felmértek 10-10 m-t, az így kapott pontok távolsága 16 m lett. Az eredmény 106°18′-es szög lett. Magyarázd meg a számítás helyességét!

171. A hegy tetején lévő torony 60 m magas (50. ábra). A hegy lábánál fekvő tárgy a torony tetején felvett B pontból a látóhatárhoz képest 65°-os szögből látszik, a torony alján felvett C pontból viszont 35°-os szögből. Milyen magas a hegy?

172*. Az 51. ábrán két egyenes útszakasz látható: a KM és PN. A két út valahol a hegy mögött metszi egymást egy nehezen megközelíthető C pontban. Meg kell határozni a KM egyenesen felvett A pontnak a távolságát a C útkereszteződésig. Ehhez a PN úton kijelöltek egy B pontot, hogy meg lehessen mérni az AB távolságot, majd megmérték a BAM és ABN szögeket. Magyarázd meg, hogyan lehet meghatározni az AC távolságot! Számítsd ki az AC szakasz hosszát, ha $AB = 800$ m, $BAM\angle = 85°$ és $ABN\angle = 52°$!

173*. Tegyük fel, hogy a két út közötti terület mocsaras, ezért a 172. feladathoz hasonlóan (52. ábra) nem lehet megmérni az AB távolságot, viszont az A pont látható és meg is közelíthető a PN út két pontjából, a B-ből és a B_1-ből. Ebben az esetben a BB_1 távolságot és a $BAM\angle$, az $ABN\angle$ és az AB_1N szögeket mérték meg. Magyarázd meg, hogyan lehet meghatározni az AC távolságot, ha $BB_1 = a$, $BAM\angle = \alpha$, $ABN\angle = \beta$ és $AB_1N\angle = \beta_1$!

174*. Meg kell határozni a megközelíthetetlen C és D pont közötti távolságot (53. ábra). Ehhez a helyszínen kiválasztottak egy A és B pontot úgy, hogy meg tudják mérni az AB távolságot, és hogy ezekből a pontokból látható legyen a C és a D pont. Elvégezték a méréseket: $AB = a$, $CAD\angle = \alpha_1$, $BAD\angle = \alpha_2$, $ABC\angle = \beta_2$ és $CBD\angle = \beta_1$. Magyarázd meg, hogyan lehet meghatározni a CD távolságot! Mekkora a CD távolság, ha $a = 100$ m, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 70°$, $\beta_1 = 54°$ és $\beta_2 = 28°$?



53. ábra

6.§ A HÁROMSZÖG TERÜLETKÉPLETEI

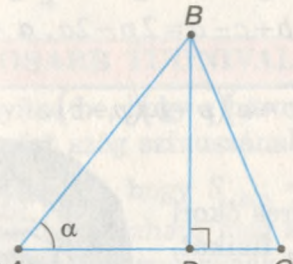
Már tudod, hogy a háromszög területét az alábbi képletekkel lehet kiszámítani:

$S=\frac{1}{2}ah_a$, ahol a a háromszög egyik oldala, h_a az a oldalhoz tartozó magasság.

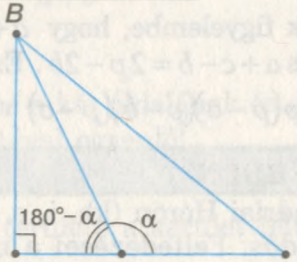
$S=p\cdot r$, ahol $p=\frac{a+b+c}{2}$, azaz p a háromszög fél kerülete, r a háromszögbe írt körvonal sugara.

Vezessünk le más képletet is a háromszög területének kiszámítására!

1. A háromszög területe két oldalának és az általuk közbezárt szög szinuszának a fél szorzatával egyenlő: $\mathbf{S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha}$.



54. ábra



55. ábra

Húzzuk meg az ABC háromszög BD magasságát (54., 55. ábra)! Az ismert terület-képlet alapján $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Az ABD derékszögű háromszögben $BD = AB\cdot\sin\alpha$, ha az α hegyesszög (54. ábra) és $BD = AB\cdot\sin(180°-\alpha)$, ha az α tompaszög (55. ábra). Mivel $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, ezért bármely esetben $BD = AB\cdot\sin\alpha$. Helyettesítsük be a képletbe a $BD = AB\cdot\sin\alpha$ kifejezést, és azt kapjuk, hogy $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\alpha=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$.

2. $\mathbf{S=\frac{abc}{4R}}$, ahol a, b és c a háromszög oldalai, R a háromszög köré írt körvonal sugara.

Már tudod, hogy $2R=\frac{a}{\sin\alpha}$, ahol α az a oldallal szembeni szög. Ebből következik, hogy $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$. Helyettesítsük be a sin a kifejezést az $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$ képletbe és azt kapjuk, hogy $S=\frac{1}{2}bc\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$.

3. Hérón képlete: $\mathbf{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, ahol a, b és c a háromszög oldalainak a hossza, $p=\frac{a+b+c}{2}$ pedig a kerületének a fele.

A koszinusztétel alapján $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$. Következésképpen $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Az $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$ képletből fejezzük ki sin α-át: $\sin\alpha=\frac{2S}{bc}$.

Helyettesítsük be sin α és cos α kapott értékeit a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosságba:

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=1.$$

Ebből következik, hogy $S^2=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16}$.

Alkalmazzuk a négyzetek különbségének nevezetes azonosságát:

$$S^2=\frac{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)}{16}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}.$$

Vegyük figyelembe, hogy $a+b+c=2p$, $b+c-a=2p-2a$, $a+b-c=2p-2c$ és $a+c-b=2p-2b$. Ezért:

$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ vagy $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

BŐVEBBEN



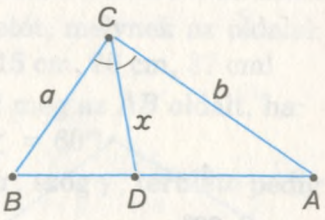
Alexandriai Hérón

1. Alexandriai Hérón (kb. i. e. I. század) híres ókori görög tudós. Felfedezései a matematikát, fizikát, mechanikát és a csillagászatot is gazdagították. Legfontosabb mértani műve a „Metrika" (méréstan). Ebben a könyvben a területmérés szabályai között megtalálhatjuk az úgynevezett Hérón-képletet (mára viszont megállapították, hogy ezt a képletet már Arkhimédész is alkalmazta, aki néhány száz évvel korábban élt).

A tudósnak a „Könyv a hadi gépekről", a „Könyv az emelő szerkezetekről", az „Automata színház", a „Pneumatika" című munkái nagy hatással voltak a tudomány és a technika fejlődésére. Hérón számos műszert és automatát tervezett: dioptrikát (a mai teodolit elődjét), a megtett út mérésére használt hodométert (a taxaméter ősét), a szenteltvíz-automatát, vízórákat és még sok minden mást. Ezért is hívták Hérónnak, a mechanikusnak.

2. A terület fogalma lehetőséget nyújt leegyszerűsíteni bizonyos feladatok megoldását még akkor is, ha maga a fogalom nem szerepel a feladat feltételében. Leggyakrabban úgy járunk el, hogy a síkidom területét kétféleképpen írjuk le: az adatokon, illetve a keresett mennyiségeken keresztül. Majd a kapott kifejezéseket egyenlítjük. Miután megoldottuk az egyenletet, meghatározhatjuk a keresett mennyiséget.

Feladat. A derékszögű háromszög befogói a és b. Mekkora a derékszög szögfelezője?



56. ábra

Megoldás. Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$), $BC = a$, $AC = b$ és CD a szögfelező (56. ábra). Jelöljük x-szel a CD szögfelező hosszát: $CD = x$. Írjuk le kétféleképpen az ABC háromszög területét!

Az egyik lehetőség: $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2}ab$. (1)

A másik lehetőség:

$$S_{ABC\Delta} = S_{BCD\Delta} + S_{ACD\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot x \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}bx \cdot \sin 45° = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b). \quad (2)$$

Egyenlítsük az (1) és (2) egyenlőségek jobb oldalát és a következő egyenletet kapjuk:

$\frac{ab}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b)$. Következésképpen $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

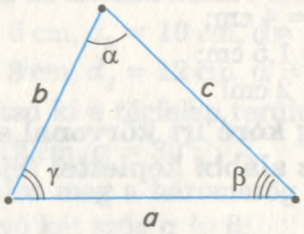
1. Bizonyítsd be, hogy a háromszög területe a két oldalának és az általuk közbezárt szög szinuszának a félszorzatával egyenlő!
2. Bizonyítsd be, hogy $S_{ABC\Delta} = \frac{abc}{4R}$!
3. Hogyan határozható meg a háromszög területe a kerület felének és a beírt körvonal sugarának ismeretében?
4. Írd le és magyarázd meg Hérón képletét!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

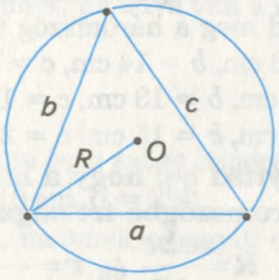
175. Melyik területképletet kell alkalmazni: 1) az 57., 2) az 58. ábrán látható háromszög esetében:

a) $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\beta$; b) $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$; c) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

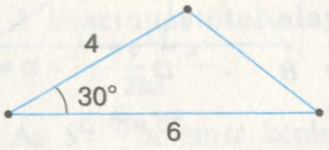
d) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$; e) $S = \frac{abc}{4R}$; f) $S = \frac{abc}{2R}$?



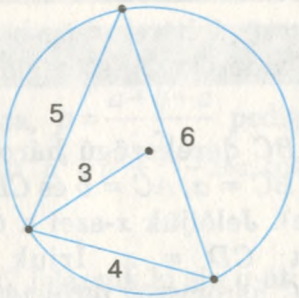
57. ábra



58. ábra



59. ábra



60. ábra



61. ábra

176'. Számítsd ki a háromszögek területét az 59. és a 60. ábra adatai alapján!

177'. Számítsd ki a háromszög területét a 61. ábra alapján az alábbi algoritmus szerint:

a) számítsd ki a háromszög kerületének a felét és a $p-a$, $p-b$, $p-c$ különbségeket;

b) számítsd ki a $p(p-a)(p-b)(p-c)$ szorzatot;

c) határozd meg a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ kifejezés értékét!

178°. Számítsd ki a háromszög területét, ha:

1) $a=5\sqrt{3}$ cm, $c = 4$ cm, $\beta = 60°$;

2) $c = 12$ cm; $b = 8$ cm, $\alpha = 30°$;

3) $a=7\sqrt{2}$ cm, $b = 16$ cm, $\gamma = 45°$!

179°. Egy egyenlőszárú háromszög szára a, szárszöge α. Mekkora a háromszög területe, ha:

1) $a = 2$ cm, $\alpha = 70°$;

2) $a = 4$ cm, $\alpha = 65°$;

3) $a = 6$ cm, $\alpha = 100°$?

180°. Egy háromszög három oldala a, b és c, a köré írt körvonal sugara R. Határozd meg a háromszög területét, ha:

1) $a = 26$ cm, $b = 24$ cm, $c = 10$ cm, $R = 13$ cm;

2) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4\sqrt{5}$ cm, $R = 4{,}5$ cm;

3) $a = 26$ cm, $b = 28$ cm, $c = 30$ cm, $R = 16{,}25$ cm!

181°. Egy háromszög három oldala a, b és c, a beírt körvonal sugara r. Határozd meg a háromszög területét, ha:

1) $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm, $r = 4$ cm;

2) $a = 4$ cm, $b = 13$ cm, $c = 15$ cm, $r = 1{,}5$ cm;

3) $a = 7$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm, $r = 2$ cm!

182°. Bizonyítsd be, hogy a háromszög köré írt körvonal sugara (R) és a háromszögbe írt sugara (r) az alábbi képlettel fejezhető ki:

$$R=\frac{abc}{4S} \text{ és } r=\frac{2S}{a+b+c}!$$

183°. Határozd meg annak a háromszögnek a területét, melynek az oldalai:
1) 5 cm, 5 cm, 6 cm; 2) 12 cm, 17 cm, 25 cm; 3) 15 cm, 26 cm, 37 cm!

184. Az ABC háromszög területe 60 cm^2. Határozd meg az AB oldalt, ha:
1) $AC = 15$ cm, $A\angle = 30°$; 2) $BC = 10\sqrt{3}$ cm, $B\angle = 60°$!

185. Egy háromszög oldalai a, b, az általuk közbezárt szög γ, területe pedig S. Rajzold át a 6. táblázatot és töltsd ki!

6. táblázat

α	7 cm	5 cm	4 cm	
β	10 cm	8 cm		9 cm
γ	80°		150°	75°
S		12 cm^2	24 cm^2	16 cm^2

186. Egy háromszög két oldala 6 cm és 10 cm. Lehet-e a háromszög területe:
1) 19 cm^2; 2) 35 cm^2; 3) 24 cm^2?

187. Vizsgáld meg az $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$ képlet segítségével, hogyan változik a háromszög területe az α szög növelésével 0°-tól 180°-ig (b és c állandó)! Az a mely értékénél lesz az ABC háromszög területe maximális?

188. Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma területe két szomszédos oldalának és a köztük lévő szög szinuszának szorzatával egyenlő!

189. Egy paralelogramma oldalai a és b, az általuk közbezárt szög α. Számítsd ki a paralelogramma területét, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 70°$; 2) $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $\alpha = 130°$!

190. Egy rombusz területe az oldala négyzetének és a szöge szinuszának szorzatával egyenlő. Bizonyítsd be!

191. Határozd meg a rombusz területét, ha ismeretes az oldal hossza és a szöge:
1) $a = 2$ cm, $\alpha = 20°$; 2) $a = 6$ cm, $\alpha = 124°$!

192. Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma területe az átlók és az általuk bezárt szög szinusza szorzatának a felével egyenlő!

193. Határozd meg a paralelogramma területét, ha adva van a két átlója, d_1 és d_2, és az általuk bezárt α szög:
1) $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 10$ cm, $\alpha = 40°$;
2) $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 12$ cm, $\alpha = 59°$!

194. Számítsd ki a téglalap területét d átlója és α szöge ismeretében:
1) $d = 12$ cm, $\alpha = 30°$; 2) $d = 10$ cm, $\alpha = 25°$!

195. Határozd meg a háromszög területét, melynek az egyik oldala c és a rajta lévő két szög α és β:
1) $c = 6$ cm, $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$; 2) $c = 8$ cm, $\alpha = 65°$, $\beta = 54°$!

196. Bizonyítsd be, hogy az *ABC* háromszög a szögének *l* szögfelezője az $l_\alpha = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{(b+c) \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$ képlettel számítható ki!

197. Határozd meg a háromszög *a* oldalához tartozó magasságát, ha a háromszög oldalai *a*, *b* és *c*!

198. Milyen a háromszög magassága, ha oldalai:
1) 7 cm, 15 cm, 20 cm; 2) 13 cm, 14 cm, 15 cm?

199. Egy háromszög területe 810 cm^2. Határozd meg a háromszög oldalait, ha azok aránya 12 : 17 : 25!

200. Egy háromszög két oldala 17 cm és 21 cm, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal 5 cm. Számítsd ki a háromszög területét!

201. Határozd meg abba az egyenlőszárú háromszögbe írt körvonalnak a sugarát, melynek az alapja és a hozzá tartozó magassága:
1) 20 cm és 26 cm; 2) 16 cm és 17 cm!

202. Határozd meg a háromszög köré írt körvonal sugarát, ha oldalai:
1) 10 cm, 24 cm, 26 cm; 2) 26 cm, 28 cm, 30 cm!

203. Egy háromszög oldalai *a*, *b* és *c*, területe *S*, a körülírt és a beírt körvonal sugara pedig *R* és *r*. Rajzold át a 7. táblázatot és töltsd ki!

7. táblázat

a	5 cm	3 cm	5 cm	6 cm	4 cm
b	7 cm	4 cm	5 cm	10 cm	13 cm
c	8 cm	5 cm	6 cm	8 cm	15 cm
S	$10\sqrt{3}$ cm^2				24 cm^2
R		2,5 cm		5 cm	
r			1,5 cm		

204*. Bizonyítsd be a háromszögek alábbi területképleteit:
1) $S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$; 2) $S = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$; 3) $S = \sqrt{\frac{1}{2}Rh_a \cdot h_b \cdot h_c}$, ahol *R* a körülírt körvonal sugara!

205*. Egy derékszögű háromszög derékszögének *l* szögfelezője α szöget zár be az átfogóval. Mekkora a háromszög területe?

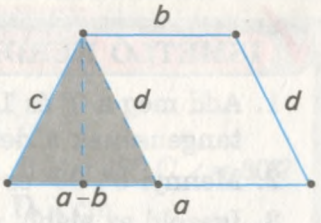
206*. Határozd meg a háromszög területét, ha adott a háromszög egyik *m* súlyvonala és a mellette lévő oldalak által bezárt α és β szög!

207*. Határozd meg a háromszög területét két magassága (h_1 és h_2) és általuk bezárt α szög alapján!

208*. Bizonyítsd be, hogy a négyszög területe az átlóinak és az általuk bezárt szög szinusza szorzatának a felével egyenlő!

209*. Egy háromszög egyik oldala 30 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonal 12 cm és 39 cm. Határozd meg a háromszög területét!

210*. Egy trapéz alapjai 16 cm és 44 cm, szárai 15 cm és 41 cm. Mekkora a trapéz területe?



62. ábra

Ahhoz, hogy meghatározzuk egy trapéz területét az oldalai alapján (62. ábra), a következőt kell tenni: 1) húzzunk a trapéz kisebbik alapjának csúcsán keresztül a szárral párhuzamos szakaszt; 2) határozzuk meg az így kapott háromszög magasságát három oldala alapján!

211*. Határozd meg annak a trapéznak a magasságát, melynek az alapjai 25 cm és 11 cm, a szárai pedig 13 cm és 15 cm!

212*. Határozd meg a háromszög területét az m_a, m_b és m_c súlyvonala ismeretében!

213*. Határozd meg a háromszög területét a h_a, h_b és h_c magassága ismeretében!

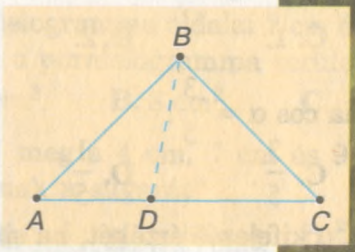
GYAKORLATI ALKALMAZÁS

214. A 63. ábrán egy földterület alaprajza látható 1 : 1000 méretarányban. Határozd meg a parcella területét!

215. Egy 1 m^2-es vaslap tömege 38 kg. Mekkora a tömege az ebből a vaslapból kivágott háromszögnek, ha oldalai 29 cm, 35 cm és 48 cm?

216. Egy 5 hektáros háromszög alakú földterületből el kell keríteni a BD határvonallal egy 2 hektáros részt (64. ábra). Mi a megoldás, ha $AC = 1000$ m?


63. ábra



64. ábra



ISMÉTLŐ KÉRDÉSEK

1. Add meg a 0° és 180° közé eső szögek szinuszának, koszinuszának és tangensének a definícióját!
2. Mennyi 0°, 90° és 180° szinusza és koszinusza?
3. Igazold az alábbi azonosságokat: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$!
4. Mondd el és bizonyítsd be a szinusztételt; a koszinusztételt!
5. Sorold fel a háromszög megoldásához tartozó feladattípusokat, és mondd el mindegyik típus algoritmusát!
6. Bizonyítsd be, hogy a háromszög területe úgy is kiszámítható, hogy a két oldalának és az általuk bezárt szög szinuszának a szorzatát elosztjuk kettővel!
7. Írd le és magyarázd meg a háromszög területének kiszámítását, ha adott: három oldala; három oldala és a köré írt körvonal sugara; félkerülete és a beírt körvonal sugara!

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

1. feladatsor

1° Határozd meg a $6\sin 180° + 5\cos 0° - 2\sin 90°$ kifejezés értékét!

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

2° Egyszerűsítsd az $1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ kifejezést!

A. $2\sin^2\alpha$. **B.** $\cos^2\alpha$. **C.** $\sin^2\alpha$. **D.** $2\cos^2\alpha$.

3° Számítsd ki $\sin 150° + \cos 120°$ összeget!

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

4 Határozd meg $\sin\alpha$ értékét, ha $\cos\alpha=\frac{3}{5}$!

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

5* Számítsd ki a $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$ kifejezés értékét, ha $\sin\alpha=0{,}5$!

A. 2,5. **B.** 25. **C.** 0,2. **D.** 0,25.

TESZTFELADATOK

2. feladatsor

1° Mekkora az ABC háromszög b oldala, ha $c = 1$ cm, $B\angle = 45°$, $C\angle = 30°$?
A. $\sqrt{3}$ cm. **B.** 2 cm. **C.** $\sqrt{2}$ cm. **D.** 1 cm.

2° Számítsd ki a háromszög köré írt körvonal sugarát, ha a 2 cm-es oldallal szemben lévő szög 30°!
A. 4 cm. **B.** 2 cm. **C.** 1 cm. **D.** 3 cm.

3° Határozd meg az ABC háromszög c oldalát, ha $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $C\angle = 60°$!
A. $\sqrt{3}$ cm. **B.** 3 cm. **C.** $\sqrt{7}$ cm. **D.** 7 cm.

4 A háromszög oldalai 2, 3, 4. Mekkora a legkisebb szöge?
A. $\approx 29°$. **B.** $\approx 20°$. **C.** $\approx 18°$. **D.** $\approx 26°$.

5* A paralelogramma átlóinak aránya 1 : 2, oldalai 2 cm és 6 cm. Számítsd ki az átlókat!
A. 2 cm és 4 cm. **B.** 1 cm és 2 cm. **C.** 3 cm és 6 cm. **D.** 4 cm és 8 cm.

3. feladatsor

1° Számítsd ki annak a háromszögnek a területét, melynek oldalai 4 cm és 6 cm, az általuk bezárt szög pedig 30°!
A. 4 cm^2. **B.** 6 cm^2. **C.** 12 cm^2. **D.** 24 cm^2.

2° Egy háromszög oldalai 10 cm, 10 cm és 12 cm.
Határozd meg a területét!
A. 32 cm^2. **B.** 60 cm^2. **C.** 48 cm^2. **D.** 24 cm^2.

3° Számítsd ki annak az egyenlőszárú háromszögnek a területét, melynek szára 2 cm, szárszöge pedig 30°!
A. 2 cm^2. **B.** 6 cm^2. **C.** 4 cm^2. **D.** 1 cm^2.

4 Egy paralelogramma oldalai 2 cm és 4 cm, az egyik szöge pedig 45°. Mekkora a paralelogramma területe?
A. $4\sqrt{2}$ cm^2. **B.** 8 cm^2. **C.** $2\sqrt{2}$ cm^2. **D.** $8\sqrt{2}$ cm^2.

5* Határozd meg a 4 cm, 7 cm és 9 cm oldalú háromszög köré írt körvonalnak a sugarát!
A. 10 cm^2. **B.** $6\sqrt{5}$ cm^2. **C.** $\frac{42\sqrt{5}}{5}$ cm^2. **D.** $\frac{21\sqrt{5}}{10}$ cm^2.

2. FEJEZET

SZABÁLYOS SOKSZÖGEK

Ebben a fejezetben megtudod:

- mi a szabályos n-szög, milyen tulajdonságai vannak, hogyan kell szabályos sokszöget szerkeszteni;
- hogyan kell meghatározni a szabályos n-szögek köré és beírt körvonalának sugarát, ha adott a sokszög oldala, és fordítva, hogyan lehet kifejezni az oldalt, ha adott a köré írt vagy a beírt körvonal sugara;
- mi a körvonal hosszának, az ívhossznak, a körlapnak, a körcikknek és a körszelet területének a képlete;
- hogyan kell alkalmazni a megismert tulajdonságokat és képleteket a feladatok megoldásánál, illetve a gyakorlatban





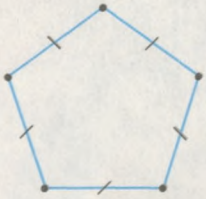
7.§ SZABÁLYOS SOKSZÖGEK

? A 65–68. ábrán sokszögeket láthatsz. Vajon miben különböznek egymástól?

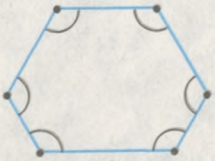
A 65. ábrán látható sokszögnek sem az oldalai, sem a szögei nem egyenlők. A 66. ábrán egy egyenlő oldalú sokszöget látunk, amelynek nem egyenlők a szögei. A 67. ábrán lévő sokszög esetében pont fordítva van: a szögei egyenlők, de az oldalai nem. Csak a 68. ábrán látható olyan sokszög, melynek a belső szögei és az oldalai is egyenlők.



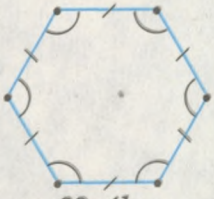
65. ábra



66. ábra



67. ábra

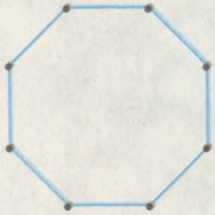


68. ábra

Szabályos sokszögnek nevezzük azt a sokszöget, melynek minden belső szöge és minden oldala egyenlő.

A négyzet és az egyenlő oldalú háromszög is szabályos. A 68. ábrán szabályos hatszög látható, a 69.-en pedig szabályos nyolcszög.

A szabályos n-szög belső szögeinek az összege bármely n-szöghöz hasonlóan $180° \cdot (n-2)$.



69. ábra

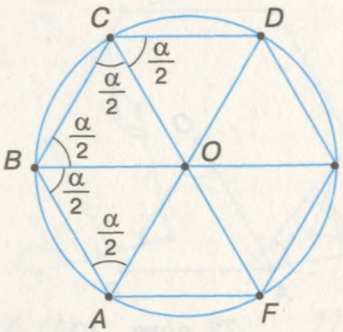
Feladat. Határozzuk meg a szabályos tízszög egyik belső szögének a fokmértékét!

Megoldás: A szabályos tízszög belső szögeinek összege $180°(n-2) = 180°(10-2) = 1440°$.

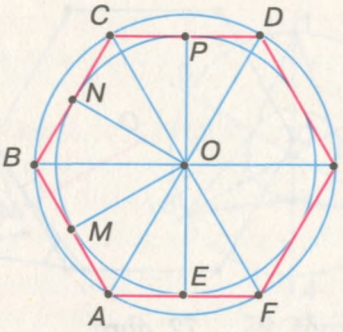
Összesen 10 szög van. Ezért egy belső szög $1440° : 10 = 144°$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a szabályos sokszög bármely belső szögét, az alábbi képletet kell alkalmaznunk: $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

? Már tudod, hogy a szabályos háromszög és négyszög (négyzet) beírt (húr) és körülírt (érintő) is lehet. Vajon általánosítható-e ez az állítás minden szabályos sokszögre? A választ a következő tétel adja meg.



70. ábra



71. ábra

Tétel (a szabályos sokszög tulajdonsága). Ha egy sokszög szabályos, akkor köré is és bele is lehet körvonalat írni.

Adva van: $ABCD \ldots F$ szabályos sokszög;

$AB = BC = CD = \ldots = FA$, $A\angle = B\angle = C\angle = \ldots = F\angle$.

Bizonyítsuk be: 1) $OA = OB = OC = \ldots = OF$ (70. ábra);
2) $OM = ON = OP = \ldots = OE$ (71. ábra).

Bizonyítás: 1) Jelöljük az $ABCD \ldots F$ szabályos sokszög A és B szögei szögfelezőinek metszéspontját O-val (70. ábra)!

Mivel $A\angle = B\angle$, ezért $OAB\angle = OBA\angle = \frac{\alpha}{2}$, ahol α a sokszög egyik belső szöge.

Ezért az $AOB\triangle$ egyenlőszárú háromszög, tehát $OA = OB$.

Kössük össze az O pontot a sokszög többi csúcsával!

Az AOB és a BOC háromszögben az OB oldal közös, a feladat feltételei alapján $AB = BC$, $OBA\angle = OBC\angle = \frac{\alpha}{2}$, mivel OB a B szög szögfelezője.

Ezért az $AOB\triangle = BOC\triangle$, tehát $OB = OC$.

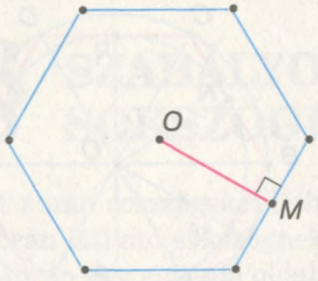
Hasonló módon OC a BOC és a COD háromszögek közös oldala, a feltételek szerint $BC = CD$, $OCB\angle = OCD\angle = \frac{\alpha}{2}$ (az előbbi bizonyítás alapján a BOC háromszög egyenlőszárú, ezért $OBC\angle = OCB\angle = \frac{\alpha}{2}$, így $OCD\angle = \frac{\alpha}{2}$).

Tehát $BOC\triangle = COD\triangle$, ezért $OC = OD$. Így $OA = OB = OC = OD$.

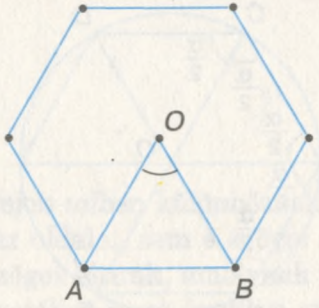
Folytatva a szomszédos háromszögek összehasonlítását, azt látjuk, hogy: $OA = OB = OC = OD = \ldots = OF$.

Tehát a sokszög minden csúcsa az O középpontú körvonalon van.

2) Már bebizonyítottuk, hogy az $AOB\triangle = BOC\triangle = COD\triangle = \ldots = FOA\triangle$ (71. ábra). Mivel az egybevágó háromszögek magassága egyenlő, ezért az O csúcsból húzott magasságok is egyenlők: $OM = ON = OP = \ldots = OE$. Ebből következik, hogy az O középpontú, OM sugarú körvonal áthalad az N, P, $\ldots$ E pontokon, és érinti az $ABCD \ldots F$ sokszög minden oldalát ezekben a pontokban. Vagyis ez a körvonal a sokszögbe van írva.



72. ábra



73. ábra

A szabályos sokszög köré és bele írt körvonalak középpontja egybeesik. A körvonalak középpontját a *szabályos sokszög középpontjának* nevezzük.

A szabályos sokszög középpontjából az oldalra húzott magasságot a szabályos sokszög *apotémájának* nevezzük (72. ábra). Az apotéma a beírt körvonal sugara.

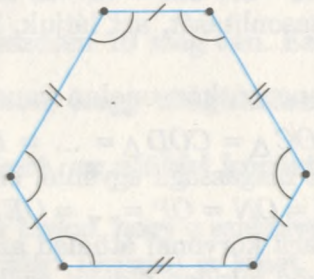
A szomszédos csúcsokba húzott két sugár által bezárt szöget *középponti szögnek* nevezzük (73. ábra)

A szabályos *n*-szög középponti szögének a meghatározásához a $\beta = \frac{360^\circ}{n}$ képletet kell alkalmazni.

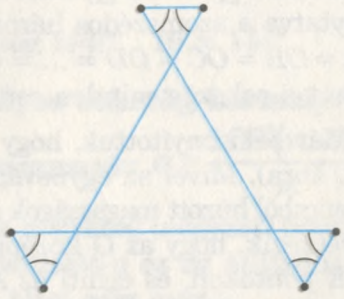
Az azonos oldalszámú szabályos sokszögek hasonlók (ezt később bizonyítjuk be).

BŐVEBBEN

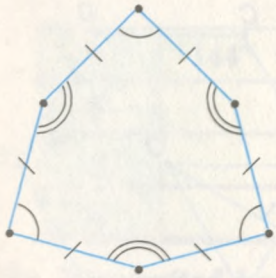
A majdnem szabályos sokszögek külön osztályt képeznek. Azokat a sokszögeket, melyek minden szöge egyenlő, az oldalai közül viszont csak minden második az, *félig szabályos egyenlő szögű sokszögnek* nevezzük. A legjobb példa erre a téglalap. A 74. és 75. ábrán félig szabályos egyenlő szögű hatszögek láthatók, egy konvex (domború) és egy csillagsokszög. A 76. és 77. ábrán egy konvex (domború) és egy csillag alakú félig szabályos egyenlő oldalú hatszög látható.



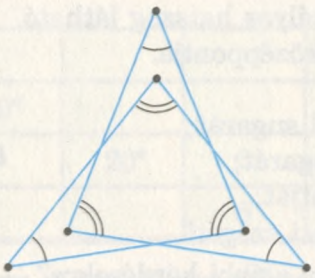
74. ábra



75. ábra



76. ábra



77. ábra



78. ábra

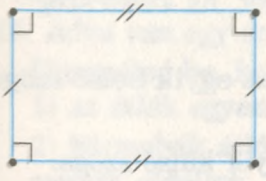
A félig szabályos egyenlő oldalú sokszögek szerkesztésének lépései a következők (lásd a 78. ábrát): 1) megszerkesztünk két koncentrikus körvonalat; 2) a körvonal középpontján keresztül $2n$ félegyenest húzzunk úgy, hogy az O csúcsú teljesszöget $2n$ egyenlő részre ossza; 3) számozzuk meg ezeket a félegyeneseket olyan sorrendben, mint ahogy az O pont körül elhelyezkednek; 4) jelöljük meg az egyik körvonal és a páros sorszámú félegyenesek metszéspontját, majd a páratlan sorszámú félegyenesek és a másik körvonal metszéspontjait és a kapott pontokat sorba kössük össze! Félig szabályos egyenlő oldalú sokszöget kaptunk. Ajánljatok hasonló módszert félig szabályos egyenlő szögű sokszög szerkesztésére!

FONTOSABB TUDNIVALÓK

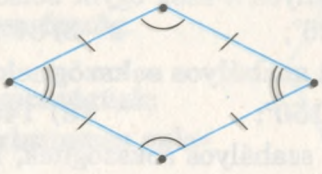
1. Mi a szabályos sokszög?
2. Bizonyítsd be, hogy a szabályos sokszög köré és bele is lehet körvonalat írni!
3. Mi a szabályos sokszög középpontja? Középponti szöge?
4. Mi a szabályos sokszög apotémája?
5. Hogyan számítható ki a szabályos sokszög egyik belső szöge? Középponti szöge?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

217. A 79 – 81. ábrán látható sokszögek közül melyek szabályosak? Feleleted indokold meg!



79. ábra

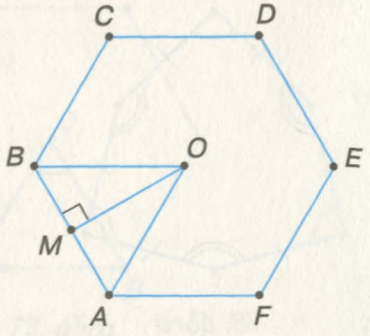


80. ábra



81. ábra

218'. A 82. ábrán egy szabályos hatszög látható, melynek az O pont a középpontja.
Nevezd meg:
1) a körülírt körvonal sugarát;
2) a beírt körvonal sugarát;
3) a hatszög középpontját;
4) a hatszög középponti szögét!



82. ábra

219'. Mi a helyes válasz az alábbi kérdésekre?
1) Melyik képlettel számítható ki a szabályos sokszög egyik belső szöge:
a) $\frac{180°n}{n-2}$; b) $\frac{180°(n-2)}{n}$; c) $180°(n-2)$?
2) Melyik képlettel számítható ki a szabályos sokszög középponti szöge:
a) $\frac{180°}{n}$; b) $180°n$; c) $\frac{360°}{n}$?

220'. Egy szabályos n-szög oldala 4 cm. Mekkora a kerülete, ha:
1) $n = 5$; 2) $n = 8$; 3) $n = 10$?

221'. Melyik igaz az alábbi állítások közül:
1) egy sokszög akkor szabályos, ha minden oldala egyenlő;
2) bármely olyan négyszög, melynek szögei egyenlők, szabályos;
3) a háromszög akkor szabályos, ha minden szöge egyenlő;
4) minden egyenlő oldalú háromszög szabályos?

222°. Számítsd ki a négyzetbe írt körvonal sugarát, ha a kerülete:
1) 12 cm; 2) 16 cm; 3) P!

223°. Számítsd ki a négyzet köré írt körvonal sugarát, ha átlója:
1) 8 cm; 2) 16 cm; 3) d!

224°. Számítsd ki a szabályos n-szög egyik belső szögét, ha:
1) $n = 5$; 2) $n = 12$; 3) $n = 18$!

225°. Számítsd ki a szabályos n-szög egyik középponti szögét, ha:
1) $n = 20$; 2) $n = 24$; 3) $n = 10$!

226°. Hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, melynek középponti szöge
1) 36°; 2) 120°; 3) 30°?

227°. Számítsd ki a szabályos n-szög egyik belső szögét, ha külső szöge:
1) 60°; 2) 26°; 3) 34°!

228°. Hány oldala van a szabályos sokszögnek, ha az egyik belső szöge:
1) 135°; 2) 150°; 3) 140°?

229°. Hány oldala van a szabályos sokszögnek, ha egyik külső szöge:
1) 10°; 2) 36°; 3) 18°?

230. Egy szabályos n-szög belső szöge α, középponti szöge β, külső szöge γ. Rajzold át a 8. táblázatot és töltsd azt ki!

8. táblázat

α	144°						150°
β		40°				45°	
γ			20°		12°		
n				6			

231. Bizonyítsd be, hogy a szabályos sokszög középponti szöge az egyik külső szögével egyenlő!

232. Bizonyítsd be, hogy a szabályos sokszög középponti szögének és belső szögének az összege 180°!

233. Határozd meg a szabályos sokszög belső és külső szögének arányát!

234. Hányszor nagyobb az n oldalú szabályos sokszög belső szöge a külső szögénél, ha: 1) $n = 10$; 2) $n = 20$?

235. Hány csúcsa van annak a szabályos sokszögnek, melyben: 1) a beírt körvonal sugara kétszer rövidebb az oldalhossznál; 2) a körülírt körvonal sugara kétszer hosszabb a beírt körvonal sugaránál?

236. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek belső szöge:
1) 3-szor nagyobb a külső szögénél;
2) 5-ször nagyobb a középponti szögénél?

237. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melyben a külső és a belső szög aránya: 1) 5 : 2; 2) 3 : 2?

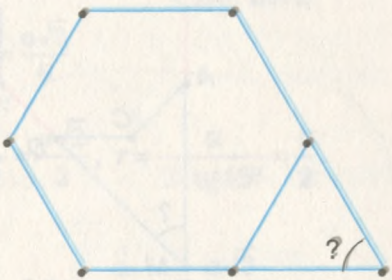
238. Maximálisan hány fokos lehet egy szabályos sokszög középponti szöge?

239. **1) A körvonalba olyan sokszöget írtak, melynek minden oldala egyenlő. Egyenlők-e a szögei?** Indokold meg a feleletet!
2) A körvonalba olyan sokszöget írtak, melynek minden szöge egyenlő. Egyenlők-e az oldalai? Indokold meg a feleletet!

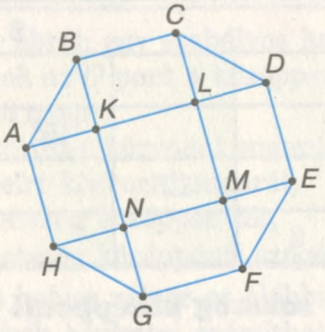
240. Két egybevágó körvonal úgy metszi egymást, hogy az egyik körvonal középpontja a másik körvonalra illeszkedik. Húrnégyszög-e a körvonalak metszéspontjai és a középpontjai által megadott négyszög? Indokold meg a feleletet!

241. Határozd meg a szabályos hatszög két nem szomszédos oldalának hajlásszögét (83. ábra)!

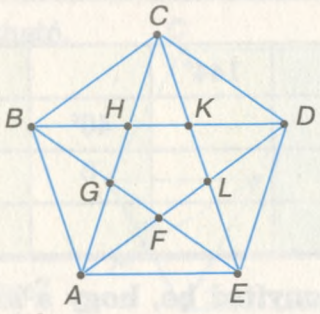
242. Adva van egy szabályos ötszög.
Bizonyítsd be, hogy:
1) az átlók egyenlő hosszúságúak;
2) bármelyik átlója párhuzamos valamelyik oldallal;
3) bármely egymást metsző átlón létezik az oldallal egyenlő hosszúságú szakasz!



83. ábra



84. ábra



85. ábra

243. Az *ABCDEFGH* nyolcszög szabályos (84. ábra). Bizonyítsd be, hogy a *K*, *L*, *M* és *N* pont egy négyzet csúcsa!

244. Az *ABCDEFMN* nyolcszög szabályos. Bizonyítsd be, hogy az *A*, *C*, *E* és *M* pont egy négyzet csúcsa!

245*. Az *ABCDE* ötszög szabályos (85. ábra). Bizonyítsd be, hogy az *FGHKL* ötszög is szabályos!

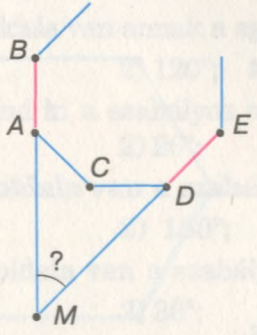
246*. Bizonyítsd be, hogy a szabályos sokszögek oldalfelező pontjai egy szabályos sokszög csúcsai!

247*. Számítsd ki egy szabályos kilencszög *AB* és *DE* oldalának a hajlásszögét (86. ábra)!

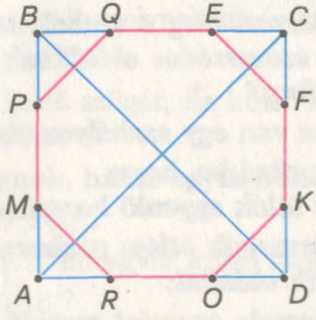
248*. Egy *a* oldalú négyzet oldalaira felmértek az átló felével egyenlő hosszúságú szakaszokat, ahogy azt a 87. ábra mutatja. A kapott nyolc pontot sorban összekötötték. Bizonyítsd be, hogy az így keletkezett nyolcszög szabályos!

249*. Bizonyítsd be, hogy a szabályos *n*-szög egy belső pontja oldalaktól mért távolságainak az összege független a pont helyétől!

250*. Két egybevágó körvonal úgy metszi egymást, hogy az egyik körvonal középpontja a másik körvonalra illeszkedik. Húzd meg a körvonalak közös metsző egyenesét az egyik metszésponton keresztül. A metsző



86. ábra



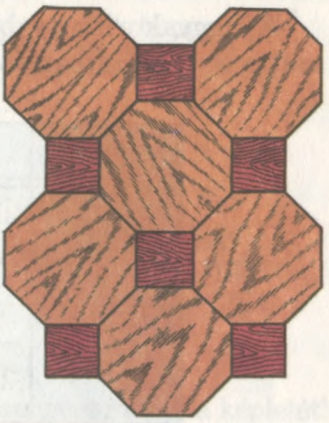
87. ábra

egyenes és a körvonalak metszéspontjait kösd össze a körvonalak másik metszéspontjával. Milyen fajtájú háromszöget kaptál?

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

251. Bizonyítsd be, a padló hézagmentesen burkolható szabályos háromszög-, négyszög- és hatszög alakú járólapokkal!

252. A padlót szabályos nyolcszögekkel és négyszögekkel burkolták (88. ábra). Magyarázd meg, hogyan lehetséges ez?

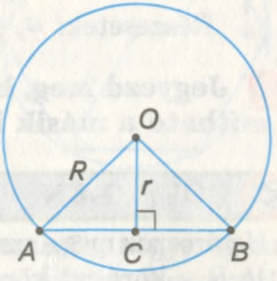


88. ábra

8.§ A SZABÁLYOS SOKSZÖGEK BEÍRT ÉS KÖRÉ ÍRT KÖREI SUGARAINAK KÉPLETE

Határozzuk meg a szabályos n-szög beírt és köré írt köreinek R és r sugarait, ha a sokszög oldala a. Használjuk a 89. ábra jelöléseit: $AB = a$, $OA = R$, $OC = r$. Az AOB egyenlőszárú háromszögben az OC magasság egyben szögfelező és súlyvonal is, ezért $AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$,

$$BOC\angle = AOC\angle = \frac{1}{2} AOB\angle = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}.$$



89. ábra

Az AOC derékszögű háromszög alapján meghatározhatjuk, hogy:

$$R = \frac{AC}{\sin AOC\angle} = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180°}{n}} \text{ és } r = \frac{AC}{\operatorname{tg} AOC\angle} = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}.$$

A szabályos háromszögben:

$n = 3$, $AOC\angle = \frac{180°}{3} = 60°$,

ezért $R = \frac{a}{2 \cdot \sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 60°} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

A szabályos négyszögben (négyzetben):

$n = 4$, $AOC\angle = \frac{180°}{4} = 45°$, ezért $R = \frac{a}{2 \cdot \sin 45°} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 45°} = \frac{a}{2}$.

A szabályos hatszögben:

$n = 6$, $AOC\angle = \frac{180°}{6} = 30°$, ezért $R = \frac{a}{2 \cdot \sin 60°} = a$, $r = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A leggyakoribb szabályos sokszögek beírt és köré írt köreinek a sugarait a 9. táblázatban foglaltuk össze.

9. táblázat

	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\dfrac{a}{2 \cdot \sin\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\dfrac{a}{2 \cdot tg\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Feladat: Fejezzük ki a szabályos n-szög a_n oldalát a köré írt és a beírt köreinek R és r sugaraival!
Számítsuk ki a_n, ha $n = 3, 4, 6$!

Megoldás: Az $R = \dfrac{a_n}{2 \cdot \sin\dfrac{180°}{n}}$ képletből kapjuk, hogy $a_n = 2R \cdot \sin\dfrac{180°}{n}$.

Helyettesítsük be a kapott képletbe az n helyére 3, 4 és 6 értékét, és megkapjuk a szabályos háromszög, négyszög, illetve hatszög oldalát a köré írt kör sugarával kifejezve: $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_6 = R$.

Az $r = \dfrac{a_n}{2 \cdot tg\dfrac{180°}{n}}$ képletből kapjuk, hogy $a_n = 2r \cdot tg\dfrac{180°}{n}$.

Részesetek: $a_3 = 2r\sqrt{3}$, $a_4 = 2r$, $a_6 = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

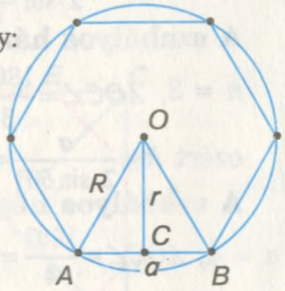
Jegyezd meg, hogy az a_n, r és R egyikének ismeretében kiszámítható a másik két érték.

BŐVEBBEN

Határozzuk meg a szabályos n-szög területét, ha tudjuk, hogy:
1) R a köré írt kör sugara; 2) r a beírt kör sugara;
3) a az oldalhossz.
Figyeljük meg a 90. ábrát! A szabályos sokszög területe: $S = n \cdot S_{AOB\Delta}$.

1) $S_{AOB\Delta} = \dfrac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin AOB\angle$ (90. ábra).
Viszont $AO = BO = R$ és $AOB\angle = \dfrac{360°}{n}$,

így $S_{AOB\Delta} = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot \sin\dfrac{360°}{n}$.
Tehát a szabályos n-szög területe: $S = \dfrac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\dfrac{360°}{n}$.



90. ábra

2) $S_{AOB\Delta} = \frac{a_n}{2} \cdot \frac{1}{2} r$ (90. ábra). Mivel $\frac{a_n}{2} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$, ezért $S_{AOB\Delta} = r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

Tehát a szabályos n-szög területe: $S = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

3) $S_{AOB\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot OC$ (90. ábra). Mivel $AB = a$ és $OC = \frac{\frac{a}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$,

ezért $S_{AOB\Delta} = \frac{a^2}{4\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$, így a szabályos n-szög területe: $S = \frac{na^2}{4\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$.

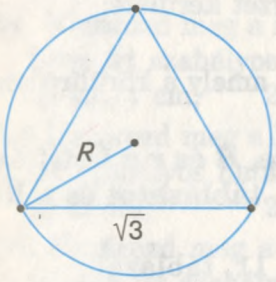
FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Vezesd le a szabályos sokszögbe írt és köré írt körei sugarainak a képletét!
2. Határozd meg a szabályos háromszög, négyszög és hatszög beírt és köré írt körei sugarainak a képletét!
3. Fejezd ki a szabályos n-szög oldalát a beírt és köré írt körének a sugarával!

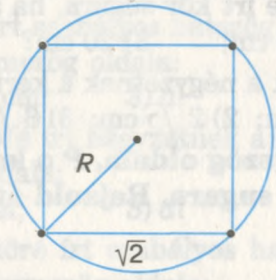
OLDD MEG A FELADATOKAT!

253'. Írd le a szabályos sokszög köré és beírt köre sugarának a képletét: 1) szabályos háromszögre; 2) szabályos négyszögre; 3) szabályos hatszögre vonatkozóan!

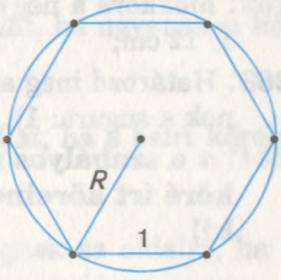
254'. A 91–93. ábrán körvonalba írt szabályos háromszög, négyszög és hatszög látható. Határozd meg a rajz adatai alapján a körvonal sugarát!



91. ábra

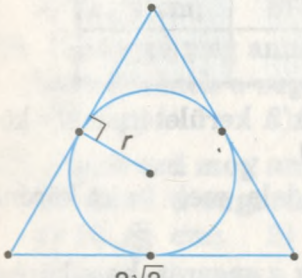


92. ábra

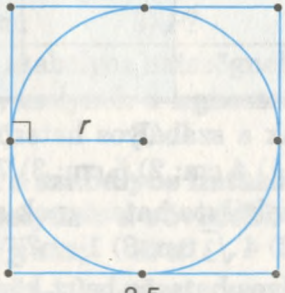


93. ábra

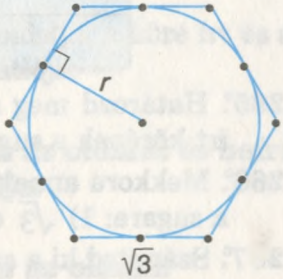
255'. A 94–96. ábrán a körvonal köré írt szabályos háromszög, négyszög és hatszög látható. Határozd meg a rajz adatai alapján a körvonal sugarát!



94. ábra



95. ábra



96. ábra

256°. Határozd meg a szabályos háromszög oldalát, ha a köré írt körének sugara: 1) $4\sqrt{3}$ cm; 2) 5 cm; 3) $6\sqrt{3}$ cm!

257°. Számítsd ki a szabályos háromszög oldalát, ha a beírt körének sugara: 1) $2\sqrt{3}$ cm; 2) 8 cm; 3) $3\sqrt{3}$ cm!

258°. Mekkora a szabályos háromszög beírt körének a sugara, ha a köré írt kör sugara: 1) 10 cm; 2) 12 cm; 3) 16 cm!

259°. Bizonyítsd be, hogy a szabályos háromszög köré írt körének a sugara a beírt körének az átmérőjével egyenlő!

260°. a a szabályos háromszög oldala, P a kerülete, R és r a beírt és a köré írt köreinek a sugara. Rajzold át a 10. táblázatot és töltsd ki!

10. táblázat

a	$2\sqrt{3}$ cm			
R		$4\sqrt{3}$ cm		
r			$6\sqrt{3}$ cm	
P				$9\sqrt{3}$ cm

261°. Egy négyzetbe írt körvonal sugara 4 cm. Számítsd ki:
1) a négyzet oldalát; 2) a négyzet köré írt kör sugarát!

262°. Mekkora a négyzetbe írt kör sugara, ha a négyzet kerülete:
1) 12 cm; 2) 16 cm; 3) 20 cm?

263°. Határozd meg annak a négyzetnek a kerületét, amely a körülírt körének a sugara: 1) $\sqrt{2}$ cm; 2) $2\sqrt{2}$ cm; 3) $6\sqrt{2}$ cm!

264°. a a szabályos négyszög oldala, P a kerülete, R és r a beírt és a köré írt köreinek a sugara. Rajzold át a 11. táblázatot és töltsd ki!

11. táblázat

a	6 cm			
R		$8\sqrt{2}$ cm		
r			10 cm	
P				16 cm

265°. Határozd meg annak a szabályos hatszögnek a kerületét, mely köré írt körének a sugara: 1) 4 cm; 2) 5 cm; 3) 7 cm!

266°. Mekkora annak a szabályos hatszögnek az oldala, mely beírt körének a sugara: 1) $\sqrt{3}$ cm; 2) $4\sqrt{3}$ cm; 3) 1 cm?

267°. Számítsd ki a szabályos hatszög beírt körének a sugarát, ha a köré írt körének a sugara: 1) $\sqrt{3}$ cm; 2) $6\sqrt{3}$ cm; 3) $10\sqrt{3}$ cm!

268. Rajzold át a 12. táblázatot és töltsd ki, ha a szabályos hatszög oldala a, a kerülete P, a beírt és a köré írt körének a sugarai pedig R és r!

12. táblázat

a	20 cm			
R		14 cm		
r			$10\sqrt{3}$ cm	
P				36 cm

269. Határozd meg annak a szabályos háromszögnek az oldalát, mely köré írt és beírt körei sugarainak a különbsége: 1) $\sqrt{3}$ cm; 2) m!

270. Határozd meg a szabályos háromszög köré írt és beírt körének a sugarát, ha azok különbsége: 1) 4 cm; 2) n!

271. Határozd meg a négyzet köré írt és beírt körének a sugarát, ha azok szorzata: 1) $4\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$!

272. Határozd meg a szabályos hatszög köré írt és beírt körének a sugarát, ha azok különbsége: 1) 3 cm; 2) 5 cm; 3) m!

273. Egy körvonalba szabályos háromszöget és négyzetet írtak. Határozd meg a négyzet oldalát, ha a háromszög kerülete: 1) 9 cm; 2) 27 cm; 3) P!

274. Határozd meg a körbeírt szabályos hatszög oldalát, ha ugyanazon kör köré írt szabályos háromszög oldala:
1) $10\sqrt{3}$ cm; 2) $2\sqrt{3}$ cm; 3) a!

275. Határozd meg a kör köré írt négyzetnek az oldalát, ha a beírt körébe írt szabályos hatszög oldala:
1) 15 cm; 2) 17 cm; 3) a!

276. Határozd meg a kör köré írt szabályos hatszögnek az oldalát, ha a körébe írt szabályos háromszög oldala:
1) 21 cm; 2) 18 cm; 3) a!

277. Egy körvonal köré négyzetet és szabályos hatszöget írtak. Mekkora a négyzet kerülete, ha a hatszög kerülete:
1) $12\sqrt{3}$ cm; 2) 36 cm; 3) P?

278. Határozd meg annak a szabályos hatszögnek az oldalát, a köré írt és a beírt körének a sugarát, melynek a leghosszabb átlója:
1) 6 cm; 2) 8 cm; 3) d!

279. Határozd meg annak a szabályos hatszögnek az oldalát és beírt körének a sugarát, melynek a rövidebb átlója:
1) $10\sqrt{3}$ cm; 2) $12\sqrt{3}$ cm; 3) d!

280. Határozd meg a szabályos hatszög átlóit, ha az oldala:
1) 2 cm; 2) 8 cm; 3) a!

281. Két egymást metsző körvonal közös húrja az egyik körbe írt szabályos háromszög oldala és a másik körbe írt szabályos hatszög oldala. Határozd meg a körvonalak középpontjai közötti távolságot, ha a húr hossza: 1) 9 cm; 2) $3\sqrt{3}$ cm; 3) a!

282. Melyik szabályos n-szög oldala lesz egyben a köré írt kör olyan húrja, amely merőleges a körvonal egyik sugarára és felezi azt! Indokold meg a választ!

283. Melyik az a szabályos sokszög, mely beírt körének a sugara kétszer rövidebb az oldalánál?

284. Egy szabályos háromszög oldalaira négyzetet szerkesztettek úgy, hogy azok attól kívülre esnek. Lehetnek-e a négyzetek csúcsai egy szabályos hatszög csúcsai? Indokold meg a választ!

285*. Egy R sugarú körvonalba írt szabályos négyszög két szomszédos oldalának a felezőpontján keresztül egy húrt húztak. Mekkora ez a húr, ha: 1) $R = 4$ cm; 2) $R = 6$ cm?

286*. Egy R sugarú körvonalba szabályos n-szöget írtak, majd az oldalfelező pontokat sorban összekötötték. Határozd meg a kapott sokszög oldalát, ha: 1) $n = 6$; 2) $n = 8$!

287*. Az n mely értékénél lesz a szabályos n-szög oldala:

1) nagyobb a köré írt kör sugaránál;

2) egyenlő a köré írt kör sugarával;

3) kisebb a köré írt kör sugaránál?

288*. Három egybevágó körvonal páronként érinti egymást és kívülről érintenek egy R sugarú kört. Határozd meg a körvonalak sugarát, ha: 1) $R = 2$ cm; 2) $R = 4$ cm!

289*. Egy a oldalú szabályos nyolcszög minden második oldalának felezőpontját sorban összekötötték. Mekkora az így kapott négyzet oldala?

290*. Egy a oldalú szabályos tizenkétszög minden második oldalának felezőpontját sorban összekötötték. Mekkora az így kapott szabályos hatszög oldala?

291*. Bizonyítsd be, hogy 1) $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ahol a_8-cal és r_8-cal jelöltük a szabályos nyolcszög oldalát, illetve a beírt körének sugarát és R-rel a köré írt körének sugarát!

292*. Bizonyítsd be, hogy 1) $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $r_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, ahol a_{12}-vel és r_{12}-vel jelöltük a szabályos tizenkétszög oldalát, illetve a beírt kör sugarát és R-rel a köré írt kör sugarát!

293*. Számítsd ki az a oldalú szabályos n-szög köré írt kör sugarát, ha: 1) $n = 8$; 2) $n = 12$!

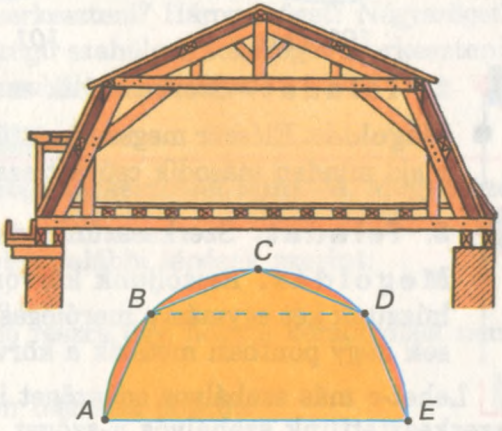
GYAKORLATI ALKALMAZÁS

294. Határozd meg a szabályos hatoldalú anyacsavarhoz szükséges kulcs h nyílását (97. ábra), ha a csavar lapjának a szélessége $a = 2{,}5$ cm. A kulcs és a csavar között 0,5 mm rést kell hagyni!

295. A legegyszerűbb manzárdtető függőleges keresztmetszete egy szabályos nyolcszög fele (98. ábra). Határozd meg a BD keresztgerenda hosszát, a nyolcszög oldalát és az $ABCDE$ manzárdszoba magasságát, ha $AE = 6$ m!



97. ábra



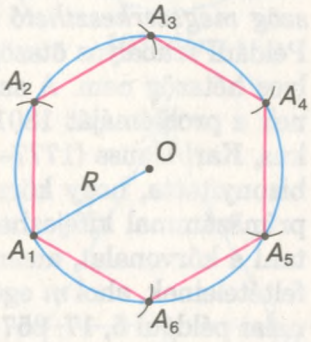
98. ábra

9.§ SZABÁLYOS SOKSZÖGEK SZERKESZTÉSE

Szabályos n-szögeket a köréjük írt kör segítségével szerkeszthetünk.

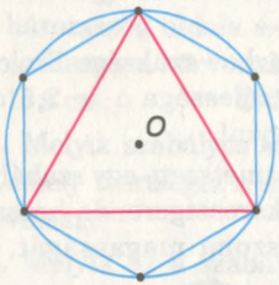
1. feladat. Szerkesszünk szabályos hatszöget!

Megoldás. A szabályos hatoldalú sokszög oldala a köré írt kör R sugarával egyenlő. Rajzoljunk egy R sugarú körvonalat, és vegyünk fel rajta egy tetszőleges A_1 pontot (99. ábra). Majd a körzőnyílást nem változtatva jelöljük ki a körvonalon az A_2, A_3, A_4, A_5 és A_6 pontokat úgy, hogy az $A_1A_2 \cup = A_2A_3 \cup = A_3A_4 \cup = A_4A_5 \cup = A_5A_6$ egyenlőség teljesüljön. A kapott pontokat sorban szakaszokkal összekötve szabályos hatszöget kapunk.

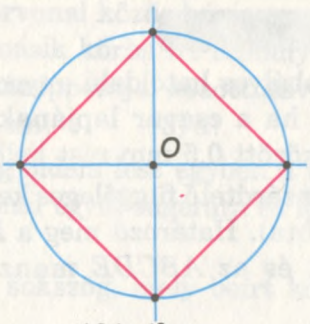


99. ábra

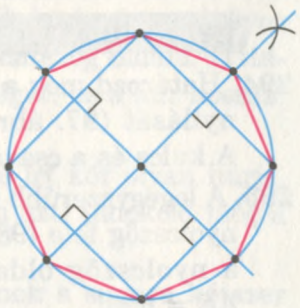
Ahhoz, hogy szabályos n-szöget szerkesszünk, a körvonalat fel kell osztani n egyenlő részre, majd a kapott pontokat sorban össze kell kötni.



100. ábra



101. ábra



102. ábra

2. feladat. Szerkesszünk szabályos háromszöget!

Megoldás. Először megszerkesztünk egy szabályos hatszöget (1. feladat), majd minden második csúcsát szakaszokkal kötjük össze (100. ábra)!

3. feladat. Szerkesszünk szabályos négyszöget!

Megoldás. Rajzoljunk körvonalat, majd a középpontján keresztül húzzunk két egymásra merőleges egyenest (101. ábra). Ezek az egyenesek négy pontban metszik a körvonalat, ezek a négyzet csúcsai.

? Lehet-e más szabályos sokszöget is szerkeszteni? Igen. Ha egyszer már szerkesztettünk szabályos n-szöget, akkor könnyen megszerkeszthetünk egy szabályos $2n$-szöget is.

Szerkesszünk például egy szabályos nyolcszöget! Ehhez előbb meg kell szerkeszteni egy négyzetet (3. feladat). Majd húzzuk meg minden oldal felező merőlegesét (102. ábra). Az oldalfelező merőlegesek is négy pontban metszik a körvonalat. Ezek a pontok és a négyzet csúcsai lesznek a szabályos nyolcszög csúcsai. Ily módon szerkeszthető 16 oldalú vagy 32 oldalú szabályos sokszög is.

Miután már legalább egy szabályos sokszöget megszerkesztettünk, körzővel és vonalzóval egy sor további szabályos sokszög szerkeszthető.

BŐVEBBEN

Felmerülhet a kérdés, *vajon bármelyik szabályos sokszög megszerkeszthető körzővel és vonalzóval*? Nem. Például szabályos ötszög szerkeszthető, de már szabályos hétszög nem. A szabályos n-szögek szerkesztésének a problémáját 1801-ben a híres német matematikus, Karl Gauss (1777–1855) oldotta meg. A tudós bebizonyította, hogy körzővel és vonalzóval csak annyi prímszámmal kifejezhető egyenlő részre lehet felosztani a körvonalat, amennyi eleget tesz a $2^{2^m}+1$ képlet feltételeinek, ahol m egész nem negatív szám. A körvonalat például 5, 17, 257 egyenlő részre lehet felosztani, mivel $5=2^2+1$, $17=2^{2^2}+1$, $257=2^{2^3}+1$.



Karl Friedrich Gauss

Bebizonyosodott továbbá az is, hogy ha a körvonalat összetett számú egyenlő részre szeretnénk osztani körző és vonalzó segítségével, akkor az csak abban az esetben lehetséges, ha az összetett szám prímtényezős felbontásában: 1) a $2^{2^m}+1$ alakú és 2) a 2 hatványai szerepelnek. A körvonalat például 170 egyenlő részre lehet felosztani, mivel $170 = 2 \cdot 5 \cdot 17 = 2 \cdot (2^2+1)(2^{2^2}+1)$.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

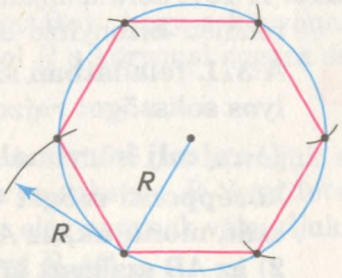
1. Hogyan kell szabályos hatszöget szerkeszteni? Háromszöget? Négyszöget?
2. Magyarázd meg, hogyan kell $2n$-szögű szabályos sokszöget szerkeszteni, ha már megszerkesztettünk egy szabályos n-szöget!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

296'. A 103. ábrán egy szabályos hatszög szerkesztését láthatod. Magyarázd meg a szerkesztés elvét!

297'. Szerkessz szabályos háromszöget az alábbi lépések szerint:
1) körzővel rajzolj egy körvonalat;
2) oszd fel a körvonalat hat egyenlő részre úgy, hogy a körzőnyílást nem változtatod;
3) szakaszokkal köss össze minden második pontot!

298'. Végezd el az alábbi szerkesztést:
1) rajzolj körzővel egy O középpontú körvonalat;
2) húzz tetszőleges egyenest az O ponton keresztül és jelöld A és B betűvel az egyenes és a körvonal metszéspontjait;
3) szerkessz merőleges egyenest az AB egyenesre az O ponton keresztül, az egyenes és a körvonal metszéspontjait jelöld C-vel és D-vel;
4) az A, B, C és D pontokat sorban kösd össze! Milyen sokszöget szerkesztettél?



103. ábra

299°. Szerkessz meg a 104. ábra alapján egy szabályos háromszöget és írd le a sorrendjét!

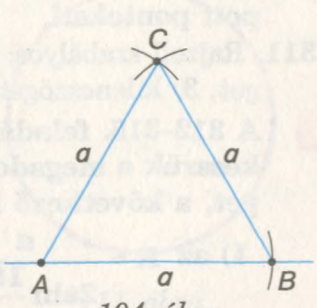
300°. Szerkessz négyzetet olyan körvonalba, melynek sugara: 1) 3 cm; 2) 4 cm; 3) 5 cm!

301°. Írj adott körvonalba szabályos:
1) hatszöget; 2) háromszöget;
3) négyszöget; 4) nyolcszöget!

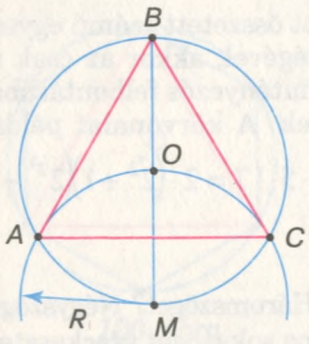
302°. Írj adott körvonal köré szabályos:
1) hatszöget; 2) háromszöget;
3) négyszöget; 4) nyolcszöget!

303°. Szerkessz adott oldalhosszúságú ($AB = a$) szabályos hatszöget!

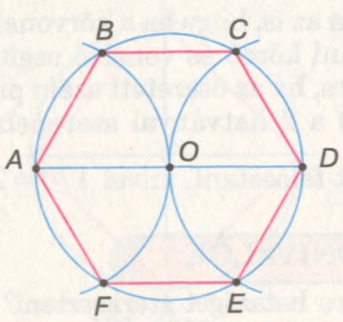
304°. Szerkessz szabályos hatszöget, ha hosszabbik átlója: 1) 8 cm; 2) 10 cm; 3) 12 cm!



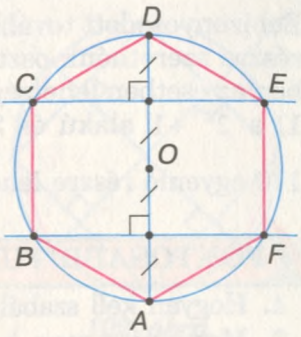
104. ábra



105. ábra



106. ábra



107. ábra

305°. Írj a rombuszba négyzetet úgy, hogy a négyzet oldalai párhuzamosak legyenek a rombusz átlóival!

306°. Adva van egy szabályos n-szög. Hogyan kell szabályos $2n$-szöget szerkeszteni?

307. Bizonyítsd be, hogy a szabályos háromszög oldala a köré írt körének az oldalra merőleges átmérőjét 3 : 1 arányban osztja! Alkalmazd ezt az állítást a szabályos háromszög szerkesztésekor!

308. Szerkessz háromszöget a 105. ábra alapján! Bizonyítsd be, hogy az így kapott háromszög szabályos!

309. A 106. ábrán egy O középpontú körvonal látható. Az AD átmérő végpontjaiból két OA sugarú ívet húztak, melyek a körvonalat a B, F és C, E pontokban metszik. Az A, B, C, D, E, F pontokat sorban összekötötték. Bizonyítsd be, hogy az $ABCDEF$ hatszög szabályos!

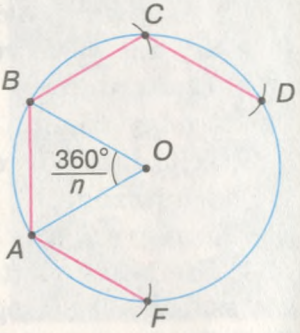
310. A 107. ábra alapján írd le a szabályos hatszög szerkesztésének a sorrendjét! Bizonyítsd be, hogy az $ABCDEF$ hatszög szabályos!

A 311. feladatban szögmérővel, körzővel és vonalzóval kell szabályos sokszöget rajzolni. Ehhez:

1) rajzolj körvonalat, majd szögmérővel rajzolj $\frac{360°}{n}$ nagyságú középponti szöget (108. ábra); így megkaptad az n-szög két csúcsát, mondjuk, az A és a B csúcsot;

2) az AB szakaszt körzőnyílásba véve oszd fel a körvonalat n egyenlő részre és kösd össze a kapott pontokat!

311. Rajzolj szabályos: 1) háromszöget; 2) nyolcszöget; 3) kilencszöget; 4) tízszöget!



108. ábra

A 312–315. feladatban ahhoz, hogy megszerkesszük a megadott a oldalhosszúságú n-szöget, a következő lépéseket kell elvégezni:

1) az $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$ képlettel ki kell szá-

mítani a sokszög köré írt kör sugarát, majd meg kell rajzolni ezt a körvonalat;

2) körzőnyílásba véve az oldalt, fel kell osztani a körvonalat *n* egyenlő részre!

312. Szerkessz szabályos ötszöget, melynek oldala: 1) 3 cm; 2) 4 cm!

313. Szerkessz szabályos kilencszöget, melynek oldala:
1) 2 cm; 2) 4 cm!

314. Szerkessz szabályos tizenegyszöget, melynek oldala:
1) 3 cm; 2) 2 cm!

315. Szerkessz 3 cm oldalú szabályos:
1) nyolcszöget; 2) tizenkétszöget!

316*. Szerkessz adott $AB = a$ oldalú szabályos nyolcszöget!

317*. Szerkessz adott $AB = a$ oldalú szabályos tizenkétszöget!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

318. A négyzet alakú földterületen szabályos nyolcoldalú virágágyást szeretnének kialakítani. Ajánlj megoldási tervet!

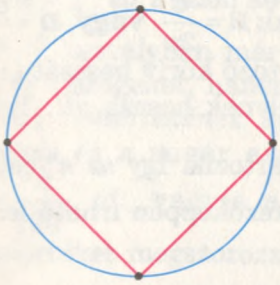
319*. Hogyan lehet csillagötszög alakú virágágyást készíteni?

10. § A KÖRVONAL HOSSZA. A KÖRÍV HOSSZA

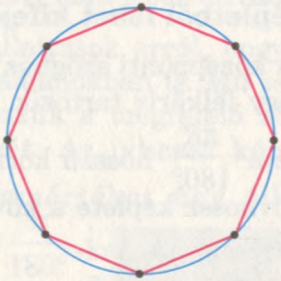
A 6. osztályban tapasztalati úton megállapítottátok, hogy a körvonal hossza a $C = 2\pi R$ képlettel határozható meg, ahol R a körvonal sugara és $\pi \approx 3{,}14$.

Hogyan igazolható ez a képlet?

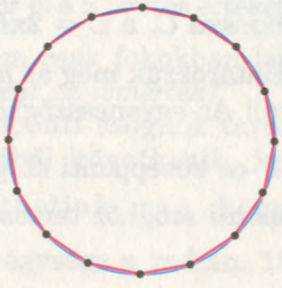
Figyeljétek meg a 109–111. ábrákat! Könnyen belátható, ha növeljük a szabályos sokszög oldalainak a számát, akkor a sokszög P_n kerülete közelíteni fog a köré írt kör C hosszához. Ha az n-t elég nagynak választjuk, akkor a körvonal hossza csak egy kicsit fog eltérni P_n-től.



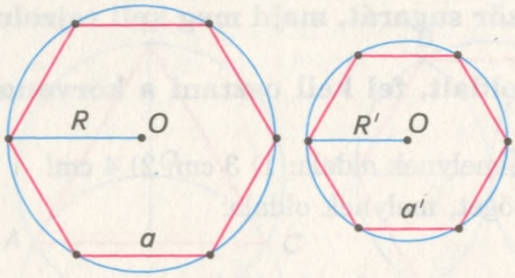
109. ábra



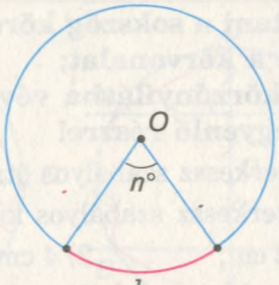
110. ábra



111. ábra



112. ábra



113. ábra

Vezessük le a körvonal hosszának a képletét! Vegyünk két tetszőleges körvonalat (112. ábra). Jelöljük C-vel és C'-vel a körvonalak hosszát, R-rel és R'-rel a körvonalak sugarát! Mind a két körvonalba írjunk azonos oldalszámú szabályos sokszöget! Jelöljük a sokszögek oldalát a_n-nel és a_n'-tel, valamint a kerületeiket P_n-nel és P_nR'-nel! Fejezzük ki az n-szögek kerületét a körvonalak R és R' sugaraival!

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \cdot \sin\frac{180°}{n} \quad \text{és} \quad P_n' = n \cdot a_n' = n \cdot 2R' \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

Osszuk el a kapott egyenlőségeket tagonként: $\frac{P_n}{P_n'} = \frac{2R}{2R'}$! Ha növeljük a sokszög oldalainak a számát, akkor a P_n és a P_n' kerület közelíteni fog a körvonalak C és C' hosszához, és a kerületek $\frac{P_n}{P_n'}$ aránya a körvonalak $\frac{C}{C'}$ hosszának az arányához. Tehát $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ vagy $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Bebizonyítottuk, hogy a **körvonal hosszának és az átmérőjének az aránya minden körvonal esetében ugyanannyi.**

Ezt az arányt a görög π (olv. pi) betűvel jelöljük: $\frac{C}{2R} = \pi$. A π szám irracionális. Közelítő értéke $\pi \approx 3{,}1416$.

Mivel $\frac{C}{2R} = \pi$, ezért a körvonal hosszának a képletét így írhatjuk le:

$$C = 2\pi R.$$

Annak a körvonalnak az R sugarát vagy D átmérőjét, melynek a hossza C, a $C = 2\pi R$ képletből lehet kifejezni: $R = \frac{C}{2\pi}$ vagy $D = \frac{C}{\pi}$.

Határozzuk meg az $n°$-os középponti szöghöz tartozó körív hosszát (113. ábra)! Az egyenesszöghöz egy félkörív tartozik, melynek hossza πR. Tehát az 1°-os középponti szöghöz a $\frac{\pi R}{180°}$ hosszú körív tartozik. Így az $n°$-os középponti szöghöz tartozó l ívhossz képlete a következőképpen írható le:

$$l = \frac{\pi R n°}{180°}.$$

Feladat. A 120°-os középponti szöghöz tartozó körív hossza 4π cm. Határozzuk meg a körvonal sugarát!

Megoldás. Az $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ képletből kapjuk, hogy:

$$R = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi n^\circ} = \frac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi \cdot 120^\circ} = 6 \text{ (cm)}.$$

Jegyezzétek meg, hogy az $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ képlettel úgyszintén meghatározhatjuk:

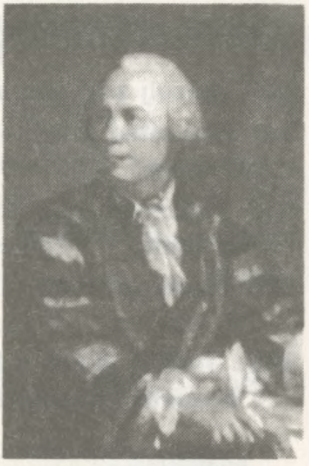
1) a körvonal R sugarát, ha ismerjük a körív l hosszát és a hozzátartozó középponti szög n° fokmértékét;

2) a körívhez tartozó középponti szög n° fokmértékét, ha adva van a körvonal R sugara és a körív l hossza!

BŐVEBBEN

1. A körvonal hosszának és átmérőjének a hányadosát William Jones angol matematikus kezdte a görög π betűvel jelölni 1706-ban. A rövidítés a περιφερεια – periféria szóból ered, ami kerületet jelent. Leonard Euler (1707–1783) a felsőbb matematika módszereivel meghatározta a π közelítő értékét 153 tizedesjegyig.

A π közelítő értékét már az ókorban is megpróbálták meghatározni. A babilóniaiak (i. e. 2000-ben) már megállapították, hogy a kör sugarát hatszor lehet rámérni a körvonalra, és ebből levonták azt a következtetést, hogy a körvonal hossza $6R$-rel egyenlő.



Leonard Euler

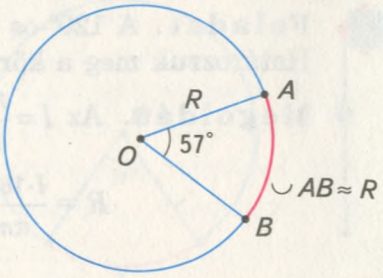
Arkhimédész görög matematikus az i. e. a III. században nagyon egyszerű számot lelt erre az arányra: $\frac{22}{7}$, vagyis $3\frac{1}{7}$. Ez a szám kevesebb, mint 0,002 ezreddel tér el a π pontos értékétől.

2. A 7. osztályban már hallottatok arról, hogy nem csak fokokban lehet mérni a szögeket, hanem radiánokban is. *Mit is jelent az ívmérték?*

A szög ívmértékének nevezzük a megfelelő középponti szöghöz tartozó ívhossz és a sugár arányát. Az ívhossz képletéből következik, hogy $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$, vagyis az ívmértéket úgy állapíthatjuk meg, hogy a fokmértéket megszorozzuk $\frac{\pi}{180^\circ}$-kal. Az ívmérték egysége a radián. 180° ívmértéke p radián, a derékszög $\frac{\pi}{2}$ radián. Egy radián az a szög, amelyhez,

mint középponti szöghöz, a kör sugarával megegyező hosszúságú körív tartozik (114. ábra). Egy radián fokmértéke $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

Mivel $\frac{\pi n^\circ}{180^\circ}$ az ívhez tartozó középponti szög ívmértéke, ezért az ívhossz képletét $l = \alpha R$ alakban is leírhatjuk, ahol a az ívhez tartozó középponti szög ívmértéke. Tehát **a körív hossza a hozzátartozó középponti szög ívmértékének és a körvonal sugarának a szorzatával egyenlő.**



114. ábra

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Bizonyítsd be, hogy minden körvonal hosszának és átmérőjének az aránya állandó!
2. Milyen képlettel számíthatjuk ki a körvonal hosszát?
3. Mennyi a π közelítő értéke?
4. Vezesd le a körív hosszának képletét!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

320'. Rajzolj körvonalat! Mérd meg a sugarát és számítsd ki a hosszát!

321'. Számítsd ki a körvonal hosszát, ha a sugara:
1) 5 cm; 2) 10 cm; 3) 12 cm!

322'. Határozd meg annak a körvonalnak a hosszát, melynek az átmérője:
1) 4 cm; 2) 6 cm; 3) 8 cm!

323'. Határozd meg a körvonalnak a sugarát, ha a hossza:
1) 4π cm; 2) 14π cm; 3) 2 cm!

324°. Jelöld *R*-rel a körvonal sugarát, *D*-vel az átmérőjét és *C*-vel a hosszát. Rajzold át a 13. táblázatot és töltsd ki!

13. táblázat

R	2,5 cm				11 cm
D		20 cm		9,6 cm	
C			$18{,}4\pi$ cm		

325°. Rajzolj körvonalat, melynek hossza:
1) 6π cm; 2) 18π cm; 3) 20π cm!

326°. Hogyan változik meg a körvonal hossza, ha a sugarát:
1) 5 cm-rel növeljük; 2) 3 cm-rel csökkentjük; 3) 2-szeresére növeljük?

327°. Egy szabályos háromszög oldala $6\sqrt{3}$ cm.
Határozd meg:
1) a beírt körének a hosszát; 2) a köré írt körének a hosszát!

328°. Egy négyzet oldala 8 cm. Határozd meg:
1) a beírt körének a hosszát; 2) a köré írt körének a hosszát!

329°. Határozd meg a téglalap köré írt körnek a hosszát, ha oldalai:
1) 5 cm és 12 cm; 2) 7 cm és 24 cm; 3) 12 cm és 16 cm!

330°. Határozd meg a rombusz beírt körének a hosszát, ha oldala és szöge:
1) 6 cm és 30°; 2) 4 cm és 45°; 3) 8 cm és 60°!

331°. Egy szabályos hatszög oldala 10 cm.
Határozd meg:
1) a beírt körének a hosszát; 2) a köré írt körének a hosszát!

332°. Határozd meg a 6 cm sugarú kör alábbi középponti szögeihez tartozó íveinek a hosszát: 1) 30°; 2) 60°; 3) 120°!

333°. Az $n°$-os középponti szöghöz tartozó ív hossza l. Határozd meg a körvonal sugarát, ha: 1) $l = 3$ cm és $n° = 15°$; 2) $l = 12\pi$ cm és $n° = 20°$; 3) $l = 6$ cm és $n° = 18°$!

334°. Az R sugarú körvonal egyik ívének hossza l. Határozd meg az ívhez tartozó középponti szög fokmértékét, ha: 1) $l = 4\pi$ cm és $R = 9$ cm; 2) $l = 6\pi$ cm és $R = 10$ cm; 3) $l = 8\pi$ cm és $R = 18$ cm!

335. Egy rombusz tompaszögéből húzott magassága a hegyesszög csúcsától számítva b és c hosszúságú szakaszokra osztja a szembeni oldalt. Határozd meg a rombusz beírt körének a hosszát, ha:
1) $b = 6$ cm és $c = 4$ cm; 2) $b = 5$ cm és $c = 8$ cm!

336. Egy rombuszba körvonalat írtak. Mekkora a körvonal hossza, ha a rombusz átlói: 1) 18 cm és 24 cm; 2) 12 cm és 16 cm!

337. Egy egyenlőszárú trapéz alapjai a és b, a szára c. Határozd meg a beírt körének a hosszát, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 18$ cm és $c = 10$ cm;
2) $a = 32$ cm, $b = 18$ cm és $c = 25$ cm!

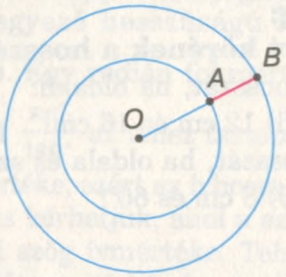
338. Egy egyenlőszárú trapéz alapjai a és b, az átlója d. Határozd meg a köré írt körének a hosszát, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 18$ cm és $d = 20$ cm;
2) $a = 16$ cm, $b = 8$ cm és $d = 13$ cm!

339. Számítsd ki a szabályos háromszög oldalát, ha:
1) a beírt körének a hossza 8π cm;
2) a köré írt körének a hossza 14π cm!

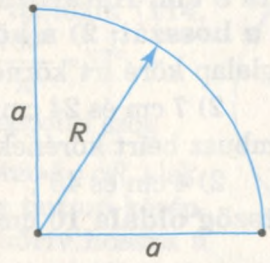
340. Számítsd ki a szabályos hatszög oldalát, ha:
1) a beírt körének hossza $6\sqrt{3}\pi$ cm;
2) a köré írt körének hossza 2π cm!

341. Hogyan kell megszerkeszteni azt a körvonalat, melynek hossza:
1) két körvonal hosszának az összegével;
2) két körvonal hosszának a különbségével egyenlő?

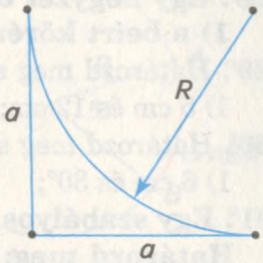
342. Határozd meg a körvonal hosszát, ha az:
1) 10 cm-rel; 2) m-mel hosszabb az átmérőjénél!



115. ábra



116. ábra



117. ábra

343. Két koncentrikus körvonal hossza C és C_1. Határozd meg az AB körgyűrű szélességét (115. ábra), ha:

1) $C = 10\pi$ cm, $C_1 = 4\pi$ cm; 2) $C = 16\pi$ cm, $C_1 = 6\pi$ cm!

344. Hasonlítsd össze a 116. és a 117. ábrán látható síkidomok kerületét!

345. *R* a körvonal sugara, *l* az *n*°-os középponti szöghöz tartozó ív hossza. Rajzold át a 14. táblázatot és töltsd ki!

14. táblázat

R	15 cm		12 cm
$n°$	45°	40°	
l		20π cm	2π cm

346. Határozd meg az l hosszúságú ív végpontjait összekötő húr hosszát, ha az ív: 1) 60°-os; 2) 90°-os; 3) 120°-os középponti szöghöz tartozik!

347. Határozd meg az a hosszúságú húrhoz tartozó ív hosszát, ha az ív:

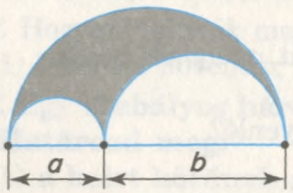
1) 60°-os; 2) 90°-os; 3) 120°-os középponti szöghöz tartozik!

348. Határozd meg a 118–120. ábrákon látható síkidomok besatírozott részeinek kerületét!

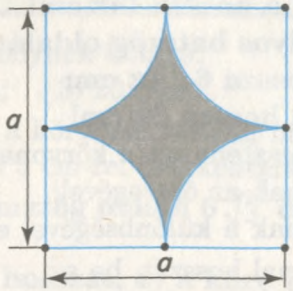
349*. Három körvonal páronként kívülről érinti egymást. Határozd meg az érintési pontokra illeszkedő körvonal sugarát, ha a három körvonal sugara:

1) 9 cm, 16 cm, 20 cm; 2) 1 cm, 2 cm, 3 cm!

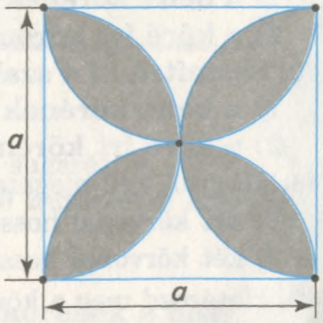
350*. Egy körvonalban a középpontjától egy irányba két párhuzamos húrt húztak, melyek hossza a és b. A húrok közötti távolság c. Határozd meg



118. ábra



119. ábra



120. ábra

a körvonal hosszát, ha: 1) $a = 40$ cm, $b = 48$ cm, $c = 8$ cm; 2) $a = 120$ cm, $b = 32$ cm, $c = 38$ cm!

351*. Egy körvonal átmérőjét, melynek hossza $2R$, n egyenlő részre osztották fel. Minden részre mint átmérőre körvonalat rajzoltak. Mekkora ezen körvonalak hosszának az összege?

352*. Egy 60°-os középponti szöghöz tartozó ív 14 cm-rel hosszabb az ív végpontjait összekötő húrnál. Határozd meg a húr hosszát!

353*. Egy 4 cm sugarú körvonal 120°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza egy másik körvonal hosszával egyenlő. Mekkora ennek a körvonalnak a sugara?

354*. Két egymást metsző körvonal közös húrjához az egyik körvonalban 45°-os, a másikban 60°-os középponti szög tartozik. Melyik körvonal hossza nagyobb?

355*. **Két egymást metsző körvonal közös húrjához az egyik körvonalban 60°-os, a másikban 120°-os középponti szög tartozik. Határozd meg a körvonalak hosszának az arányát!**

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

356. Hány oszlopra van szükség egy 60 m átmérőjű kör alakú tér bekerítéséhez, ha az oszlopok közötti ívhossz körülbelül másfél méter?

357. Egy fa vastagságának meghatározásához (átmerő) elegendő megmérni, hányan érik körbe, vagyis mekkora a kerülete (a körvonal hossza). Milyen vastag az a fa, melynek a kerülete: 1) 2 m; 2) 2,5 m?

358. Egy dróttekercs átmérője 0,5 m. Hány méter drót van a tekercsen, ha a tekercs menetszáma 80?

359. A nagyobb terheket a 121. ábrán látható csigával emelik fel. Milyen magasra tudja felemelni ez a csiga a terhet, ha az átmérője 20 cm és a művelet során kilenc fordulatot tesz meg?

360. Hogyan lehet meghatározni, milyen mélyen van a víz a kerekes kútban, ha meghatározható a dob átmérője és annak a gerendának az átmérője, amire feltekeredik a lánc?

361. Határozd meg az egyenlítő hosszát, ha a Föld átmérője 6370 km!



121. ábra

11. § A KÖRLAP ÉS RÉSZEINEK TERÜLETE

Már tudod, hogy a körlap a síknak az a része, melyet egy körvonal határol (122. ábra).

Vezessük le a körlap területének a képletét. Írjunk az R sugarú körbe $ABCD \ldots F$ szabályos sokszöget (123. ábra), és számítsuk ki a területét! A sokszög csúcsaiba húzott sugarak a sokszöget n háromszögre bontják, amelyek egybevágóak az AOF háromszöggel.

Ezért $S_{ABCD\ldots F} = n \cdot S_{AOF\Delta}$. Húzzuk meg a sokszög OK apotémáját! Mivel $S_{AOF\Delta} = \frac{1}{2} AF \cdot OK$, ezért $S_{ABCD\ldots F} = \frac{1}{2}(n \cdot AF \cdot OK) = \frac{P \cdot OK}{2}$, ahol P a sokszög kerülete. Ha n elég nagy, akkor a sokszög P kerülete közelít a $C = 2\pi R$ körvonal hosszához, az OK apotéma a körvonal R sugarához, a sokszög $S_{ABCD\ldots F}$ területe pedig a körlap S területéhez.

Ezért a körlap területe: $S = \frac{C \cdot R}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$.

Tehát: $\mathbf{S = \pi R^2}$.

Feladat. Határozzuk meg a körlap sugarát, ha a területe 25p cm²!

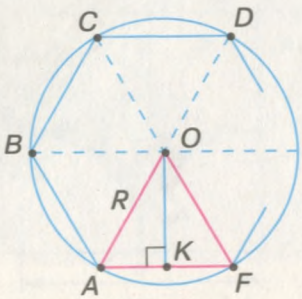
Megoldás. Az $S = 2\pi R^2$ képletből $R^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{25\pi}{\pi} = 25\ (\text{cm}^2)$. Következésképpen $R = \sqrt{25} = 5\ (\text{cm})$.

Az S területű körlap R sugarát vagy D átmérőjét az $\mathbf{S = \pi R^2}$ képletből számítjuk ki: $\boldsymbol{R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}}$ vagy $\boldsymbol{D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}}$.

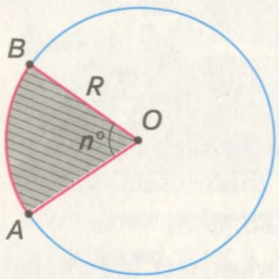
A körlapnak azt a részét, melyet két sugár és egy ív határol, ***körcikknek*** nevezzük.



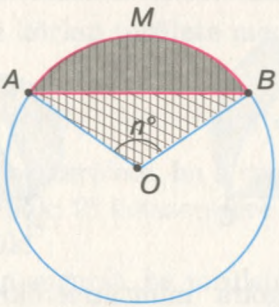
122. ábra



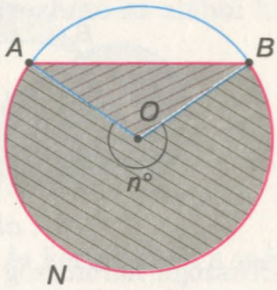
123. ábra



124. ábra



125. ábra



126. ábra

A 124. ábrán az AOB körcikk be van satírozva. A körcikket határoló ívet a *körcikk ívének* nevezzük.

Tegyük fel, hogy az R sugarú körlap AOB körcikkének középponti szöge $n°$. Akkor az 1°-os középponti szöggel rendelkező körcikknek a területe $\frac{\pi R^2}{360°}$, ebből következik, hogy annak a körcikknek a területe, melynek a középponti szöge $n°$, $S = \frac{\pi R^2 \cdot n°}{360°}$-kal egyenlő.

Körszeletnek nevezzük a körlap azon részét, melyet egyik húrja és a hozzá tartozó körív határol.

A 125. ábrán az AMB körszelet be van satírozva.

Vizsgáljunk meg egy körszeletet, melynek íve $n°$-os szögön nyugszik! Ha $n° < 180°$ (125. ábra), akkor a körszelet területe az AOB körcikk területének és az AOB háromszög területének a különbségével egyenelő, ha $n° > 180°$, akkor az összegükkel (126. ábra).

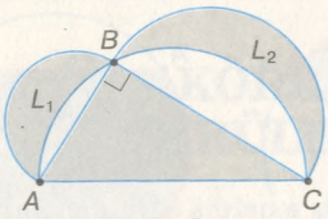
? Hogyan lehet meghatározni annak a körszeletnek a területét, melyhez 180°-os középponti szög tartozik. Ez egy félkörlap, melynek területe $\frac{\pi R^2}{2}$.

BŐVEBBEN

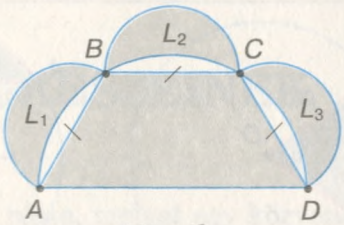
1. Az ókori görögök megpróbáltak körzővel és vonalzóval adott körlappal azonos területű négyzetet szerkeszteni, és így meghatározni a körlap területét. Ez a feladat *a kör négyszögesítése* nevet kapta. A feladat egyik megoldását a khioszi Hippokratész vázolta fel (Khiosz az Égei-tenger egyik délen fekvő szigete), aki az i. e. V században élt. A kör négyszögesítését, az úgynevezett holdacskák (olyan síkrészek, melyeket két körvonal íve határol) négyszögesítésével próbálta megoldani. Hippokratész legegyszerűbb holdacskái, az L_1 és L_2 (127. ábra), a sík részét képezték, melyet egy körvonalba írt ABC



Hippokratész



127. ábra



128. ábra

derékszögű háromszög befogóira mint átmérőkre szerkesztett körvonalak és a derékszögű háromszög félköre határol. A tudós bebizonyította, hogy a két hold területének az összege a háromszög területével egyenlő: $S_{L_1} + S_{L_2} = S_{ABC\Delta}$. Egy másik feladat megoldásával Hippokratész még közelebb került a kör négyszögesítéséhez. Egy félkörbe egyenlő szárú trapézt, egy szabályos hatszög felét rajzolta. A három egyenlő oldalra (128. ábra) mint átmérőre körvonalat szerkesztett. Ebben az esetben a három egyenlő hold területe a trapéz területével egyenlő: $S_{L_1} + S_{L_2} + S_{L_3} = S_{ABCD}$.

Ily módon a matematika történetében először sikerült görbe vonalakkal határolt síkidom területével azonos területű sokszöget szerkeszteni. A tudós úgy gondolta, hogy ez megtehető a körlappal is. Elképzelései azonban nem váltak valóra. Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939) német matematikus a XIX. század végén bebizonyította, hogy a kör négyszögesítése megoldhatatlan. Hippokratész elméletét kellőképpen értékelte a tudomány, amely a mai napig használja a „hippokratészi holdacskák" fogalmát. A köznyelvben a kör négyszögesítése szókapcsolatot a megoldhatatlan problémákra használjuk.

2. A körcikk, latinul sector, metszőt jelent. A körszelet, idegen szóval szegmens, szintén latin eredetű, jelentése szakasz.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Vezesd le a körlap területének a képletét!
2. Mi a körcikk? Mi a körszelet?
3. Vezesd le a körcikk területének a képletét!
4. Magyarázd meg, hogyan kell meghatározni a körszelet területét!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

362'. Rajzolj körvonalat, és mérd meg a sugarát! Határozd meg a körvonallal határolt síkrész (a körlap) területét!

363'. Számítsd ki a körvonal területét, ha sugara:
1) 4 cm; 2) 6 cm; 3) 9 cm!

364'. Határozd meg a körvonal területét, ha átmérője:
1) 10 cm; 2) 12 cm; 3) 16 cm!

365'. Számítsd ki a körvonal sugarát, ha területe:
1) 25π cm^2; 2) 9π cm^2; 3) 36π cm^2!

366'. Rajzolj olyan körvonalat, melynek területe:
1) 4π cm^2; 2) 16π cm^2; 3) 49π cm^2!

367°. Bizonyítsd be, hogy a körlap területe meghatározható az alábbi képletekkel is:

1) $S = \frac{\pi D^2}{4}$; 2) $S = \frac{C}{2} \cdot R$; 3) $S = \frac{C^2}{4\pi}$!

368°. Hogyan változik a körlap területe, ha a sugarát:

1) háromszorosára növeljük; 2) kétszeresére csökkentjük;

3) négyszeresére növeljük!

369°. Határozd meg a körlap sugarát, ha területének és kerületének a mérőszáma azonos!

370°. Határozd meg a körlap területét, ha kerülete:

1) π cm; 2) 6π cm; 3) 8π cm!

371°. A szabályos háromszög oldala $4\sqrt{3}$ cm.

Határozd meg a háromszög:

1) beírt; 2) köré írt körének a területét!

372°. Számítsd ki a négyzet beírt és köré írt körének a területét, ha a négyzet oldala: 1) 10 cm; 2) 14 cm; 3) 18 cm!

373°. Határozd meg a körlap területét, ha a bele írt téglalap oldalai:

1) 6 cm és 8 cm; 2) 10 cm és 24 cm; 3) 12 cm és 16 cm!

374°. A szabályos hatszög oldala 12 cm.

Határozd meg a háromszög:

1) beírt; 2) köré írt körének a területét!

375°. Bizonyítsd be, hogy a körcikk területe meghatározható az $S = \frac{lR}{2}$ képlettel, ahol l a körcikk íve, R a körlap sugara!

376°. Határozd meg a 6 cm sugarú körlap körcikkének területét, ha a hozzá tartozó középponti szög fokmértéke: 1) 10°; 2) 20°; 3) 100°!

377°. Határozd meg a 18 cm sugarú körlap körcikkének területét, ha a hozzá tartozó körív: 1) 2π cm; 2) 5π cm; 3) 8π cm!

378°. Számítsd ki a körszelet területét, ha a körlap sugara R és a körív:

1) 90°-os; 2) 60°-os szögön nyugszik!

379. Bizonyítsd be, hogy a körvonal hossza meghatározható a $C = 2\sqrt{\pi S}$ képlettel, ahol S a körlap területe!

380. Határozd meg a körvonal hosszát, ha a körlap területe:

1) 4π cm^2; 2) π cm^2; 3) 81π cm^2!

381. S a körlap területe, R a körlap sugara, C pedig a körvonal hossza. Rajzold át a 15. táblázatot és töltsd ki!

15. táblázat

R	10 cm				3 cm		
C		20π cm		2π cm		12π cm	
S			25π cm^2				9π cm^2

382. Melyik síkidom területe nagyobb: az a hosszúságú szakaszra mint átmérőre rajzolt körlapé, vagy a $2a$ hosszúságú szakaszra mint átmérőre rajzolt félkörlapé?

383. Hányszor nagyobb az R sugarú körlap területe két $\frac{R}{2}$ sugarú körlap területének az összegénél?

384. Mekkora a szabályos háromszög beírt köre és köré írt köre területeinek az aránya?

385. Határozd meg a körlap átmérőjét, ha területe egyenlő:
1) egy 3 cm és egy 4 cm sugarú körlap területeinek az összegével;
2) egy 10 cm és egy 8 cm sugarú körlap területeinek a különbségével!

386. Határozd meg az alábbi síkidomok beírt és köré írt körei területének az arányát: 1) szabályos háromszög; 2) négyzet; 3) szabályos hatszög!

387. Határozd meg a szabályos háromszög beírt és köré írt köreinek a területét, ha a háromszög területe: 1) $12\sqrt{3}$ cm^2; 2) $3\sqrt{3}$ cm^2!

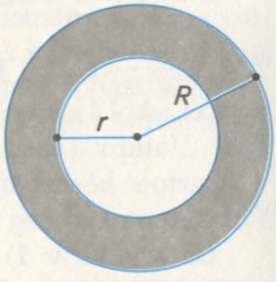
388. Határozd meg a négyzet beírt és köré írt köreinek a területét, ha a négyzet területe: 1) 16 cm^2; 2) 36 cm^2!

389. Két koncentrikus körvonal sugara R és r (129. ábra). Határozd meg az ezekkel a körvonalakkal határolt körgyűrű területét!

390. Határozd meg a körgyűrű területét, ha a határoló koncentrikus körvonalak sugara: 1) 2 cm és 8 cm; 2) 4,6 cm és 5,4 cm!

391. Egy körlapra körvonalat húztak. Határozd meg a körvonal sugarát, ha az két egyenlő területű részre osztja a körlapot!

392. Egy R sugarú körcikk területe S. Határozd meg a körcikkhez tartozó középponti szög fokmértékét, ha:
1) $R = 3$ cm; $S = 4\pi$ cm^2; 2) $R = 10$ cm; $S = 20\pi$ cm^2!



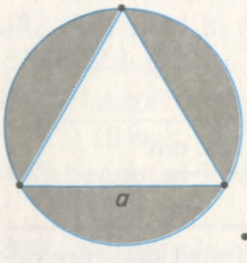
129. ábra

393. Egy körcikk területe S, és $n°$-os középponti szög tartozik hozzá. Határozd meg a körlap területét, ha:
1) $S = 25$ cm^2; $n° = 18°$; 2) $S = 14$ cm^2; $n° = 45°$!

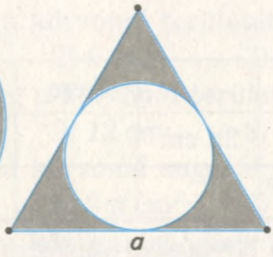
394. A 130–133. ábrán szabályos érintő és húr háromszög, illetve négyzet van. Határozd meg a besatírozott rész területét, ha a körvonal sugara R!

395*. Egy S területű körlap köré írt rombusz hegyesszöge 30°. Mekkora a rombusz területe?

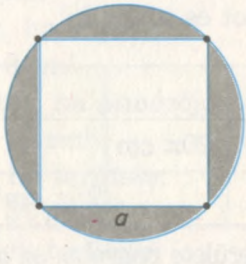
396*. 1) Egy szabályos háromszög területe Q. Határozd meg a háromszög beírt és köré írt köreivel határolt körgyűrű területét (134. ábra)!
2) Általánosítsd a feladatot szabályos n-szögre vonatkozóan!



130. ábra



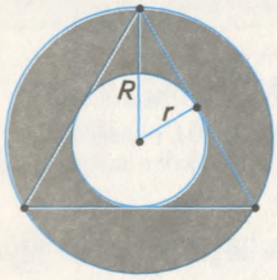
131. ábra



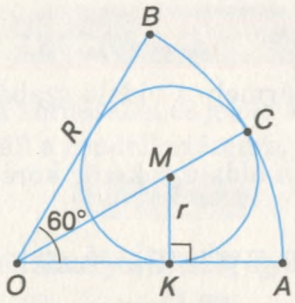
132. ábra



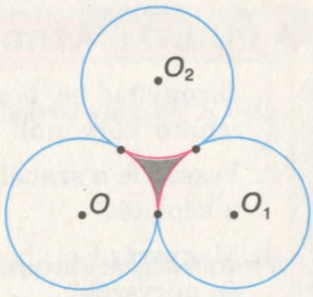
133. ábra



134. ábra



135. ábra

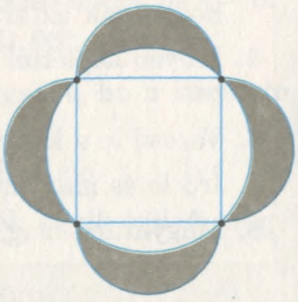


136. ábra

397*. Két koncentrikus körvonal által határolt körgyűrűben a nagyobbik körvonal egyik húrja érinti a kisebbik körvonalat. Határozd meg a körgyűrű területét, ha a húr hossza m!

398*. Egy körszelet íve 120°-os szögön nyugszik, hossza l. Határozd meg az ebbe a körszeletbe írt körlap területét!

399*. Egy körcikkbe, melyhez 60°-os középponti szög tartozik, körvonalat írtak (135. ábra). Határozd meg a körcikk területének és a beírt körlap területének az arányát!



137. ábra

400*. Három R sugarú körvonal páronként kívülről érinti egymást (136. ábra). Határozd meg annak a görbe vonalú háromszögnek a területét, melyet az érintési pontok közötti körívek határolnak!

401*. Egy a oldalú négyzet köré és minden oldalára kívülről mint átmérőre körvonalat írtak (137. ábra). Határozd meg a besatírozott holdak területének az összegét!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

402. Két vízvezetékcsövet egy csőre szeretnének kicserélni úgy, hogy az áteresztő képesség ne változzon. Mekkora átmérőjű csövet kell vásárolni, ha a két cső átmérője 6 cm és 8 cm?

403. Határozd meg annak a fának a keresztmetszetét, melynek a kerülete: 1) 90 cm; 2) 1,5 m.

404. Mekkora vastag réteget kell lefejteni a henger alakú drótról, hogy áthúzható legyen egy 18,5 mm átmérőjű résen, ha a dróttekercs keresztmetszete 314 mm^2?

405. Az előgyártmány átmérője 30 mm. A megmunkálás utáni alkatrész keresztmetszete olyan négyzet, melynek oldala 20 mm. Hány százalékot képez a hulladék?



406. A kör alakú virágágyást 0,5 m széles járda veszi körül. Az járda külső kerülete 25 m. Mennyi homokra van szükség a járda beborításához, ha 1 m^2 úthoz 0,8 dm^2 homokot használnak fel?

ISMÉTLŐ KÉRDÉSEK

1. Bizonyítsd be, hogy bármely n oldalú szabályos sokszögbe és köré is írható körvonal!
2. Vezesd le a szabályos n oldalú sokszög köré- és beírt köre sugarának a képletét!
3. Magyarázd el, hogyan szerkeszthető szabályos hatszög, háromszög és négyszög!
4. Bizonyítsd be, hogy bármely körvonal sugarának és a körvonal hosszának az aránya állandó!
5. Milyen képlettel határozható meg a körvonal hossza, a körlap területe?
6. Vezesd le a körlap területének a képletét!
7. Írd le és magyarázd meg a körcikk területének a képletét!
8. Magyarázd meg, hogyan határozható meg a körszelet területe!

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll a rendelkezésedre.

1. feladatsor

1° Határozd meg az n oldalú szabályos sokszög egyik középponti szögét, ha $n = 36$!

A. 5°. **B.** 12°. **C.** 20°. **D.** 10°.

2° Határozd meg a szabályos n oldalú sokszög egyik belső szögét, ha $n = 6$!

A. 100°. **B.** 110°. **C.** 120°. **D.** 90°.

3° Határozd meg a négyzet beírt körének a sugarát, ha a kerülete 24 cm!

A. 5 cm. **B.** 3 cm. **C.** 4 cm. **D.** 6 cm.

4 Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek egyik külső szöge 20°?

A. 18. **B.** 20 . **C.** 15. **D.** 10.

5* Határozd meg a szabályos hatoldalú sokszög beírt körének a sugarát, ha a körülírt körének a sugara $8\sqrt{3}$ cm!

A. 8 cm. **B.** 10 cm. **C.** 24 cm. **D.** 12 cm.

2. feladatsor

1° Határozd meg a körvonal sugarát, ha a hossza 20π cm!

A. 5 cm. **B.** 15 cm. **C.** 20 cm. **D.** 10 cm.

2° Határozd meg a 9 cm sugarú körvonal 20°-os középponti szögéhez tartozó ívének a hosszát!

A. 4π cm. **B.** 2π cm. **C.** π cm. **D.** 6 cm.

3° Egy körlap területe $64\ \pi$ cm^2. Mekkora a sugara?

A. 8 cm. **B.** 16 cm. **C.** 24 cm. **D.** 12 cm.

4 Egy körlap területe $16\ \pi$ cm^2. Mekkora a körvonal hossza (a kerülete)?

A. 6π cm. **B.** 12π cm. **C.** 10π cm. **D.** 8π cm.

5* Egy rombusz hegyesszöge 30°, oldala 12 cm. Mekkora a rombuszba írt körvonal hossza?

A. 6π cm. **B.** 12π cm. **C.** 3π cm. **D.** 8π cm.

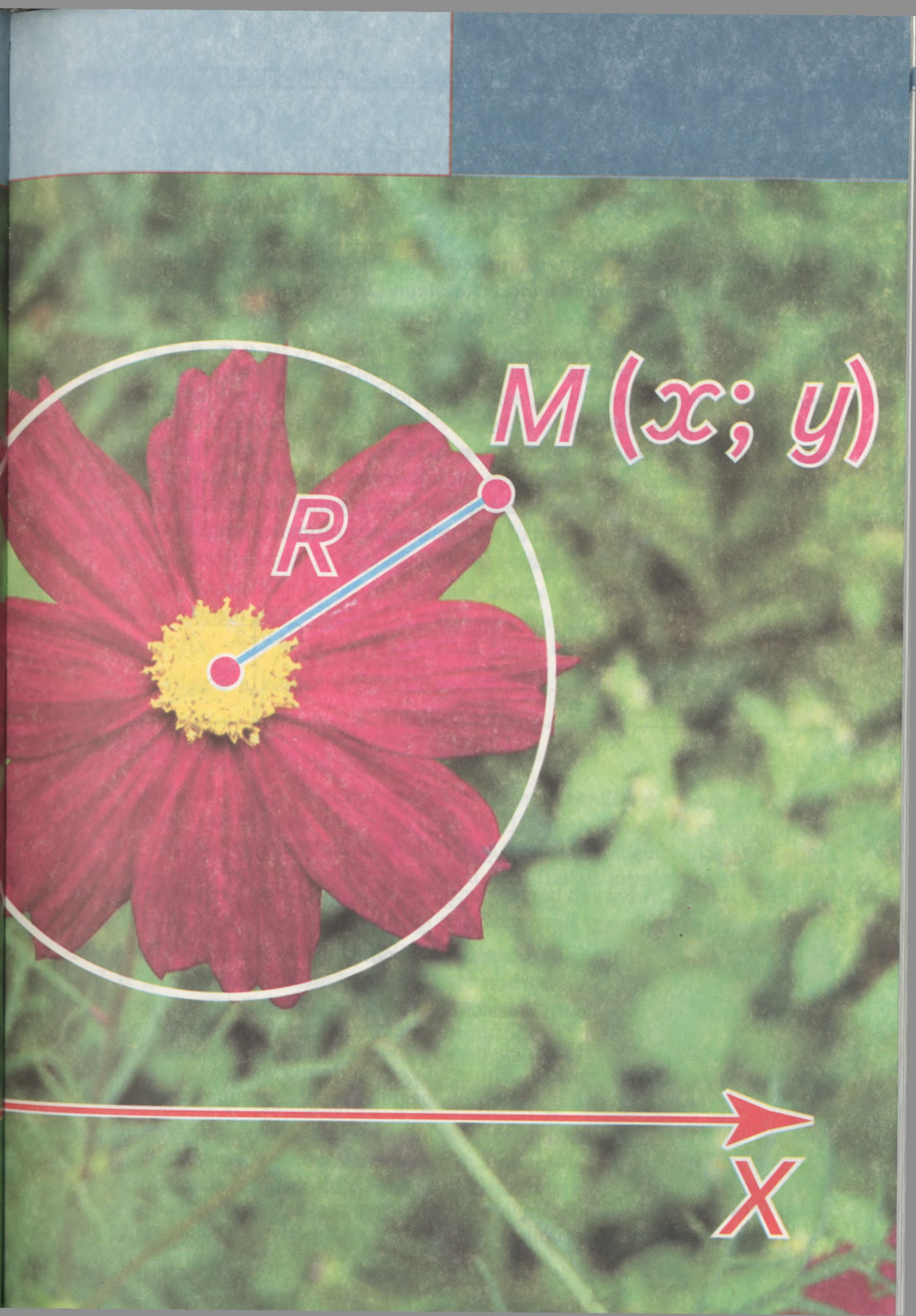
3. FEJEZET

DESCARTES-FÉLE KOORDINÁTÁK A SÍKON

Ebben a fejezetben megtudod:

- mi a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer, és hogyan határozható meg a pont helye ebben a rendszerben;
- hogyan határozható meg végpontjainak a koordinátáival megadott szakasz hossza és a felezőpontjának a koordinátája;
- mi a görbe egyenlete; mi a körvonal és az egyenes egyenlete;
- milyen egyenletei vannak az egyenesnek;
- mi a koordináta-módszer és hogyan alkalmazható ez a módszer mértani és gyakorlati feladatok megoldásánál

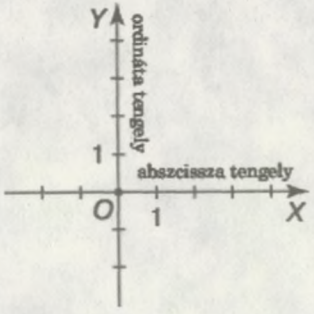



M (x; y)
R
X

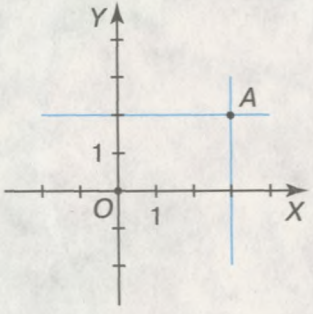
12. § DESCARTES-FÉLE KOORDINÁTÁK A SÍKON

Az algebraórákon már megtanultad, hogyan kell alkalmazni a *Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert a síkon* (138. ábra). *Koordináta-síknak* nevezzük azt a síkot, melyen fel van tüntetve a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer.

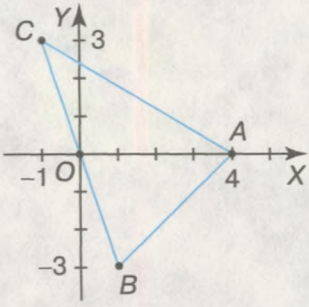
A koordináta-sík minden pontjához egyértelműen hozzá rendelhető egy rendezett számpár és fordítva, minden rendezett számpárnak egyetlen pont felel meg. Az ilyen rendezett számpárt a *pont koordinátáinak* nevezzük *az adott koordináta-rendszerben*. Emlékezz vissza, ahhoz, hogy meghatározzuk a pont koordinátáit, meg kell húznunk két egyenest párhuzamosan a koordináta-tengelyekkel, majd meg kell jelölnünk az egyenesek és a tengelyek metszéspontját. A kapott számokból álló rendezett számpár a pont koordinátái. A 139. ábrán az A pont koordinátái: $A(3; 2)$.



138. ábra



139. ábra



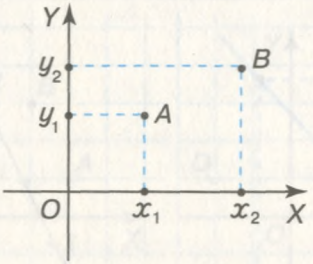
140. ábra

F e l a d a t. Adva van három pont: $A(4; 0)$, $B(1; -3)$ és $C(-1; 3)$. Lehetnek-e ezek a pontok egy háromszög csúcsai?

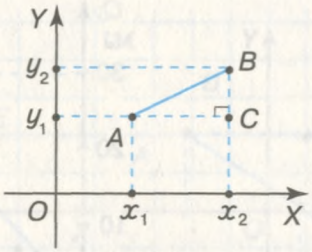
M e g o l d á s. Ábrázoljuk az adott három pontot a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben (140. ábra). Látható, hogy az A, B és C pont nem egy egyenesre illeszkedik. Ezért az ABC háromszög létezik.

? Alátámasztható-e az előbbi feladat eredménye? Igen, például a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával. Ehhez viszont tudnunk kell, hogyan határozható meg a szakasz hossza a végpontok megfelelő koordinátáinak ismeretében.

Tétel (két pont közötti távolság meghatározása a pontok koordinátái alapján).
Ahhoz, hogy meghatározzuk két pont távolságát, az adott pontok megfelelő koordinátáinak a különbségét négyzetre emeljük, a négyzeteket összeadjuk, majd a kapott eredményből gyököt vonunk.



141. ábra



142. ábra

Adva van: A Descartes-féle XOY derékszögű koordináta-rendszer (141. ábra), $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$.

Bizonyítsuk be: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$!

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az A és a B pont az első negyedben van, és $x_1 < x_2; y_1 < y_2$ (141. ábra)! Kössük össze az A és a B pontot szakasszal, majd a pontokon keresztül húzzunk a koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyeneseket (142. ábra)! Jelöljük C-vel ezen egyenesek metszéspontját! A kapott ABC háromszög C szöge derékszög, befogói $AC = x_2 - x_1$ és $BC = y_2 - y_1$. Az AB átfogó hossza a keresett távolság. Pitagorasz tétele alapján $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Ebből következik, hogy $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. A többi esetet ellenőrizd önállóan!

? Vajon függ-e a képlet a pontok koordináta-rendszeren belüli helyétől? Nem.

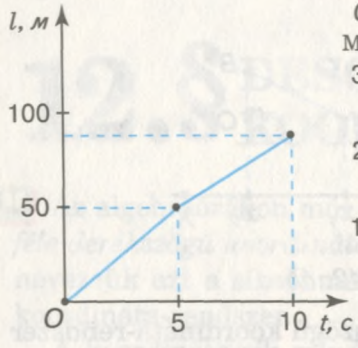
BŐVEBBEN

1. A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer René Descartes (1596–1650) híres francia tudósról kapta a nevét. Descartes jelentős eredményeket ért el a filozófiában, matematikában, fizikában és fiziológiában. Matematikai kutatásai szervesen kötődnek a filozófiai és a fizikai munkásságához. „Geometria" (1637) című munkájában először vezette be a változó és a függvény fogalmát, melyet ma a latin ábécé kis x és y betűjével jelölünk. Descartes meghatározta az összefüggést a szakaszok és a számok között, ami még jobban ötvözte az algebrát és a geometriát, és hozzájárult a matematika új fejezetének, *az analitikus mértan* megszületéséhez.

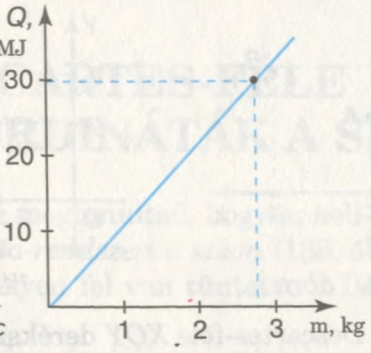


René Descartes

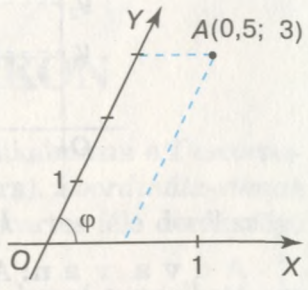
2. A derékszögű koordináta-rendszert széleskörűen alkalmazzák a tudományban, a technikában és a gyakorlatban. A fizika tananyagából már tudhatod, hogy ilyen koordináta-rendszerben ábrázolják például a mozgás grafikonját (143. ábra), a nyersfa égéshőjének az alakulását a fűtőanyag tömegétől függően (144. ábra) stb. Gyakran előfordul,



143. ábra



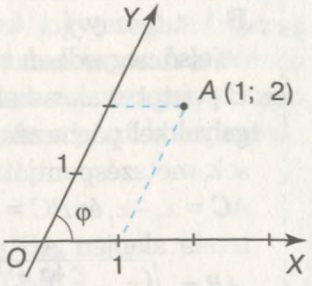
144. ábra



145. ábra

hogy a koordináta-rendszer tengelyei nem merőlegesek, és skáláik nem azonos beosztásúak (145. ábra). Az ilyen esetekben *affin* koordináta-rendszerről beszélünk.

3. A történelmi források arról tanúskodnak, hogy René Descartes affin koordináta-rendszert alkalmazott (146. ábra), méghozzá csak az első negyedet. Ebben a koordináta-rendszerben is meghatározható két pont távolsága. Ilyenkor azonban figyelembe kell venni a tengelyek φ hajlásszögét (146. ábra).



146. ábra

Az $A(x_1; y_1)$ pont és az origó távolsága az

$AO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2xy\cos\varphi}$ képlettel határozható meg,

míg az $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$ pontok között a távolság:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi}.$$

FONTOSABB TUDNIVALÓK

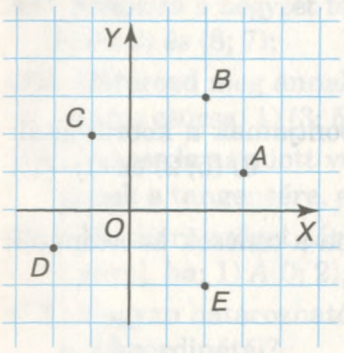
1. Magyarázd el, hogyan kell megrajzolni a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert!
2. Hogyan nevezzük a tengelyeket? A tengelyek metszéspontját?
3. Mit nevezünk koordináta-síknak?
4. Hogyan határozzuk meg a pont koordinátáját?
5. Fogalmazd meg és bizonyítsd be, hogyan határozható meg a koordinátáikkal megadott pontok távolsága!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

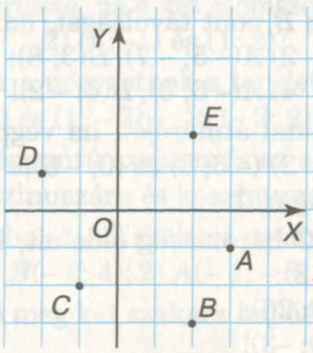
407'. Olvasd le a 147., 148., 149. ábrákon feltüntetett pontok koordinátáit!

408'. Vegyél fel egy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert! Jelöld az $A(1; 1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; -1)$, $D(-1; 1)$ pontokat!

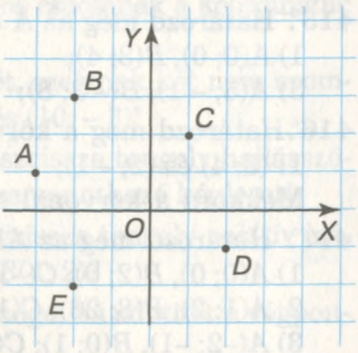
409'. Milyen előjelűek a különböző negyedekhez tartozó pontok koordinátái? Töltsd ki a 16. táblázatot!



147. ábra



148. ábra



149. ábra

16. táblázat

	I. negyed	II. negyed	III. negyed	IV. negyed
Az abszcissza előjele				
Az ordináta előjele				
Az M pont koordinátái	$M(x; y)$	$M(-x; y)$	$M(-x; -y)$	$M(x; -y)$

410'. Rajz nélkül állapítsd meg, az alábbi pontok mely koordináta-negyedhez tartoznak: $A(-145; 200)$, $B(358; -422)$, $C(218; 3390)$, $D(-139; -247)$, $E(-371; 2108)$, $F(792; 6203)$, $K(953; -712)$, $L(-37401; 47732)$!

411'. Írd le a B pont koordinátáit, ha azok az $A(3; 4)$ ponttal:

1) egyenlő abszcisszájúak és ellentett ordinátájúak;
2) egyenlő ordinátájúak, viszont ellentett abszcisszájúak;
3) ellentett abszcisszájúak és ordinátájúak;
4) egyenlő abszcisszájúak és egyenlő ordinátájúak!

412°. Az $A(3; 2)$ ponton keresztül húzz a koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyeneseket! Illeszkednek-e a $B(-3; 2)$, $C(2; 3)$, $D(3; -2)$ pontok ezekre az egyenesekre?

413°. Adva van az A és a B pont: 1) $A(-5; -2)$ és $B(-1; -4)$; 2) $A(2; 4)$ és $B(2; -4)$; 3) $A(3; 1)$ és $B(-3; 1)$. Metszi-e az AB szakasz a koordináta-tengelyeket? Indokold meg a feleletet!

414°. Határozd meg a pont koordinátái alapján ennek a pontnak a távolságát a tengelyektől! Töltsd ki a 17. táblázatot!

17. táblázat

A pont koordinátái	(5; -1)	(-5; -1)	(5; 1)	(-5; 1)	(-2; -4)	(-2; 4)	(2; -4)	(2; 4)
A pont és az abszcissza tengely távolsága								
A pont és az ordináta tengely távolsága								

415°. Határozd meg az A és B pont távolságát, ha:
1) $A(0; 0)$, $B(3; 4)$; 2) $A(-5; -7)$, $B(3; 8)$;
3) $A(5; -1)$, $B(-3; 8)$; 4) $A(-6; 3)$, $B(4; -2)$!

416°. Határozd meg a körvonal átmérőjét, ha végpontjainak a koordinátái:
1) (3; 4) és (2; –1); 2) (–6; 3) és (0; –5); 3) (5; 2) és (1; –1)!
Mekkora a körvonal sugara?

417°. Határozd meg az ABC háromszög oldalait, ha a csúcsok koordinátái:
1) $A(0; 0)$, $B(2; 0)$; $C(-1; 3)$;
2) $A(1; 2)$, $B(8; 26)$; $C(19; 26)$;
3) $A(-2; -1)$, $B(0; 1)$; $C(0; -3)$!

418°. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú, ha a csúcsok koordinátái:
1) $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$; $C(3; -3)$;
2) $A(2; -3)$, $B(3; 0)$; $C(-1; -2)$;
3) $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$; $C(2; -1)$!

419°. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög derékszögű, ha a csúcsok koordinátái:
1) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$; $C(3; 1)$;
2) $A(5; 1)$, $B(7; 2)$; $C(9; -2)$;
3) $A(-2; -1)$, $B(0; 1)$; $C(0; -3)$!

420°. Az A és B pont távolsága d. Határozd meg az x értékét, ha:
1) $A(2; 3)$, $B(x; 1)$, $d = 2$; 2) $A(-1; x)$, $B(3; 2x)$, $d = 5$;
3) $A(5; x)$, $B(2; 4)$, $d = 3$.

421. Határozd meg a koordináta-tengely azon pontjait, melyek azonos távolságra vannak az alábbi pontoktól: 1) (–1; 1) és (3; 5); 2) (2; –1) és (–2; 1)!

422. Határozd meg a háromszög oldalait, ha az oldalfelező pontok koordinátái:
1) (5; 1), (9; 4), (9; –2); 2) (1; 1), (–1; –1), (1; –2)!

423. A derékszögű háromszög két csúcsának koordinátái:
1) $A(2; 5)$, $B(3; 2)$; 2) $A(1; 4)$, $B(9; 6)$.
Lehet-e a harmadik csúcs a $C(8; 8)$; $D(9; 4)$; $O(4; -1)$; $M(8; 7)$ pont?

424. Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcsát, ha a másik három csúcs koordinátái: 1) $A(2; 5)$, $B(8; 13)$, $C(16; 9)$; 2) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 1)$!

425. Egy téglalap három csúcsának koordinátái: 1) (2; 5), (3; 2), (8; 7); 2) (4; – 1), (1; 2), (–1; 0). Határozd meg a negyedik csúcs koordinátáit!

426. Egy négyzet két csúcsának koordinátái: 1) (0; 0) és (1; 2); 2) (– 1; – 1) és (2; 0). Melyik két pont lehet a négyzet másik két csúcsa?

427. Az $ABCD$ négyszög csúcsai $A(5; -1)$, $B(-7; -6)$, $C(-12; 6)$ és $D(0; 11)$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög: 1) paralelogramma; 2) rombusz; 3) négyzet!

428. Milyen fajtájú az $ABCD$ négyszög, ha:
1) $A(-1; -2)$, $B(-2; -4)$, $C(-6; -2)$ és $D(-5; 0)$;
2) $A(0; 8)$, $B(-6; 0)$, $C(2; -6)$ és $D(8; 2)$?

429. Mekkora a négyzet területe, ha a két szomszédos csúcsának a koordinátái: 1) (3; 2) és (8; 7); 2) (4; –1) és (1; 2)?

430. Határozd meg annak a négyzetnek a területét, melynek két nem szomszédos csúcsa: 1) (3; 5) és (1; – 3); 2) (– 2; 2) és (10; – 3)!

431*. Vezess le az adott végpontú szakasz és az abszcissza tengely hajlásszögének a tangensére, szinuszára és koszinuszára vonatkozó képletet!

432*. Mekkora szöget zár be az AB szakasz az abszcissza tengely pozitív irányával, ha: 1) $A(0; 2)$, $B(-2; 4)$; 2) $A(-1; -3)$, $B(4; 2)$?

433*. Hogyan határozható meg két szakasz hajlásszöge, ha adottak a végpontok koordinátái?

434*. Szögei szerint milyen fajtájú az adott háromszög (hegyesszögű, derékszögű vagy tompaszögű), melynek csúcsai az alábbi pontok: 1) $A(0; 0)$, $B(3; 1)$, $C(1; 7)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(4; 8)$, $C(10; 6)$?

435*. Számítsd ki az alábbi pontokkal meghatározott ABC háromszög területét: 1) $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 5)$; 2) $A(4; 2)$, $B(9; 4)$, $C(7; 6)$!

436*. Számítsd ki annak a rombusznak a területét, melynek három csúcsa az $A(-3; 8)$, $B(1; 5)$, $C(4; 1)$ pont!

437*. Mekkora az $A(-2; 0)$, $B(0; -1)$, $C(2; 0)$, $D(3; 2)$ és $E(-1; 3)$ pontok által meghatározott ötszög területe?

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

438. Hogyan lehet egy négyzetrácsos lapon $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt rajzolni, ha a: 1) egy négyzet oldala; 2) két négyzet oldala?

439. Hogyan lehet egy négyzetrácsos lapon olyan derékszögű háromszöget rajzolni, melynek csúcsai a rácspontokban vannak, átfogója vízszintes rácsvonalon van és: 1) egyenlő szárú; 2) nem egyenlő szárú?

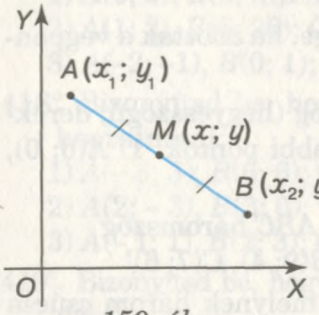
440. Lehet-e rácspont a szabályos: 1) háromszög; 2) hatszög minden csúcsa? Indokold meg a választ!

441. Egy hat méter magas létra alsó foka 1 méterre van a faltól. Mennyivel kerül lejjebb a létra teteje, ha az alját még 0,5 méterrel távolabb húzzuk a faltól? A feladat megoldásánál alkalmazz koordináta-rendszert!

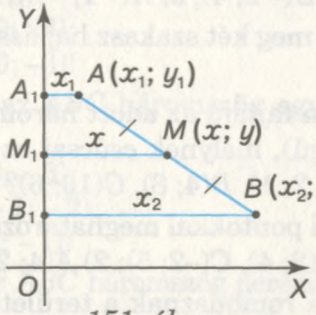


13. § A SZAKASZ FELEZŐPONTJÁNAK A KOORDINÁTÁI

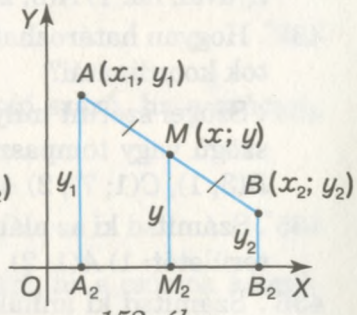
A szakaszvégpontok koordinátáinak ismeretében nemcsak a szakasz hosszát lehet meghatározni, hanem a felezőpont koordinátáit is.



150. ábra



151. ábra



152. ábra

Tétel (a szakasz felezőpontjának koordinátáiról).
A szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak a számtani közepe.

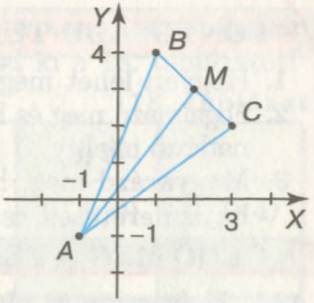
A d v a v a n : A Descartes-féle XOY derékszögű koordináta-rendszer (150. ábra), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Az $M(x; y)$ pont az AB szakasz felezőpontja.

B i z o n y í t s u k b e : $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$!

B o z o n y í t á s : Tételezzük fel, hogy az A és a B pont az első negyedben van, és $x_1 < x_2$, illetve $y_1 > y_2$ (150. ábra). Húzzunk az A, B és M ponton keresztül az OX tengellyel párhuzamos egyenest (151. ábra). Az egyenesek és az OY tengely metszéspontjait jelöljük A_1, B_1 és M_1 ponttal. Az AA_1B_1B négyszög trapéz, melynek alapjai $AA_1 = x_1$ és $BB_1 = x_2$. A rajz alapján $MM_1 = x$. Mivel $AM = MB$ (a feltétel alapján) és $MM_1 \| AA_1 \| BB_1$, így MM_1 az AA_1B_1B trapéz középvonala. Tehát $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Hasonlóan igazoljuk, hogy $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Ehhez az A, B és M ponton keresztül az OY tengellyel párhuzamos egyenest húzunk (152. ábra). Az egyenesek és az OX tengely metszéspontjait jelöljük sorrendben A_2, B_2 és M_2 ponttal. Az AA_2B_2B trapéz, melynek alapjai $AA_2 = y_1$ és $BB_2 = y_2$. A rajz alapján $MM_2 = y$. Mivel $AM = MB$ (a feltétel alapján) és $MM_2 \| AA_2 \| BB_2$, így MM_2 az AA_2B_2B trapéz középvonala. Tehát $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. A többi esetet vizsgáld meg egyedül!

? Vajon függ-e a képlet a pontok koordináta-rendszerbeli helyétől? Nem függ.



153. ábra

Feladat. Számítsuk ki az $A(-1; -1)$, $B(1; 4)$, $C(3; 2)$ pontokkal meghatározott háromszög AM súlyvonalát!

Megoldás. Az M pont a BC oldal felezőpontja (153. ábra), ezért $x = \frac{1+3}{2} = 2$ és $y = \frac{4+2}{2} = 3$.

Az AM súlyvonal hossza az A és M pontok távolságával egyenlő.

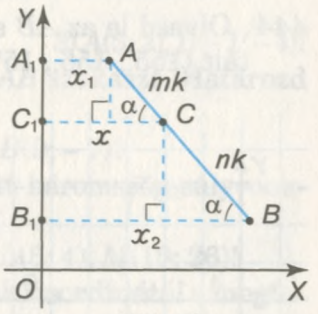
Így $AM = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk egy háromszög súlyvonalainak a hosszát a háromszög csúcsainak koordinátai alapján, meg kell határozni a súlyvonalak talppontjának koordinátáit, majd ezeknek a pontoknak a távolságát a csúcsoktól.

BŐVEBBEN

1. Felmerülhetett a kérdés: *hogyan lehet meghatározni a szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáit?* Vizsgáljuk meg ezt az esetet!

Legyenek az AB szakasz végpontjainak, illetve ezt a szakaszt $m : n$ arányba osztó C pontnak a koordinátái sorrendben $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x; y)$ (154. ábra). Alkalmazzuk a k arányossági együtthatót: $AC = mk$ és $BC = nk$. Húzzuk meg az AA_1, BB_1 és CC_1 egyeneseket párhuzamosan az OX tengellyel! Az A és a C ponton keresztül húzzunk a CC_1 és BB_1 egyenesekre merőleges egyeneseket! Legyen az $ABB_1\angle = \alpha$, akkor $ACC_1\angle = \alpha$ (bizonyítsd be önállóan).



154. ábra

Megállapíthatjuk, hogy $x = x_1 + mk\cos\alpha$ és $x_2 = x + nk\cos\alpha$. A második egyenlőségből fejezzük ki a cos α-át, és helyettesítsük be az első egyenlőségbe, majd fejezzük ki x-et: $\cos\alpha = \frac{x_2 - x}{nk}$; $x = x_1 + mk \cdot \frac{x_2 - x}{nk}$ vagy $x = x_1 + m \cdot \frac{x_2 - x}{n}$.

Ebből következik, hogy $nx = nx_1 + mx_2 - mx$ vagy $(m+n)\cdot x = nx_1 + mx_2$.

Vagyis $x = \frac{n}{m+n}x_1 + \frac{m}{m+n}x_2$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $y = \frac{n}{m+n}y_1 + \frac{m}{m+n}y_2$.

2. A szakasz felezőpontjának, illetve a szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáinak a képlete nemcsak a derékszögű koordináta-rendszerben érvényes, hanem az affinban is. Ezt az állítást később a „Vektorok” témakörön belül fogjátok bizonyítani.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Hogyan lehet meghatározni a szakasz felezőpontjának a koordinátáit?
2. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a szakasz felezőpontjának koordinátáira vonatkozó tételt!
3. Magyarázd meg, hogyan kell meghatározni a háromszög súlyvonalát, ha ismeretesek csúcsainak a koordinátái!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

442'. Helyesek-e az alábbi képletek:

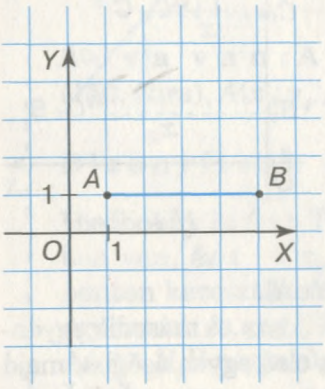
1) $x=\frac{x_1+x_2}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2}{3}$; 2) $x=\frac{x_1+x_1}{2}$, $y=\frac{y_2+y_2}{2}$;

3) $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$?

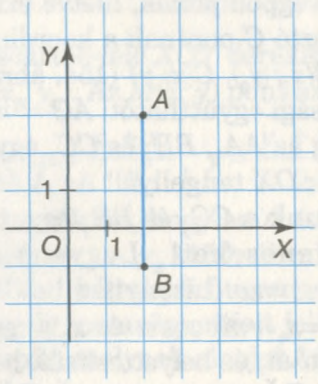
Indokold meg a választ!

443'. Igazak-e az alábbi állítások: 1) a szakasz felezőpontjának ordinátája a végpontok koordinátáinak a számtani közepével egyenlő; 2) a szakasz felezőpontjának abszcisszája a végpontok ordinátáinak a számtani közepével egyenlő; 3) a szakasz felezőpontjának abszcisszája a végpontok abszcisszáinak a számtani közepével egyenlő, ordinátája pedig az ordinátáinak a számtani közepével?

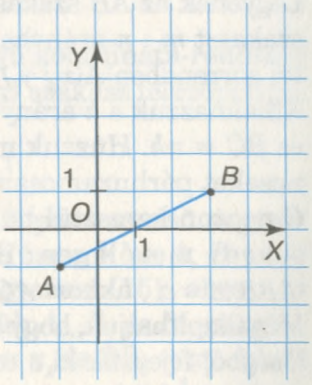
444'. Olvasd le az AB szakasz végpontjainak és felezőpontjának a koordinátáit (155., 156., 157. ábra)!



155. ábra



156. ábra



157. ábra

445°. Számítsd ki azon szakasz felezőpontjának a koordinátáit, melynek végpontjai:

1) $A(3; -1)$, $B(-1; 1)$;
2) $A(5; 4)$, $B(2; 1)$;
3) $A(5; 7)$, $B(11; 17)$!

446°. Lehet-e az M pont a HP szakasz felezőpontja, ha:

1) $M(3; 3)$, $H(1; -1)$, $P(4; 5)$;
2) $M(-2; -3)$, $H(3; 0)$, $P(-1; -2)$;
3) $M(7; 9)$, $H(12; 13)$, $P(2; 5)$?

447°. Az O pont az AB szakasz felezőpontja. Két pont koordinátái alapján számítsd ki a harmadik pont koordinátáit! Töltsd ki a 18. táblázatot!

18. táblázat

A pont	(1; 4)	(4; - 6)		(5; - 2)	(3; 7)	
O pont	(- 2; - 1)		(- 6; 8)		(- 4; 0)	(- 1; 4)
B pont		(- 4; 6)	(3; - 3)	(2; 0)		(1; - 4)

448°. Határozd meg az ABC háromszög oldalfelező pontjainak a koordinátáit, ha:
1) $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$, $C(3; -3)$; 2) $A(2; -3)$, $B(3; 0)$, $C(-1; -2)$;
3) $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(2; -3)$!

449°. Rajzolj paralelogrammát az alábbi csúcsai alapján:
1) $A(-4; 1)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -4)$;
2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $C(-2; 16)$, $D(2; 8)$;
3) $A(1; -2)$, $B(2; 1)$, $C(4; -1)$, $D(-1; 0)$!
Határozd meg az átlók metszéspontjának a koordinátáit!

450°. Az a egyenes átmegy egy körvonal középpontján, és az A, illetve a B pontban metszi a körvonalat. Határozd meg a körvonal középpontjának a koordinátáit, ha:
1) $A(-5; 2)$, $B(1; -4)$; 2) $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$; 3) $A(5; 2)$, $B(-1; -4)$!

451. A P, Q és T pont négy egyenlő részre osztja az AB szakaszt. Határozd meg ezeknek a pontoknak a koordinátáit, ha:
1) $A(-5; 2)$, $B(-3; -6)$; 2) $A(1; 3)$, $B(9; -7)$!

452. Határozd meg az alábbi pontokkal meghatározott háromszög súlyvonalait:
1) $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; 1)$; 2) $K(0; 0)$, $L(6; 4)$, $M(10; 26)$!

453. Bármely paralelogramma átlói metszéspontjának koordinátái a megfelelő csúcsok koordinátáinak a számtani közepével egyenlők. Bizonyítsd be!

454. Adva van az $ABCD$ paralelogramma három csúcsa. Határozd meg az átlók metszéspontjának és a negyedik csúcs koordinátáit, ha:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $D(2; 8)$!

455. Mekkora az $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ trapéz középvonala, ha:
1) $A(-5; 0)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -4)$;
2) $A(1; -4)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 1)$, $D(5; -2)$?

456. Határozd meg az alábbi pontokkal meghatározott háromszög köré írt kör középpontjának a koordinátáit, ha:
1) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(5; -1)$; 2) $A(-1; 6)$, $B(-5; 3)$, $C(-2; -1)$!

457*. Az ABC háromszög oldalfelező pontjai A_1, B_1 és C_1. Számítsd ki az A, B és C pontok koordinátáit, ha:
1) $A_1(0; 0)$, $B_1(2; 0)$, $C_1(-1; 3)$; 2) $A_1(1; 2)$, $B_1(8; 26)$, $C_1(19; 26)$;
3) $A_1(-2; -1)$, $B_1(0; 1)$, $C_1(0; -3)$; 4) $A_1(3; 4)$, $B_1(2; -1)$, $C_1(0; 2)$!

458*. Bizonyítsd be, hogy a háromszög oldalfelező pontjai abszcisszáinak (ordinátáinak) az összege egyenlő a csúcsok abszcisszáinak (ordinátáinak) összegével!

459*. Egyértelműen meghatározza-e a téglalapot két csúcsa és az átlók metszéspontja, ha: 1) a két csúcs szomszédos; 2) a két csúcs nem szomszédos?

460*. Ha a négyszög csúcsainak koordinátáira igaz, hogy a nem szomszédos csúcsok abszcisszáinak az összege, illetve az ordináták összege megfelelően egyenlő, akkor ez a négyszög paralelogramma. Bizonyítsd be!

461*. Egy trapéz szárfelező pontjainak abszcisszái (ordinátái) egyenlők. Párhuzamosak-e a trapéz alapjai az ordináta (abszcissza) tengellyel? Indokold meg a feleletet!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

462. Egy szakasz végpontjai rácspontok. Igaz-e, hogy a felezőpont is rácspont lesz?

463. Hogyan kell egy négyzetrácsos lapra szakaszt rajzolni úgy, hogy mérések és pótszerkesztés nélkül meg lehessen határozni a felezőpontot?

464. Egy háromszög csúcsai rácspontok. Húzd meg mérések nélkül a háromszög súlyvonalait! Vajon a háromszög súlypontja mindig az egyik rácspont lesz? Indokold meg a feleletet!

465. Az egymástól 100 méterre lévő két turista egyszerre hallotta meg a túravezető hangját. Melyik az a legrövidebb távolság, ami elválasztja a turistákat az idegenvezetőtől, ha közöttük pontosan félúton egy 2,5 m kerületű fa állt?



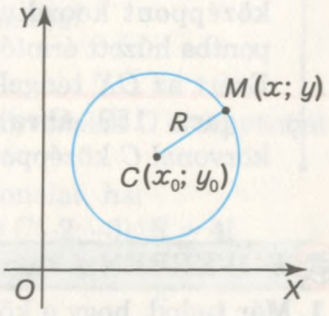
14. § A GÖRBE EGYENLETE. A KÖRVONAL EGYENLETE

Az x és y változókat tartalmazó kétismeretlenes egyenlet egy *görbe egyenlete*, ha teljesül a következő két tulajdonság: 1) a görbe minden pontjának a koordinátái az egyenlet gyökei; 2) bármely két szám, amely az egyenlet gyöke, a görbe valamely pontjának koordinátája.

Tétel (a körvonal egyenlete).
A $C(x_0; y_0)$ középpontú R sugarú körvonal egyenlete $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Adva van: A Descartes-féle XOY derékszögű koordináta-rendszer (158. ábra), egy $C(x_0; y_0)$ középpontú R sugarú körvonal.

Bizonyítsuk be: Az adott körvonal egyenlete $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$!



158. ábra

Bizonyítás: Vegyük a körvonal tetszőleges $M(x; y)$ pontját! A körvonal meghatározása értelmében $CM = R$ vagy $CM^2 = R^2$. Fejezzük ki a CM távolságot a C és az M pont koordinátáival: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. (1)
Mivel az M pontot tetszőlegesen választottuk ki, így a körvonal bármelyik pontja kielégíti az (1) egyenletet.
Ellenőrizzük a másik feltételt: az $M_1(x_1; y_1)$ pont koordinátái kielégítik az (1) egyenletet. Ebben az esetben igaz az $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=R^2$ vagy az $R=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ egyenlőség. Az utolsó egyenlőség azt mutatja, hogy az $M_1(x_1; y_1)$ pont R távolságra van a $C(x_0; y_0)$ ponttól, vagyis a körvonal középpontjától. Tehát az $M_1(x_1; y_1)$ pont illeszkedik ehhez a körvonalhoz.

Ahhoz, hogy egy görbét egyenlettel fejezzünk ki egy adott koordináta-rendszerben, két (elégséges és szükséges) feltételt kell bizonyítani: 1) ha a pont az F görbe egyik pontja, akkor a koordinátái kielégítik az F görbe egyenletét; 2) ha egy pont koordinátái kielégítik az F görbe egyenletét, akkor ez a pont illeszkedik a görbére.

Következmény: **Ha a körvonal középpontja az origó, akkor a körvonal egyenlete $x^2 + y^2 = R^2$.**

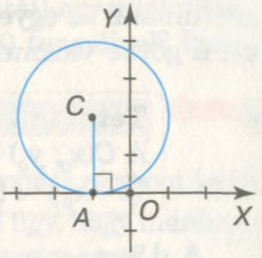
Könnyen belátható, mivel az origó koordinátái $O(0; 0)$, így $x_0 = 0, y_0 = 0$ és az (1) egyenlet a következő alakban írható le: $x^2+y^2=R^2$.

A körvonal egyenleteinek sajátosságait a 19. táblázat tartalmazza.

19. táblázat

A körvonal sugara	A körvonal középpontja	A körvonal egyenlete
R	$C(x_0; y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
	$C(0; 0)$	$x^2 + y^2 = R^2$

Feladat. Az $(x+1)^2 + (y-2)^2 = R^2$ egyenlettel kifejezett körvonal érinti az OX tengelyt. Mekkora a körvonal sugara?



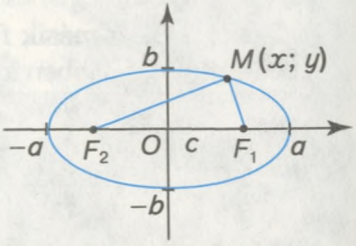
159. ábra

Megoldás. Jelöljük a körvonal középpontját C-vel! A körvonal egyenletéből meghatározzuk a középpont koordinátáit: $C(-1; 2)$. Az érintési pontba húzott érintő merőleges az érintő egyenesre. Ezért az OX tengelyre merőleges CA a körvonal sugara (159. ábra). Mivel $CA \| OY$, ezért a CA merőleges hossza a körvonal C középpontjának az ordinátájával egyenlő. Innen $R = 2$.

BŐVEBBEN

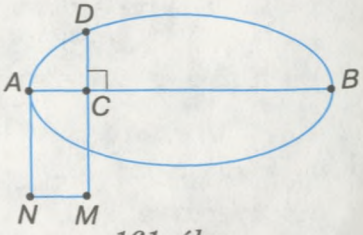
1. Már tudod, hogy a körvonal az adott ponttól azonos távolságra lévő pontok mértani helye. Korábban már arról is meggyőződhettél, hogy a körvonal az ellipszis részesete. Az ellipszis azon pontok mértani helye, melyek két adott rögzített ponttól (az F_1 és F_2 fókuszpontoktól) mért távolságának összege állandó és $2a$-val egyenlő, ahol $2a > F_1F_2 = 2c$ (160. ábra).

Az *ellipszis kanonikus* (legegyszerűbb) *egyenlete*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Az a és a b szám az ellipszis féltengelye (160. ábra). Ha $a = b$, akkor az ellipszis egy körvonal. Valóban: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, innen $x^2 + y^2 = a^2$. Így megkaptuk az origó középpontú $R = a$ sugarú körvonal egyenletét.



160. ábra

2. Az ókori görögök az ellipszis területét bonyolult számításokkal határozták meg. Ezek lényege, hogy a CD szakaszra szerkesztett négyzet területét vizsgálták (a CD szakasz hossza az AO szakaszon felvett C pont helyétől függ, ahol az O pont az AB szakasz felezőpontja). A négyzet területét összehasonlították az $ACMN$ téglalap területével (161. ábra):



161. ábra

$$CD^2 = AN \cdot AC - \frac{AN}{AB} \cdot AC^2.$$

Mivel az ellipszis területének meghatározásánál az $ACMN$ téglalap területét kisebbítjük (a CD^2-et negatív előjellel vesszük), ezért lett ez a görbe ellipszis, görögül ελλειψις, ami hiányt, elégtelenséget jelent. Érdekes, hogy a hiperbola és a parabola elnevezés eredete is hasonló: υπερβολη – fölösleg, többlet (CD^2 pozitív előjelű); παραβολη – összehasonlítás (a képletben a CD^2 nullával egyenlő).

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Magyarázd meg, mi a görbe egyenlete?
2. Hogyan ellenőrizhető, hogy egy görbe a koordináta-rendszerben megadható egy adott egyenlettel?
3. Milyen egyenlettel adható meg a körvonal a derékszögű koordináta-rendszerben?
4. Vezesd le a körvonal egyenletét!
5. Mi az origó középpontú R sugarú körvonal egyenlete?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

466'. Határozd meg a 162., 163., 164. ábrán látható körvonalak C középpontját és R sugarát!

467'. Rajzolj adott C középpontú és R sugarú körvonalat, ha:

1) $C(-1; 1), R = 3$; 2) $C(2; -1), R = 1$; 3) $C(-2; -3), R = 4$!

468'. Állapítsd meg az alábbi egyenletekkel megadott körvonalak középpontját és sugarát:

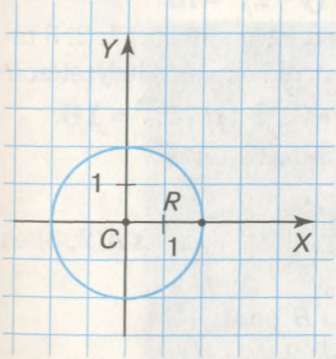
1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$; 2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3$;
3) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$; 4) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 25$;
5) $x^2 + (y-3)^2 = 2$; 6) $(x+1)^2 + y^2 = 49$!

469°. Illeszkednek-e az $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(-6; -4)$, $D(-5; 0)$ pontok az alábbi körvonalra:

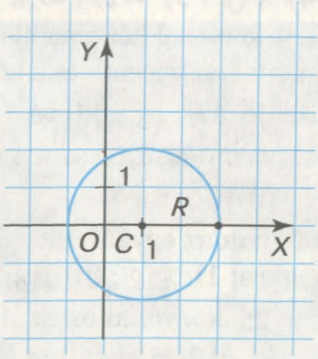
1) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$; 2) $x^2 + (y-3)^2 = 2$; 3) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 36$?

470°. Írd le az R sugarú C középpontú körvonal egyenletét, ha:

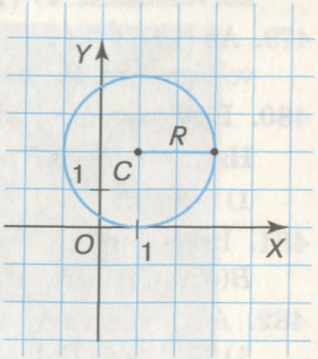
1) $R = 5$, $C(2; 1)$; 2) $R = \sqrt{5}$, $C(-2; -1)$; 3) $R = 4$, $C(2; -2)$!



162. ábra



163. ábra



164. ábra

471°. Töltsd ki a 20. táblázatot!

20. táblázat

A körvonal átmérőjének végpontjai	A körvonal középpontjának koordinátái	A körvonal sugara	A körvonal egyenlete
(5; – 1) és (– 5; – 1)			
(6; 0) és (0; 8)			
(6; 8) és (0; 0)			
(– 6; 0) és (2; – 8)			
(– 1; 6) és (7; – 2)			

472°. Egy körvonal illeszkedik az A és B pontra, középpontja az AB egyenesre. Írd le a körvonal egyenletét, ha:
1) $A(-5; 2)$ és $B(1; -4)$; 2) $A(5; -2)$ és $B(-1; 4)$; 3) $A(5; 2)$ és $B(-1; -4)$!

473°. Egy körvonal érinti az abszcissza tengelyt. Metszi-e ez a körvonal az ordináta tengelyt, ha a körvonal középpontja: 1) $(2; -1)$; 2) $(-3; 2)$; 3) $(4; 5)$?

474°. Egy C középpontú körvonal az A pontban metszi az ordináta tengelyt. Írd le a körvonal egyenletét, ha:
1) $C(2; 3)$, $A(0; 4)$; 2) $C(-3; -2)$, $A(0; 2)$; 3) $C(-4; 2)$, $A(0; 5)$!

475°. Egy C középpontú körvonal a B pontban metszi az abszcissza tengelyt. Írd le a körvonal egyenletét, ha:
1) $C(3; 2)$, $B(4; 0)$; 2) $C(-2; -3)$, $B(2; 0)$; 3) $C(2; -4)$, $B(5; 0)$!

476. Egy körvonal középpontja a $(-2; 3)$ koordinátájú pont. A körvonal átmegy a: 1) $(0; 3)$; 2) $(-2; 4)$ ponton. Illeszkedik-e erre a körvonalra az $A(-4; 3)$, $B(-2; 4)$ és $C(1; 3)$ pont?

477. Írd le annak a körvonalnak az egyenletét, melynek középpontja az $y = 4$ egyenesen van és az: 1) $(-1; 0)$; 2) $(2; 0)$ pontban érinti az abszcissza tengelyt!

478. Magyarázd meg, miért nem metszi az $x = -5$ és $y = 5$ egyenes az alábbi körvonalakat: 1) $(x-4)^2+(y+5)^2=25$; 2) $x^2+(y-2)^2=16$!

479. Az $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ körvonal középpontja az a egyenestől: 1) 1; 2) 3 távolságra van. Mit mondhatunk az egyenes és a körvonal kölcsönös helyzetéről?

480. Egy körvonal átmérője AB, egyenlete $(x+2)^2+(y-2)^2=16$. Határozd meg a B pont koordinátáit, ha az A pont koordinátái:
1) $A(2; 2)$; 2) $A(-2; 6)$!

481. Írd le annak a körvonalnak az egyenletét, mely illeszkedik az $A(2; 3)$ és $B(-2; 3)$ pontra és a sugara: 1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{13}$!

482. Adva van az $x^2+y^2=25$ körvonal és az A és B pont:
1) $A(3; 4)$ és $B(4; -3)$; 2) $A(2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ és $B(-1; 2\sqrt{6})$.
Bizonyítsd be, hogy az AB szakasz a körvonal egyik húrja!

483. Határozd meg az alábbi körvonal középpontjától 5 egységre lévő pontok mértani helyét: 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$; 2) $(x+3)^2+(y+1)^2=36$!

484. Írd le az abszcissza- és az ordináta tengelyt, valamint az: 1) $x = 2$; 2) $y = 5$ egyenest érintő körvonal egyenletét!

485. Írd le a (3; 3) pontra illeszkedő, az abszcissza tengelyt és az: 1) $x = -3$; 2) $y = 6$ egyenest érintő körvonal egyenletét!

486*. Írd le annak a körvonalnak az egyenletét, amely átmegy az origón és illeszkedik a: 1) (8; 0) és (0; 6); 2) (0; 16) és (12; 0) koordinátájú pontokra!

487*. Írd le az alábbi pontokra illeszkedő körvonal egyenletét:
1) (4; 0), (0; 2), (4; 2); 2) (–1; 5), (–2; –2), (5; 5)!

488*. Bizonyítsd be, hogy **a körvonal középpontján átmenő egyenes a körvonalat két pontban metszi!**

489*. Határozd meg a körvonal azon húrjai végpontjának a koordinátáit, melyek a koordináta-tengelyekre illeszkednek, ha a körvonal egyenlete:
1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$!

490*. Határozd meg az alábbi négy ponttal megadott téglalap köré írt körvonal egyenletét: 1) (0; 0), (24; 0), (24; 10), (0; 10); 2) (0; 5), (8; 5), (8; –2), (0; –2)!

491*. Az $x^2+y^2=16$ egyenlettel meghatározott körvonalba szabályos háromszöget írtak. Határozd meg a háromszög ismeretlen csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik csúcsa a következő koordinátákkal rendelkezik: 1) (0; 4), 2) (–4; 0)!

492*. Határozd meg az alábbi egyenlettel megadott körvonal középpontját és sugarát:
1) $x^2+8x+y^2-10y-41=0$; 2) $x^2-10x+y^2+6y=0$;
3) $x^2-4x+y^2+4y=16$; 4) $y^2=(x-2)(6-x)$!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

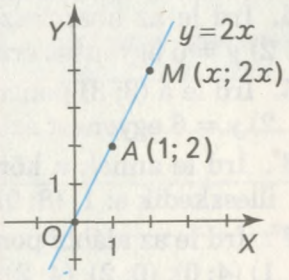
493. Bizonyítsd be, hogy az a körvonal, melynek középpontja az egyik rácspont és sugara 5 egység, 12 rácspontra illeszkedik!

494. Hány rácspontra illeszkedik az a körvonal, melynek középpontja az egyik rácspont és sugara 25 négyzet?

495. Hová kell az udvaron elhelyezni fényforrást, hogy a kertkapu, az udvaron lévő kút és a ház bejárata egyformán legyen megvilágítva?

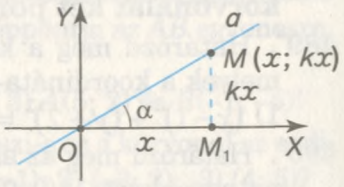


15. § AZ EGYENES EGYENLETE



165. ábra

Algebrából már tanultad, hogy az $y = 2x$ függvény grafikonja egyenes (165. ábra). Az egyenes minden pontja, mint például az $O(0; 0)$ és az $A(1; 2)$ koordinátájú pont is kielégíti az adott egyenletet. Ez fordítva is igaz: bármely $M(x; 2x)$ koordinátájú pont illeszkedik az adott egyenesre. Vagyis az adott egyenes egyenlete $y = 2x$.

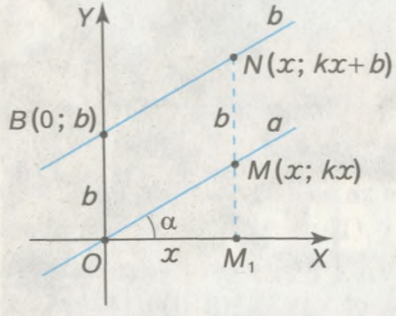


166. ábra

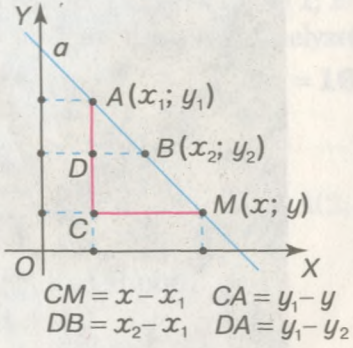
Általánosítva, **az origón átmenő egyenes** (166. ábra) **egyenlete $y = kx$**. Ebben az összefüggésben a k együttható az *egyenes iránytangense, meredeksége*, az egyenes és az OX tengely pozitív iránya által közbezárt szög tangense. A 166. ábrán az a egyenes α szöget zár be az OX tengellyel. Az OM_1M ($M_1\angle = 90°$) derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MM_1}{OM_1} = \dfrac{kx}{x} = k$.

? Hogyan adható meg az az egyenes, mely nem megy át az origón és iránytangense k? Vizsgáljuk meg az esetet!

A b egyenes, melynek iránytangense k, a $B(0; b)$ pontban metszi az OY tengelyt (167. ábra). Jelöljük meg a b egyenes N tetszőleges pontját, melynek abszcisszája x! Előbb határozzuk meg ennek a pontnak az y ordinátáját! Húzzunk az origón keresztül a b egyenessel párhuzamos a egyenest: $a \parallel b$. Ennek az egyenesnek az iránytangense szintén k, így az egyenlete $y = kx$. Az N pontra illeszkedő és az OY tengellyel párhuzamos egyenes az M pontban metszi az a egyenest, az OX tengelyt pedig az M_1 pontban. Így $MM_1 = kx$ (mivel $M \in a$), $NM = OB = b$ (mivel a meghatározás alapján az $NMOB$ négyszög paralelogramma), $NM_1 = kx + b$. Tehát az N pont ordinátája az $y = kx + b$ egyenlő-



167. ábra



168. ábra

séggel fejezhető ki az abszcisszán keresztül. Mivel az N pont bárhol illeszkedhet a b egyenesre, így megállapítható, hogy az egyenlet bármely pontja kielégíti az $y = kx + b$ egyenletet. A fordított állítást bizonyítsd be önállóan!

Az $\boldsymbol{y = kx + b}$ egyenletet *az egyenes iránytangenses alakjának* nevezzük.

? Hogyan fejezhető ki a két adott pontra illeszkedő egyenes egyenlete? Vizsgáljuk meg!

Nézzük azt a részesetet, amikor mind a két pont az első negyedhez tartozik és $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$ (168. ábra). Húzzunk az adott pontokon keresztül egy a egyenest és jelöljünk rajta egy tetszőleges $M(x; y)$ pontot! Húzzunk az A, B és M ponton keresztül az OX tengellyel párhuzamos egyeneseket, az A ponton keresztül viszont az OY tengellyel párhuzamos egyenest! A metszéspontokat jelöljük C-vel és D-vel. Két hasonló ACM és ADB háromszöget kaptunk (az A szög közös, $CM \| DB$). A háromszögek hasonlóságából következik, hogy $\frac{CM}{DB} = \frac{CA}{DA}$. Fejezzük ki ezeknek a szakaszoknak a hosszát: $CM = x - x_1$, $DB = x_2 - x_1$, $CA = y_1 - y$, $DA = y_1 - y_2$! Helyettesítsük be a kapott értékeket az előbbi aránypárba: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$ vagy $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$! Mivel az M pont tetszőleges, így megállapíthatjuk, hogy az egyenlet bármely pontjának koordinátái a gyökei lesznek az egyenletnek. A fordított állítást bizonyítsd be önállóan! Az A és a B pont többi helyének a részeseteit vizsgáld meg önállóan!

Az $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ egyenlet *az egyenes két pontjával maghatározott alakja*.

A kapott egyenlet leírható a következőképpen is:

$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0$.

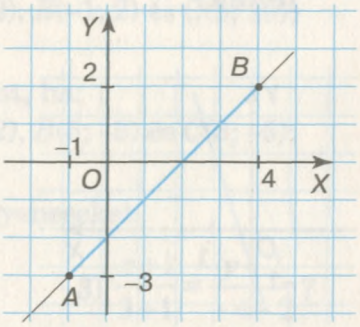
Behelyettesítve $y_2 - y_1 = a$, $x_1 - x_2 = b$, $y_1x_2 - x_1y_2 = c$, megkapjuk *az egyenes általános alakját*: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$.

BŐVEBBEN

1. Felmerülhetett benned a kérdés, vajon *megadható-e analitikusan a szakasz, a háromszög, a négyzet*? Vizsgáljunk meg néhány példát!

Adjuk meg az $y = x - 2$ egyenes AB szakaszát (169. ábra)! Világos, hogy az AB szakasz bármelyik pontja kielégíti az adott egyenes egyenletét, viszont az egyenes nem mindegyik pontja illeszkedik az AB szakaszra. A szakasz végpontjainak koordinátái $A(-1; -3)$ és $B(4; 2)$. Ezért a szakasz pontjainak abszcisszái -1 és 4 közötti értéket vesznek fel, ordinátái pedig -3-tól 2-ig. Tehát az adott szakaszt az alábbi rendszer határozza meg:

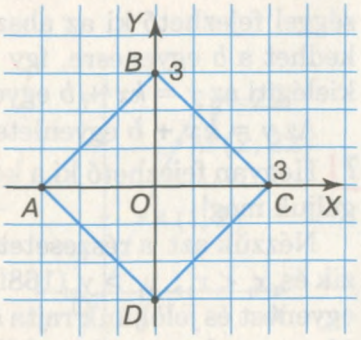
$$\begin{cases} y = x - 2, \\ -1 \le x \le 4, \\ -3 \le y \le 2. \end{cases}$$



169. ábra

A háromszöget és a négyzetet analitikusan az oldalak egyenleteinek rendszerével adhatjuk meg.

Annak a négyzetnek az egyenlete, melynek csúcsai a tengelyekre illeszkednek, különlegesnek tűnhet: $|x|+|y|=a$, ahol a az átlók fele (elemezd önállóan). A 170. ábrán az $|x|+|y|=3$ egyenlettel megadott $ABCD$ négyzet látható.



170. ábra

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi az origóra illeszkedő egyenes egyenlete?
2. Mi az egyenes iránytangense, meredeksége?
3. Írd le az egyenes iránytangenses alakját!
4. Mit mutat az $y = kx + b$ egyenletben a b értéke?
5. Mi az egyenes két pontjával meghatározott alakja?
6. Mi az egyenes általános alakja?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

496'. Nevezd meg az alábbi egyenesek meredekségét:

1) $y = 3x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = x$; 4) $y = -2x$; 5) $y = -\sqrt{3}x$; 6) $y = \sqrt{2}x$!

497'. A 171., 172., 173. ábrák melyikén látható az alábbi egyenes:

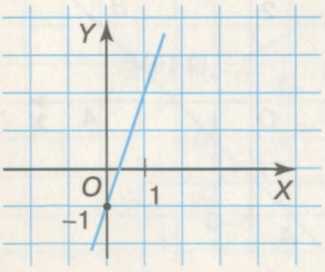
1) $y = x - 2$; 2) $y = 3x - 1$; 3) $y = -2x + 1$?

498'. Olvasd le az A és a B pont koordinátáit (174., 175., 176. ábra). Melyik az AB egyenes egyenlete az alábbi egyenletek közül:

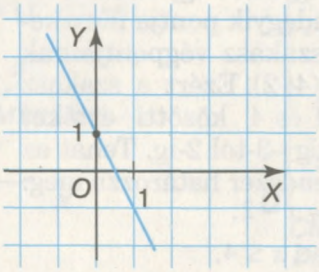
1) $\frac{x+2}{2+2}=\frac{y+1}{3+1}$; 2) $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{-2-2}$; 3) $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{2-1}$?

499°. Mi az egyenlete:

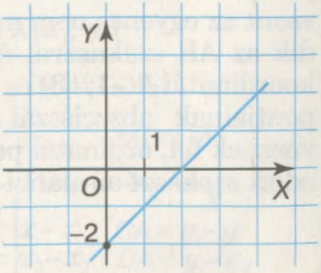
1) az abszcissza tengelynek; 2) az ordináta tengelynek;
3) az első és a harmadik koordináta-negyed szögfelezőjének;
4) a második és a negyedik koordináta-negyed szögfelezőjének?



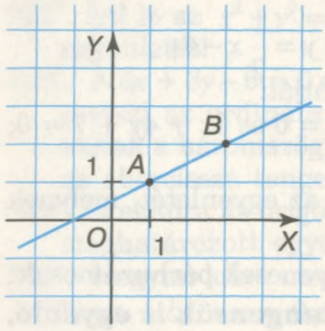
171. ábra



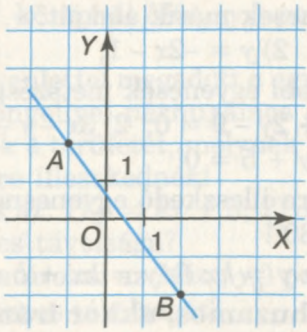
172. ábra



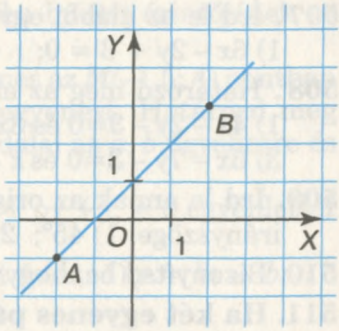
173. ábra



174. ábra



175. ábra



176. ábra

500°. Írd le az A, B és C pont koordinátáit, ha azok az:

1) abszcissza tengelyre; 2) az ordináta tengelyre;

3) az első és a harmadik koordináta-negyed szögfelezőjére;

4) a második és a negyedik koordináta-negyed szögfelezőjére illeszkednek!

501°. Írd le a megadott tengelyekkel párhuzamos, az A pontra illeszkedő a és b egyenes egyenletét! Töltsd ki a 21. táblázatot a második oszlopban feltüntetett minta szerint!

21. táblázat

	$A\,(1;\,2)$	$A(-1;\,2)$	$A(-1;\,-2)$	$A(4;\,2)$	$A(-4;\,2)$	$A(4;\,-2)$
$a \parallel OX$	$y = 2$					
$b \parallel OY$	$x = 1$					

502°. Rajzold meg azt a téglalapot, melynek az oldalegyenesei:

1) $x = 2, x = 5, y = -2, y = 1$; 2) $x = -2, x = 6, y = 7, y = -1$;

3) $x = -9, x = 4, y = 2, y = 8$!

503°. Írd le az alábbi pontokkal meghatározott egyenes egyenletét:

1) $(-1;\,2)$ és $(2;\,-1)$; 2) $(-3;\,1)$ és $(2;\,-2)$; 3) $(2;\,-4)$ és $(3;\,-1)$!

504°. Írd le az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha:

1) $A(2;\,-3)$, $B(-2;\,3)$ és $C(6;\,-3)$; 2) $A(1;\,-2)$, $B(-1;\,2)$ és $C(5;\,10)$;

3) $A(-3;\,5)$, $B(1;\,-3)$ és $C(2;\,0)$!

505°. Egy egyenesre illeszkedik-e az A, B és C pont, ha:

1) $A(-3;\,2)$, $B(2;\,2)$ és $C(2;\,14)$; 2) $A(1;\,-2)$, $B(5;\,-8)$ és $C(3;\,-5)$;

3) $A(4;\,2)$, $B(0;\,-6)$ és $C(-4;\,-2)$?

506°. Mely két pontja határozza meg az alábbi egyeneseket:

1) $\dfrac{x-4}{2-4} = \dfrac{y-1}{3-1}$; 2) $\dfrac{x-0}{-2-0} = \dfrac{y+3}{2+3}$; 3) $\dfrac{x+1}{3+1} = \dfrac{y-2}{-4-2}$?

Készíts rajzot!

507°. Írd le az alábbi egyenesek másik alakját:
1) $6x - 2y + 3 = 0$; 2) $y = -2x - 1$; 3) $y = \frac{1}{2}x - 4$!

508°. Határozd meg az alábbi egyenesek metszéspontját:
1) $4x - 2y - 3 = 0$ és $3x + 2y - 9 = 0$; 2) $3x - y - 5 = 0$ és $3x + 4y + 7 = 0$;
3) $5x - 7y - 3 = 0$ és $x - y + 5 = 0$!

509. Írd le annak az origóra illeszkedő egyenesnek az egyenletét, melynek irányszöge: 1) 45°; 2) 30°!

510. Bizonyítsd be, hogy az $y = kx$ és $y = kx + b$ egyenesek párhuzamosak!

511. Ha két egyenes párhuzamos, akkor iránytangensük is egyenlő, és fordítva. Bizonyítsd be!

512. Írd le annak az egyenesnek az egyenletét, amely az ordináta tengelyt az origótól 5 egységre metszi és párhuzamos az: 1) $y = 5x + 2$; 2) $y = -x - 15$ egyenessel!

513. Írd le a (–2; 1) pontra illeszkedő: 1) 45°-os; 2) 60°-os irányszögű egyenes egyenletét!

514. Írd le az ABC háromszög középvonalai egyeneseinek az egyenletét, ha:
1) $A(2; -3)$, $B(-2; 3)$ és $C(6; -3)$; 2) $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$ és $C(5; 10)$!

515. Határozd meg az $ABCD$ paralelogramma D csúcsának koordinátáit, ha:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$ és $C(-1; 2)$; 2) $A(2; 3)$, $B(-3; -1)$ és $C(4; 2)$!

516. Írd le annak a négyzetnek az egyenletét, melynek oldala a egység, átlói pedig a koordináta-tengelyekre illeszkednek!

517. Írd le az ABC egyenlő szárú háromszög oldalegyeneseinek az egyenletét, ha:
1) $A(-1; 2)$, $B(3; 2)$, $BAC\angle = ABC\angle = 45°$; 2) $A(-2; -3)$, $B(6; -3)$, $ACB\angle = 120°$!

518. Hány fokos szöget zár be a koordináta-tengelyekkel a:
1) $3x - 3y + 1 = 0$; 2) $2x + 2y - 5 = 0$ egyenes?

519. Határozd meg az alábbi egyenesek alapján a koordináta-tengelyekkel kimetszett AB szakasz hosszát: 1) $5x - 12y + 3 = 0$; 2) $4x + 3y - 6 = 0$; 3) $4x - 2y - 3 = 0$!

520. Mekkora annak a háromszögnek a területe, melyet a koordináta-tengelyek és az alábbi egyenletekkel meghatározott egyenes határol:
1) $3x + y - 2 = 0$; 2) $5x - 12y + 24 = 0$?

521*. Bizonyítsd be, hogy a $3x + 4y - 2 = 0$ és $3x + 4y - 3 - m^2 = 0$ egyeneseknek nincs közös pontja!

522*. Két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha iránytangenseik szorzata –1. Bizonyítsd be!

523*. Egy háromszög csúcsai $A(0; 13)$, $B(2; -1)$ és $C(10; 3)$. Bizonyítsd be, hogy a B és a C csúcsból húzott súlyvonalak merőlegesek egymásra!

524*. Milyen feltétel mellett merőleges az AB és CD szakasz, ha adva vannak a következő végpontjai: $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, $D(d_1; d_2)$?

525*. Írd le az adott két ponttól azonos távolságra lévő pontok mértani helyének egyenletét: 1) $(0; 0)$ és $(a_1; a_2)$; 2) $(a_1; a_2)$ és $(b_1; b_2)$!

526*. Mi az $x^2 + y^2 = R^2$ körvonal azon érintőinek az egyenlete, melyek párhuzamosak: 1) az abszcissza tengellyel; 2) az ordináta tengellyel?

527*. Írd le az $x^2+y^2=R^2$ körvonal $M(x_0; y_0)$ pontba húzott érintőjének az egyenletét!

528*. A $4x + 3y - 6 = 0$ egyenlettel megadott a egyenes az $M(-1,5; 4)$ pontban metszi az ordináta tengellyel párhuzamos b egyenest. Határozd meg annak a háromszögnek a területét, melynek oldalai az a, b egyenesre és az abszcissza tengelyre illeszkednek!

529*. Mekkora az origó és az: 1) $y = kx + b$; 2) $ax + by + c = 0$ egyenlettel meghatározott egyenes távolsága?

530*. Hogyan lehet meghatározni az $M(x_0; y_0)$ pont és az: 1) $y = kx + b$; 2) $ax + by + c = 0$ egyenes távolságát?

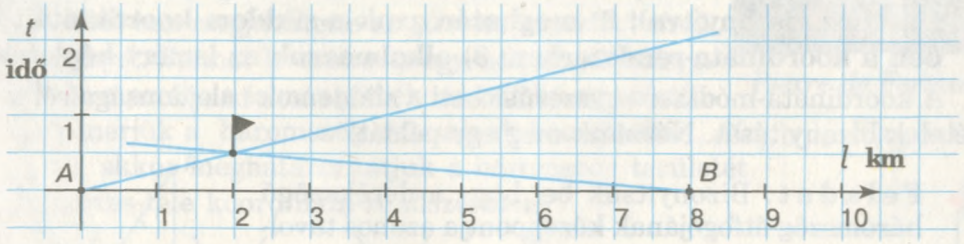
GYAKORLATI ALKALMAZÁS

531. Húzz adott rácsponton keresztül adott egyenessel párhuzamos egyenest úgy, hogy az két rácspontra illeszkedjen!

532. Hogyan lehet egy rácsponton keresztül a vízszinthez képest $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ meredekségű egyenest húzni; és a függőleges rácsvonalakhoz képest?

533. Mi az $s = s_0 + vt$ egyenlettel megadott egyenletes mozgás grafikonja?

534. Az A és B helység távolsága 8 km. Az A helységből 4 km/h sebességgel egy gyalogos indult el, a B helységből szembe vele pedig egy kerékpáros 12 km/h sebességgel. Magyarázd meg a 177. ábra alapján, hogyan lehet meghatározni, mennyi idő múlva találkoztak az indulástól számítva és milyen messze az A helységtől?

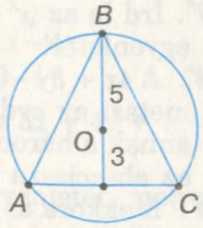


177. ábra

16. § A KOORDINÁTA-MÓDSZER

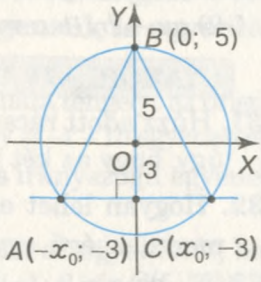
Már ismeretes számodra, hogy a síkidomok tulajdonságait algebrai módszerekkel is lehet vizsgálni. Ezt a módszert *koordináta-módszernek* nevezzük. Az előző paragrafusokban koordináta-módszerrel oldottad meg az alábbi feladatokat: 1) a síkidom tulajdonságainak ismeretében leírtad az egyenletét; 2) az alakzat egyenletének az ismeretében meghatároztad a tulajdonságait. A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amikor mind a két feladattípust egyszerre kell megoldani: először néhány tulajdonság alapján leírjuk az alakzat egyenletét, majd az egyenletből következtetünk a síkidom más tulajdonságaira.

Feladat. Számítsuk ki az 5 cm sugarú körvonalba írt egyenlőszárú háromszög oldalait, ha a körvonal középpontja 3 cm-re van a háromszög alapjától!



178. ábra

Megoldás. Használjuk a 178. ábra jelöléseit! Legyen ABC az adott háromszög, melynek alapja AC, az O pont pedig a körvonal középpontja. Vegyünk fel egy síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszert úgy, hogy a körvonal középpontja legyen az origó, az OY tengely illeszkedjen az AC oldalra húzott magasságra, így az OX tengely párhuzamos legyen a háromszög AC alapjával (179. ábra). Ebben a koordináta-rendszerben a körvonal egyenlete $x^2 + y^2 = 25$, a háromszög csúcsai pedig az $A(-x_0; -3)$, $B(0; 5)$, $C(x_0; -3)$ koordinátájú pontok, ahol $x_0 > 0$. A C pont a körvonalra illeszkedik, így koordinátái kielégítik a körvonal egyenletét: $x_0^2 + (-3)^2 = 25$. Az egyenlet megoldása: $x_0 = 4$. Tehát $A(-4; -3)$, $C(4; -3)$.



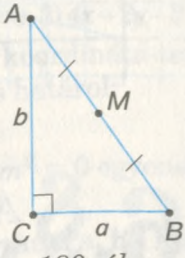
179. ábra

A háromszög csúcsainak koordinátáiból meghatározzuk az oldalak hosszát: $AB = BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$ (cm), $AC = 8$ cm.

Ahhoz, hogy alkalmazhassuk a koordináta-módszert: 1) rajzot készítünk, majd kiválasztjuk a célszerű koordináta-rendszert (meghatározzuk az origó, az abszcissza- és az ordináta tengelyek helyét a rajzunkhoz viszonyítva); 2) meghatározzuk a síkidom koordinátáit ebben a koordináta-rendszerben; 3) alkalmazzuk az ismert képleteket.

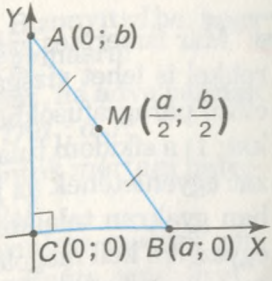
A koordináta-módszer egyszerűsítheti a síkidomok tulajdonságairól szóló tételek bizonyítását. Nézzünk meg egy példát!

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög átfogójának középpontja azonos távolságra van a háromszög minden csúcsától.



180. ábra

Megoldás. Használjuk a 180. ábra jelöléseit! Az ABC derékszögű háromszög C csúcsa 90°. Jelöljük a háromszög befogóinak a hosszát a-val és b-vel, az átfogó felezőpontját pedig M-mel! Illesszük a síkra a derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a háromszög C csúcsa az origóban legyen, befogói pedig a koordináta-tengelyekre illeszkedjenek (181. ábra)! Ekkor a háromszög csúcsai a $C(0; 0)$, $B(a; 0)$ és $A(0; b)$ koordinátájú pontok lesznek. Az M pont az AB átfogó középpontja, így koordinátái $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. Határozzuk meg az MC, MA és MB szakasz hosszát: $MC = \sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$,



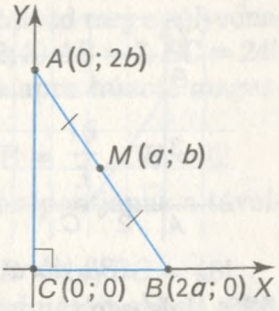
181. ábra

$$MA=\sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}},$$

$$MB=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}!$$

A kapott egyenlőségekből következik, hogy $MC = MA = MB$.

Az M pont egyforma távolságra van az $ABC\Delta$ csúcsaitól.



182. ábra

? Vajon egyszerűbben is meg lehet határozni az előbbi feladatban a szakaszok hosszát? Igen, ha az $ABC\Delta$ befogóinak a hosszát $2a$-val és $2b$-vel jelöljük (182. ábra).

Ha egy feladatban a szakasz felezőpontjára vonatkozó képletet kell alkalmazni, akkor célszerű a szakaszok hosszát megduplázni.

BŐVEBBEN


Pierre de Fermat

1. A koordináta-módszer összeköti az algebrát és a mértant, segíti mind az egyik, mind a másik tudományágat. Szülőatyja René Descartes (1596–1650) és Pierre de Fermat (1601–1655) francia matematikusok, akik egymástól függetlenül dolgoztak. Fermat munkái azonban csak halála után váltak mindenki számára ismertté, amikor fia 1669-ben megjelentette az „Összes munkák" című gyűjteményét. Fermat levezette az egyenes, az ellipszis, a hiperbola, a parabola és más görbék másodfokú egyenletét.

2. Ha ismerjük a háromszög csúcsainak koordinátáit, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ és $C(x_3; y_3)$, akkor meghatározhatjuk a háromszög területét.

A Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$S=\left|\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))\right|.$$

Az affin koordináta-rendszerben, ahol a tengelyek hajlásszöge φ:

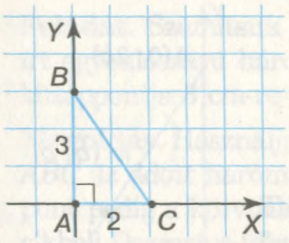
$$S=\left|\frac{\sin\varphi}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))\right|.$$

FONTOSABB TUDNIVALÓK

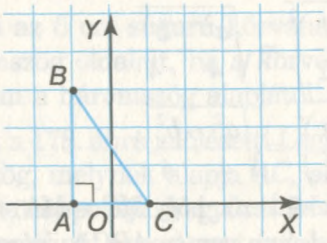
1. Mi a koordináta-módszer?
2. Milyen feladatokat lehet megoldani a koordináta-módszerrel?
3. Magyarázd meg, hogyan alkalmazható a koordináta-módszer?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

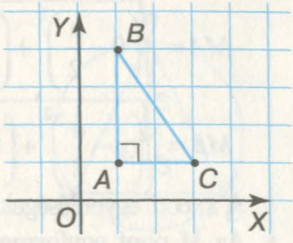
535'. Az ABC háromszög síkjára koordináta-rendszert illesztettek úgy, ahogy az a 183., 184., 185. ábrákon látható. Határozd meg az ABC háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha a háromszög befogói 2 és 3 egység!



183. ábra



184. ábra



185. ábra

536'. Helyesen vannak-e megadva az ABC egyenlőszárú háromszög csúcsainak a koordinátái a felvett koordináta-rendszerben:
1) $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (186. ábra);
2) $A(-2; -1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (187. ábra);
3) $A(-2; 3)$, $B(0; 0)$, $C(2; 3)$ (188. ábra)?

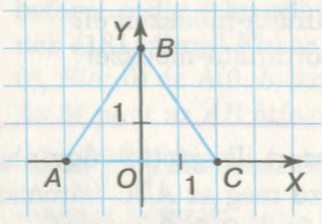
537'. A 189., 190., 191. ábrákon az $ABCD$ négyszög látható. Illessz a négyszög síkjára derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a négyszög csúcsai az alábbi koordinátájú pontok legyenek:
1) $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 0)$ (189. ábra);
2) $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(3; 2)$, $D(3; 0)$ (190. ábra);
3) $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$, $D(-3; 0)$ (191. ábra)!

538°. Az ABC háromszögben $A\angle = 90°$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Illessz a háromszög síkjára derékszögű koordináta-rendszert a 22. táblázat feltételeinek megfelelően. Töltsd ki a táblázatot!

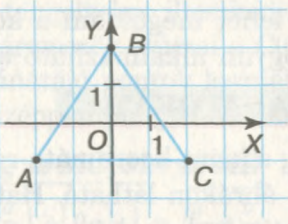
22. táblázat

A koordináta-rendszer középpontja	Az egységszakasz hossza	A koordináta-tengelyek pozitív iránya		Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái		
		OX	OY			
		a háromszög megfelelő befogóira illeszkednek		A	B	C
A	1 cm	AB	AC			
A	0,5 cm	AB	AC			
A	2 cm	AC	AB			

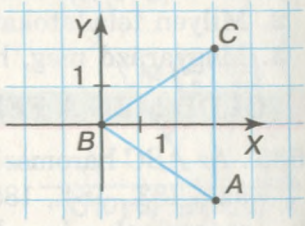
539°. A 2 cm oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet átlóinak metszéspontja az M pont. Illessz derékszögű koordináta-rendszert a négyzet síkjára úgy, hogy az origó az adott pontban helyezkedjen el, az egységszakasz hossza 1 cm legyen, az OX és OY tengelyek pozitív irányai pedig az alábbi szakaszokra illeszkedjenek: 1) A, AB, AD; 2) B, BC, AB; 3) M, CM, MD! Határozd meg a négyzet csúcsainak a koordinátáit a választott koordináta-rendszerben!



186. ábra



187. ábra



188. ábra

540°. Az ABC derékszögű háromszög befogói AB és BC. Határozd meg a súlyvonalak hosszát, ha: 1) $AB = 3, BC = 4$; 2) $AB = 5, BC = 12$; 3) $AB = 7, BC = 24$!

541°. Az ABC egyenlőszárú háromszögben CH az AB alapra húzott magasság. Számítsd ki a szárra húzott súlyvonalat, ha:
1) $AB = 12, CH = 4$; 2) $AB = 4, CH = 6$; 3) $AB = \frac{16}{3}, CH = 6$!

542°. Határozd meg a rombusz szemben lévő oldalai felezőpontjának a távolságát, ha a rombusz átlói:
1) $AB = 6, BC = 8$; 2) $AB = 10, BC = 24$; 3) $AB = 14, BC = 48$!

543. Határozd meg a szabályos hatszög csúcsainak koordinátáit abban a koordináta-rendszerben, melyben az egyik koordináta-tengely párhuzamos a hatszög egyik oldalával, az origó pedig:
1) a hatszög átlóinak metszéspontjában van; 2) a hatszög egyik csúcsában van!

544. Milyen összefüggés van két négyzet csúcsainak koordinátái között, melyek közös csúcsa a koordináta-rendszer origója és van közös oldaluk?

545. Léteznek-e olyan hasonló háromszögek, melyek megfelelő csúcsainak koordinátái arányosak?

546. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján felvettek egy M pontot úgy, hogy $AM = 4$ cm. Határozd meg a CM szakasz hosszát, ha $AC = 15$ cm és $BC = 20$ cm!

547. Az M pont az AB szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy a sík tetszőleges T pontjára igaz a $TA^2 + TB^2 = 2TM^2 + 0{,}5AB^2$ egyenlőség!

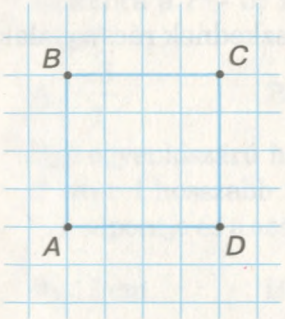
548. Az A és B pont távolsága 4 egység. Határozd meg azon M pontok mértani helyét, melyekre igaz az alábbi egyenlőség: 1) $MA^2 + MB^2 = 24$; 2) $MA^2 - MB^2 = 4$!

549. Bizonyítsd be, hogy a téglalap átlóinak négyzetösszege a két szomszédos oldal négyzetösszegének kétszeresével egyenlő!

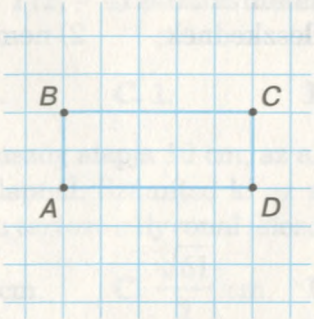
550. Ha az $ABCD$ négyszög téglalap, akkor a téglalap síkjának bármely M pontjára teljesül az $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ egyenlőség. Bizonyítsd be!

551. Az M pont az $ABCD$ négyzet egyik belső pontja, melyre igaz, hogy: 1) $MA = 7, MB = 13$ és $MC = 17$; 2) $MA = 1, MB = \sqrt{5}$ és $MC = 3$. Számítsd ki a négyzet oldalait és az átlóját!

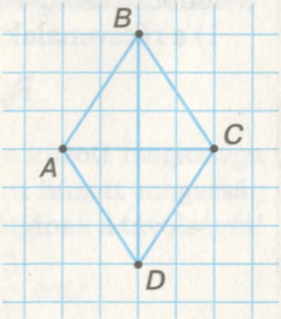
552. Egy R sugarú körvonal középpontja az a és b befogójú derékszögű háromszög derékszögének a csúcsában van. Metszi-e ez a körvonal a háromszög átfogóját, ha: 1) $a = 5, b = 12, R = 4$; 2) $a = 20, b = 15, R = 12$?



189. ábra



190. ábra



191. ábra

553*. Bizonyítsd be, hogy a háromszög két oldalának négyzetösszege a harmadik oldal négyzete felének és a hozzá tartozó súlyvonal négyzete kétszeresének összegével egyenlő!

554*. **Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege az átlók négyzeteinek összegével egyenlő!**

555*. **Bizonyítsd be, hogy a trapéz átlóinak a felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal és a hossza az alapok különbségének a felével egyenlő.**

556*. Az A pont és a 2 cm sugarú körvonal O középpontjának a távolsága 6 cm. Határozd meg az OA egyenes azon M pontját, melyből úgy lehet körvonalat érintő szakaszt húzni, hogy annak hossza az A és az M pont távolságával legyen egyenlő!

557*. Bizonyítsd be, hogy a négyzet csúcsai és az átlók metszéspontjára illeszkedő egyenes távolságainak négyzetösszege nem függ az egyenes helyzetétől!

558*. Egy R sugarú körvonal köré négyzetet írtak. Bizonyítsd be, hogy a körvonal bármely pontjának és a négyzet csúcsai távolságainak négyzetösszege $12R^2$!

559*. Egy a oldalhosszúságú szabályos háromszög köré körvonalat írtak. Bizonyítsd be, hogy a körvonal bármely pontjának és a háromszög csúcsai távolságainak négyzetösszege $2a^2$!

560*. Határozd meg azon pontok mértani helyét, melyek két adott A és B ponttól mért távolságai négyzetei különbségének abszolút értéke a^2, ahol a az adott szakasz hossza!

561*. Ha egy háromszög csúcsainak a koordinátája páros szám, akkor területének a mérőszáma természetes szám. Bizonyítsd be!

562*. Ha egy négyzet két szomszédos csúcsának koordinátái egész számok, akkor a másik két csúcs koordinátái is egész számok lesznek. Bizonyítsd be!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

563. Ha egy háromszög két oldalfelező pontja és ezen oldalak közös csúcsa rácspont, akkor a harmadik oldal felezőpontja is rácspont. Bizonyítsd be!

564. Ha egy négyzet két szomszédos csúcsa rácspont, akkor a másik két csúcs is rácspont. Bizonyítsd be!

565. Magyarázd meg, hogyan lehet négyzetet szerkeszteni úgy, hogy az oldalak szerkesztése nélkül a csúcsok rácspontok legyenek. Vizsgálj meg különböző eseteket, amikor az átlók:

1) a rácsvonalakra illeszkednek; 2) nem illeszkednek rácsvonalakra!

ISMÉTLŐ KÉRDÉSEK

1. Magyarázd meg, mi a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer a síkon és hogyan illesztjük a síkra!
2. Hogyan határozhatók meg a pont koordinátái egy adott koordináta-rendszerben?
3. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a végpontjainak koordinátáival megadott szakasz hosszáról szóló tételt!
4. Mi a szakasz felezőpontja koordinátáinak a képlete?
5. Mi a görbe egyenlete?
6. Vezesd le a körvonal egyenletét!
7. Az egyenes milyen egyenleteit ismered?
8. Hogyan alkalmazható a koordináta-módszer feladatok megoldására?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll a rendelkezésedre.

1° Határozd meg az $A(1; 2)$ és $B(2; 1)$ pont távolságát!

A. 2. **B.** 6. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

2° Melyek az MH szakasz felezőpontjának a koordinátai, ha $M(-3; 0)$ és $H(5; 6)$?

A. $(-3; 6)$. **B.** $(0; 5)$. **C.** $(-4; 3)$. **D.** $(1; 3)$.

3° Határozd meg az $A(4; -1)$ pont és az $(x-1)^2+(y+3)^2=16$ egyenlettel megadott körvonal középpontjának a távolságát! Hasonlítsd össze az AO szakasz hosszát a körvonal R sugarával!

A. $AO \geq R$. **B.** $AO > R$. **C.** $AO = R$. **D.** $AO < R$.

4 Mekkora a $P(-3; 1)$ és $T(2; -4)$ pontra illeszkedő egyenes meredeksége?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

5* Egy egyenlőszárú háromszög alapja 10 cm, az alapra húzott magassága 2 cm-rel hosszabb az alapnál. Számítsd ki az alapra húzott magasság felezőpontja és a szárhoz tartozó súlyvonal felezőpontjának a távolságát!

A. 13 cm. **B.** $\frac{5}{2}$ cm. **C.** $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm. **D.** $\frac{13}{4}$ cm.

4. FEJEZET

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Ebben a fejezetben megtudod:

- mi a geometriai transzformáció és mik a tulajdonságai;
- mi a középpontos és tengelyes szimmetria, az elforgatás és a párhuzamos eltolás, hogyan kell azokat alkalmazni a természetben, a technikában és az építészetben;
- mi a hasonlósági transzformáció, milyen tulajdonságai vannak, hogyan kell hasonló alakzatokat rajzolni;
- hogyan alkalmazhatók a tanult fogalmak és tulajdonságaik a gyakorlatban, feladatok megoldásánál

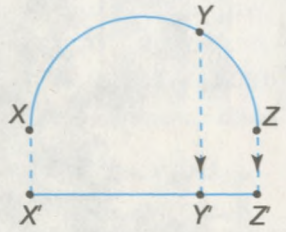



ШКОЛА

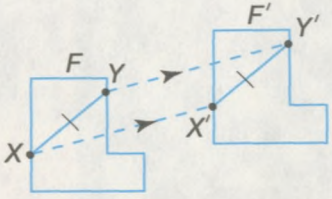
17. § EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ

Figyeld meg a 192. ábrát. Egy félkör minden pontját úgy mozdítottuk el, hogy egy szakaszt kaptunk. Azt mondjuk, hogy a félkört egy szakaszra képeztük le. Azt is mondhatjuk, hogy a szakasz a félkör geometriai transzformációja. Röviden transzformációt fogunk mondani. Könnyen belátható, hogy ez a transzformáció nem tartja meg két pont között a távolságot: $XY \neq X'Y'$.

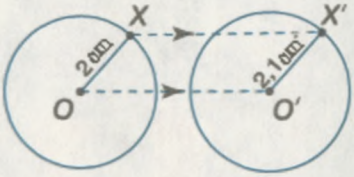
A 193. ábrán látható transzformáció, ami az F síkidomot az F' alakzatba viszi át, jellegzetes. Ez a transzformáció megtartja a megfelelő pontok között a távolságot. Az F alakzat bármely két X és Y pontja az F' olyan két X'és Y' pontjába megy át, melyekre igaz, hogy $XY = X'Y'$. Az ilyen transzformációt ***egybevágósági (távolságtartó) transzformációnak*** nevezzük.



192. ábra



193. ábra



194. ábra

? Valamely transzformáció egy körvonalat körvonalba képez le (194. ábra). Egybevágósági transzformáció-e ez a leképezés? Nem, mivel nem tartja meg a pontpárok távolságát: $OX \neq O'X'$.

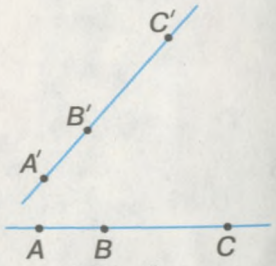
Tétel (az egybevágósági transzformáció tulajdonsága).
Az egyenesen levő pontok a transzformáció során egy egyenesre vetülnek, miközben a pontok kölcsönös helyzete változatlan marad.

Bizonyítás. Az A, B és C pontok egy egyenesen helyezkednek el (195. ábra). Akkor az egyik pont a másik kettő között van. Tételezzük fel, hogy a B pont van az A és a C pont között.

Akkor $AC = AB + BC$. (1)

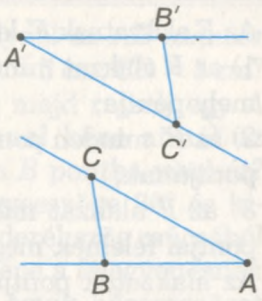
Valamely egybevágósági transzformáció az A, B és C pontot megfelelően az A', B' és C'pontra képezi le. Mivel az egybevágósági transzformáció megtartja a pontpárok távolságát, így $AC=A'C'$; $AB=A'B'$ és $BC=B'C'$.Ezekből az egyenlőségekből és az (1) egyenlőségből következik, hogy $A'C' = A'B' + B'C'$.

Az utolsó egyenlőség azt jelenti, hogy az A', B' és C' egy egyenesen helyezkednek el és a B' pont az A' és C' pontok között van.



195. ábra

Következmény. **Az egybevágósági transzformációnál az egyenes képe egyenes, a félegyenes képe félegyenes, a szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz.**



196. ábra

Feladat. **Bizonyítsuk be, hogy az egybevágósági transzformáció a szöget vele azonos fokmértékű szögre képezi le!**

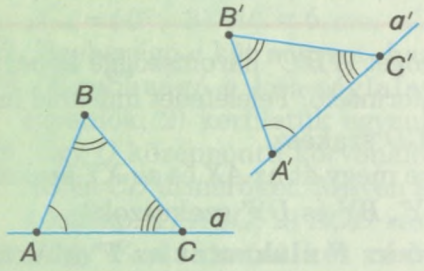
Megoldás. Az AB és AC két közös kezdőpontú, nem kiegészítő félegyenes (196. ábra). Egy egybevágósági transzformációnál e félegyenesek képei az $A'B'$ és $A'C'$ félegyenesek. Mivel ez a transzformáció távolságtartó, így $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ és $BC=B'C'$. Tehát az $ABC\Delta$ és az $A'B'C'\Delta$ háromszögek egybevágók a három oldaluk alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy a megfelelő szögek egyenlők. Tehát $BAC\angle = B'A'C'\angle$.

Az egybevágósági transzformáció bármely síkidomot, alakzatot vele egybevágó síkidomba, alakzatba visz át. Tehát az alakzatok egybevágóságának definíciója egybevágósági transzformációval is megadható.

Két ***alakzat egybevágó***, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot átviszi a másikba.

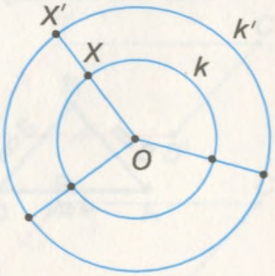
Az egybevágósági transzformáció tulajdonságait a 23. táblázatban foglaltuk össze.

23. táblázat

Egybevágósági transzformáció	Tulajdonságok
	1. Az egyenes képe egyenes (a képe az a'), a félegyenes képe félegyenes. 2. Távolságtartó: a szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz ($AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$). 3. Szögtartó: a szög képe vele azonos fokmértékű szög ($A\angle = A'\angle$, $B\angle = B'\angle$, $C\angle = C'\angle$).

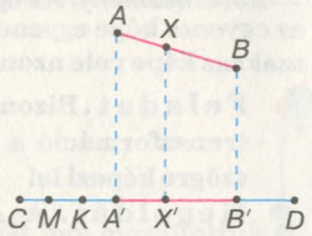
BŐVEBBEN

Gondoljunk bele, mi is az „alakzatok leképezése” fogalom. Jelöljük k és k'-tel két koncentrikus O középpontú körvonalat (197. ábra). Az első körvonal minden X pontjának a másik körvonal X' pontja a képe, ami illeszkedik az OX félegyenesre. Tehát a második körvonal minden pontját hozzá rendeltük az első körvonal valamely pontjához. Ezenkívül az első körvonal egyes pontjainak megfelelnek a második körvonal pontjai. Tehát a k körvonalat leképeztük k' körvonalra.



197. ábra

Az F alakzatnak F' leképezése olyan megfelelés, amelynél:
1) az F alakzat minden pontjának megfelel az F' valamely pontja;
2) az F' minden pontja megfelel az F alakzat valamely pontjának;
3) az F alakzat más-más pontjainak az F' más-más pontjai felelnek meg.
Az alakzatok pontjai közötti megfelelés nem mindig leképezés.



198. ábra

A 198. ábrán láthatók az AB és CD szakaszok. Az AB szakasz minden X pontjának megfelel egy X' alapú merőleges, amelyet az X pontból húztunk a CD szakaszra. Bizonyítsátok be, hogy az adott megfelelés nem lesz az AB szakasznak a CD szakaszra leképezett vetülete.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Milyen transzformációt nevezünk egybevágóságnak?
2. Bizonyítsd be, hogy egy egyenes pontjait az egybevágósági transzformáció egy másik egyenes pontjaiba viszi át úgy, hogy közben megtartja a pontok kölcsönös helyzetét!
3. Mi a képe az egyenesnek, a félegyenesnek és a szakasznak az egybevá-gósági transzformációnál?
4. Bizonyítsd be, hogy az egybevágósági transzformáció a szöget vele azonos nagyságú szöggé képezi le!
5. Mikor egybevágó két síkidom?

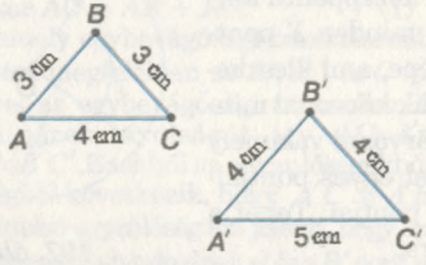
OLDD MEG A FELADATOKAT!

566'. Egy transzformáció az ABC háromszöget $A'B'C'$ háromszöggé képezi le (199. ábra). Egybevágóság-e ez a transzformáció? Feleletedet indokold meg!

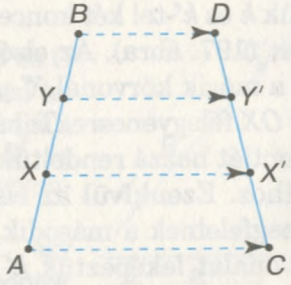
567'. A 200. ábrán az AB szakasz képe a CD szakasz.
1) Mi az X és az Y pontok képe? 2) Mibe megy át az AX és az XY szakasz?
3) Egyenlők-e az AX és CX', XY és $X'Y'$, BY és DY' szakaszok?

568'. Az egybevágósági transzformáció az F alakzatot az F' alakzatba képezi le. Egybevágó-e az F és az F' alakzat?

569°. Az egybevágósági transzformáció az AB szakaszhoz az $A'B'$ szakaszt rendeli. Mi helyes: a) $AB > A'B'$; b) $AB = A'B'$; c) $AB < A'B'$?



199. ábra



200. ábra

570°. Létezik-e olyan egybevágósági transzformáció, melynél az AB szakasz képe a CD szakasz, ha: 1) $AB = 4$ cm; $CD = 6$ cm; 2) $AB = 5$ cm; $CD = 5$ cm?

571°. Vegyél fel a síkon két tetszőleges A és B pontot, majd rajzolj egy A középpontú 3 cm sugarú körvonalat! Mi a körvonal képe annál az egybevágósági transzformációnál, ami az A pontot a B pontba viszi át?

572°. Rajzolj két derékszögű háromszöget, melyek hegyesszöge 30° és kisebbik befogója 2 cm! Az egyik háromszögben húzz a derékszög csúcsából az átfogó felezőpontján keresztül félegyenest! Mi a képe a félegyenesnek annál az egybevágósági transzformációnál, ami az egyik háromszöget leképezi a másik háromszögbe?

573°. **Húzz egy OA és $O'A'$ félegyenest! Vegyél fel az OA félegyenesen három pontot, az M, K és P pontokat! Egy egybevágósági transzformációnál az OA félegyenes képe az $O'A'$ félegyenes. Rajzold meg az M', K' és P' pontok képét!**

574°. Adott két közös kezdőpontú OA és OB, valamint egy $O'A'$ félegyenes. Rajzold meg az $O'B'$ félegyenest, az OB félegyenes képét annál a transzformációnál, ami az OA félegyenest az $O'A'$ félegyenesbe viszi át! Egyértelmű-e az $O'B'$ félegyenes képe?

575°. Rajzolj két egybevágó ABC és $A'B'C'$ háromszöget! Az AC oldalon vegyél fel egy X pontot! Rajzold meg az X pont képét annál az egybevágósági transzformációnál, ami az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi át!

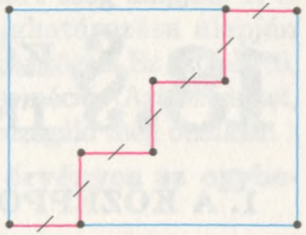
576. Létezik-e olyan egybevágósági transzformáció, amely az $ABC\Delta$-et az $A'B'C'$-be viszi át, ha: 1) $A\angle = 110°$, $B'\angle = 120°$; 2) $C\angle = 20°$, $A'\angle = 60°$; 3) $AC = 6$ cm, $A'B' = B'C' = 3$ cm?

577. Egybevágó-e két négyzet, ha: 1) átlóik egyenlők; 2) kerületük egyenlő?

578. Egybevágó-e két téglalap, ha: 1) átlóik egyenlők; 2) kerületük egyenlő?

579. Egy O középpontú körvonalban meghúzták az AB és CD átmérőket. Milyen alakzat egybevágó a körlap: 1) AOC; 2) AOD részével?

580. **Egy F alakzatot két részre bontottunk, ezek a részek egybevágók egy F' alakzatot alkotó két síkidommal. Egybevágó-e a két alakzat? Készítsd el a rajzot!**

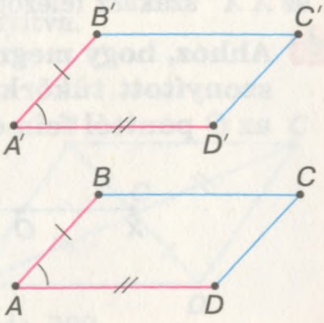


201. ábra

581. Egy téglalapot két részre osztottak, ahogy azt a 201. ábra mutatja. Egybevágó-e ez a két rész?

582. Feldarabolható-e bármely háromszög két egybevágó háromszögre? Mely esetben lehetséges ez?

583. **Bizonyítsd be, hogy az egybevágósági transzformáció: 1) a háromszöget vele egybevágó háromszögbe viszi át; 2) a paralelogrammát vele egybevágó paralelogrammába!**



202. ábra

584. Bizonyítsd be a 202. ábra alapján, hogy az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ paralelogramma egybevágó!

585. Egybevágó-e két paralelogramma, ha egyenlő: 1) a két átló és az általuk közbezárt szög; 2) a két átló és az egyik oldal; 3) a kerületeik; 4) két szomszédos oldal és a külső szög?

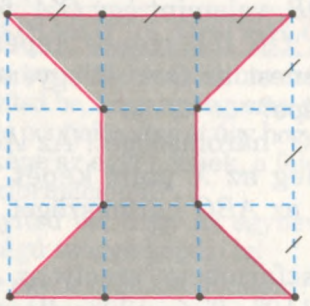
586*. Bizonyítsd be, hogy két rombusz egybevágó, ha megfelelő átlóik egyenlők!

587*. Bizonyítsd be, hogy az egybevágósági transzformáció a sokszöget vele azonos oldalhosszúságú és vele egyenlő belső szögű sokszögbe viszi át!

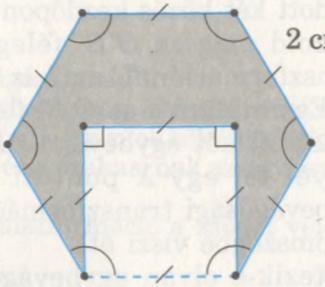
588*. Bizonyítsd be, hogy egybevágósági transzformációnál a párhuzamos egyenesek képei párhuzamos egyenesek!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

589. Rajzold át füzetedbe a 203. és 204. ábrán látható síkidomokat (használhatsz vonalzót, körzőt, szögmérőt, zsírpapírt). Számítsd ki a síkidomok területét a legkevesebb méréssel!



203. ábra



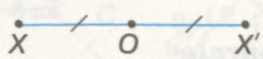
204. ábra

18. § KÖZÉPPONTOS ÉS TENGELYES SZIMMETRIA

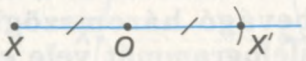
1. A KÖZÉPPONTOS SZIMMETRIA

A sík két X és X' pontja ***szimmetrikus az O ponthoz viszonyítva***, ha O az XX' szakasz felezőpontja (205. ábra).

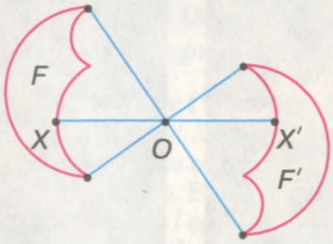
Ahhoz, hogy megrajzoljuk az X' pontot, az X pont O ponthoz viszonyított tükörképét, meg kell húzni az XO félegyenest, majd az O ponttól felmérni a síkra az $OX' = OX$ szakaszt. (206. ábra).



205. ábra



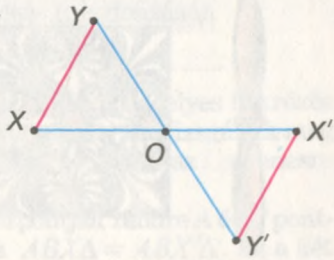
206. ábra



207. ábra



208. ábra



209. ábra

Azt a síkbeli transzformációt, amely az F síkidom minden X pontját az F' idom olyan X' pontjába képezi le, amely az X pontnak a O ponthoz viszonyított tükörképe, az O ponthoz viszonyított *tükrözésnek* vagy *szimmetriának* nevezzük (207. ábra). Az O középpontú szimmetriát *középpontos szimmetriának* nevezzük.

Ha egy középpontos tükrözés az F alakzat minden pontját magába az alakzatba viszi át, akkor az alakzat *középpontosan szimmetrikus*, az O pontot *a szimmetria középpontjának* nevezzük. Például a négyzet középpontosan szimmetrikus alakzat. A szimmetria középpontja az átlók metszéspontja (208. ábra).

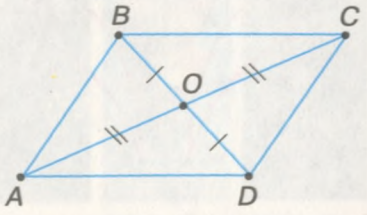
Tétel (a ponthoz viszonyított szimmetria tulajdonsága). A középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az F alakzat X és Y pontjainak az O ponthoz viszonyított tükörképei az F' alakzat X' és Y' pontjai (209. ábra). $XOY\Delta = X'OY'\Delta$ két oldaluk és az általuk közbezárt szög alapján. A O ponthoz viszonyított középpontos tükrözés meghatározása alapján $OX = OX'$ és $OY = OY'$, $XOY\angle = X'OY'\angle$, mivel csúcsszögek. Ez azt jelenti, hogy a középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció. (Azt az esetet, ha az X, Y és O pont egy egyenesen helyezkedik el, vizsgáld meg önállóan.)

Következmény: **A középpontos szimmetriára érvényes az egybevágósági transzformáció minden tulajdonsága.**

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlók metszéspontjához viszonyítva.

Megoldás. Legyen O az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja (210. ábra). Mivel a paralelogramma AC és BD átlóit az O metszéspontjuk felezi, ezért az A és C, valamint a B és a D pontok szimmetrikusak az O ponthoz viszonyítva. Akkor az AB és CD, valamint a BC és AD oldalak is szimmetrikusak. Ezért az O ponthoz viszonyított tükrözés a paralelogrammát önmagába viszi át.



210. ábra







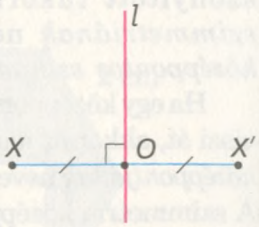
211. ábra *212. ábra* *213. ábra* *214. ábra* *215. ábra*

Környezetünkben sok középpontosan szimmetrikus alakzattal találkozhatsz. Például a helikopter propellere (211. ábra), a díszítmény (212. ábra), a virágzat (213. ábra), a tengeri csillag (214. ábra), a hópehely (215. ábra).

2. A TENGELYES SZIMMETRIA

Két pont X és X' ***tengelyesen tükrös az l egyenesre***, ha az l egyenes merőleges az XX' szakaszra és felezi azt (216. ábra).

Ha az X pont az l egyenesen helyezkedik el, akkor a szimmetrikus képe maga az X pont.



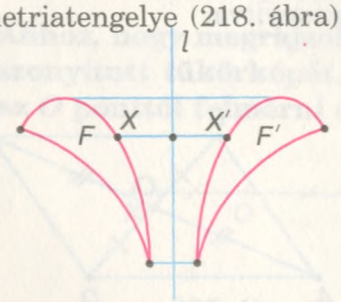
216. ábra

Ahhoz, hogy megszerkesszük az X pontnak az l egyenesre tengelyesen szimmetrikus képét, az X' pontot, az X ponton az l egyenesre merőleges egyenest húzunk, majd erre az egyenesre felmérjük az $OX' = OX$ szakaszt (216. ábra).

Azt a transzformációt, amely az F alakzat minden X pontját az F' alakzat olyan X' pontjába viszi át, amely az X pontnak az l egyeneshez viszonyított tükörképe, *tengelyes tükrözésnek* nevezzük. Ebben az esetben az F és F' alakzatok tengelyesen tükrösek az l egyeneshez viszonyítva (217. ábra). Az l egyenes a *tükörtengely*.

Ha a tengelyes tükrözés az F síkidomot önmagába viszi át, akkor az F alakzatot *tengelyesen szimmetrikusnak* nevezzük. Az l egyenes *szimmetriatengely*, melyet másképpen még *tengelyes tükrözésnek* vagy *tengelyes szimmetriának* is nevezünk.

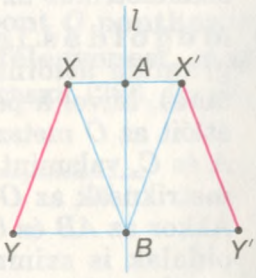
Például a körlap középpontjára illeszkedő egyenes a körlap szimmetriatengelye (218. ábra).



217. ábra



218. ábra



219. ábra

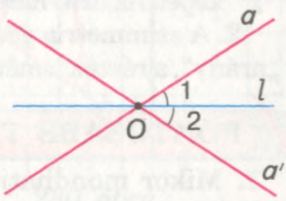
Tétel (az egyeneshez viszonyított tengelyes tükrözés tulajdonsága). A tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az l egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés az F alakzat X és Y pontjait az F' alakzat X' és Y' pontjaiba viszi át. Vizsgáljuk meg az általános esetet, amikor az X és Y pontok egyenese nem merőleges az l egyenesre (219. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $XY = X'Y'$!

Jelöljük az l egyenes és az XX' és YY' szakaszok metszéspontjait rendre A és B ponttal két oldaluk és az általuk közbezárt szög alapján! Az $ABX\Delta = ABX'\Delta$. Ez a két háromszög derékszögű és befogóik egyenlő hosszúságúak: $XAB\angle = X'AB\angle = 90°$, $AX = AX'$ a tengelyes tükrözés meghatározása értelmében, az AB oldal közös. Ebből következik, hogy a megfelelő oldalak és szögek egyenlők: $BX = BX'$ és $ABX\angle = ABX'\angle$. Ez azt jelenti, hogy az $XYB\Delta = X'Y'B\Delta$, két oldal és az általuk közbezárt szög alapján. Tehát $BX = BX'$ és $BY = BY'$ a tengelyes tükrözés meghatározása alapján, $XBY\angle = X'BY'\angle$ ($XBY\angle = 90° - ABX\angle$, $X'BY'\angle = 90° - ABX'\angle$). A háromszögek egybevágóságából következik, hogy a megfelelő oldalak egyenlő hosszúságúak: $XY = X'Y'$. (Azt az esetet, ha az X és Y pontok az l egyenesen vagy az l egyenesre merőleges egyenesen helyezkednek el, vizsgáld meg önállóan.)

Következmény. **A tengelyes tükrözésre érvényes az egybevágósági transzformáció minden tulajdonsága.**

Feladat. Bizonyítsd be, hogy egy l egyenesre tükrös két a és a' egyenes vagy metszi egymást egy, a tükörtengelyre illeszkedő pontban, ugyanakkora szöget zárnak be a tengellyel, vagy párhuzamosak a tükörtengellyel.



220. ábra

Megoldás. Két eset lehetséges.

1) Az a egyenes metszi az l tükörtengelyt egy O pontban (220. ábra). Mivel a tengelyes tükrözéskor a tengely fixegyenes, így az O pont képe önmaga és így hozzátartozik az a egyenes képéhez, az a' egyeneshez. Tehát az egyenes és a képe az l egyenesre illeszkedő pontban metszik egymást. Az a és a' egyenesek és a tengely hajlásszögei, az 1 és 2 szögek tükrösek, tehát egyenlők.

2) Az a egyenes párhuzamos az l egyenessel. Az a' nem metszheti az l egyenest, mivel tükrös az a egyenessel az l egyeneshez viszonyítva, és akkor az a egyenesnek is metszeni kellene az l egyenest (lásd az 1. esetet). Tehát $a' \| l$.

Tengelyesen szimmetrikus alakzatokkal gyakran találkozhatsz a technikában (221. ábra), az építészetben (222., 223. ábra), a természetben (224., 225. ábra) és a használati tárgyainkon is (226. ábra).


221. ábra


222. ábra


223. ábra


224. ábra


225. ábra

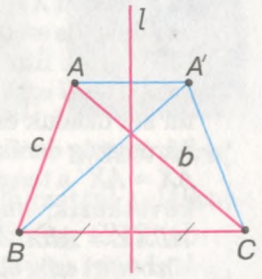

226. ábra

BŐVEBBEN

1. A feladatok megoldásánál gyakran célszerű alkalmazni a szimmetriát. A megadott alakzatot, vagy csak annak az elemeit helyettesíthetjük középpontosan vagy tengelyesen tükrös képeikkel. Nézzünk egy példát!

Feladat. Szerkesszünk háromszöget, melynek adva van két oldala és ezen oldalakkal szembeni szögek különbsége!

A feladat elemzése. Legyen ABC a szerkesztendő háromszög (227. ábra) és a $B\angle - C\angle = \alpha$ ($B\angle > C\angle$). Szerkesszük meg az ABC háromszögnek a BC oldal oldalfelező merőlegesére tükrös képét, az $A'CB$ háromszöget. Vizsgáljuk meg az $AA'C$ háromszöget. Ebben a háromszögben $AC = b$, $A'C = c$, $A'CA\angle = A'CB\angle - ACB\angle = B\angle - C\angle = \alpha$. Ezt a háromszöget meg lehet szerkeszteni.



227. ábra

Szerkesztés. Megszerkesztjük az $AA'C$ háromszöget két b és c oldala és az általuk közbezárt α szög alapján. Húzzuk meg az l egyenest, az AA' oldalfelező merőlegesét. Szerkesszük meg a B csúcsot, a C csúcs l egyenesre vonatkozó tükörképét. Az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek: ez a keresett háromszög.

2. A szimmetria görög eredetű szó, jelentése „azonos mérték”, „összemérhető”, „arány”, a részek ismétlődésére, egymásnak való megfelelésére vonatkozik.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mikor mondhatjuk, hogy két pont adott pontra tükrös?
2. Mi a középpontos tükrözés?
3. Milyen alakzat középpontosan szimmetrikus?
4. Bizonyítsd be, hogy a középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció!
5. Mikor mondhatjuk, hogy két pont adott egyenesre tükrös?
6. Mi a tengelyes tükrözés?
7. Mi a tengelyes szimmetria?
8. Bizonyítsd be, hogy a tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció!
9. Sorold fel a középpontos tükrözés és a tengelyes tükrözés tulajdonságait!

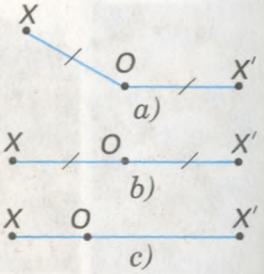
OLDD MEG A FELADATOKAT!

590'. A 228. ábrán (a, b, c) mely X és X' pontpárok tükrösek az O pontra? Feleletedet indokold meg!

591'. Vegyél fel a füzetedben egy A és O pontot! Szerkeszd meg az A pontnak az O ponthoz viszonyított tükörképét, a B pontot!

592'. Rajzolj egy AB szakaszt és vegyél fel egy, a szakaszra nem illeszkedő M pontot! Tükrözd az AB szakaszt az M pontra!

593'. A 229. ábrán (a, b, c) mely X és X' pontpárok tükrösek az l egyenesre? Feleletedet indokold meg!



228. ábra

594'. Vegyél fel egy a egyenest és egy hozzá nem tartozó M pontot! Szerkeszd meg az N pontot, az M pont a egyeneshez viszonyított tükörképét!

595'. Tükrözd az ABC háromszöget az l egyenesre (230. ábra)!

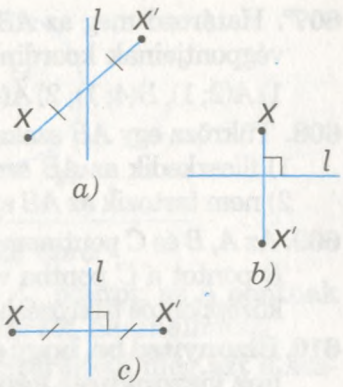
596°. Vegyél fel egy A és egy B pontot! Szerkeszd meg azt a pontot, mellyel ezek a pontok tükrösek!

597°. Adott egy ABC háromszög. Szerkeszd meg az ABC háromszögnek: 1) a C csúcsra; 2) a BC oldal O középpontjára; 3) a háromszöghöz nem tartozó K ponthoz viszonyított tükörképét!

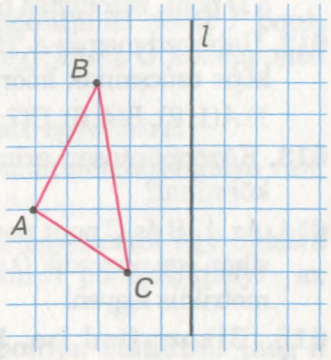
598°. Határozd meg az $A(3; 5)$ pont alábbi pontokra vonatkozó A' tükörképének koordinátáit: 1) $O(0;0)$; 2) $C(3; 0)$; 3) $D(-1; -1)$!

599°. Tükrözd az AB szakaszt: 1) az origóra; 2) az $M(4; 0)$ pontra; 3) az AB szakasz A végpontjára! Írd le az A' és B' tükörképek koordinátáit, ha: $A(2; 2)$ és $B(6; 6)$!

600°. Tükrözd az O középpontú körvonalat:
1) a körvonal egyik A pontjára;
2) a körvonalon kívüli B pontra;
3) a körvonalon belül levő C pontra!



229. ábra



230. ábra

601°. Vegyél fel egy M és egy N pontot! Szerkeszd meg azt az egyenest, melyre ezek a pontok tükrösek!

602°. Tükrözd az ABC háromszöget olyan egyenesre, amely: 1) nem metszi a háromszöget; 2) metszi a háromszöget; 3) az AC oldalra illeszkedik!

603°. Adva van három pont: A, B és C. Tükrözd: 1) a C pontot az AB egyenesre; 2) a B pontot az AC egyenesre; 3) az A pontot az BC egyenesre!

604°. Tükrözz:
1) egy négyszöget az egyik oldal egyenesére;
2) egy téglalapot az egyik átlójára illeszkedő egyenesre;
3) egy trapézt a középvonalára illeszkedő egyenesre!

605°. Tükrözz egy körvonalat olyan egyenesre, amely: 1) nem metszi a körvonalat; 2) érinti a körvonalat; 3) metszi a körvonalat!

606°. Határozd meg az $A(-4; 5)$ pont: 1) az OX; 2) az OY tengelyre vonatkozó tükörképeinek koordinátáit!

607°. Határozd meg az AB szakasz OX tengelyhez viszonyított $A'B'$ tükörképe végpontjainak koordinátáit, ha:

1) $A(2; 1), B(4; 1)$; 2) $A(-3; -3), B(3; 3)$; 3) $A(3; 2), B(6; 4)$!

608. Tükrözz egy AB szakaszt egy olyan O pontra, amely:

1) illeszkedik az AB szakaszra;

2) nem tartozik az AB szakaszhoz, de illeszkedik az AB szakasz egyenesére!

609. Az A, B és C pont nem egy egyenes három pontja. Egy középpontos tükrözés a B pontot a C pontba viszi át. Szerkeszd meg az A pont képét ugyanehhez a középpontos tükrözéshez viszonyítva!

610. Bizonyítsd be, hogy egy egyenesnek az egyenesre nem illeszkedő ponthoz viszonyított képe az egyenessel párhuzamos egyenes!

611. Az ABC háromszög B csúcsának az AC oldal felezőpontjához viszonyított képe a D pont. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

612. Határozd meg az $A'B'C'$ háromszög az ABC háromszög origóhoz viszonyított képe csúcsainak koordinátáit, ha:

1) $A(1; 2), B(4; 6), C(7; 3)$; 2) $A(4; -2), B(1; 2), C(-2; 6)$!

613. Középpontosan szimmetrikus-e: 1) egy szakasz; 2) egy félegyenes; 3) egy körvonal?

614. Az A, B és C pont nem egy egyenesre illeszkedő három pont. Határozz meg a síkon egy negyedik D pontot úgy, hogy az $ABCD$ négyszög középpontosan szimmetrikus legyen!

615. Bizonyítsd be, hogy bármely középpontosan szimmetrikus négyszög paralelogramma!

616. Bizonyítsd be, hogy két párhuzamos egyenes középpontosan tükrös. Határozd meg a tükrözés középpontjainak mértani helyét!

617. Adott egy tetszőleges ABC háromszög és egy tetszőleges A' pont. Tükrözd a háromszöget arra az egyenesre, melyhez viszonyítva az A pont képe az A' pont!

618. Bizonyítsd be, hogy a szög szögfelezőjének egyenese a szög szimmetriatengelye!

619. Bizonyítsd be, hogy az egyenlőszárú háromszög alapját felező merőleges a háromszög szimmetriatengelye.

620. Két körvonal metszéspontjai tükrösek a körvonalak középpontjait összekötő egyenesre. Bizonyítsd be!

621. Bizonyítsd be, hogy a rombusz átlói egyben szimmetriatengelyek is!

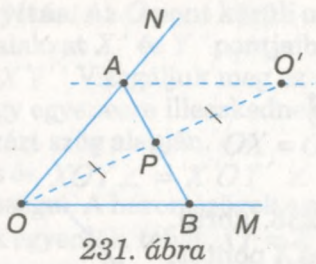
622. Ha egy háromszögnek van szimmetriatengelye, akkor ez a háromszög egyenlőszárú. Bizonyítsd be!

623. Bizonyítsd be: ha egy trapéznak van szimmetriatengelye, akkor egyenlőszárú!

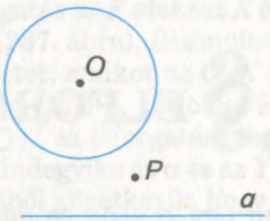
624. Bizonyítsd be, hogy az egyenlőszárú trapéz alapjainak felező merőlegese a trapéz szimmetriatengelye!

625. Hány szimmetriatengelye van egy négyszögnek? Hozz fel példát a különböző esetekre!

626. Az ABC egyenlőszárú háromszög B csúcsának képe az AC oldal egyenesére a D pont. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög rombusz!



231. ábra



232. ábra

627*. Adott egy A és egy O pont. Szerkeszd meg az A' pontot, az A pontnak az O ponthoz viszonyított tükörképét! Csak körzőt használhatsz!

628*. Adott egy MON szög és egy P belső pontja. Szerkeszd meg azt a szakaszt, melynek végpontjai a szög száraira illeszkednek, felezőpontja pedig a P pont! A 231. ábra alapján készítsd el a szerkesztés tervét!

629*. Szerkeszd meg azt a szakaszt, melynek középpontja az adott P pont, végpontjai pedig egy adott a egyenesre, illetve egy adott O középpontú körvonalra illeszkednek (232. ábra)!

630*. Csak körzővel tükrözd az adott pontot az adott egyenesre!

631*. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögnek két szimmetriatengelye van, akkor van egy harmadik is!

632*. Adott egy l egyenes és egy fél síkban lévő, az egyenestől egy oldalra eső A és B pont. Határozd meg az l egyenes azon N pontját, melyre az $AN + BN$ távolságok összege a legkisebb!

633*. Az M pont az ABC hegyesszög egyik belső pontja. Határozd meg a szög szárainak azon X és Y pontjait, melyeknél az MXY háromszög területe minimális!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

634. Az A és a B város egy gázvezeték egyik oldalán terül el. Hol kell felépíteni a gázelosztó állomást, hogy a legkevesebb csőre legyen szükség ahhoz, hogy a gázt a városokba juttassák?

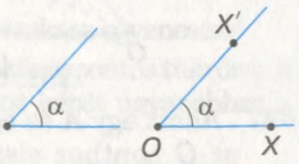


19. § ELFORGATÁS

Adva van egy α szög és egy O pont (233. ábra). Vegyünk az O ponttól különböző tetszőleges X pontot! Az X ponthoz rendeljük hozzá az X' pontot úgy, hogy:

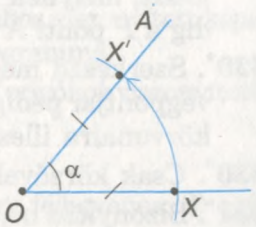
1) az OX távolság egyenlő az OX' távolsággal;

2) az OX és OX' félegyenesek hajlásszöge α legyen.



233. ábra

Az X pont ilyen leképezését az X' pontra az O ***pont körüli elforgatásnak*** nevezzük α szöggel az óramutató járásával ellenkező irányba. Az O pontot az elforgatás önmagába viszi át. Az O pontot az *elforgatás középpontjának*, az OX és OX' félegyenesek hajlásszögét az elforgatás szögének nevezzük az óramutató járásával ellenkező irányba (234. ábra).



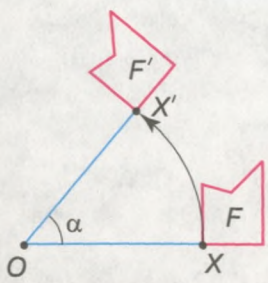
234. ábra

Ha ismerjük az elforgatás O pontját és az elforgatás α szögét, akkor az X pont képét úgy rajzoljuk meg (234. ábra), hogy meghúzzuk az OX félegyenest; majd az OX félegyenestől az óramutató járásával ellentétes irányban felmérjük az α szöggel egyenlő XOA szöget, és az OA félegyenesen feltüntetjük az X' pontot OX távolságra az O középponttól.

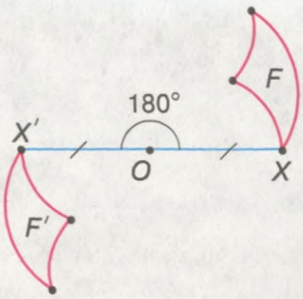
Ha a síkon adva van egy F alakzat, akkor az alakzat minden X pontja elforgatható az O pont körüli α szöggel (235. ábra). A transzformáció következtében egy F' alakzatot kapunk, ami az F alakzat képe. Az O pont önmagába képeződik le.

Az O pont körüli 180°-os elforgatás középpontos szimmetria (236. ábra).

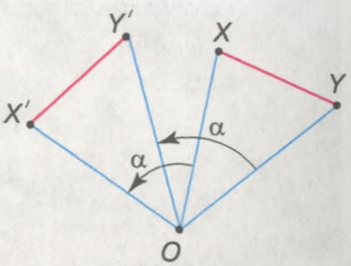
Tétel (az elforgatás tulajdonsága).
Az elforgatás egybevágósági transzformáció.



235. ábra



236. ábra



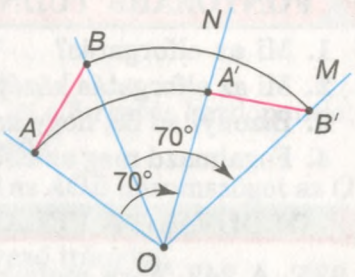
237. ábra

Bizonyítás. Az O pont körüli α szögű elforgatás az F alakzat X és Y pontjait az F' alakzat X' és Y' pontjaiba képezi le (237. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $XY = X'Y'$! Vizsgáljuk meg az általános esetet, amikor az O, X és Y pontok nem egy egyenesre illeszkednek. Az $OXY\Delta = OX'Y'\Delta$ két oldal és az általuk közbezárt szög alapján. $OX = OX'$, $OY = OY'$ az elforgatás meghatározása szerint és $XOY\angle = X'OY'\angle$ (e szögek mindegyike az α és az $Y'OX$ szögek különbsége). A háromszögek egybevágóságából következik, hogy a megfelelő oldalak egyenlők, tehát $XY = X'Y'$. (Azt az esetet, amikor az O, X és Y pontok egy egyenesre illeszkednek, vizsgáld meg önállóan!)

Következmény. **A tengelyes tükrözésre teljesül az egybevágósági transzformáció minden tulajdonsága.**

Feladat. Forgassuk el az AB szakaszt az O pont körül az óramutató járásával megegyező irányba 70°-ra!

Megoldás. Húzzuk meg az OA és az OB félegyeneseket (238. ábra)! Mérjük fel az óramutató járásával megegyező irányban: az $AON\angle = 70°$ és a $BOM\angle = 70°$! Az ON félegyenesre mérjük fel az $OA' = OA$, az OM félegyenesre pedig az $OB' = OB$ szakaszt! Kössük össze az A' és a B' pontokat!



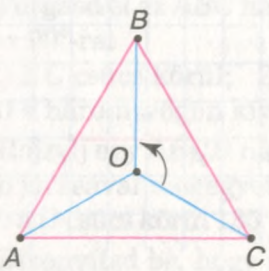
238. ábra

BŐVEBBEN

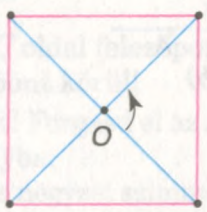
Figyeljük meg a 239., 240., 241. ábra alakzatait! Mindegyik alakzatot az O pont körüli bizonyos szögű elforgatás önmagába viszi át. A szabályos háromszöget az O pont körüli 120°-os $\left(\frac{360°}{3}\right)$elforgatás viszi át önmagába (239. ábra).

Valóban $OA = OB = OC$, $AOB\angle = BOC\angle = AOC\angle = 120°$, így az ABC háromszög képe önmaga.

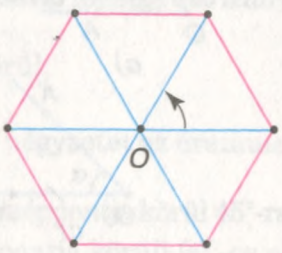
Hasonlóan igazolható, hogy a négyzetet $\left(\frac{360°}{4}\right)$-os elforgatás képezi le önmagára (240. ábra), a szabályos hatszöget pedig $\left(\frac{360°}{6}\right)$-os elforgatás



239. ábra



240. ábra



241. ábra

(241. ábra). Könnyen belátható, hogy a szabályos n-szögeket a középpontjuk körüli $\frac{360°}{n}$ elforgatás képezi le önmagára.

Ha egy F alakzatot az O pont körüli $\frac{360°}{n}$ elforgatás önmagára képezi le, akkor *az alakzat n fokú forgásszimmetrikus*. Az O pont az F alakzat *n-ed fokú forgásszimmetria középpontja*. Az egyenlő oldalú háromszög, a négyzet, a szabályos hatszög, a szabályos n-oldalú sokszög 3, 4, 6, n rendű forgásszimmetrikus síkidom.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi az elforgatás?
2. Mi az elforgatás középpontja? Mi az elforgatás szöge?
3. Bizonyítsd be, hogy az elforgatás egybevágósági transzformáció!
4. Fogalmazd meg az elforgatás tulajdonságait!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

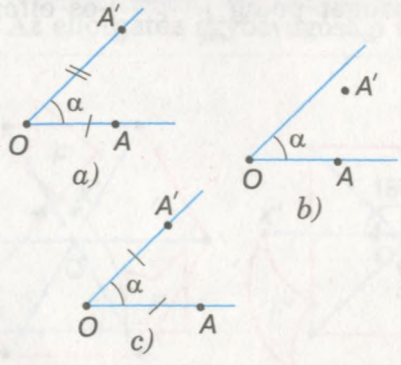
635'. A 242. ábra melyik rajzán látható az A pontnak az O pont körüli α nagyságú elforgatása?

636'. Rajzolj egy $MON\angle = 60°$ szöget! Jelölj meg a szög OM szárán egy X pontot! Határozd meg az ON szár azon X' pontját, amelybe átmegy az X pont az O pont körüli 60°-os elforgatásnál!

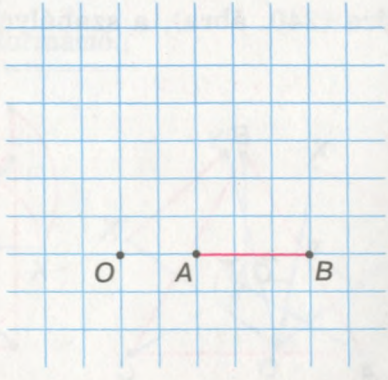
637'. Rajzold meg az AB szakasz $A'B'$ képét egy, az óramutató járásával ellentétes 90°-os elforgatásnál (243. ábra)!

638°. Adva van egy O és egy A pont. Rajzold meg az A pont azon képét, amelybe egy:

1) 50°-os elforgatás viszi át az óramutató járásával megegyező irányban;
2) 120°-os elforgatás viszi át az óramutató járásával ellentétes irányban;
3) 180°-os elforgatás viszi át az óramutató járásával megegyező irányban!



242. ábra



243. ábra

639°. Adva van egy AB szakasz és a szakaszra illeszkedő O pont. Forgasd el az AB szakaszt az O pont körül:
1) az óramutató járásával ellentétes irányba 80°-ra;
2) az óramutató járásával megegyező irányba 140°-ra;
3) az óramutató járásával megegyező irányba 90°-ra!

640°. Oldd meg a 639. feladatot, ha az O pont nem illeszkedik az AB szakaszra!

641°. **Rajzolj egy AB szakaszt! Forgasd el az AB szakaszt:**
1) az A pont körül az óramutató járásával megegyező irányba 150°-ra;
2) a B pont körül az óramutató járásával ellentétes irányba 60°-ra;
3) a szakasz középpontja körül az óramutató járásával megegyező irányba 40°-ra!

642°. Milyen alakzatba megy át egy elforgatásnál:
1) az elforgatás kezdőpontján átmenő egyenes;
2) egy olyan körvonal, melynek a középpontja az elforgatás kezdőpontja;
3) az elforgatás kezdőpontjával közös csúcsú szög?

643°. Az AOB háromszögben $AO = OB$. Forgasd el az AOB háromszöget az O pont körül:
1) AOB szögre az óramutató járásával megegyező irányba;
2) AOB szögre az óramutató járásával ellenkező irányba;
3) 120°-ra az óramutató járásával megegyező irányba!

644°. Rajzold meg az MON derékszög képét az O pont körüli 45°-os elforgatásnál: 1) az óramutató járásával megegyező irányban; 2) az óramutató járásával ellentétes irányban!

645. **Rajzolj egy a egyenest és vegyél fel egy rá nem illeszkedő M pontot! Forgasd el az a egyenest az M pont körül:**
1) az óramutató járásával megegyező irányba 90°-ra;
2) az óramutató járásával ellentétes irányba 45°-ra!

646. Forgass el egy körvonalat az A pont körül 90°-ra, ha:
1) az A pont a körvonalon kívül van; 2) az A pont illeszkedik a körvonalra!

647. **Adott két pont: X és X'. Szerkeszd meg az X pontot az X' pontba átvivő elforgatások középpontjainak mértani helyét!**

648. Adva van két egybevágó körvonal. Határozd meg azon elforgatások középpontjainak mértani helyét, melyek az egyik körvonalat a másikba viszik át!

649. Forgasd el az ABC háromszöget az óramutató járásával megegyező irányba 90°-ra:
1) a C csúcs körül; 2) az AC oldal felezőpontja körül;
3) a háromszögön kívüli O pont körül!

650. Rajzolj egy $ABCD$ négyzetet! Forgasd el az $ABCD$ négyzetet az óramutató járásával megegyező irányba:
1) a D csúcs körül 135°-ra; 2) a négyzet szimmetria középpontja körül 45°-ra!

651. Bizonyítsd be, hogy a négyzetet az átlók metszéspontja körüli 90°-os elforgatás önmagába viszi át!

652. Bizonyítsd be, hogy az egyenlő oldalú háromszöget a magasságok metszéspontja körüli 120°-os elforgatás önmagába viszi át!

653. Egy szabályos háromszög középpontjára illeszkedő két egyenes 60°-os szöget zár be. Bizonyítsd be, hogy ezen egyeneseknek a háromszöghöz tartozó szakaszai egyenlők!

654. Egy négyzet középpontján keresztül két egymásra merőleges egyenest húztak. Bizonyítsd be, hogy az egyenesek négyzeten belüli részei egyenlők!

655*. Adva van két körvonal. A 45°-os elforgatás az egyik körvonalat a másik körvonalba viszi át. Szerkeszd meg az elforgatás középpontját!

656*. Adva van két egyenlő hosszúságú AB és $A'B'$ szakasz. Szerkeszd meg annak az elforgatásnak a középpontját, ami az A pontot az A' pontba, a B pontot a B' pontba viszi át! Mindig lehetséges-e ilyen elforgatás?

657*. Az ABC háromszög AB és BC oldalaira $ABPQ$ és $BCMN$ négyzetet rajzoltak. Az $ABPQ$ négyzet és az ABC háromszög az AB egyenes különböző oldalain van, a $BCMN$ négyzet és az ABC háromszög a BC oldal egyik oldalán. Bizonyítsd be, hogy a PN és AC szakasz egyenlő hosszúságú és merőlegesek egymásra!

658*. Az A pont körüli 60°-os elforgatás a BC szakasz B végpontját a C pontba viszi át, a C pontot egy D pontba. Bizonyítsd be, hogy az A, B, C és D pontok egy rombusz csúcsai!

659*. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója 1 cm. Forgasd el ezt a háromszöget a derékszög csúcsa körül 45°-kal! Határozd meg a háromszög és képe közös részének területét!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

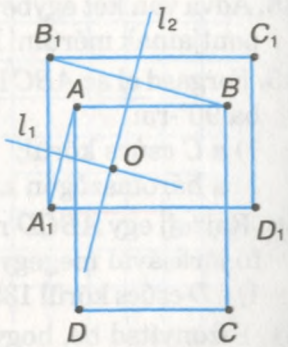
660. Az óra pontban 12 órát mutat. Hány órát fog mutatni ez az óra, ha a percmutató: 1) 60°-ot; 2) 120°-ot; 3) 150°-ot elfordul?

661*. A 244. ábrán egy összecsukható asztal lapja látható zárt állapotban, a 245. ábrán pedig kinyitva. Hová kell felszerelni a forgózsanérokat? A feladat megoldásánál használd a 246. ábra jelöléseit!



244. ábra

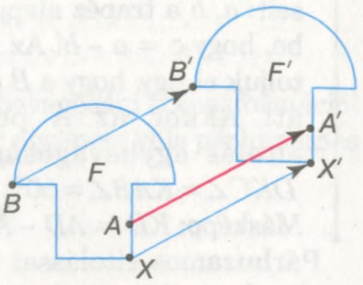

245. ábra



246. ábra

20. § PÁRHUZAMOS ELTOLÁS

Figyeld meg a 247. ábrát! Az F alakzat minden pontját elmozdították ugyanabba az irányba (az XX', AA', BB' ... párhuzamos egyenesek mentén), ugyanakkora távolságra ($XX' = AA' = BB'$ ...). Egy F' alakzatot kaptak. Ebben az esetben az F alakzatot egy párhuzamos eltolás az F' alakzatba vitte át.

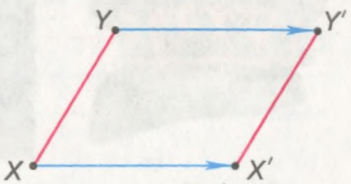


247. ábra

Azt a transzformációt, amely az alakzat minden pontját ugyanabba az irányba, ugyanakkora távolságra viszi át, ***párhuzamos eltolásnak nevezzük.***

Tétel (a párhuzamos eltolás tulajdonsága).
A párhuzamos eltolás egybevágósági transzformáció.

Bizonyítás. Az X és Y pont valamely síkidom két tetszőleges pontja (248. ábra). Egy párhuzamos eltolás az X pontot az X', az Y pontot az Y' pontba viszi át. Bizonyítsuk be, hogy $XY = X'Y'$! A párhuzamos eltolás meghatározása értelmében $XX' = YY'$ és $XX' \parallel YY'$. Akkor viszont az $XYY'X'$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma szemben lévő oldalai egyenlők, tehát $XY = X'Y'$. (Azt az esetet, amikor az egyenlő szakaszok egy egyenesre illeszkednek, vizsgáld meg önállóan.)



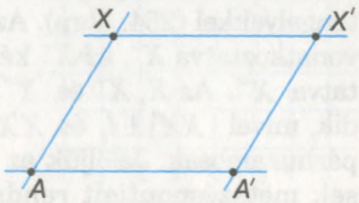
248. ábra

1. következmény: **A párhuzamos eltolásra teljesül az egybevágósági transzformáció minden tulajdonsága.**

2. következmény: **A párhuzamos eltolás az egyenest vele párhuzamos egyenesbe vagy önmagába viszi át.**

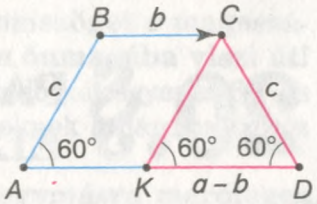
Könnyen belátható, hogy az egyenesek párhuzamossága az XY és $X'Y'$ szakaszok párhuzamosságából következik (248. ábra). Ha egy egyenes párhuzamos az eltolás irányával, akkor az egyenes minden pontjának képe is ezen egyenes valamely pontja, tehát az egyenes önmagába megy át.

Ahhoz, hogy megrajzoljuk az X pont X' képét arra a párhuzamos eltolásra vonatkoztatva, ami az A pontot az A' pontba viszi át, a második következményt kell alkalmazni. Párhuzamos egyeneseket kell húzni úgy, ahogy azt a 249. ábra mutatja.



249. ábra

Feladat. Az egyenlőszárú trapéz hegyesszöge 60°-os. Bizonyítsuk be, hogy a trapéz szára egyenlő az alapok különbségével!



250. ábra

Megoldás. Használjuk a 250. ábra jelöléseit: a, b a trapéz alapjai, c a szára. Bizonyítsuk be, hogy $c = a - b$! Az AB szárat párhuzamosan toljuk el úgy, hogy a B csúcs a C csúcsba menjen át! Akkor az A pont képe a K pont. Mivel a párhuzamos eltolás egybevágósági transzformáció, így szögmegtartó. Tehát $DKC\angle = KAB\angle = 60°$. Ezért a KCD háromszög egyenlő oldalú és $KD = c$. Másképp: $KD = AD - AK = AD - BC = a - b$. Azt kaptuk, hogy $c = a - b$.

Párhuzamos eltolással (azonos, periodikusan ismétlődő motívumokkal) találkozhatsz hímzéseken, tapétákon, anyagmintákon, parkettán, díszítményeken. Az alábbi ábrákon ókori görög vázadíszt (251. ábra), a párizsi Notre-Dame székesegyház vitrázsát (Franciaország, középkor) (252. ábra), valamint Dareiosz szúzai palotájának (ókori Perzsia) (253. ábra) részletét láthatod.


251. ábra


252. ábra


253. ábra

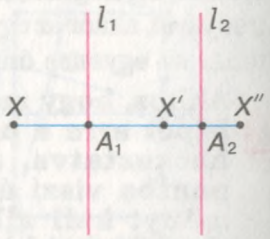
BŐVEBBEN

Az F alakzatot valamely egybevágósági transzformáció az F' alakzatba viszi át, egy másik transzformáció pedig az F' alakzatot az F'' alakzatba. Az ilyen egymás utáni transzformációkat a transzformációk *kompozíciójának* nevezzük.

Az ilyen kompozíció tulajdonsága: **két egymás utáni tengelyes tükrözés párhuzamos tengelyekkel végzett párhuzamos eltolás.**

Bizonyítsuk be ezt az állítást!

Adva van két tengelyes tükrözés, párhuzamos l_1 és l_2 tengelyekkel (254. ábra). Az X pont képe az l_1 egyenesre vonatkoztatva X', az X' képe az l_2 egyenesre vonatkoztatva X''. Az X, X' és X'' pont egy egyenesre illeszkedik, mivel $XX' \perp l_1$ és $X'X'' \perp l_2$, és l_1, l_2 az egyenesek párhuzamosak. Jelöljük az egyenes és az X'', egyenesek metszéspontjait rendre A_1-gyel és A_2-vel. Akkor $XX'' = 2A_1A_2$.



254. ábra

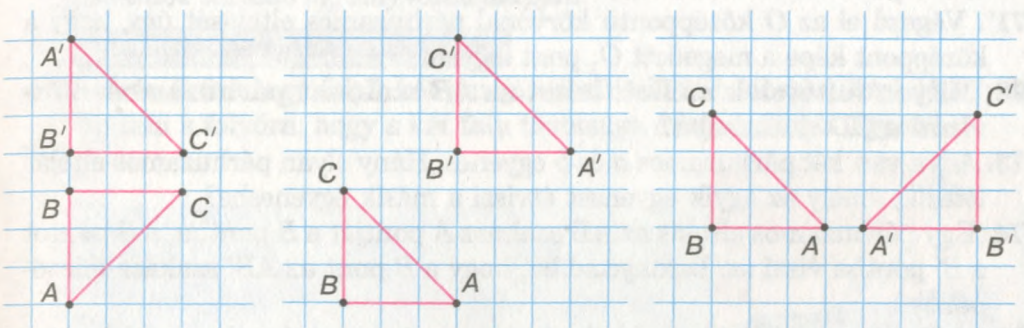
Valóban $XX'' = XA_1 + A_1X' + X'A_2 + A_2X'' = 2A_1X' + 2X'A_2 = 2(A_1X' + X'A_2) = 2A_1A_2$. Tehát az X és X'' pontok távolsága $2A_1A_2$, amit az l_1, l_2 egyenesek helye határoz meg. Ez viszont azt jelenti, hogy két párhuzamos tengelyű tengelyes tükrözés helyettesíthető egy párhuzamos eltolással $2A_1A_2$ távolságra.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi a párhuzamos eltolás?
2. Bizonyítsd be, hogy a párhuzamos eltolás egybevágósági transzformáció!
3. Magyarázd meg, hogy a párhuzamos eltolás az egyenest vele párhuzamos egyenesbe vagy önmagába viszi át!
4. Sorold fel a párhuzamos eltolás tulajdonságait!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

662'. Az alábbi ábrák közül melyiken látható az ABC háromszög párhuzamos eltolása az $A'B'C'$ háromszögbe (255. ábra).



a) *b)* *c)*

255. ábra

663'. A párhuzamos eltolás az A pontot a B pontba viszi át (256. ábra). Rajzold meg a C pont képét ennél a párhuzamos eltolásnál!

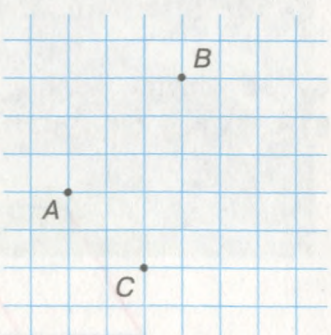
664°. Adva van az AB szakasz és a szakaszhoz nem tartozó M pont. Told el párhuzamosan az AB szakaszt úgy, hogy:

1) az A pont képe az M pont legyen;
2) a B pont képe az M pont legyen;
3) az AB szakasz felezőpontjának képe az M pont legyen!

665°. Lehet-e egy egyenes önmaga képe párhuzamos eltoláskor?

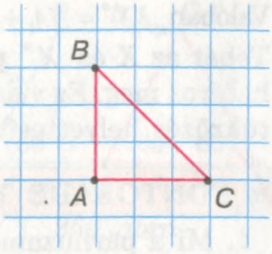
666°. Létezik-e olyan párhuzamos eltolás, amely:

1) a téglalap egyik oldalát a másik oldalába viszi át;
2) a háromszög egyik oldalát átviszi a másik oldalba?



256. ábra

667°. Rajzold meg az ABC háromszög képét annál a párhuzamos eltolásnál (257. ábra), amely:
1) az A pontot a C pontba viszi át;
2) a C pontot a B pontba viszi át!



257. ábra

668°. Rajzolj egy *ABCD* téglalapot! Told el párhuzamosan ezt a téglalapot úgy, hogy:
1) az *A* csúcs a *C* csúcsba megy át;
2) a *D* csúcs az *A* csúcsba megy át;
3) az *A* csúcs a *B* csúcsba megy át!

669°. Az AB és CD szakaszok egyenlők. Mely esetben létezik olyan párhuzamos eltolás, amely az egyik szakaszt átviszi a másikba?

670°. Vegyél fel A, B és C pontot! Szerkeszd meg az A pont képét annál a párhuzamos eltolásnál, amely: 1) a B pontot a C pontba viszi át; 2) a C pontot a B pontba viszi át! Vizsgáld meg az alábbi eseteket:
1) a C pont illeszkedik az AB egyenesre;
2) a C pont nem illeszkedik az AB egyenesre!

671°. Végezd el az O középpontú körvonal párhuzamos eltolását úgy, hogy a középpont képe a megadott O_1 pont legyen!

672. Milyen feltételek mellett lehet az *AB* szakaszt párhuzamosan átvinni a *CD* szakaszba?

673. Adva van két párhuzamos a és b egyenes. Hány olyan párhuzamos eltolás létezik, amely az egyik egyenest átviszi a másik egyenesbe?

674. Egy párhuzamos eltolás az AB szakasz A pontját a B pontba, a B pontot a B' pontba viszi át. Bizonyítsd be, hogy a B pont az AB' szakasz felezőpontja!

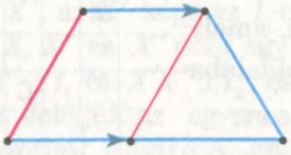
675. Told el az $ABCD$ 4 cm oldalhosszúságú négyzetet úgy, hogy az A csúcs képe az átlók O metszéspontja legyen! Határozd meg a négyzet és képe közös részének területét!

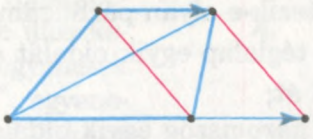
676. Bizonyítsd be, hogy a trapéz alapjainak összege nagyobb a szárak összegénél, de kisebb a különbségüknél!

Ha egy feladatban trapézról van szó, gyakran célszerű a szárat vagy az átlót párhuzamosan eltolni úgy, ahogy az a 258. és 259. ábrán látható. Majd alkalmazni a kapott háromszög tulajdonságait.

677. Bizonyítsd be, hogy a trapéz alapján levő szögek egyenlők!

678. Ha egy trapéz átlói egyenlők, akkor a trapéz egyenlőszárú. Bizonyítsd be!

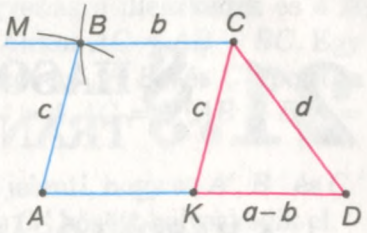

258. ábra


259. ábra

679. Az egyenlőszárú trapéz nagyobbik alapja 6 cm, szára 2 cm, az általuk közbezárt szög 60°. Határozd meg a trapéz kisebbik alapját!

680. Egy egyenlőszárú háromszög hegyesszöge 60°. Bizonyítsd be, hogy a trapéz nagyobbik alapja egyenlő a szár és a kisebbik alap összegével!

681. Bizonyítsd be, hogy a trapéz átlóinak összege nagyobb az alapok összegénél!



260. ábra

682*. Ha egy háromszög két súlyvonala egyenlő, akkor a háromszög egyenlőszárú. Bizonyítsd be!

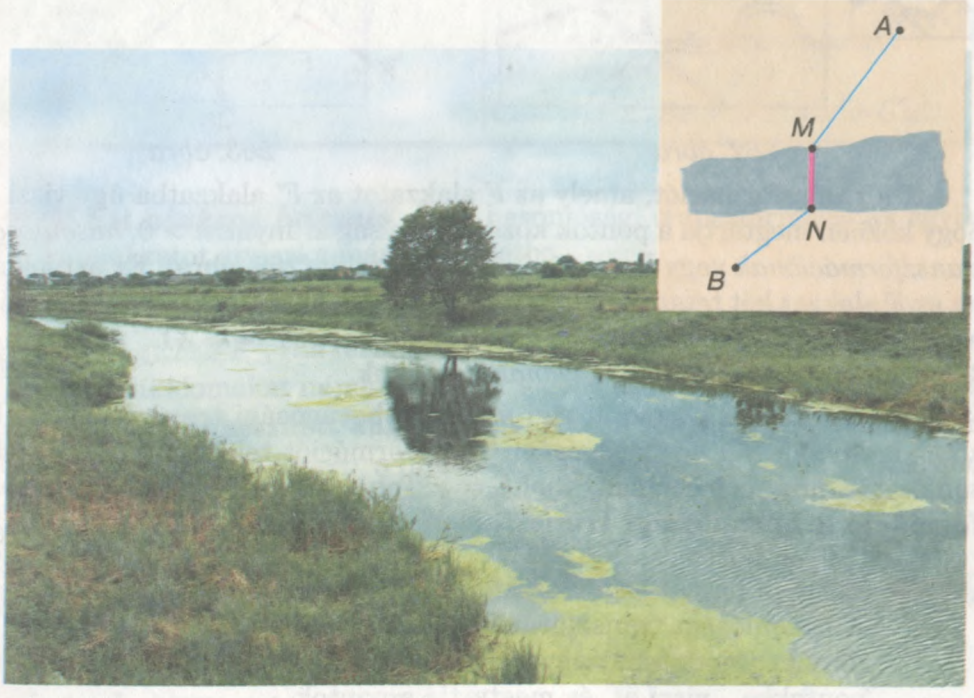
683*. Szerkessz trapézt, ha adva van az a és b alapja ($a > b$), valamint a c és d szárai!

684*. Szerkessz trapézt, ha adva van az a és b alapja ($a > b$), valamint a d_1 és d_2 átlói!

685*. Szerkessz háromszöget megadott két a és b oldala, valamint a harmadik oldalhoz tartozó m_c súlyvonal alapján!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

686*. A és B falu egy folyó két partján terül el (261. ábra). Hová kell hidat építeni a folyóra, hogy a két falu távolsága a legrövidebb legyen?



261. ábra

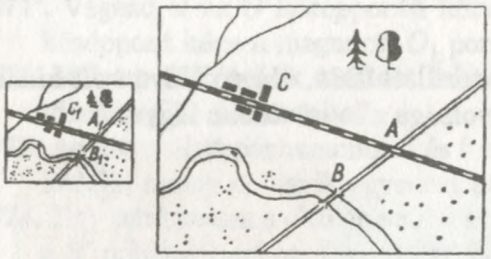
21. § HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ. HOMOTÉCIA

1. A HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓ

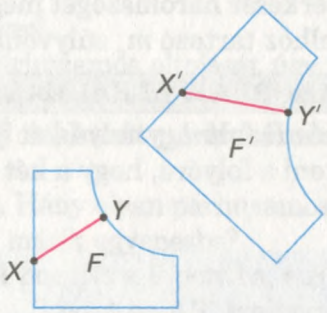
Figyeld meg a 262. ábrát! Egy földterület tervrajzáról készítettek egy másik tervrajzot. A két tervrajz megfelelő pontjai közötti távolságok aránya állandó: 2,5 (a két tervrajz léptékeinek aránya):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = 2{,}5\,.$$

Elmondhatjuk azt, hogy az egyik tervrajzot a másik tervrajzból kaptuk hasonlósági transzformációval, nagyítottuk.



262. ábra

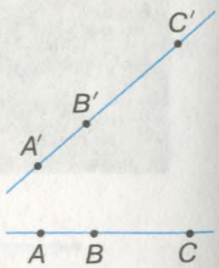


263. ábra

Azt a transzformációt, amely az F alakzatot az F' alakzatba úgy viszi át, hogy közben megtartja a pontok közötti távolság arányát: $k > 0$, *hasonlósági transzformációnak* vagy *hasonlóságnak* nevezzük (263. ábra). Ez azt jelenti, ha az F alakzat két tetszőleges X és Y pontot egy hasonlósági transzformáció az F' alakzat X' és Y'pontjába viszi át, akkor $X'Y' = k \cdot XY$, ahol $k > 0$. A k számot a *hasonlóság arányának* nevezzük.

? Van-e kapcsolat a hasonlósági és az egybevágósági transzformáció között? Igen, van. Az egybevágósági transzformációt tekinthetjük olyan hasonlósági transzformációnak, ahol $k = 1$. Tehát az **egybevágósági transzformáció a hasonlósági transzformáció részesete.**

Tétel (a hasonlósági transzformáció tulajdonságai). A hasonlósági transzformáció az egyenesre illeszkedő pontokat egyenesre illeszkedő pontokba viszi át, és megtartja a pontok kölcsönös helyzetének rendjét.



264. ábra

Bizonyítás. Az A, B és C pont egy egyenesre illeszkedik és a B pont az A és a C pont között van (264. ábra). Akkor $AC = AB + BC$. Egy hasonlósági transzformáció az A, B és C pontot az A', B' és C' pontba viszi át. A hasonlóság definíciója alapján $A'C' = k\,AC = k\,(AB + BC) = k\,AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'$.

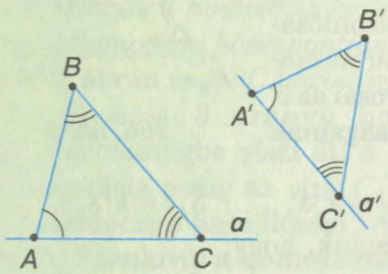
Az $A'C' = A'B' + B'C'$ egyenlőség viszont azt jelenti, hogy az A', B' és C' pont is egy egyenesen van, és a B' pont az A' és C' között helyezkedik el.

Következmény. **A hasonlósági transzformáció az egyenest egyenesbe, a félegyenest félegyenesbe, a szakaszt szakaszba viszi át.**

Bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy **a hasonlósági transzformáció szögtartó.**

A hasonlósági transzformáció tulajdonságait a 24. táblázatban foglaltuk össze.

24. táblázat

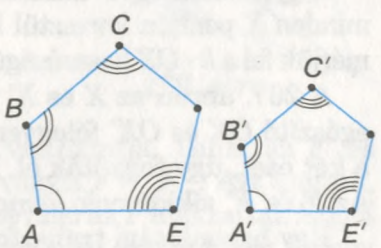
Hasonlósági transzformáció	Tulajdonságok
	1. Az egyenes képe egyenes (a képe az a'), a félegyenes képe félegyenes. 2. A szakasz szakaszba megy át (AB az $A'B'$, BC az $B'C'$, AC az $A'C'$). 3. Szögtartó, a szög képe vele azonos fokmértékű szög ($A\angle = A'\angle, B\angle = B'\angle, C\angle = C'\angle$).

Két ***alakzat hasonló***, ha a hasonlósági transzformáció az egyik alakzatot átviszi a másik alakzatba.

Ha az F síkidom hasonló az F' síkidomhoz, akkor a $\sim$ jelet használjuk: $F \sim F'$ vagy $F \overset{k}{\sim} F'$, (ha fel akarjuk tüntetni a hasonlósági arányt).

Hasonló síkidomokat mindenki ismer a gyakorlatból. Például hasonlók az azonos negatívról készített különböző nagyítású fényképek, két különböző méretarányú földrajzi térkép, a film kockái és a kivetített képek. Példa lehet a hasonló síkidomra két négyzet, két körvonal.

A hasonlóság meghatározásából következik, hogy két hasonló síkidom szögei egyenlők, megfelelő oldalaik, lineáris méreteik arányosak. Tehát ha két, $ABC...E$ és $A'B'C'...E'$ sokszög hasonló, akkor (265. ábra) $A\angle = A'\angle, B\angle = B'\angle, \ \dots\ ,$ $E\angle = E'\angle$ és $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \ldots = \dfrac{EA}{E'A'}$.



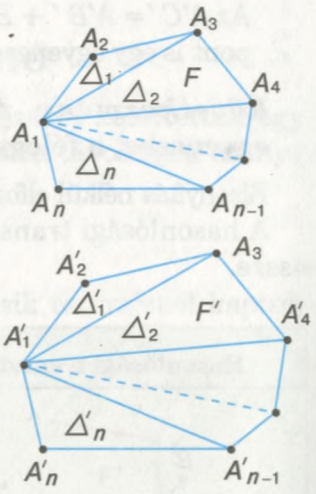
265. ábra

Tétel (a hasonló síkidomok területének arányáról). Két hasonló síkidom területének aránya a hasonlósági együttható négyzetével egyenlő.

Adva van: F és F', két hasonló sokszög, melyek együtthatója k (266. ábra).

Bizonyítsuk be: $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$!

Bizonyítás: Daraboljuk fel az F sokszöget $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ háromszögekre! Mivel F és F' hasonló sokszög, létezik olyan hasonlósági transzformáció, amely az F alakzatot átviszi az F' alakzatba, és a $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ háromszögeket a $\Delta'_1, \Delta'_2, ..., \Delta'_n$ háromszögekbe. Az F alakzat területe a $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ háromszögek területének összegével egyenlő, az F' alakzat területe pedig a $\Delta'_1, \Delta'_2, ..., \Delta'_n$ háromszögekével. Ha a hasonlósági együttható k, akkor az F' alakzat háromszögeinek oldalai is és magasságai is k-szorosai az F alakzat megfelelő oldalainak és magasságainak (266. ábra)



266. ábra

Ebből következik, hogy $S_{\Delta'_1} = k^2 s_{\Delta_1}$, $S_{\Delta'_2} = k^2 s_{\Delta_2}$, ... $S_{\Delta'_n} = k^2 s_{\Delta_n}$.

Ezeket az egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy:

$$S_{F'} = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + ... + S_{\Delta_n} = k^2(S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + ... + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F .$$

Innen $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Ez az állítás igaz bármely síkidomra.

Az F és F' hasonló sokszögek minden megfelelő lineáris együtthatója k. Ezért **a hasonló síkidomok területeinek aránya a megfelelő lineáris méreteik arányának a négyzetével egyenlő.**

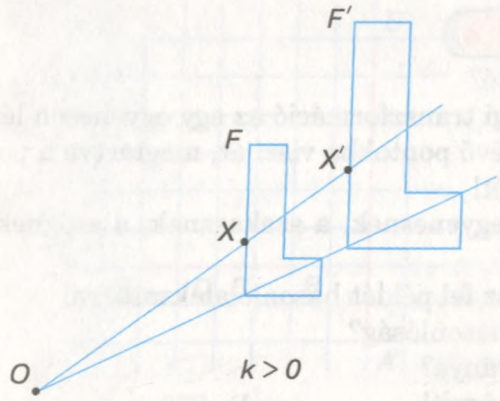
2. A HOMOTÉCIA

Figyeljük meg a hasonló síkidomok szerkesztésének egyik módját (267., 268. ábra)!

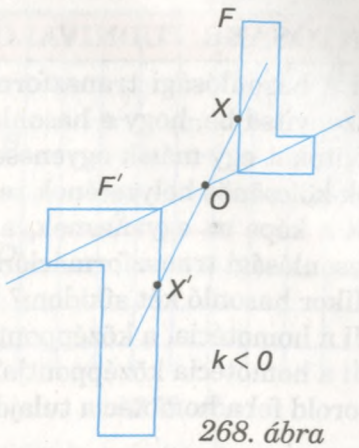
Legyen adott egy F síkidom. Vegyünk fel egy tetszőleges O pontot. Az F síkidom minden X pontján keresztül húzzunk OX félegyenest. A meghúzott félegyenesre mérjük fel a $k \cdot OX$ hosszúságú OX' szakaszt. Így megkapjuk az F alakzat F' képét.

A 267. ábrán az X és X' pont egy OX félegyenes pontja, a 268. ábrán kiegészítő OX és OX' félegyenes pontjai. Hogy megkülönböztethető legyen ez a két eset, úgy fogadták el, hogy az első esetben $k > 0$, a másodikban $k < 0$. Az F és F' síkidomok *homotetikusak*.

Egy hasonlósági transzformáció ***homotécia***, középpontos hasonlóság, ha az F alakzat minden X pontját az F' alakzat olyan X' pontjába viszi át,



267. ábra

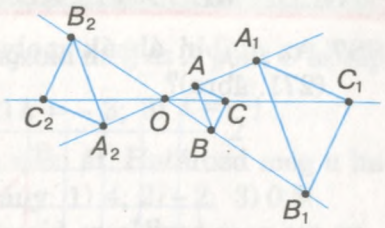


268. ábra

melyre teljesül az $OX' = |k| \cdot OX$ egyenlőség, ahol k bármely nullától különböző szám, O tetszőleges fixpont és $X' \in OX$.

A k számot a *homotécia arányának*, az O pontot a *homotécia középpontjának* nevezzük.

A 269. ábrán az ABC háromszöget az O középpontú $k = 3$ arányú homotécia az $A_1B_1C_1$ háromszögbe viszi át, a $k = -2$ arányú homotécia pedig az $A_2B_2C_2$ háromszögbe.

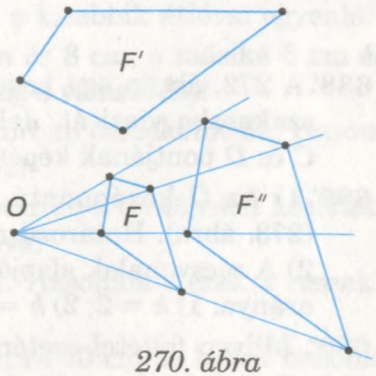


269. ábra

A homotécia a hasonlósági transzformációk minden tulajdonságával rendelkezik. Ezenkívül **a homotécia a középpontra illeszkedő egyenest vele párhuzamos egyenesbe viszi át.** Azt is mondhatjuk, hogy a homotécia $|k|$ arányú hasonlóság.

BŐVEBBEN

Tisztázzuk a homotécia és a hasonlóság kapcsolatát! **Ha két alakzat hasonló, akkor létezik olyan, az első alakzattal homotetikus alakzat, amely egybevágó a másik alakzattal.** Bizonyítsuk ezt be! Tételezzük fel, hogy $F \overset{k}{\sim} F''$ (270. ábra). Ez a hasonlósági transzformáció az F alakzat pontjainak távolságát k-szorosra változtatja. Vegyünk egy tetszőleges O középpontú k arányú homotéciát. Ez a homotécia az F alakzatot az F'' alakzatba viszi át, a pontok távolságát úgyszintén k-szorosra változtatja. Tehát az F' és F'' síkidomok pontjai között a távolság egyenlő, vagyis $F' = F''$. Azt kaptuk, hogy az F alakzattal homotetikus F'' alakzat egybevágó az F' alakzattal. Ebből következik, hogy bármely alakzatot egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció kompozíciója a vele hasonló alakzatba viszi át.



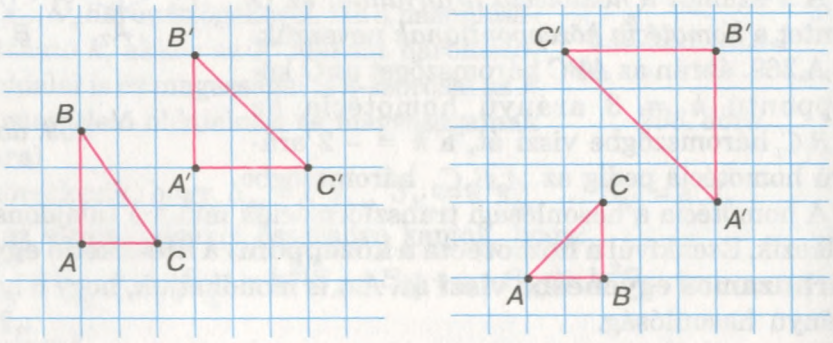
270. ábra

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi a hasonlósági transzformáció?
2. Bizonyítsd be, hogy a hasonlósági transzformáció az egy egyenesen lévő pontokat egy másik egyenesen lévő pontokba viszi át, megtartva a pontok kölcsönös helyzetének rendjét!
3. Mi a képe az egyenesnek, a félegyenesnek, a szakasznak, a szögnek a hasonlósági transzformációnál?
4. Mikor hasonló két síkidom? Hozz fel példát hasonló alakzatokra!
5. Mi a homotécia, a középpontos hasonlóság?
6. Mi a homotécia középpontja? Aránya?
7. Sorold fel a homotécia tulajdonságait!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

687. Az alábbi ábrák melyikén hasonló az ABC és $A'B'C'$ háromszög (271. ábra)?



a) *b)*

271. ábra

688. A 272. ábrán egy hasonlósági transzformáció az AB szakaszt az $A'B'$ szakaszba viszi át. Jelöld meg a rácsvonalak alapján az AB szakasz C és D pontjának képét!

689. 1) Az O középpontú homotécia az A pontot az A' pontba viszi át (273. ábra). Határozd meg a rácsvonalak alapján a homotécia arányát! 2) A rácsvonalak alapján jelöld meg a B pont B' képét, ha a homotécia aránya: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$!

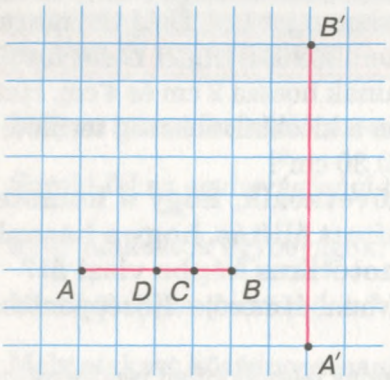
690°. Milyen feltétel esetén lesz két hasonló síkidom egybevágó?

691°. Rajzolj két hasonló, de nem egybevágó alakzatot!

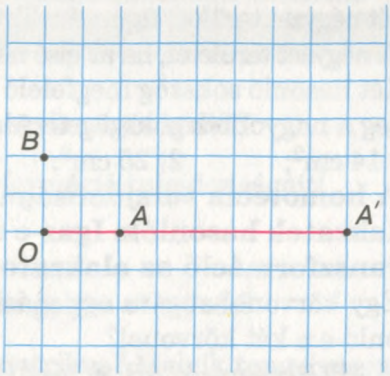
692°. Elégséges feltétel-e két alakzat hasonlóságához a szögek egyenlősége vagy az oldalak arányossága?

693°. Hasonló-e:

1) két négyzet; 2) két téglalap; 3) két körvonal?



272. ábra



273. ábra

694°. Mekkora két hasonló téglalap területének aránya, ha a hasonlósági arány: 1) 0,5, 2) 2; 3) 5?

695°. Vegyél fel két tetszőleges O és X pontot! Rajzold meg az X pont O középpontú homotetikus X' képét, ha: 1) $k = 3$; 2) $k = -3$; 3) $k = \frac{1}{2}$!

696°. Egy homotécia az X pontot az X' pontba viszi át. Határozd meg a hasonlóság középpontját, ha a hasonlósági arány: 1) 4; 2) -2; 3) 0,5!

697°. Vegyél fel egy tetszőleges O és A pontot, majd szerkeszd meg azt az A' pontot, melyre teljesül az alábbi egyenlőség:

1) $OA' = 3OA$; 2) $OA' = -2OA$; 3) $OA' = \frac{1}{3}OA$!

698°. Az O középpontú hasonlóság az A pontot az A' pontba viszi át. Milyen az A, az A' és az O pont kölcsönös helyzete, ha:

1) $k > 0$; 2) $k < 0$; 3) $k > 1$?

699. Hasonló-e két rombusz, ha: 1) az egyik rombusz egyik belső szöge 45°, a másiké 135°; 2) mindkét rombusz oldala a kisebbik átlóval egyenlő?

700. Az egyik téglalap oldalainak hossza 12 cm és 8 cm, a másiké 6 cm és 9 cm. Hasonló-e a két téglalap? Indokold meg a válaszodat!

701. Egy téglalap átlóinak harmadolt pontjait sorban összekötötték. Hasonló-e a kapott négyszög az eredeti téglalaphoz?

702. Egy járásról 1 : 25 000 és 1 : 100 000 méretarányú térképeket készítettek. Mekkora a két térkép hasonlósági aránya?

703. A trapézt a középvonala két részre osztja. Hasonlók-e ezek a részek? Hasonló-e valamelyik rész és a trapéz?

704. Egy négyszög oldalai 16 cm, 24 cm, 32 cm és 40 cm. A hozzá hasonló négyszög legkisebb oldala 14 cm. Mekkorák a másik négyszög oldalai?

705. Határozd meg azon négyzetek területeinek arányát, melyek oldalainak aránya: 1) 1 : 4; 2) 2 : 5; 3) $m : n$?

706. Mekkora két négyzet oldalainak az aránya, ha a területeik aránya:

1) 4 : 9; 2) 1 : 16; 3) $m : n$?

707. Két négyzet területe úgy aránylik egymáshoz, mint 1 : 4. Határozd meg a második négyzet területét, ha az első négyzet területe: 1) 8 cm; 2) 12 cm; 3) 16 cm!

708. Két hasonló sokszög megfelelő oldalainak hossza 2 cm és 4 cm. Határozd meg a nagyobbik sokszög területét, ha a kisebbik sokszög területe: 1) 14 cm^2; 2) 25 cm^2; 3) 30 cm^2!

709. A homotécia tulajdonságából következik, hogy a homotetikus alakzatok hasonlók. Igaz-e a fordított állítás, hogy a hasonlósági transzformáció az alakzatot homotetikus képbe viszi át?

710. Egy körvonal sugara egy másik körvonal átmérője. Középpontosan hasonló-e a két körvonal?

711. Az $ABCD$ négyszög AB, AC és AD oldalainak felezőpontjait rendre megjelöltük a K, L és M ponttal. Középpontosan hasonló-e az $ABCD$ és $AKLM$ négyszög?

712. Középpontosan hasonló-e az ABC és az AMN háromszög, ha MN az ABC háromszög középvonala?

713. A homotécia az A pontot az A' pontba, a B pontot a B' pontba viszi át. Hogyan határozható meg a homotécia középpontja, ha az A, A', B, B' pontok nem egy egyenesre illeszkednek?

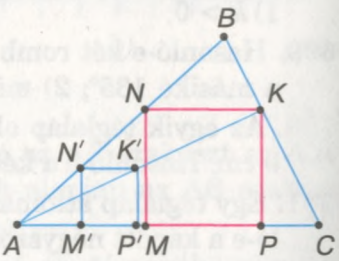
714. Adva van az O pont és az ABC háromszög. Szerkeszd meg az ABC háromszög O középpontú homotetikus képét, ha: 1) $k = 1{,}5$; 2) $k = -2$; 3) $k = 2$!

715. Szerkeszd meg az adott paralelogramma homotetikus képét, ha a hasonlóság középpontja az átlók metszéspontja és: 1) $k = 2$; 2) $k = 0{,}5$; 3) $k = -1{,}5$!

716*. Egy egyenes az adott trapézt két hasonló trapézra osztja. Hasonlítsd össze az egyenes trapézon belüli részét a trapéz középvonalával!

717*. Egy, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes a trapézt két hasonló trapézra osztja. Milyen arányban osztja ez az egyenes a trapéz szárait, ha az alapok aránya: 1) 1 : 4; 2) 2 : 3?

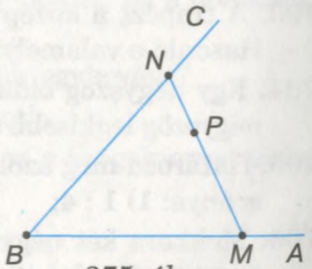
718*. Írj egy adott háromszögbe négyzetet úgy, hogy két csúcsa a háromszög egyik oldalára, másik két csúcsa a másik két oldalra illeszkedjen! A 274. ábra alapján készítsd el a szerkesztés tervét!



274. ábra

719*. Az ABC háromszögbe írj α hegyesszögű rombuszt úgy, hogy a rombusz egyik oldala az AC oldalra, két csúcsa pedig az AB és BC oldalakra illeszkedjen!

720*. Adva van az ABC szög és egy P belső pontja. Szerkeszd meg azt az MN szakaszt, melynek a végpontjai a szög száraira illeszkednek és $NP : PM = 1 : 2$ (275. ábra)!



275. ábra

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

721. Egy földterület 1 : 200 léptékű tervrajzát 407 × 288 mm-es papírra készítették el. Ráfér-e ennek a földterületnek az 1 : 300 méretarányú tervrajza egy 288 × 203 mm-es papírra?

ISMÉTLŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen transzformációt nevezünk egybevágóságnak?
2. Sorold fel az egybevágósági transzformáció tulajdonságait!
3. Mely alakzatok egybevágók?
4. Mi a középpontos tükrözés? Mi a tengelyes tükrözés?
5. Mely alakzat középpontosan szimmetrikus? Melyik tengelyesen szimmetrikus?
6. Mi az elforgatás?
7. Mit nevezünk párhuzamos eltolásnak?
8. Mi a hasonlósági transzformáció?
9. Sorold fel a hasonlósági transzformáció tulajdonságait!
10. Mely síkidomok hasonlók?
11. Mi a homotécia?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

1. feladatsor

1° Az O pont az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja. Nevezd meg az A pont képét az O pontra vonatkoztatva!

A. C. **B.** D. **C.** A. **D.** B.

2° $ABCD$ egy rombusz. Nevezd meg a B csúcs képét az AC egyenesre vonatkoztatva!

A. B. **B.** D. **C.** A. **D.** C.

3° Az O pont az AB szakasz felezőpontja. Hány fokra kell elforgatni az AB szakaszt az O pont körül, hogy a szakasz képe önmaga legyen?

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 180°. **D.** 120°.

4 Az A és az A' pont tükrös a B pontra vonatkoztatva. Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha $AA' = 12$ cm!

A. 24 cm. **B.** 10 cm. **C.** 4 cm. **D.** 6 cm.

5* Az egyenlőszárú trapéz alapjai 6 cm és 8 cm, hegyesszöge 60°. Mekkora a szára?

A. 2 cm. **B.** 4 cm. **C.** 14 cm. **D.** 1 cm.

TESZTFELADATOK

2. feladatsor

1° Két hasonló alakzat mely feltétel mellett egybevágó?

A. $k = 1$. **B.** $k = 0$. **C.** $k = -1$. **D.** $k = 2$.

2° Határozd meg két hasonló sokszög területeinek arányát, ha a hasonlósági arány 0,5!

A. 0,5. **B.** 0,25. **C.** 0,1. **D.** 0,025.

3° Az O középpontú $k = 3$ arányú hasonlóság az A pontot a B pontba viszi át. Mekkora az OB szakasz, ha $OA = 4$ cm?

A. 2 cm. **B.** 8 cm. **C.** 12 cm. **D.** 6 cm.

4 A háromszög oldalai 4 cm, 12 cm és 14 cm. A vele hasonló háromszög legkisebb oldala 6 cm. Számítsd ki a többi oldal hosszát!

A. 8 cm és 10 cm. **B.** 18 cm és 12 cm. **C.** 14 cm és 24 cm. **D.** 18 cm és 21 cm.

5* Két négyzet területének aránya 1 : 9. Számítsd ki a nagyobbik négyzet kerületét, ha a kisebb négyzet kerülete 24 cm!

A. 72 cm. **B.** 54 cm. **C.** 18 cm. **D.** 216 cm.

5. FEJEZET

SÍKBELI VEKTOROK

Ebben a fejezetben megtudod:

- mi a vektor, melyek a kollineáris vektorok és az egyenlő vektorok;
- milyen műveleteket végezhetünk vektorokkal és e műveleteknek milyen tulajdonságai vannak;
- hogyan határozhatók meg a vektor koordinátái, ha ismerjük a vektor végpontjainak koordinátáit, és hogyan ábrázolható az adott koordinátarendszerben;
- mi a vektormódszer és hogyan alkalmazható mértani és gyakorlati feladatok megoldásánál

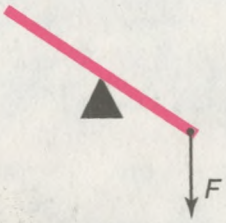




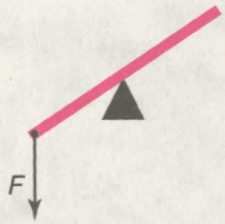
22. § A VEKTOR FOGALMA

Mértanból és fizikából már tudod, hogy a hossz, a hőmérséklet, a tömeg mennyiségét egy *számmal* jellemezhetjük. Az ilyen mennyiségeket *skaláris mennyiségnek,* vagy röviden *skalárisnak* nevezzük. Viszont sok fizikai mennyiséget nemcsak mérőszám és mértékegység jellemez. Például az erő esetében fontos megjelölni az irányát is meg azt a pontot is, amelyre az erő hat, azaz az erő támadáspontját (276., 277. ábra).

Az erő példa a *vektor mennyiségére*. Már tudjátok, hogy az erőt *irányított szakasszal* ábrázoljuk.



276. ábra



277. ábra



278. ábra

A mértanban elvonatkoztatjuk a vektormennyiségeket a támadáspontól. Például adott irányba és távolságra a párhuzamos eltolás a sík minden pontját elmozdítja. Azaz végtelen sok pontot transzformál.

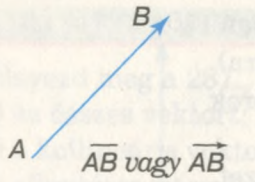
Tehát a párhuzamos eltolás olyan vektormennyiség, melynél nem lényeges a támadáspont. Elmondhatjuk, hogy a párhuzamos eltolás *mértani vektormennyiség*. Egyszerűen *vektor*.

Vektor ábrázolása a síkon minden olyan irányított szakasz, melynek azonos az iránya és a hossza. Viszont egy papírlapon nem tudunk minden vektort ábrázolni, mint ahogy egy egyenest és egy síkot sem. Ezért a mértanban **a vektort egy irányított szakasszal ábrázoljuk** (278. ábra). Ezen vektor kezdő- és végpontja meghatározza az összes megfelelő vektor hosszát és irányát. Általában minden rendezett pontpár a síkon egy vektort ad meg.

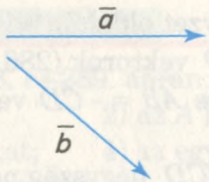
Ahhoz, hogy megadjunk egy vektort, elegendő meghatározni a vektor kezdő- és végpontját.

A 279. ábrán egy A kezdőpontú és B végpontú vektor látható.

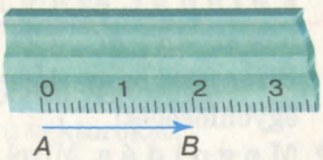
Röviden így jelöljük: $\overline{AB}$ vagy $\overrightarrow{AB}$. A vonás vagy a nyíl a szakaszt jelölő



279. ábra



280. ábra



281. ábra

betűk fölött a vektor szót helyettesíti. A vektort a latin ábécé kisbetűivel is jelölhetjük: $\bar{a}$ vagy $\vec{a}$, $\bar{b}$ vagy $\vec{b}$ (280. ábra).

Azokat a vektorokat, melyeknek kezdőpontja egybeesik a végpontjával, *nullvektor*nak nevezzük; jelölése: $\bar{0}$ vagy $\vec{0}$. A nullvektor irányával nem foglalkozunk.

A *vektor hossza* vagy *modulusa* a kezdőpont és a végpont távolsága. A 281. ábrán az $\overline{AB}$ vektor hossza 2 cm.

Röviden így jelöljük: $|\overline{AB}| = 2$ cm, és így olvassuk: az *AB* vektor hossza két centiméter.

A nullvektor hossza nulla. Azt a vektort, melynek hossza 1, *egységvektor*nak nevezzük. Jelölése: $\bar{e}$. A meghatározás alapján $|\bar{e}| = 1$.

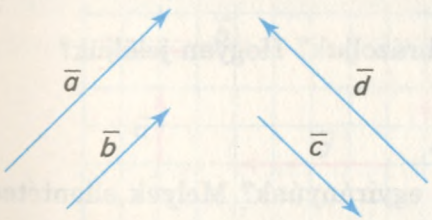
Két nem nullvektor *kollineáris*, ha párhuzamos egy egyenessel. A 282. ábrán az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektor kollineáris. Felírhatjuk, hogy $\bar{a} \parallel \bar{b}$. A 282. ábrán látható kollineáris vektorok egyirányúak. Az ilyen vektorokat *egyirányú vektorok*nak nevezzük. Jelölésük: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. A 283. ábrán a $\bar{c}$ és a $\bar{d}$ vektorok is kollineárisak, de *ellentétes irányúak*: $\bar{c} \uparrow\downarrow \bar{d}$.

A ***vektorok egyenlők***, ha egyirányúak és egyenlő hosszúságúak.

A 284. ábrán látható $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor egyenlő.

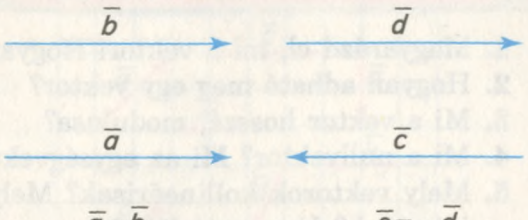
Röviden $\bar{a} = \bar{b}$ alakban írhatjuk fel, és így olvassuk: az $\bar{a}$ vektor egyenlő a $\bar{b}$ vektorral.

Ha két vektor modulusa egyenlő, de ellentétes irányú, akkor a vektorokat *ellentett vektorok*nak nevezzük. Jelölésük: $\bar{c} = -\bar{d}$.



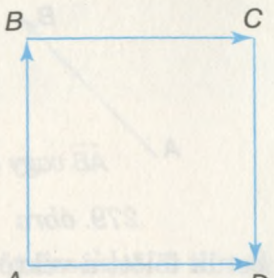
282. ábra

283. ábra



284. ábra 285. ábra

Feladat. Az $ABCD$ négyzet oldalain adva vannak az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok (286. ábra). Bizonyítsd be az $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ vektorok egyenlőségét!



286. ábra

Megoldás. Mivel az $ABCD$ négyszög négyzet, így az adott vektorok hossza egyenlő: $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ és $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. A feladat feltételei alapján $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$. Ezért $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ az egyenlő vektorok meghatározása alapján és $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ az ellentett vektorok meghatározása szerint.

? Az előző feladat feltételei alapján egyenlő-e az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektor? Nem, mert nem kollineáris a két vektor.

Ahhoz, hogy megállapítsuk: egyenlő-e két vektor, az alábbi feltételeknek kell teljesülni:
1) az adott vektorok egyirányúak;
2) az adott vektorok hossza egyenlő!

BŐVEBBEN

1. A „vektor” (a *vector* latin eredetű szó, jelentése: hordozó) elnevezést William Rowan Hamilton (1805–1865) ír matematikus alkotta. Az irányított szakaszra az $\overrightarrow{AB}$ jelölést először 1806-ban Jaen Robert Argand (1768–1822) alkalmazta. 1853-tól kis $\vec{r}$ betűvel is jelölték: ahogy Augustin Cauchy (1789–1857) francia matematikus is tette. Az $\overrightarrow{AB}$ jelölést csak a XX. századtól használjuk.


Augustin Cauchy

2. A „modulus” szó a latin *modulus*, mérték szóból ered. Először az angol Roger Cotes (1682–1716) alkalmazta. Az $|x|$ jelölést 1841-ben Carl Weierstrass (1815–1897) német matematikus vezette be.

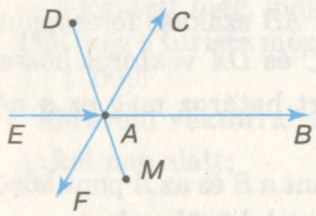
3. A „kollineáris” szó is latin eredetű: a *co* (*cum*) együtt és *lineo* – vonal szavak összetétele.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

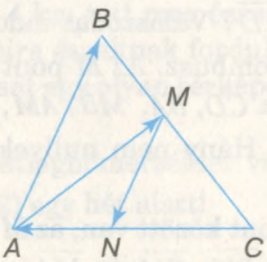
1. Magyarázd el, mi a vektor! Hogyan ábrázoljuk? Hogyan jelöljük?
2. Hogyan adható meg egy vektor?
3. Mi a vektor hossza, modulusa?
4. Mi a nullvektor? Mi az egységvektor?
5. Mely vektorok kollineárisak? Melyek egyirányúak? Melyek ellentétes irányúak? Hogyan jelöljük?
6. Add meg az egyenlő vektorok definícióját!
7. Melyek az ellentett vektorok?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

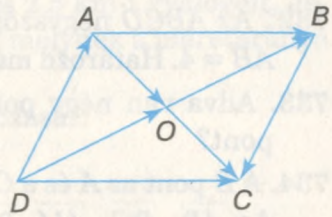
722'. Nevezd meg a 287., 288. és 289. ábrán:
1) az összes vektort; 2) az A kezdőpontú vektorokat;
3) a kollineáris vektorokat; 4) az egyirányú vektorokat;
5) ellentétes irányú vektorokat!



287. ábra



288. ábra



289. ábra

723'. Egy vektort az alábbi rendezett pontpárral adták meg: 1) A és C; 2) C és A; 3) H és P; 4) P és H. Ábrázold a vektorokat és jegyezd le!

724'. Hogyan kell leírni, hogy az $\overline{AB}$ vektor hossza: 1) 5 cm; 2) 3 mm; 3) 0,027 dm?

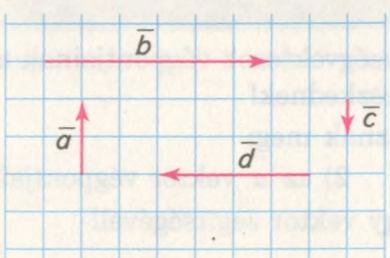
725'. Mekkora a 290. ábrán látható $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ és $\bar{d}$ vektorok hossza, ha az egységvektor hossza: 1) egy kocka; 2) két kocka; 3) négy kocka? Van-e az dott vektorok között egységvektor?

726'. A 291. ábrán az egységvektor hossza két kocka. Van-e az adott vektorok között egységvektor? Nevezd meg: 1) a kollineáris vektorokat;
2) az egyirányú vektorokat; 3) az ellentétes irányú vektorokat;
4) az egyenlő vektorokat; 5) az ellentett vektorokat!

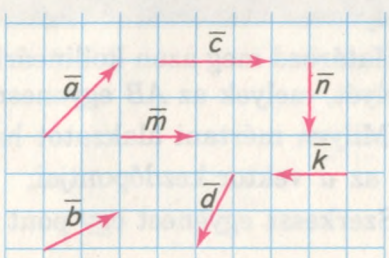
727°. Szerkessz $\overline{MN}$ és $\overline{PQ}$ vektorokat úgy, hogy: 1) $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$; 2) $|\overline{MN}| = 3$ cm, $|\overline{PQ}| = 3$ cm; 3) $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ és $|\overline{MN}| = 3$ cm, $|\overline{PQ}| = 3$ cm. Elmondható-e, hogy $\overline{MN} = \overline{PQ}$?

728°. Rajzolj egy $ABCD$ paralelogrammát! A paralelogramma oldalain és átlóin jelölj ki két vektort úgy, hogy: 1) kollineáris; 2) egyirányú; 3) ellentétes irányú; 4) egyenlő; 5) ellentett vektorok legyenek!

729°. Lehet-e egyenlő vektorokat megadni egy szabályos háromszög csúcsaival?



290. ábra



291. ábra

730°. Rajzolj egy szabályos ABC háromszöget és húzd meg a középvonalakat! Lehet-e megjelölni két vektort úgy, hogy ezek a vektorok:
1) kollineárisak; 2) egyenlő irányúak; 3) ellentétes irányúak;
4) egyenlők; 5) ellentettek legyenek?

731°. Adva van egy trapéz, melynek alapjai:
1) AC és BD; 2) AB és CD; 3) AD és CB.
Igaz-e, hogy az $\overline{AB} = \overline{CD}$? Válaszodat indokold meg!

732°. Az $ABCD$ négyszög rombusz. Az M pont az AB szakasz felezőpontja. $AB = 4$. Határozd meg a $\overline{CD}$, $\overline{BA}$, $\overline{MB}$, $\overline{AM}$, $\overline{BC}$ és $\overline{DA}$ vektorok hosszát!

733. Adva van négy pont. Hány nem nullvektort határoz meg ez a négy pont?

734. A B pont az A és a C pont között van, az M pont a B és az A pont között. Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$, $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ és $\overline{MA}$ vektorok közül melyek:
1) egyirányúak; 2) ellentétes irányúak?

735. Az MPN háromszög az ABC háromszög O ponthoz viszonyított tükörképe. Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$, $\overline{MP}$, $\overline{PN}$, $\overline{NM}$ és $\overline{PM}$ vektorok közül nevezd meg az egyenlőket!

736. Rajzolj egy $\overline{AB}$ és egy $\overline{CD}$ vektort, ha az egyik 4 cm, a másik 2 cm hosszú és:
1) ellentétes irányúak; 2) egyirányúak!

737. Rajzolj egy $\overline{AB}$ és egy $\overline{CD}$ vektort, ha a hosszuk 1 cm, és kollineárisak. Hány megoldás van?

738. Adva van egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos hatszög. Milyen hosszú az a vektor, melyet a hatszög:
1) két szomszédos csúcsa; 2) a hosszabbik átló végpontjai;
3) a rövidebbik átló végpontjai; 4) az egyik csúcsa és az átlók metszéspontja határoz meg?

739. Az $ABCDEF$ sokszög szabályos hatszög. Hány egyenlő vektorpárt határoznak meg a hatszög csúcsai?

740*. Határozd meg az M kezdőpontú egységvektorok végpontjainak mértani helyét!

741*. Határozd meg a H végpontú egységvektorok kezdőpontjainak mértani helyét!

742*. Határozd meg azon kollineáris egységvektorok végpontjainak mértani helyét, melyek az AB egyenesre illeszkednek!

743*. Milyen mértani alakzatot határoznak meg:
1) az $\overline{a}$ vektor kezdőpontjai; 2) az $\overline{a}$ vektor végpontjai?

744*. Szerkessz egyenest egy pont és egy vektor segítségével!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

745. Az északi szél irányt változtatott: 1) észak-keletire; 2) észak-nyugatira; 3) keletire. Készíts rajzot a szél kezdeti irányáról és változásairól!

746. Az utca észak-déli fekvésű. Milyen irányú a vele párhuzamos utca? Hát az utcára merőleges utca? Készíts rajzot, a füzet teteje legyen észak!

747. A telephelyről a turista 4 km tett meg észak felé, majd keletre fordult és 1 km tett meg, majd újra északnak fordult és 2,5 km-t gyalogolt. Jelöld meg a turista mozgását egy olyan térképen, melynek a méretaránya 1 : 1 000!

748. Ábrázold vektorral az átlaghőmérséklet változását:

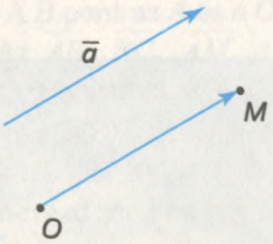
1) két nap alatt; 2) egy hét alatt!



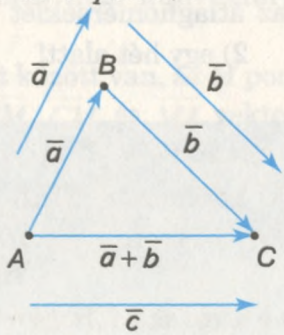
23. § MŰVELETEK VEKTOROKKAL

A vektorok összeadhatók, kivonhatók és skalárissal szorozhatók. A műveleteket megfelelő szabályok szerint kell elvégezni. Nézzük meg, hogyan!

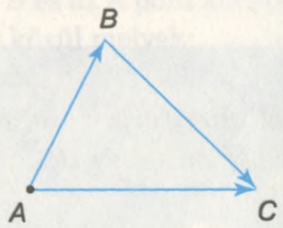
Bármely a vektorra és valamely O pontra vonatkozóan csak egy olyan M pont létezik, hogy $\overline{OM} = \bar{a}$ (292. ábra). Az M pont szerkesztését az *a vektor felmérésének nevezzük az O ponttól.*



292. ábra



293. ábra



294. ábra

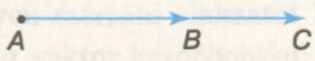
Adva van két, a és b vektor. Egy tetszőleges A ponttól mérjük fel az $\overline{AB} = \bar{a}$ vektort, a B ponttól a $\overline{BC} = \bar{b}$ vektort (293. ábra)! Az $\overline{AB}$ vektor kezdőpontja és a $\overline{BC}$ vektor végpontja az $\overline{AC} = \bar{c}$ vektort határozza meg. A c vektort az *a és b vektorok összegének* nevezzük. Leírhatjuk, hogy: $c = a + b$.

Ha megszerkesztjük az $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ nem kollineáris vektorok összegét, az $\overline{AC}$ vektort, a meghatározás értelmében egy ABC háromszöget kapunk (294. ábra). Ezért ezt a módszert *háromszög-szabálynak* nevezzük. Ez a szabály bármely két vektorra alkalmazható, még a kollineáris vektorokra is. A 295. és 296. ábra szemlélteti két egyirányú (295. ábra) és két ellentétes irányú (296. ábra) vektor összegét.

Általában **bármely három, A, B és C pontra mindig teljesül az**

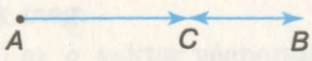
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$ **egyenlőség.**

Két nem kollineáris a és b vektor összeadható a *paralelogramma-szabály* szerint is. Ehhez egy tetszőleges A pontból mérjük fel az $\overline{AB} = \bar{a}$ és



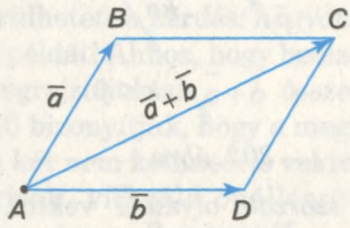
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

295. ábra

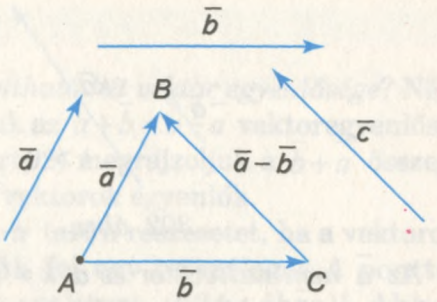


$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

296. ábra



297. ábra



298. ábra

az $\overline{AD}=\bar{b}$ vektort, majd megszerkesztjük az $ABCD$ paralelogrammát (297. ábra). Akkor az AC vektor az $a+b$ vektorok összege.

Az a és b *vektorok különbsége* olyan $c=a-b$ vektor, melyet ha a b vektorral összeadunk, akkor az a vektort kapjuk. Tehát a $c=a-b$ egyenlőségből következik a $c+b=a$ egyenlőség. Vagyis ahhoz, hogy előállítsuk a $c=a-b$ vektort, egy tetszőleges A pontból fel kell mérni az $\overline{AB}=a$ és $\overline{AC}=b$ vektorokat (298. ábra). A $\overline{CB}=c$ vektor az $a-b$ vektor különbsége.

Általában **bármely három, *A*, *B* és *C* pontra mindig teljesül az**

$$\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CB}$$ **egyenlőség.**

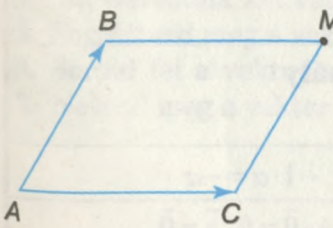
Feladat. Az $ABMC$ paralelogramma oldalára felmérték az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ vektorokat (299. ábra). Fejezzük ki a paralelogramma átlóit ezen vektorokkal!

Megoldás. 1) Húzzuk meg az $ABMC$ paralelogramma AM átlóját (300. ábra)! Az AM vektor az AB és a BM vektorok összege a háromszögszabály szerint. A paralelogramma tulajdonságai alapján $BM \parallel AC$ és $BM=AC$. Ezért $\overline{BM}=\overline{AC}$. Tehát, $\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{AB}+\overline{AC}$.

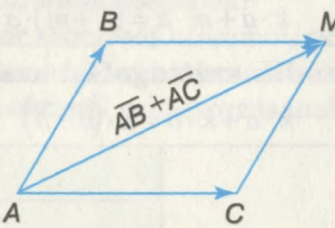
2) Húzzuk meg az $ABMC$ paralelogramma CB átlóját (301. ábra)! A $\overline{CB}$ vektor a meghatározás szerint az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ vektorok különbsége. Tehát $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a közös kezdőpontú, nem kollineáris $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ vektorok összegét és különbségét, rajzoljuk meg az $ABMC$ paralelogrammát. Akkor:

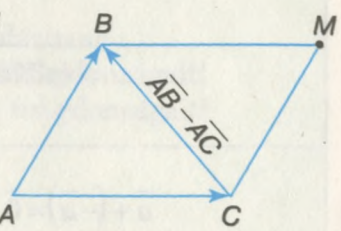
1) $\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{AC}$ (300. ábra); **2)** $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}$ (301. ábra).



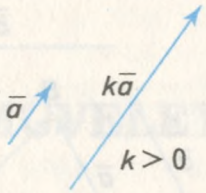
299. ábra



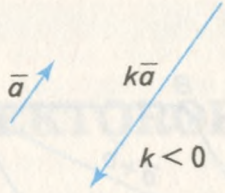
300. ábra



301. ábra



302. ábra



303. ábra

Az $\bar{a}$ nem nullvektor és a $k \neq 0$ szám szorzata olyan $\bar{d}$ vektor, melynek hossza az $\bar{a}$ vektor hosszának és a k szám abszolút értékének szorzatával egyenlő, és egyirányú az $\bar{a}$ vektorral, ha $k > 0$, illetve ellentétes irányú, ha $k < 0$.

Röviden így jelöljük: $\bar{d} = k \cdot \bar{a}$.

A vektor szorzása számmal meghatározásból következik:

1) $|\bar{d}| = |k| \cdot |\bar{a}|$;

2) $\bar{d} \uparrow\uparrow \bar{a}$, ha $k > 0$ (302. ábra);

3) $\bar{d} \uparrow\downarrow \bar{a}$, ha $k < 0$ (303. ábra).

A nullvektor és bármely szám szorzata, vagy egy vektor és a 0 szorzata mindig nullvektor: $k \cdot \bar{0} = 0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

A vektorok összeadásának és számmal való szorzásának tulajdonságait a 25. táblázatban foglaltuk össze:

25. táblázat

<table>
<tr><th colspan="2">TULAJDONSÁGOK</th></tr>
<tr><th>VEKTOROK ÖSSZEADÁSA</th><th>VEKTOROK SZORZÁSA SZÁMMAL, SKALÁRISSAL</th></tr>
<tr><td>$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$</td><td>$1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Felcserélhetőségi szabály
$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ $\qquad$ $k \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot k$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Csoportosítási szabály
$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ $\qquad$ $k \cdot (m \cdot \bar{a}) = (k \cdot m) \cdot \bar{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Első széttagolási szabály
$k \cdot \bar{a} + m \cdot \bar{a} = (k+m) \cdot \bar{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Második széttagolási szabály
$k \cdot \bar{a} + k \cdot \bar{b} = k \cdot (\bar{a}+\bar{b})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$</td><td>$-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$</td></tr>
<tr><td>$k \cdot \bar{0} = 0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$</td></tr>
</table>

BŐVEBBEN

1. Felmerülhetett a kérdés: *hogyan bizonyítható két vektor egyenlősége*? Nézzünk egy példát! Ahhoz, hogy bebizonyítsuk az $a+b=b+a$ vektoregyenlőséget: 1) megrajzoljuk az $a+b$ összegvektort; 2) megrajzoljuk a $b+a$ összegvektort; 3) bizonyítjuk, hogy a meghúzott vektorok egyenlők.

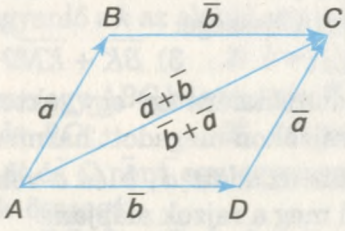
Adva van két nem kollineáris vektor, a és b (azt a részesetet, ha a vektorok kollineárisak, vizsgáld önállóan). Mérjük fel egy tetszőleges A ponttól az $\overrightarrow{AB}=a$ és a B ponttól a $\overrightarrow{BC}=b$ vektort (304. ábra)! Akkor $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=a+b$. **(1)**

Egészítsük ki az ABC háromszöget egy $ABCD$ paralelogrammává úgy, hogy a háromszög AC oldala legyen a paralelogramma egyik átlója! Ebben az esetben $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=b$ és $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=b+a$. **(2)**

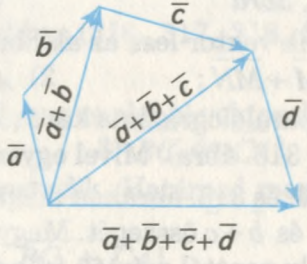
Az (1) és (2) egyenlőségekből következik, hogy $a+b=b+a$.

2. Több vektor összeadásakor a *sokszögszabályt* alkalmazzuk.

Ha a vektorokat úgy vettük fel, hogy az első vektor végpontja egybeesik a második vektor kezdőpontjával, a harmadik vektor kezdőpontja a második vektor végpontja és így tovább, akkor az összegvektor kezdőpontja az első vektor kezdőpontja, végpontja pedig az utolsó vektor végpontja. A 305. ábrán az a, b, c és d vektorok összege látható.



304. ábra



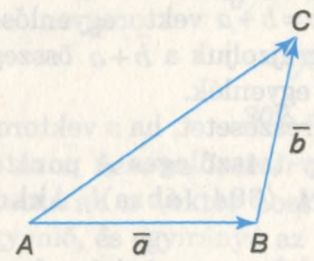
305. ábra

FONTOSABB TUDNIVALÓK

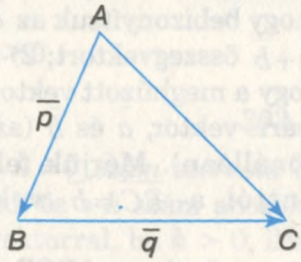
1. Mit nevezünk két vektor összegének?
2. Fogalmazd meg a háromszög-szabályt!
3. Mi a paralelogramma-szabály?
4. Mit nevezünk két vektor különbségének?
5. Fogalmazd meg a vektor szorzását számmal, skalárissal!
6. Sorold fel a vektor számmal való szorzásának tulajdonságait!
7. Nevezd meg a vektor számmal való szorzásának tulajdonságait!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

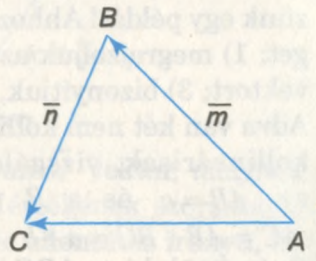
749'. Nevezd meg a 306., 307., 308. ábrákon a megadott vektorok összegét!



306. ábra

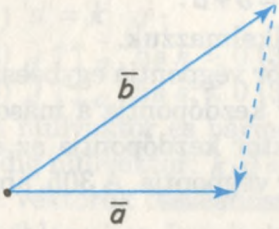


307. ábra

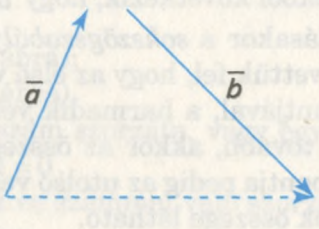


308. ábra

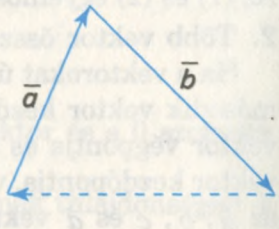
750'. Helyesen alkalmazták-e az alábbi rajzokon a háromszögszabályt az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok összeadására (309., 310., 311. ábra)?



309. ábra



310. ábra



311. ábra

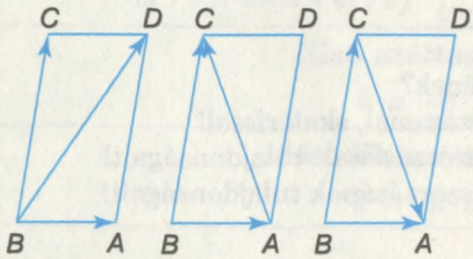
751'. Melyik vektor lesz az alábbi vektorok összege:

1) $\overline{AM}+\overline{MN}$; 2) $\overline{AB}+\overline{CA}$; 3) $\overline{BK}+\overline{KN}$?

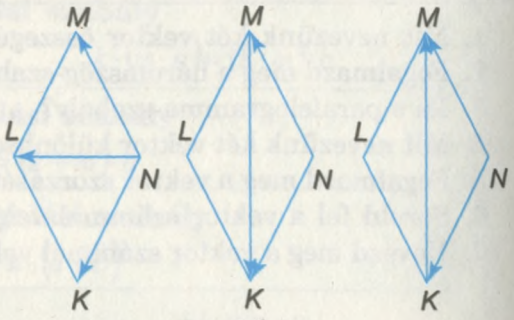
752'. Egy paralelogramma két szomszédos oldalára egy-egy vektort mértek fel (312., 313. ábra). Mivel egyenlő a rajzokon megadott harmadik vektor?

753'. A 314. és 315. ábrákon megrajzolták az adott $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}+\bar{c}$ és $\bar{b}+\bar{c}$ összegét. Magyarázd meg a rajzok alapján:

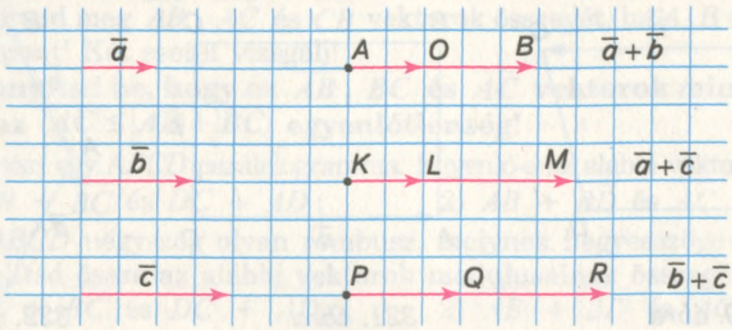
1) mely ponttól mérték fel az első összeadandót;
2) mely ponttól mérték fel a második összeadandót;
3) melyik vektor a vektorok összege!



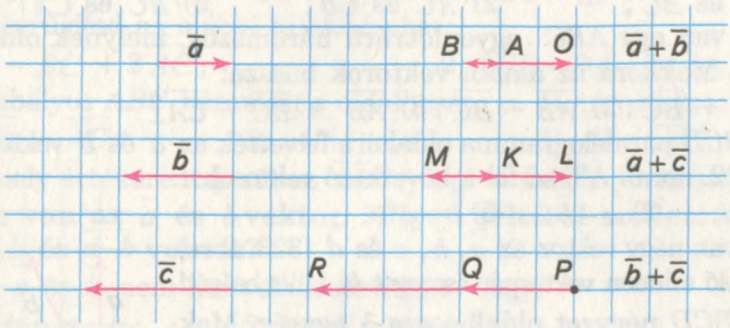
312. ábra



313. ábra



314. ábra



315. ábra

754. Mivel egyenlő a k az alábbi egyenlőségekben (316., 317., 318., 319. ábra):

1) $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$?

755°. Adva van egy ABC háromszög. Rajzold meg az alábbi vektorok összegét:

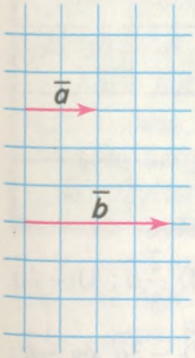
1) $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA}$!

756°. Az A, B és C pont egy egyenesre illeszkedik. Határozd meg az alábbi vektorok összegét:

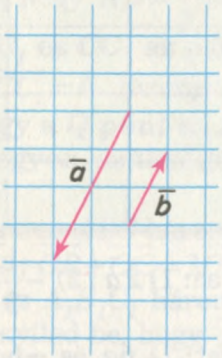
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$!

757°. Az A, B és C pontok nem illeszkednek egy egyenesre. Határozd meg az alábbi vektorok összegét:

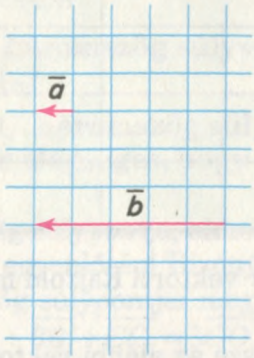
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$!



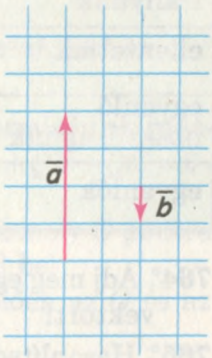
316. ábra



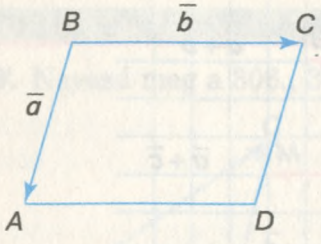
317. ábra



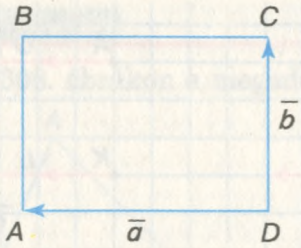
318. ábra



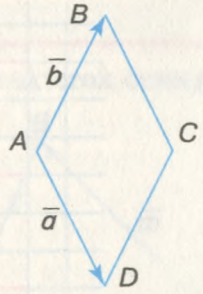
319. ábra



320. ábra



321. ábra



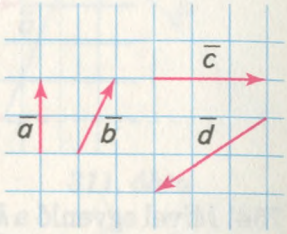
322. ábra

758°. Adva van egy ABC háromszög. Állítsd elő az alábbi vektorok különbségét:
1) $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$; 2) $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$; 3) $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$!

759°. Adva van egy ABC egyenlőszárú háromszög, melynek oldalhossza 1 egység. Mekkora az alábbi vektorok hossza:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AB} - \overline{BC}$; 3) $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}$?

760°. Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira felvették az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokat (320., 321., 322. ábra). Állítsd fel a következő vektorokat:
1) $\bar{a}+\bar{b}$; 2) $\bar{a}-\bar{b}$; 3) $\bar{b}-\bar{a}$!

761°. Adva van négy vektor, az $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ és $\bar{d}$ (323. ábra). Állítsd elő minden vektorpár összegét és különbségét!



323. ábra

762°. Az $ABCD$ négyzet oldalhossza 1 egység. Mekkora az alábbi vektor hossza:
1) $\overline{AB} + \overline{AD}$; 2) $\overline{AB} - \overline{AD}$; 3) $\overline{AB} - \overline{AD} - \overline{DC}$?

763°. Rajzold át a füzetedbe a 26. táblázatot! Töltsd ki, tegyél „+” jelet, ha a k megfelelő értékére igaz a táblázatban feltüntetett állítás!

26. táblázat

$\bar{a}$ és $k\cdot\bar{a}$	$k=2$	$k=-0{,}5$	$k=1$	$k=-1$	$k=0{,}5$	$k=-2$
egyirányúak						
ellentétes irányúak						
ellentettek						
egyenlő hosszúságúak						
egyenlők						

764°. Adj meg egy $\bar{a}$ vektort! Rajzold meg az: 1) $2\bar{a}$; 2) $-\frac{1}{3}\bar{a}$; 3) $\frac{2}{3}\bar{a}$; 4) $-4\bar{a}$ vektort!

765°. Hasonlítsd össze az alábbi vektorokat: 1) $6\bar{a}$ és $-6\bar{a}$; 2) $-3\bar{a}$ és $\frac{1}{3}\bar{a}$; 3) $\frac{1}{2}\bar{a}$ és $-2\bar{a}$!

766. Határozd meg $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok összegét, ha A, B és C három adott pont! Két esetet vizsgálj!

767. **Bizonyítsd be, hogy az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok mindegyikére igaz az $|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ egyenlőtlenség!**

768. Adva van egy $ABCD$ paralelogramma. Egyenlő-e az alábbi vektorok összege:
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ és $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$?

769. Az $ABCD$ négyszög olyan rombusz, melynek hegyesszöge A. Hasonlítsd össze az alábbi vektorok modulusainak összegét:
1) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ és $|\overrightarrow{DC}| + |\overrightarrow{AD}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}|$ és $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CD}|$!

770. Az $ABCKFP$ szabályos hatszög oldalhossza 2 egység. Határozd meg az alábbi vektorok hosszát: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KC}$!

771. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:
1) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$; 2) $2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$!

772. A szabályos ABC háromszög oldalhossza a. Határozd meg:
1) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}|$!

773. A k mely értékére teljesül az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = k(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB})$ egyenlőség?

774. **Adva van az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor. Milyen feltétel mellett kollineáris az $\vec{a}+\vec{b}$ és $\vec{a}-\vec{b}$ vektor?**

775. Mely $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem nullvektorokra igaz, hogy:
1) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

776. Rajzolj egy $\vec{a}$ vektort! Növeld a hosszát 5-szörösére, majd a 2-szeresére! Hány különböző megoldás van?

777. Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Szerkeszd meg az:
1) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; 2) $\frac{\vec{c}+\vec{b}}{2}$ vektort!

778. Adva van egy $ABCD$ paralelogramma. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$!

779. **AP egy ABC háromszög súlyvonala. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$!**

780. Az O pont az ABC háromszög súlyvonalainak metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$!

781*. **Ha AA_1, BB_1 és CC_1 az ABC háromszög súlyvonalai, akkor $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.** Bizonyítsd be!

782*. **Ahhoz, hogy a Q pont az ABC háromszög súlyvonalainak metszéspontja legyen, szükséges és elégséges, hogy $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \vec{0}$.** Bizonyítsd be!

783*. Ha az M pont az ABC háromszög súlypontja, akkor bármely O pontra teljesül az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM}$ egyenlőség! Bizonyítsd be!

784*. Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontjai megfelelően az O és az O_1 pont. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{OO_1}$!

785*. Az A, B és C pont az O középpontú körvonalra illeszkedik úgy, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú!

786*. Adva van egy $ABCD$ négyszög, melyben $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma!

787*. Adva van az A, B és C pont. Szerkeszd meg azt a D pontot, melyre teljesül az alábbi egyenlőség: 1) $\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = 0$; 2) $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$!

788*. Bizonyítsd be az azonosságot: 1) $-\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$!

789*. Szerkeszd meg az alábbi vektorokat:
1) $4\vec{a} + 6(\vec{b} - 3\vec{c} + \vec{a})$; 2) $-(\vec{a} - 8\vec{b}) + 4(2\vec{b} + \vec{a})$!

790*. Adva van az A, B, C és D pont. Az M és N pont az AC és BD szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$!

791*. Adva van az A, B és C pont úgy, hogy $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CB}$. Bizonyítsd be, hogy bármely O pontra teljesül az $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + k}$ egyenlőség!

792*. Bizonyítsd be, hogy az M pont akkor és csak akkor illeszkedik az AB egyenesre, ha bármely tetszőleges O pontra teljesül, hogy $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}$, ahol k valós szám!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

793. Két azonos hatású erő modulusa egyenlő az erők mindegyikének modulusával. Mekkora szöget zár be a két erő?

794. Két gyerek egy csónakot vontat ki a partra. Mekkora erő hat a csónakra, ha az egyik gyerek 100 N, a másik 120 N erőt fejt ki?

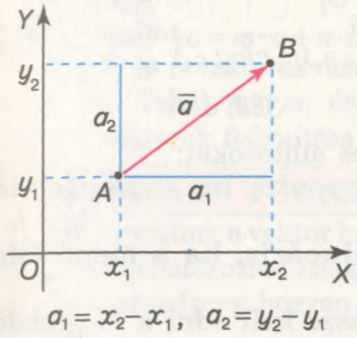
795*. Egy kikötőből egy motorcsónak indult el, melynek a sebessége állóvízben $v_1 = 12$ km/h, a folyó sebessége $v_2 = 4$ km/h (324. ábra). Mekkora sebességgel távolodik a csónak a parttól? A kikötőtől milyen távolságra éri el a csónak a folyó közepét és mikor?



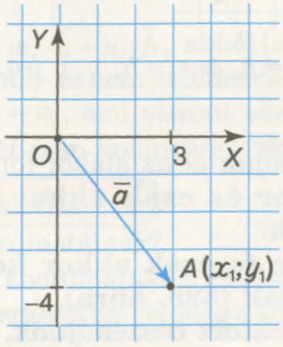
324. ábra

24. § A VEKTOR KOORDINÁTÁI

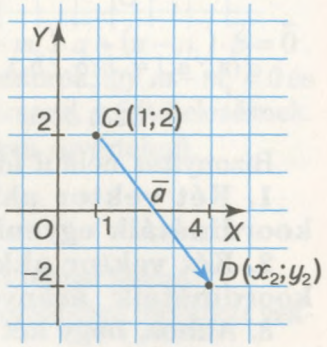
Már tudod, hogy bármely rendezett A és B pontpár a síkon egy $\overrightarrow{AB}$ vektort határoz meg. Legyenek az A és a B pont koordinátái $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ (325. ábra). Az $a_1 = x_2 - x_1$ és $a_2 = y_2 - y_1$ számokat az *a vektor koordinátainak* nevezzük *az adott koordináta-rendszerben.*



325. ábra



326. ábra



327. ábra

Röviden $\bar{a}(a_1; a_2)$ alakban írhatjuk fel, amit így olvasunk: az $\bar{a}$ vektor koordinátai a_1 és a_2. Könnyen belátható, hogy a nullvektor koordinátái nullával egyenlők: $\bar{0}(0; 0)$.

Mivel a vektor hossza a kezdőpont és a végpont távolságával egyenlő, így a vektor hossza kiszámítható a $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ képlettel. Bizonyítsd be önállóan!

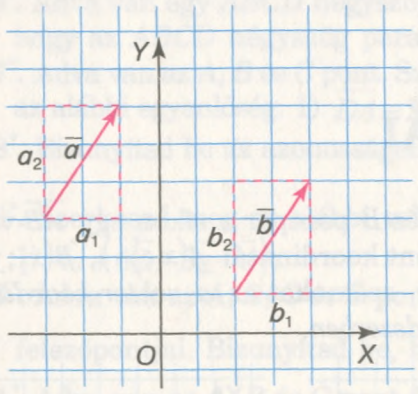
Feladat. Ábrázoljuk az $\bar{a}(3; -4)$ vektort!

Megoldás. Ahhoz, hogy ábrázoljuk az $\bar{a}$ vektort, meg kell adnunk a vektor kezdő- és végpontját az adott koordináta-rendszerben. Helyezzük a vektor kezdőpontját az origóba, az O (0; 0) pontba (326. ábra), a végpontját pedig az $A(x_1; y_1)$ koordinátájú pontba. Akkor a vektor koordinátáinak meghatározása alapján $3 = x_1 - 0$, $-4 = y_1 - 0$. Innen $x_1 = 3$ és $y_1 = -4$. Tehát az A pont koordinátái (3; – 4). Az $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ vektor a keresett vektor.

Hogyan szerkesszük meg az $\bar{a}$ vektort abban az esetben, ha kezdőpontja a koordinátasík bármely origótól különböző pontja?

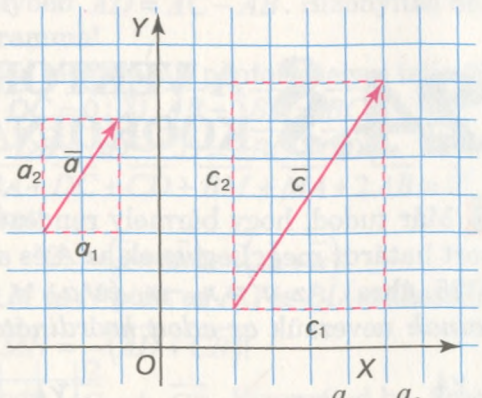
A 327. ábrán az $\bar{a}(3; -4)$ vektor kezdőpontja a $C(1; 2)$ pont, végpontja a $D(x_2; y_2)$ pont. A vektor koordinátáinak meghatározása alapján $3 = x_2 - 1$, $-4 = y_2 - 2$. Innen $x_2 = 4$ és $y_2 = -2$. Tehát a D pont koordinátái (4; – 2). A $\overrightarrow{CD} = \bar{a}$ vektor a keresett vektor.

Általában **a vektor hossza és iránya független a kezdőpont koordináta-rendszerbeli helyétől.**



$\bar{a}(a_1; a_2) = \bar{b}(b_1; b_2)$, $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$

328. ábra



$\bar{a}(a_1; a_2) \parallel \bar{c}(c_1; c_2)$, $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$

329. ábra

Bizonyítás nélkül fogadjuk el az alábbi fontos állításokat:

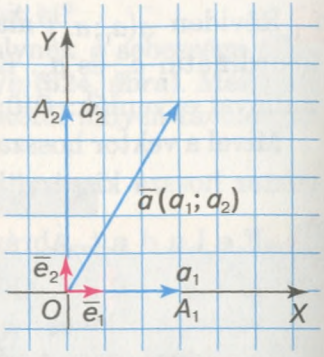
1. Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők.

2. Két vektor akkor és csak akkor kollineáris, ha a megfelelő koordinátáik arányosak (329. ábra).

3. Ahhoz, hogy két vektort összeadjunk, össze kell adni a megfelelő koordinátákat.

4. Ahhoz, hogy számmal szorozzunk egy vektort, a megfelelő koordinátákat kell megszorozzuk ugyanazzal a számmal.

Mérjük fel az origóból az $\bar{a}(a_1; a_2)$ vektort (330. ábra), majd a koordinátatengelyekre az $\bar{e_1}$ és $\bar{e_2}$ egységvektort (*vektorkoordinátákat*, bázisvektorokat), valamint az $\overline{OA_1}$ és $\overline{OA_2}$ vektort, melyeknek hossza megfelelően a_1 és a_2! Fejezzük ki az $\overline{OA_1}$ és $\overline{OA_2}$ vektorokat egységvektorokkal: $\overline{OA_1} = a_1 \cdot \bar{e_1}$, $\overline{OA_2} = a_2 \cdot \bar{e_2}$! Az $\bar{a}$ vektor az $\overline{OA_1}$ és $\overline{OA_2}$ vektorok összege. Ebből kapjuk, hogy $\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = a_1 \cdot \bar{e_1} + a_2 \cdot \bar{e_2}$.



330. ábra

Az $a = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2$ egyenlőséget az a *vektor ortogonális felbontásának* nevezzük a síkon, az a_1 és a_2 számok a *felbontás együtthatói*.

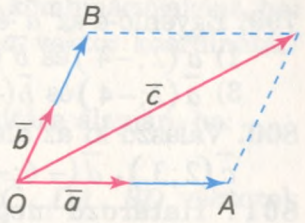
Alapjában véve a vektor felbontása nem kollineáris vektorokra egyértelmű. Tehát megfogalmazhatjuk a következő meghatározást: a vektor koordinátáit az adott koordináta-rendszerben a vektorfelbontás együtthatóinak nevezzük.

BŐVEBBEN

Felmerülhet a kérdés: *Hogyan bizonyítható, hogy egy vektor felbontása nem kollineáris vektorokra egyértelmű.* Elemezzünk!

Tételezzük fel, hogy adva van két nem null vektor, az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$, melyek nem

kollineárisak, és egy tetszőleges $\bar{c}$ vektor. Mérjük fel az adott vektorokat a közös kezdőponttól, az O ponttól (331. ábra)! A c vektor az a és b vektorokkal kollineáris $\overline{OA}$ és $\overline{OB}$ vektorok összege.



331. ábra

Akkor $\overline{OA} = m \cdot \bar{a}$ és $\overline{OB} = n \cdot \bar{b}$, ahol m és n nullával nem egyenlő szám.

Tehát $\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = m \cdot \bar{a} + n \cdot \bar{b}$. Vagyis a c vektort felbontottuk az a és b vektorra. Tételezzük fel, hogy létezik a c vektornak egy másik felbontása is a és b vektorra, vagyis léteznek olyan m_1 és n_1, m és n számoktól különböző számok, melyekre $\bar{c} = m_1 \cdot \bar{a} + n_1 \cdot \bar{b}$.

Akkor viszont $\bar{c} = m \cdot \bar{a} + n \cdot \bar{b} = m_1 \cdot \bar{a} + n_1 \cdot \bar{b}$, ebből $(m - m_1) \cdot \bar{a} + (n - n_1) \cdot \bar{b} = \bar{0}$.

Mivel az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok nem null- és nem kollineáris vektorok, így $m - m_1 = 0$ és $n - n_1 = 0$. Tehát $m = m_1$ és $n = n_1$, ami viszont ellentmond a feltételezésnek. Tehát a vektorok felbontása két nem kollineáris vektorra egyértelmű.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

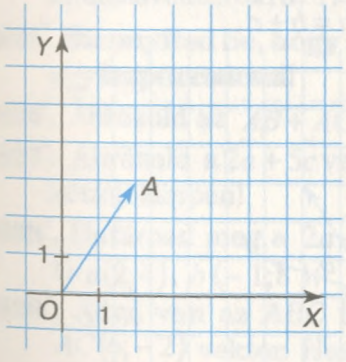
1. Mit nevezünk a vektor koordinátáinak?
2. Hogyan határozható meg a koordinátákkal megadott vektor hossza?
3. Magyarázd meg, hogyan szerkeszthetjük meg a koordinátáival megadott vektort?
4. Milyenek az egyenlő vektorok koordinátái? Hát a kollineáris vektor koordinátái?
5. Hogyan határozható meg két, koordinátáival megadott vektor összege?
6. Hogyan kell a koordinátáival megadott vektort számmal szorozni?
7. Mit értünk a vektor felbontásán?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

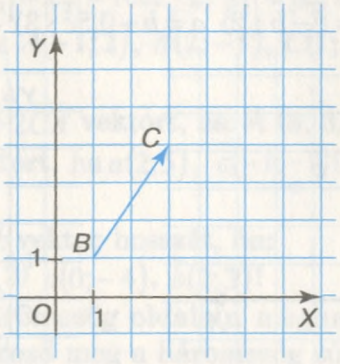
796'. Határozd meg a 332., 333., 334. ábrák alapján a vektor kezdőpontjának és végpontjának koordinátáit!

797'. Nevezd meg az alábbi vektorok koordinátáit:
1) $\overline{OA}$ (332. ábra); 2) $\overline{BC}$ (333. ábra); 3) $\overline{HT}$ (334. ábra)!

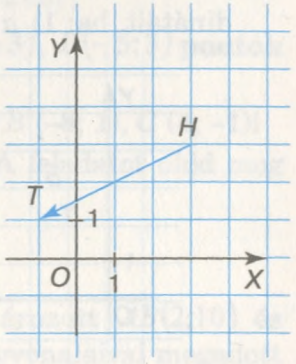
798'. Mekkora az alábbi vektorok hossza: 1) $\bar{b}(b_1; b_2)$; 2) $\bar{c}(c_1; c_2)$; 3) $\bar{d}(d_1; d_2)$?



332. ábra



333. ábra



334. ábra

799'. Egyenlő-e az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor, ha:
1) $\bar{a}(2;-4)$ és $\bar{b}(2;4)$; 2) $\bar{a}(2;-4)$ és $\bar{b}(-2;4)$;
3) $\bar{a}(2;-4)$ és $\bar{b}(-2;-4)$; 4) $\bar{a}(2;-4)$ és $\bar{b}(2;-4)$?

800'. Válaszd ki az alábbi vektorok közül a kollineárisakat: $\bar{a}(3;2)$, $\bar{b}(6;4)$, $\bar{c}(2;3)$, $\bar{d}(-6;-4)$, $\bar{h}(1,5;1)$, $\bar{k}(-3;4)$, $\bar{p}(15;10)$, $\bar{t}(-9;-6)$!

801°. Határozd meg az $\overline{AB}$ vektor hosszát, ha: 1) $A(-1;5)$, $B(2;5)$; 2) $A(-4;6)$, $B(1;0)$; 3) $A(1;1)$, $B(3;-9)$! Készíts rajzot!

802°. Rajzold át a 27. táblázatot és töltsd ki!

27. táblázat

A	$(1;4)$		$(5;2)$	$(6;-6)$		$(5;7)$
B	$(0;-3)$	$(2;-2)$			$(2;1)$	$(11;9)$
$\overline{AB}$		$\overline{AB}(8;5)$	$\overline{AB}(4;3)$	$\overline{AB}(-3;5)$	$\overline{AB}(3;0)$	

803°. Határozd meg az $\bar{a}$ vektor hosszát, ha:
1) $\bar{a}(1;1)$; 2) $\bar{a}(4;3)$; 3) $\bar{a}(12;-5)$; 4) $\bar{a}(-6;-8)$!

804°. Határozd meg az $\overline{AB}$ vektor hosszát, ha ismeretesek az A és B pont koordinátái: 1) $A(10;3)$, $B(0;5)$; 2) $A(2;-1)$, $B(5;2)$; 3) $A(-1;-2)$, $B(1;2)$!

805°. Egységvektor-e: 1) $\bar{a}(1;0)$; 2) $\bar{b}\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$; 3) $\bar{c}(1;1)$?

806°. Határozd meg az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor összegének koordinátáit, ha:
1) $\bar{a}(1;2)$, $\bar{b}(3;4)$; 2) $\bar{a}(-3;1)$, $\bar{b}(2;-4)$, 3) $\bar{a}(-6;-2)$, $\bar{b}(6;2)$!

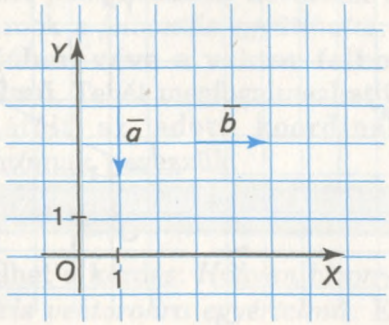
807°. Határozd meg az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor összegének koordinátáit (335. ábra)!

808°. Lehet-e a $\bar{c}(5;2)$ vektor az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok összege (336. ábra)?

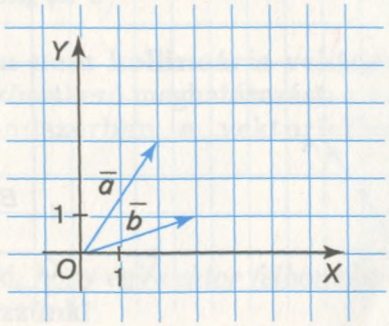
809°. Milyen vektort kell az $\bar{a}(4;3)$ vektorhoz adni, hogy nullvektort kapj?

810°. Adva van az $\bar{a}(1;4)$ vektor. Határozd meg az alábbi vektorok koordinátáit:
1) $5\bar{a}$; 2) $-3\bar{a}$; 3) $\frac{1}{2}\bar{a}$; 4) $-\bar{a}$!

811°. Adva van a $\bar{b}(1;2)$ és $\bar{c}(-5;8)$ vektor. Határozd meg az $\bar{a}$ vektor koordinátáit, ha: 1) $\bar{a}=\bar{c}-\bar{b}$; 2) $\bar{a}=\bar{b}+0{,}5\bar{c}$; 3) $4\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$.



335. ábra



336. ábra

812°. Írd le az $\bar{a}$ vektort az $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha: 1) $3\bar{e}_1+\bar{e}_2$; 2) $-5\bar{e}_1+2\bar{e}_2$; 3) $\bar{e}_1-\bar{e}_2$! Melyek az $\bar{a}$ vektor koordinátái? Készíts rajzot!

813°. Írd le az $\bar{a}$ vektort az $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ vektorok felbontása alapján, ha: 1) $\bar{a}(1;3)$; 2) $\bar{a}(2;0)$; 3) $\bar{a}(-4;-5)$!

814. Melyek kollineárisak az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{DA}$, $\overline{BD}$ vektorok közül, ha: 1) $A(2;3)$, $B(2;-1)$, $C(1;-1)$, $D(1;13)$; 2) $A(-1;2)$, $B(0;-6)$, $C(1;-4)$, $D(-3;6)$?

815. A λ mely értékeire lesz kollineáris az $\bar{a}(3;6)$ és a $\bar{b}(1;\lambda)$ vektor?

816. Határozd meg az $\overline{AB}$ vektorral ellentétes vektor koordinátáit, ha: 1) $A(10;9)$, $B(1;1)$; 2) $A(4;-7)$, $B(0;6)$!

817. A λ mely értékeire lesz az $\bar{a}(1;\lambda)$ vektor: 1) egységvektor; 2) 3 egységhosszúságú?

818. A $\lambda\bar{a}$ vektor hossza 8 egység. Határozd meg a λ értékét, ha: 1) $\bar{a}(-1;1)$; 2) $\bar{a}(0;-4)$!

819. Határozd meg az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ vektorok összegét, ha: $A(-1;2)$, $B(2;-1)$, $C(1;-3)$, $D(-5;3)$! A feladatot oldd meg kétféleképpen!

820. Határozd meg az alábbi vektorok koordinátáit: $\bar{a}+\bar{b}$; $-3\bar{a}+\bar{b}-7\bar{c}+\bar{d}$; $5\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}-\bar{d}$, ha: 1) $\bar{a}(2;0)$, $\bar{b}(1;4)$, $\bar{c}(-1;1)$, $\bar{d}(0;2)$; 2) $\bar{a}(0;-5)$, $\bar{b}(2;-3)$, $\bar{c}(3;7)$, $\bar{d}(5;4)$! Készíts rajzot!

821. Szerkessz az $\overline{OA}(2;1)$ és $\overline{OB}(1;4)$ vektorokra paralelogrammát! Határozd meg az átlók hosszát!

822. Adva vannak az ABC háromszög csúcsai: $A(6;2)$, $B(1;1)$, $C(-5;9)$. Határozd meg az $\overline{AM}$ vektor koordinátáit, ha AM az ABC háromszög súlyvonala!

823. Egyenlő-e a $\bar{b}+3\bar{a}$ és az $\bar{a}-\bar{c}$ vektor, ha: $\bar{a}(1;3)$, $\bar{b}(-7;-5)$; $\bar{c}(2;2)$?

824. Egy 2 cm oldalhosszúságú négyzet egyik csúcsa az origóban van, két oldala pedig a tengelyekre illeszkedik. A négyzet oldalaira vektorokat adtak meg úgy, hogy az első vektor kezdőpontja az origó, a többi vektor irányát pedig meghatározhatjuk, ha körbejárjuk a négyzetet az óramutató járásával megegyező irányban. Bontsd fel ezeket a vektorokat az alábbi bázisvektorokra: 1) $|\overline{e_1}|=|\overline{e_2}|=1\,\text{cm}$; 2) $|\overline{e_1}|=|\overline{e_2}|=2\,\text{cm}$!

825*. **Bizonyítsd be, hogy az $A(-1;2)$, $B(2;-1)$, $C(1;-3)$, $D(-5;3)$ pontok egy trapéz csúcsai!**

826*. Ábrázold az $\overline{AB}+\overline{AC}+2\overline{CA}$ vektort, ha: $A(3;3)$, $B(-8;1)$, $C(4;-1)$!

827*. Ábrázold a $2\bar{a}+5\bar{c}$ vektort, ha $\bar{a}(2;5)$, $\bar{c}(-1;-1)$! A feladatot oldd meg kétféleképpen!

828*. Határozd meg a $2\bar{a}-\bar{b}$ vektor hosszát, ha: 1) $\bar{a}(2;4)$, $\bar{b}(-1;8)$; 2) $\bar{a}(0;-4)$, $\bar{b}(2;3)$!

829*. Adva van az ABC háromszög oldalain meghatározott $\overline{AB}(2;10)$ és $\overline{AC}(6;-2)$ vektor. Határozd meg a háromszög súlyvonalaival megadott $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ és $\overline{CP}$ vektorok koordinátáit és a súlyvonalak hosszát!

830*. Határozd meg az ABC háromszög csúcsainak és a $\overline{CA}$ vektornak a koordinátáit, ha: 1) $A(1;-4)$, $\overline{AB}(0;6)$, $\overline{BC}(2;-1)$; 2) $A(2;-5)$, $\overline{AB}(0;2)$, $\overline{BC}(4;2)$!

831*. Határozd meg az $\bar{a}$ vektorral kollineáris $\bar{b}$ vektor koordinátáit, ha: $|\bar{b}| = 10$ és $\bar{a}(4;3)$!

832*. Határozd meg a $\bar{d}$ koordinátáit, ha $\bar{d} \uparrow\downarrow \bar{c}$ és:
1) $\bar{c}(1;-2)$, $|\bar{d}| = 5$; 2) $\bar{c}(12;5)$, $|\bar{d}| = 75$!

833*. Adva vannak az alábbi vektorok: $\overline{AB} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\overline{BC} = -4\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = -5\bar{a} - 3\bar{b}$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!

834*. Adva van az ABC háromszög és az egymásra merőleges $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$, $\overline{AB} = 5\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\overline{CA} = -7\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$. Határozd meg az AM súlyvonal hosszát!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

835. Egy testre két erő hat: $\overline{F_1}(1;5)$ és $\overline{F_2}(-4;7)$. Határozd meg az eredő erőt!

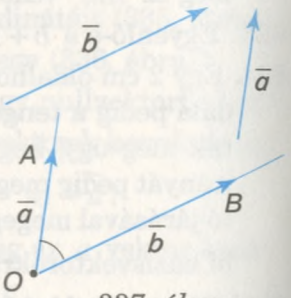
836. Adva van az $\overline{F}(6;13)$ erő. Határozd meg a tengelyekkel párhuzamos azon erőket, melyeknek az adott erő az eredője!

837. Hogy megmérjenek egy 10 N súlyú kisebb gerendát két 5 N-os dinamométerrel, úgy járnak el, hogy a két dinamométert azonos magasságon egymás mellett rögzítik, majd egyidejűleg a két dinamométer kampójára felfüggesztik a kisebb gerendát. Magyarázd meg, miért végezhető el így a mérés!

25. § A VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATA

Már megismerkedtél a vektorműveletek közül kettővel: a vektor összeadásával és a számmal való szorzásával. Ismerjünk meg egy új műveletet, a vektor *skaláris szorzását*.

A 337. ábrán egy $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor látható. Mérjük fel ezeket a vektorokat egy O ponttól: $\overline{OA} = \bar{a}$ és $\overline{OB} = \bar{b}$. Az OA és OB félegyenesek egy AOB szöget alkotnak, ezt a szöget az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ *vektorok hajlásszögének* nevezzük.



337. ábra

Így jelöljük: $(\widehat{\bar{a};\bar{b}})$, és így olvassuk: az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok hajlásszöge.

Ha az $\bar{a}$ és a $\bar{b}$ vektorok egyirányúak, akkor $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 0°$, ha ellentétes irányúak, akkor $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 180°$.

Két nem nullvektor ***skaláris szorzata*** a vektorok hosszának és hajlásszögük koszinuszának szorzatával egyenlő.

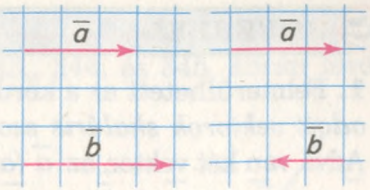
A skaláris szorzat jelölése: $\bar{a}\cdot\bar{b}$. A meghatározás szerint $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\overset{\wedge}{\bar{a};\bar{b}}\right)$.

Ha $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ (338. ábra), akkor

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 0°=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot 1=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.

Ha $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ (339. ábra), akkor

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 180°=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot(-1)=-|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.



338. ábra 339. ábra

Ha $\bar{a}\perp\bar{b}$, akkor $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 90°=0$.

Ha $\bar{a}=\bar{b}$, akkor $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0°=|\bar{a}|^2$.

Az $\bar{a}$, $\bar{a}$ szorzatot az $\bar{a}$ vektor *skaláris négyzetének* nevezzük és $\bar{a}^2$ jelöljük. Tehát $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$, vagyis a **vektor skaláris négyzete egyenlő a vektor hosszának négyzetével.**

A skaláris szorzás tulajdonságait a 28. táblázatban foglaltuk össze.

28. táblázat

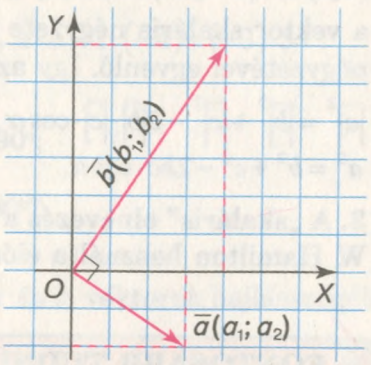
Felcserélhetőségi szabály	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$
Csoportosítási szabály (a skaláris tényezőre)	$(k\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=k\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$
Széttagolási szabály	$(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$

Ha a vektorok koordinátáikkal vannak megadva: $\bar{a}(a_1;a_2)$ és $\bar{b}(b_1;b_2)$, akkor a **két vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatainak összegével egyenlő**: $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$.

Ebből következik:

1) két $\bar{a}(a_1;a_2)$ és $\bar{b}(b_1;b_2)$ vektor merőlegességének ismertetőjele (340. ábra):

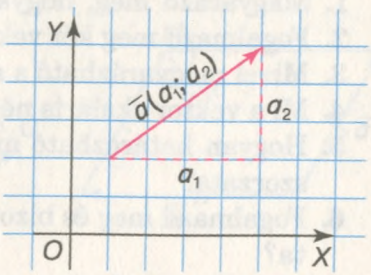
$$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2=0;$$



340. ábra

2) az $\bar{a}(a_1;a_2)$ (341. ábra) vektor hossza:

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2};$$



341. ábra

3) a két vektor hajlásszögének képlete:

$$\cos\left(\overset{\wedge}{\bar{a};\bar{b}}\right)=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

BŐVEBBEN

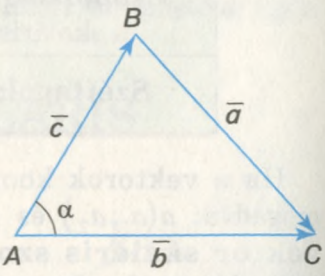
1. Felmerülhetett az a kérdés, *hogyan lehet levezetni a koordinátáikkal megadott vektorok skaláris szorzatának képletét?*
Adva van két vektor, az $\bar{a}\,(a_1; a_2)$ és $\bar{b}\,(b_1; b_2)$; bontsuk fel $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ vektorokra: $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2$ és $\bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2$. Alkalmazzuk a skaláris szorzás tulajdonságait:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2)(b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2) = (a_1 \cdot b_1) \cdot \bar{e}_1^{\,2} + (a_1 \cdot b_2) \cdot \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + (a_2 \cdot b_1) \cdot \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 + (a_2 \cdot b_2) \cdot \bar{e}_2^{\,2}.$$

Figyelembe véve, hogy $\bar{e}_1^{\,2} = \bar{e}_2^{\,2} = 1$, és hogy $\bar{e}_1\,\bar{e}_2 = \bar{e}_2\,\bar{e}_1 = 0$, ezt kapjuk: $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

2. A skaláris szorzat fogalmát mértani bizonyításoknál és feladatok megoldásánál alkalmazzák. Például a koszinusztétel így is bizonyítható.
Az ABC háromszög oldalai a, b és c, hegyesszöge $BAC\angle = \alpha$. Az oldalakra adjuk meg az $\overline{AB} = \bar{c}, \overline{AC} = \bar{b}, \overline{BC} = \bar{a}$ vektorokat (342. ábra)! Fejezzük ki például a $\overline{BC}$ vektort az $\overline{AC}$ és $\overline{AB}$ vektorral: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$! Vagyis $\bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$. Határozzuk meg az $\bar{a}$ vektor skaláris négyzetét: $\bar{a}^2 = (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b} \cdot \bar{c}$! A kapott egyenlőségben értelmezzük a skaláris szorzatot.

A meghatározás alapján $\bar{b} \cdot \bar{c} = |\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\alpha$,
a vektor skaláris négyzete pedig a hosszának négyzetével egyenlő. Így azt kapjuk, hogy
$|\bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - 2|\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\alpha$, vagyis
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.



342. ábra

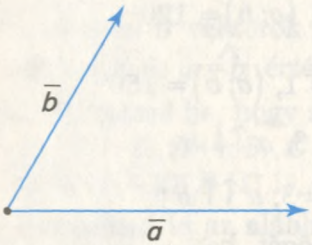
3. A „skaláris" elnevezés a latin *scalaris* szóból ered, jelentése: lépcsőzetes. W. Hamilton használta először.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

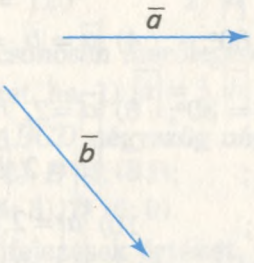
1. Magyarázd meg, hogyan értelmezhető két vektor hajlásszöge!
2. Fogalmazd meg két vektor skaláris szorzatát!
3. Mivel magyarázható a skaláris szorzat elnevezés?
4. Mi a vektor skaláris négyzete?
5. Hogyan határozható meg a koordinátákkal megadott vektorok skaláris szorzata?
6. Fogalmazd meg és bizonyítsd be, mikor nulla két vektor skaláris szorzata?
7. Melyek a skaláris szorzat tulajdonságai?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

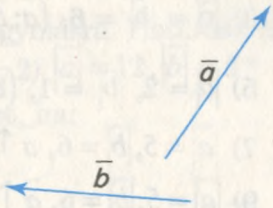
838'. Szögmérővel határozd meg, mekkora a 343., 344. és 345. ábrán levő vektorok hajlásszöge!



343. ábra



344. ábra



345. ábra

839'. Fogalmazd meg az alábbi képletek alapján, mivel egyenlő az adott vektorok skaláris szorzata:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a};\bar{b})$; 2) $\bar{c}\cdot\bar{d}=|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|\cdot\cos(\bar{c};\bar{d})$;

3) $\bar{p}\cdot\bar{q}=|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot\cos(\bar{p};\bar{q})$!

840'. Olvasd el a következő képleteket: 1) $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$; 2) $\bar{b}^2=|\bar{b}|^2$; 3) $\bar{c}^2=|\bar{c}|^2$!

841'. Mennyi az alábbi vektorok skaláris négyzete, ha hosszuk:

1) $|\bar{a}|=2$; 2) $|\bar{b}|=3$; 3) $|\bar{c}|=5$? Végezz megfelelő feljegyzést!

842'. Jól helyettesítették-e be a vektorok koordinátáit a skaláris szorzat képletébe: 1) $\bar{a}(2;3)$, $\bar{b}(4;5)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot4+3\cdot5$; 2) $\bar{a}(-3;-4)$, $\bar{b}(2;5)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=(-3)\cdot(-4)+2\cdot5$; 3) $\bar{a}(1;-3)$, $\bar{b}(-4;5)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=1\cdot(-4)+(-3)\cdot5$?

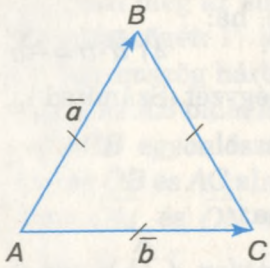
843'. Mi állítható az alábbi vektorokról, ha:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$; 2) $\bar{a}\perp\bar{b}$; 3) $\left(\overset{\wedge}{\bar{a};\bar{b}}\right)=90^\circ$;

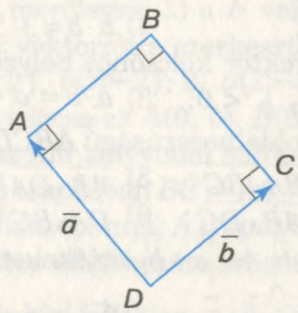
4) $\bar{p}\cdot\bar{q}=0$; 5) $\bar{p}\perp\bar{q}$; 6) $\left(\overset{\wedge}{\bar{p};\bar{q}}\right)=90^\circ$?

Írd le a megfelelő képletet!

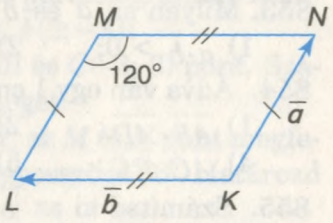
844°. Nevezd meg a 346., 347., 348. ábrákon az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok hajlásszögét! Mekkora a szögek fokmértéke?



346. ábra



347. ábra



348. ábra

845°. Számítsd ki az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 45°$; 2) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 135°$;

3) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 6$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 60°$; 4) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 6$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 120°$;

5) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 30°$; 6) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 150°$;

7) $|\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 6, \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$; 8) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$;

9) $|\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 6, \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$; 10) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$!

846°. Határozd meg az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok hajlásszögét, ha:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sqrt{2}, |\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 1$; 2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = -12, |\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$;

3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3\sqrt{3}, |\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3$!

847°. Határozd meg a $\bar{b}$ vektor hosszát, ha:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 12$, $|\bar{a}| = 2$ $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 30°$; 2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2$, $|\bar{a}| = 2$ $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 45°$;

3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = -6$, $|\bar{a}| = 3 (\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 120°$!

848°. Mekkora az $\bar{a}$ vektor hossza, ha skaláris négyzete:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 8; 5) 9; 6) 12? A válaszodat indokold meg!

849°. Számítsd ki az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok skaláris szorzatát, ha:

1) $\bar{a}$ (5; - 1), $\bar{b}$ (1; 8); 2) $\bar{a}$ (1; - 3), $\bar{b}$ (- 1; 7);

3) $\bar{a}$ (- 1; 2), $\bar{b}$ (2; - 1); 4) $\bar{a}$ (0; 1), $\bar{b}$ (- 1; - 1)!

850°. Bizonyítsd, hogy az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok kölcsönösen merőlegesek egymásra:

1) $\bar{a}$ (- 2; 2), $\bar{b}$ (1; 1); 2) $\bar{a}$ (- 1; - 2), $\bar{b}$ (4; - 2);

3) $\bar{a}$ (3; 2), $\bar{b}$ (4; - 6); 4) $\bar{a}$ (4; 2), $\bar{b}$ (- 1; 2)!

851°. Számítsd ki az alábbi vektorok hajlásszögét, ha:

1) $\bar{a}$ (2; 0), $\bar{b}$ (0; - 1); 2) $\bar{a}$ $(2; 2\sqrt{3})$, $\bar{b}$ (1,5; 0);

3) $\bar{a}$ (6; - 8), $\bar{b}$ (12; 9); 4) $\bar{a}$ (- 1; 1), $\bar{b}$ (2; - 2)!

852. Ábrázold az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokat, ha skaláris szorzatuk az alábbi képlettel számítható ki:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 30°$; 2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 3 \cdot \cos 120°$;

3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 4 \cdot \cos 90°$; 4) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 180°$!

853. Milyen az a és b vektor kölcsönös helyzete, ha:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$; 2) $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$; 3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$; 4) $\bar{a} \cdot \bar{b} = -|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$?

854. Adva van egy 1 cm oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet. Számítsd ki:

1) $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; 2) $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$; 3) $\overline{AB} \cdot \overline{DA}$;

4) $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; 5) $\overline{AB} \cdot \overline{DC}$; 6) $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$!

855. Számítsd ki az $|\bar{a} + \bar{b}|$ és $|\bar{a} - \bar{b}|$ értékeket, ha:

1) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 60°$; 2) $|\bar{a}| = 12$, $|\bar{b}| = 5$, $(\hat{\bar{a}; \bar{b}}) = 90°$!

856. Egy paralelogramma két szomszédos oldalán adottak az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok. Határozd meg a paralelogramma átlóit, ha:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = 120°$; 2) $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = 60°$!

857. Az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok kölcsönösen merőlegesek egymásra. Határozd meg az $|\bar{a}+\bar{b}|$ és $|\bar{a}-\bar{b}|$ értékeket, ha: 1) $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$; 2) $|\bar{a}| = 12, |\bar{b}| = 5$!

858. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög négyzet, ha:

1) $A(1; 2), B(4; 5), C(7; 2), D(4; -1)$;

2) $A(3; -2), B(1; 1), C(4; 3), D(6; 0)$.

859. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét, és állapítsd meg az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor koordinátáit, hosszát és hajlásszögét:

1) $\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{3\cdot(-2)+3\cdot 2}{\sqrt{3^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}}$; 2) $\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{(-1)\cdot 1+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}}$.

860. Határozd meg az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor által bezárt szöget, ha:

1) $\bar{a}(2;4)$, $\bar{b}(3;-1)$; 2) $\bar{a}(1;3)$, $\bar{b}(-5;1)$!

861. Határozd meg az ABC háromszög A szögét, ha:

1) $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(1;7)$; 2) $A(1;2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$!

862*. Számítsd ki az a és b vektor hosszának és az általuk közbezárt szögnek az ismeretében az $\bar{a}-3\bar{b}$ és $2\bar{a}+\bar{b}$ vektor skaláris szorzatát:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = 60°$; 2) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = 90°$!

863*. Számítsd ki az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor skaláris szorzatát, ha $\bar{a} = 3\bar{p}-2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p}+4\bar{q}$, ahol $\bar{p}$ és $\bar{q}$ egymásra merőleges egységvektor!

864*. Mekkora szöget zárnak be az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ egységvektorok, ha $\bar{p} = \bar{a}+2\bar{b}$ és $\bar{q} = 5\bar{a}-4\bar{b}$ vektorok egymásra merőlegesek?

865*. Milyen szöget (tompa-, derék- vagy hegyesszöget) zár be az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektor, ha:

1) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$; 2) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}|+|\bar{b}|$;

3) $|\bar{a}+\bar{b}| \geq |\bar{a}-\bar{b}|$; 4) $|\bar{a}+\bar{b}| \leq |\bar{a}|+|\bar{b}|$!

866*. Igazold a $-|\bar{a}||\bar{b}| \leq \bar{a}\cdot\bar{b} \leq |\bar{a}||\bar{b}|$ egyenlőséget!

867*. Adva van az $\bar{a}(1;3)$ és $\bar{b}(3;4)$ vektor. Határozd meg a λ azon értékét, melyre a $2\bar{a}+\lambda\bar{b}$ vektor merőleges: 1) a $\bar{b}$ vektorra; 2) az $\bar{a}$ vektorra!

868*. Határozd meg az adott vektorokra szerkesztett paralelogramma átlóinak hajlásszögét: 1) $\bar{a}(2;2)$, $\bar{b}(5;-2)$; 2) $\bar{a}(2;-1)$, $\bar{b}(2;-3)$!

869*. Egy háromszög három csúcsa az $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ és $C(-3; 3)$ pont. Számítsd ki az AB oldal és az AM súlyvonal hajlásszögét!

870*. Az $OACB$ egyenlőszárú trapézban $BC = AC = 2$, az M és N pont megfelelően az OB és AC alap felezőpontja. A trapéz hegyesszöge 60°. Határozd meg az $\overline{OM}$ és $\overline{ON}$ vektor által bezárt szöget!

871*. Az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ vektorok kielégítik az $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ feltételt. Számítsd ki az $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ kifejezést!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

872. Mekkora munkát végez az $\overline{F}(4; 7)$ erő, ha a támadáspontot az $\overline{S}(-1; 10)$ vektorral mozdítja el?

873. Az anyagi pontra ható erőt két erőre bontották, melyek α és β szöget zárnak be az adott erővel. Határozd meg a felbontás abszolút értékeit, ha az adott erő abszolút értéke 3 N és: 1) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$; 2) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 80^\circ$. Készíts rajzot!

874. Ukrajna égtájak szerinti szélső pontjainak földrajzi koordinátái: északi (é. sz. 55°22' és k. h. 33°11'), keleti (é. sz. 49°15'; k. h. 40°13'), déli (é. sz. 44°23'; k. h. 33°44'), nyugati (é. sz. 48°05'; k. h. 22°08'). Ha az északi és a déli pontokon, valamint a keleti és nyugati pontokon keresztül képzeletben egyeneseket húzunk, beigazolódik-e, hogy ezek az egyenesek merőlegesek?

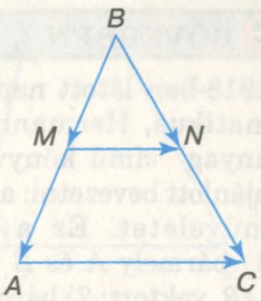


26. § A VEKTORMÓDSZER

Feladatok megoldásához és tételek bizonyításához különböző módszerek alkalmazhatók. Már tudod, hogyan alkalmazhatjuk a mértani alakzatok tulajdonságait, milyen módszerekkel bizonyíthatjuk a koordináták módszerének alkalmazhatóságát.

A vektorok összeadása és szorzása számmal lehetőséget ad a sík bármely vektorának felbontására két nem kollineáris vektorra. Az ilyen nem kollineáris két vektort a *sík bázisvektorának* nevezzük.

F e l a d a t. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög középvonala párhuzamos a harmadik oldallal és annak felével egyenlő!



349. ábra

M e g o l d á s. Az MN az ABC háromszög középvonala (349. ábra).

Bebizonyítjuk, hogy $MN \| AC$ és $MN = \frac{1}{2}AC$.

1. Vezessük be az $\overline{MN}$ és $\overline{AC}$ vektorokat! Akkor a vektorok nyelvén a feladat feltételeit leírhatjuk $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ alakban.

2. Vezessük be a $\overline{BC}$ és $\overline{BA}$ bázisvektorokat, és bontsuk fel az $\overline{MN}$ és az $\overline{AC}$ vektorokat e bázisvektorokra!

$\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$ (az ABC háromszögből) és $\overline{MN} = \overline{BN} - \overline{BM}$ (az MBN háromszögből).

Mivel az M és N pont az ABC háromszög AB és BC oldalának felezőpontja, így $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ és $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA}$. A kapott egyenlőségeket visszahelyettesítve az $\overline{MN}$ vektor felbontásába, megkapjuk, hogy: $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{BA} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} - \overline{BA}\right)$. Tehát $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

3. Az utolsó vektoregyenlőségből következik:

1) az $\overline{MN}$ és az $\overline{AC}$ vektorok kollineárisak, tehát az MN és AC szakaszok párhuzamosak;

2) $\left|\overline{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$, ezért $MN = \frac{1}{2}AC$.

Ahhoz, hogy alkalmazzuk a vektormódszert, három lépést kell tenni.

1. Fogalmazzuk át a feladat feltételeit a vektorok nyelvére! Ehhez vezessük be a bázis- és segédvektorokat! Írjuk le a vektoregyenlőséget!

2. A vektorok tulajdonságait és ismert azonosságait alkalmazva átalakítjuk a vektoregyenlőséget.

3. Fordítsuk le a vektornyelvet a mértan nyelvére.

A vektorok kollinearitása és hosszuk arányossága alapján bizonyítható:

1) az egyenesek és a szakaszok párhuzamossága;

2) az adott szakasz valamely felezőpontjának vagy meg adott arányban osztó pontjának meghatározása;

3) három pontnak egy egyenesre illeszkedése.

A vektorok skaláris szorzata alapján kiszámítható:

4) a szakasz hossza (a megfelelő vektor skaláris négyzete);

5) egy szög fokmértéke (a szög koszinuszképletének és a trigonometrikus táblázatoknak alapján.

BŐVEBBEN



Hermann Weil

1918-ban látott napvilágot az ismert német matematikus, Hermann Weil (1885–1955) „Sík, idő, anyag” című könyve. A tudós csak két fogalmat ajánlott bevezetni: a „pontot” és a „vektort”, és négy műveletet. Ez a négy művelet a következő: 1) bármely A és B pontpárhoz rendeljük hozzá az $\overline{AB}$ vektort; 2) bármely $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorhoz rendeljük hozzá az $\bar{a}+\bar{b}$ összegvektort; 3) bármely vektorhoz és k valós számhoz hozzárendeljük a $k\bar{a}$ vektort, a vektor szorzását számmal; 4) bármely $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorhoz hozzárendelünk valamely $\bar{a}\cdot\bar{b}$ számot, a vektorok skaláris szorzatát. A vektorokkal végzendő általatok ismert tulajdonságokat axiómaként fogadták el. Viszont tantételként bizonyítanak olyan állításokat, melyeket mint axiómákat tanultál. Például axióma, hogy két ponton keresztül csak egy egyenes húzható. A szerző által felépített elméletet széleskörűen alkalmazzák a fizikában, a kristálytanban, a kémiában, a közgazdaságban és a tudományok más területein. A mértanban elért eredményeiért és az algebra külön fejezetéért, a csoportelméletért Hermann Weil Nemzetközi Lobacsevszkij-díjat kapott.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi a sík bázisa?
2. Hogyan bontható fel bármely vektor bázisvektorokra?
3. Magyarázd el, hogyan használható a vektormódszer feladatok megoldására?

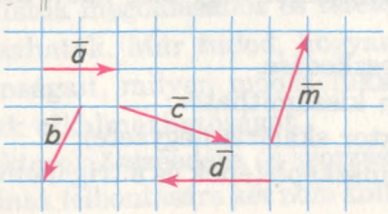
OLDD MEG A FELADATOKAT!

875'. Nevezd meg azon vektorpárokat, melyek bázisvektorok lehetnek a síkon (350., 351. ábra)!

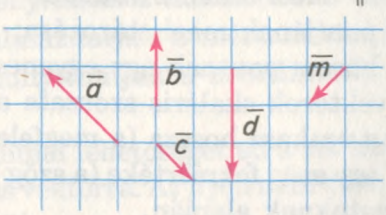
876'. Miért nem lehet az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ vektor bázisvektor (352., 353., 354. ábrák)?

877°. Lehetnek-e bázisvektorok azok a vektorok, melyek:
1) kollineárisak; 2) egyenlők; 3) nem kollineárisak?

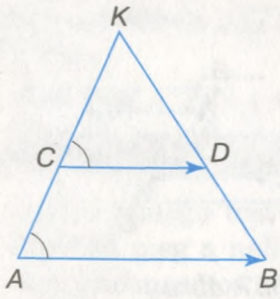
878°. Az alábbi feltételek közül melyik támasztja alá az AB és MP egyenesek párhuzamosságát:
1) $\overline{AB}\parallel\overline{MP}$; 2) $\overline{AB}\cdot\overline{MP}=0$; 3) $\overline{AB}=\overline{MP}$; 4) $\overline{AB}=\lambda\overline{MP}$; 5) $\overline{AM}\parallel\overline{BP}$?



350. ábra



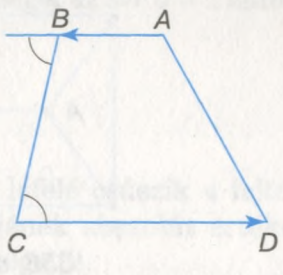
351. ábra



352. ábra



353. ábra



354. ábra

879°. Igaz-e, hogy az A, B és C pontok akkor és csak akkor illeszkednek egy egyenesre, ha $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$? Válaszodat indokold meg!

880°. Fogalmazd meg az alábbi állításokat a vektorok nyelvén:

1) az AB és MP egyenesek párhuzamosak;
2) az AB és MP egyenesek merőlegesek;
3) az A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek;
4) az AB és MP szakaszok egyenlők;
5) az M pont az AB szakasz felezőpontja;
6) az AM szakasz az ABC háromszög súlyvonala;
7) az MN az ABC háromszög AC oldalával párhuzamos középvonala;
8) a háromszög súlyvonalaiból háromszög alkotható;
9) az $ABCD$ négyszög paralelogramma;
10) az $ABCD$ négyszög olyan trapéz, melynek alapjai AD és BC!

881°. Bizonyítsd be, hogy egy trapéz oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai!

882°. Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csúcsai!

883°. Bizonyítsd be, hogy a négyzet átlói egymásra merőlegesek!

884°. Bizonyítsd be, hogy a téglalap átlói egyenlők!

885°. Bizonyítsd be a Pitagorasz-tételt!

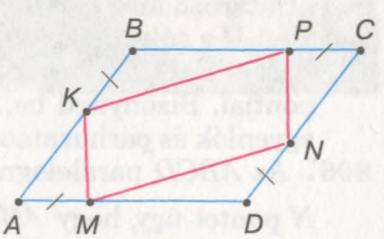
886°. Az ABC háromszög képe egy $k = 3$ arányú homotéciánál az $A\,B'C'$ háromszög. Bizonyítsd be, hogy $BC \parallel B'C'$!

887. Bizonyítsd be, hogy két vektor akkor és csak akkor kollineáris, ha megfelelő koordinátáik arányosak!

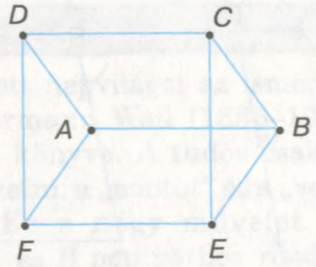
888. Két vektor összegének koordinátái egyenlők a megfelelő koordináták összegével. Bizonyítsd be!

889. Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának felezőpontja az M pont, a BC oldal felezőpontja az N pont. Bizonyítsd be, hogy a $BNDM$ négyszög parale-logramma!

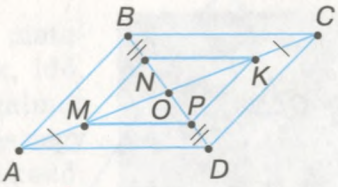
890. Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira egyenlő hosszúságú AM, DN, CP és BK szakaszokat mértek fel úgy, ahogy az a 355. ábrán látható. Bizonyítsd be, az $MNPK$ négyszög paralelogramma!



355. ábra



356. ábra



357. ábra

891. Az A hegyesszögű $ABCD$ paralelogrammán kívülre egy ABE és egy CDF szabályos háromszöget szerkesztettek. Bizonyítsd be, hogy az $AECF$ négyszög paralelogramma!

892. Adva van egy $ABCD$ és egy $ABEF$ paralelogramma (356. ábra). Bizonyítsd be, hogy $DF = CE$ és $DF \| CE$!

893. Az $ABCD$ négyszög paralelogramma (357. ábra) és $AM = KC$, $BN = PD$. Bizonyítsd be, hogy $MP = NK$ és $MP \| NK$!

894. Az ABC háromszög AO súlyvonalát meghosszabbították úgy, hogy $OD = AO$. A D pontot összekötötték a B és a C csúccsal. Bizonyítsd be, hogy $CD = AB$ és $CD \| AB$!

895. Bizonyítsd be, hogy a rombusz átlói egymásra merőlegesek!

896. Bizonyítsd be, hogy a trapéz szárainak felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal és hossza az alapok számtani közepe!

897. Bizonyítsd be, hogy a trapéz átlóinak felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal és hossza egyenlő az alapok különbségének felével!

898. Bizonyítsd be az $(\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{a}-\bar{b})^2 = 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2)$. azonosságot! Szemléltesd mértani értelmezését!

899*. Bizonyítsd be, hogy ha egy négyszög átlói merőlegesek, akkor a szemben fekvő oldalak négyzeteinek összege egyenlő!

900*. Bizonyítsd be, hogy a háromszög súlypontja 2 : 1 arányban osztja a súlyvonalakat a csúcstól számítva!

901*. Bizonyítsd be, hogy a háromszög mindhárom magassága egy pontban metszi egymást!

902*. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak arányát, ha az AA_1 és BB_1 súlyvonalak merőlegesek egymásra!

903*. Körvonalba írták az a oldalhosszúságú ABC háromszöget. Az M pont a körvonal egyik tetszőleges pontja. Bizonyítsd be, hogy az $MA^2 + MB^2 + MC^2$ összeg független az M pont helyzetétől!

904*. Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$, ahol M a súlyvonalak metszéspontja, R a körülírt körvonal sugara!

905*. Az A, B, C, D, N és M pontok egy domború, konvex hatszög oldalfelező pontjai. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan háromszög, melynek oldalai egyenlők és párhuzamosak az AB, CD és MN szakaszokkal!

906*. Az $ABCD$ paralelogramma AD és AC átlóin felvettek egy M és egy N pontot úgy, hogy $AM = \frac{1}{5}AD$ és $AN = \frac{1}{6}AC$. Bizonyítsd be, hogy a B, M és N pontok egy egyenesre illeszkednek!

907*. Bizonyítsd be a $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1} \le 12$ egyenlőtlenséget az $a + b = 1$ feltétel mellett!

908*. Oldd meg a $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{x}$ egyenletet!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

909. Egy m tömegű test a nehézségi erő hatására lefelé csúszik a lejtőn. Határozd meg a nehézségi erő azon összetevőjének abszolút értékét, amely párhuzamos a lejtővel, ha a lejtő hajlásszöge β!

910. Egy gyerek a szánkót 10 N erővel húzza 20 méter távolságra. Az erő és a mozgás közötti szög 45°-os. Mekkora munkát végzett a gyerek szánkóhúzás közben?

911. Három tanuló egy terhet egyenlően 100 N erővel húz maga felé. Mekkora szöget zárnak be a kifejtett erők, ha a teher meg sem mozdult? Hogyan kell megváltoztatni az erők irányát, hogy a teher elmozduljon?

912. Az A és B helységek egy folyó két partján terülnek el. Hol kell a folyó fölött megépíteni az MN hidat, hogy az $AMNB$ út a legrövidebb legyen? A folyó partjait tekintsük párhuzamosaknak.



ISMÉTLŐ KÉRDÉSEK

1. Magyarázd el, mi a vektor, a vektor hossza, a vektor iránya, hogyan ábrázoljuk a vektorokat!
2. Mely vektorok kollineárisak? Melyek egyirányúak? Melyek ellentétes irányúak? Melyek egyenlők? Melyek ellentettek?
3. Magyarázd el, hogyan alkalmazható a háromszögszabály a vektorok összeadására?
4. Hogyan határozzuk meg két vektor összegét a paralelogrammaszabály szerint?
5. Milyen tulajdonságai vannak a vektorok összeadásának és számmal való szorzásának?
6. Mik a vektor koordinátái?
7. Hogyan határozzuk meg a koordinátáikkal megadott vektorok hosszát?
8. Mit nevezünk két vektor skaláris szorzatának?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

1° Adva van az $ABCD$ négyzet. Melyik egyenlőség igaz?

A. $\overline{AB} = \overline{AD}$. **B.** $\overline{AB} = \overline{AC}$. **C.** $\overline{AB} = \overline{DC}$. **D.** $\overline{AB} = \overline{BD}$.

2° Az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Melyik vektor lesz a $\overline{BA}$ és $\overline{BC}$ vektorok összege?

A. $\overline{AC}$. **B.** $\overline{BD}$. **C.** $\overline{AD}$. **D.** $\overline{DC}$.

3° Ismeretes, hogy az $\bar{a}$ $(4; 3) \| \bar{b}$ $(m; -12)$. Mennyi az m értéke?

A. -3. **B.** 16. **C.** -16. **D.** 4.

4 Melyek a b $(2; 2)$ vektorra merőleges egységvektor koordinátái?

A. $(1; 1)$. **B.** $(-2; -2)$. **C.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5* Egy egyenlőszárú derékszögű háromszögben, melynek szára 2 cm, meghúzták a súlyvonalat a hegyesszög csúcsából. Add meg az e_1 és e_2 vektorokat, és számítsd ki a súlyvonal és az átfogó által közbezárt szög koszinuszát!

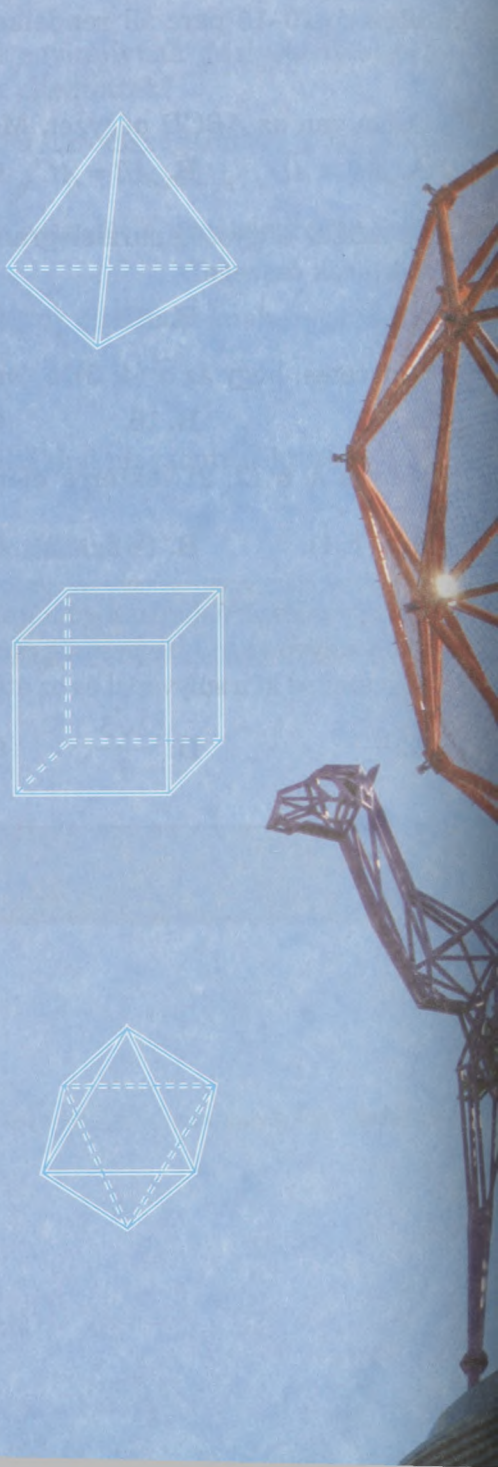
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

6 FEJEZET

A TÉRMÉRTAN ALAPJAI

Ebben a fejezetben megtudod:

- mit tanulmányoz a térmértan;
- milyen a kölcsönös helyzete két egyenesnek, egy egyenesnek és egy síknak, két síknak;
- mi a soklap, a poliéder, milyen tulajdonságai vannak a hasábnak és a gúlának;
- mik a forgástestek, milyen tulajdonságai vannak a hengernek, a kúpnak és a gömbnek;
- hogyan alkalmazhatók a megismert definíciók és tulajdonságok a gyakorlatban és feladatok megoldásánál





27. § AZ EGYENESEK ÉS A SÍKOK KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

Már tudod, hogy a mértan a síkmértani alakzatokat és a térmértani testeket is tanulmányozza. A 7. osztálytól *planimetriát*, síkmértant tanultál, ahol a síkidomok tulajdonságaival foglalkoztatok. Most megismerkedsz a térmértannal, vagyis a *sztereometria* alapjaival. A sztereometria a mértannak az az ága, amely a testek tulajdonságaival foglalkozik.

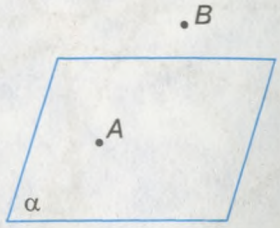


358. ábra

A *pont*, az *egyenes* és a *sík* a térmértan *alapfogalmai*.

A síkot leggyakrabban paralelogrammával ábrázoljuk (358. ábra) és a görög ábécé kis betűivel jelöljük α (alfa), β (béta), γ (gamma), stb.

A térben ugyanúgy, ahogy a síkon is, egy pont *illeszkedhet* az adott egyenesre (*rajta van*), vagy *nem illeszkedhet* az egyenesre. A pont és a sík kölcsönös helyzete a térben hasonló: a pont *illeszkedik* a síkra, benne van a síkban vagy *nem illeszkedik* a síkra. A 359. ábrán az *A* pont hozzátartozik az α síkhoz, a *B* pont nem.

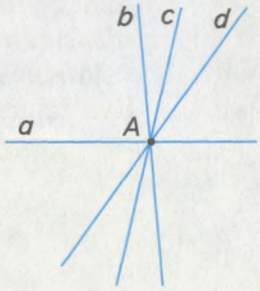


359. ábra

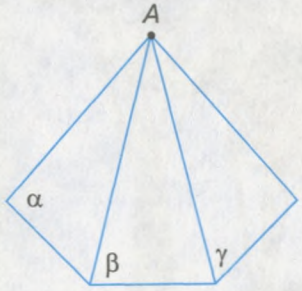
Ezt röviden így jelöljük: $A \in \alpha, B \notin \alpha$. Egy adott ponton keresztül végtelen sok egyenes húzható a síkon (360. ábra) és végtelen sok sík fektethető a térben (361. ábra).

? Hány egyenes húzható a tér két pontján keresztül? És hány sík?

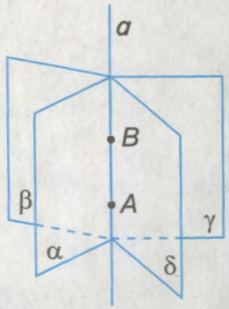
A tér bármely két pontján keresztül csak egy egyenes húzható. A sík ilyen tulajdonsággal nem rendelkezik. Figyeld meg a 362. ábrát! Az *A* és *B* ponton keresztül csak egy *a* egyenes húzható. Ez az egyenes az α, β, γ, és δ sík metsző egyenese. Összefoglalása: **bármely egyenesen keresztül végtelen sok sík fektethető a térben**, ami azt jelenti, **hogy a tér bármely két pontján keresztül végtelen sok sík fektethető.**



360. ábra



361. ábra

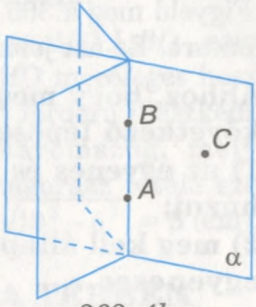


362. ábra

Ismeretes, hogy sok műszert (fényképezőgépet, teodolitot stb.) háromlábú állványra helyeznek. Ennek köszönhetően ezek a műszerek mindig stabilak maradnak. Viszont egy szék vagy egy hokedli nem mindig stabil. Ezek a megfigyelések vezettek a síkok következő tulajdonságához.

A síkok tulajdonsága

A tér bármely nem egy egyenesre illeszkedő három pontján keresztül csak egy sík fektethető.

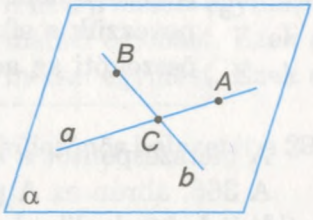


363. ábra

Ezen tulajdonság alapján a síkot három ponttal jelölhetjük. Például a 363. ábrán az ABC sík az α sík.

Feladat. Fektethető-e sík két egymást metsző egyenesre?

Megoldás. Jelöljük az a és b egyenesek metszéspontját C-vel. (364. ábra)! Vegyünk fel mindkét egyenesen a metszésponttól különböző egy-egy pontot: $A \in a, B \in a$. A szerkesztés szerint az A, B és C pont nem egy egyenesre illeszkedik. Ezért a síkok előbbi tulajdonsága alapján ez a három pont egy α síkot határoz meg. Mind a két a és b egyenes az α síkban van.



364. ábra

1. KÉT EGYENES KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

Figyeld meg a 365. ábrát! Láthatod, hogy az a és b egyenesek *metszők*. Az a és c, valamint a b és c egyenesek nem metszhetik egymást, akármeddig is hosszabbítjuk meg azokat. Tehát a térben két olyan eset lehetséges, amikor két egyenes nem metszi egymást. A b és c egyenes nem metszi egymást és egy β síkhoz tartozik – ezek az egyenesek *párhuzamosak*. Az a és a c sem metszi egymást és nem is egy síkhoz tartozik. Az ilyen egyeneseket *kitérő* egyeneseknek nevezzük.

2. AZ EGYENES ÉS A SÍK KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

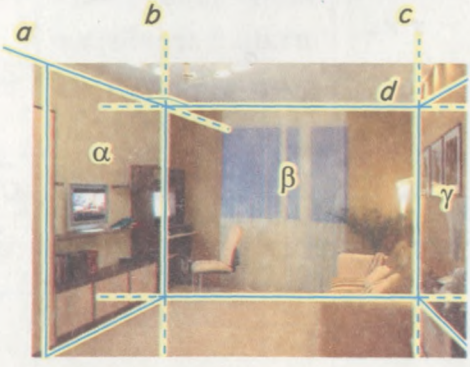
A térben az egyenes és a sík az alábbi kölcsönös helyzeteket vehetik fel:

1) az egyenes a síkra illeszkedik, például a 365. ábrán:

$a \in \alpha, b \in \alpha, b \in \beta, c \in \beta, c \in \gamma, d \in \beta$.

2) az egyenes nem illeszkedik a síkra, például a 365. ábrán:

$a \notin \gamma, b \notin \gamma, c \notin \alpha, d \notin \alpha\, d \notin \gamma$.



365. ábra

Ha egy egyenes nem illeszkedik a síkra, akkor vagy *metszi*, (*döfi*) a síkot vagy *nem metszi* azt. A 365. ábrán a d egyenes metszi az α síkot, a c egyenes nem metszi az α síkot. Ha az egyenesnek és a síknak nincs metszéspontja, akkor azokat *párhuzamosnak* nevezzük.

Figyeld meg a 365. ábrát! Az a egyenes merőleges a β síkban lévő b és d egyenesre. Ez azt jelenti, hogy az a egyenes *merőleges* a β síkra.

Ahhoz, hogy megállapítsuk, merőleges-e egy egyenes a síkra, a következő lépéseket kell elvégezni:

1) az egyenes és sík metszéspontján keresztül két egyenest kell húzni;

2) meg kell állapítani, hogy az adott egyenes merőleges-e a két egyenesre.

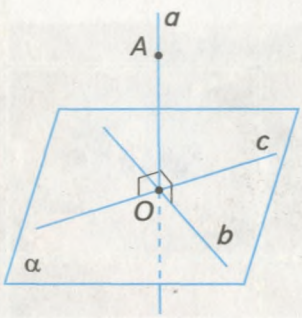
A síkhoz nem tartozó pontból a ***síkra húzott merőlegesnek*** nevezzük a síkra merőleges egyenesnek azt a szakaszát, amely összeköti az adott pontot a metszésponttal.

A metszéspontot a *merőleges talppontjának* nevezzük.

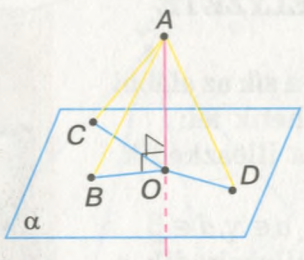
A 366. ábrán az A ponton keresztül egy a egyenest húztak, amely az α síkban helyezkedik el és a b, illetve a c egyenesre merőleges. Az O a metszéspont. Ezért az AO szakasz az α síkra húzott merőleges, az O pont pedig a merőleges talppontja. **Az AO merőleges a legrövidebb azon szakaszok közül, melyek az A pontot kötik össze az α sík pontjaival** (367. ábra).

A merőleges hossza határozza meg *a pont és a sík távolságát*. A 367. ábrán az AO szakasz hossza az A pont és az α sík távolságával egyenlő.

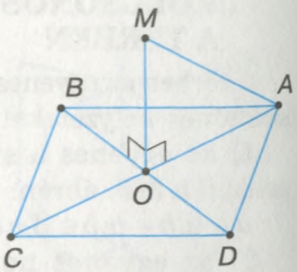
Az AB, AC és AD szakaszt az α síkra húzott *ferdének* nevezzük (367. ábra), az OB, OC és OD mind ezen ferdéknek az α síkra eső *vetülete*. **Az AO merőlegesre és az AB ferdére csak egy AOB sík illeszthető.** Ezért a térben a síkra húzott ferde ugyanolyan tulajdonsággal rendelkezik, mint a síkmértanban az egyenesre húzott ferde.



366. ábra



367. ábra



368. ábra

Feladat. Az M pont nem illeszkedik az $ABCD$ négyzet síkjára (368. ábra). Az O pont a négyzet AC és BD átlóinak a metszéspontja. Az MO egyenes merőleges a négyzet mindkét átlójára. $MA = 10$ cm, $AO = 6$ cm. Mekkora az M pont és a négyzet síkjának a távolsága?

Megoldás. A feltételek alapján $MO \perp AC$ és $MO \perp BD$, ezért az MO egyenes merőleges az ABC síkra. Tehát az MO merőleges hossza a keresett távolság. Az MO merőlegesre és az MA ferdére illeszkedik az MOA sík. Ebben a síkban van az MOA háromszög, melyben $MOA\angle = 90°$, $MA = 10$ cm, $AO = 6$ cm. Pitagorasz tétele szerint $MA^2 = MO^2 + AO^2$. Innen $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (cm).

3. A SÍKOK KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

Térjünk vissza a 365. ábrához. Láthatod, hogy az α és a β *metszi* egymást. A síkok közös része a b egyenes. Az α és γ sík nem metszi egymást. Ezek a síkok *párhuzamosak*. Az α és a β sík derékszögben metszi egymást. Ezek a síkok *merőlegesek*.

Két egyenes, egy egyenes és egy sík, illetve két sík kölcsönös helyzetét a 29. táblázatban foglaltuk össze.

29. táblázat

Térelemek	Kölcsönös helyzetük		Jelölés
Két egyenes, a és b	metszők	merőlegesek	$a \perp b$
		nem merőlegesek	$a \times b$
	nem metszik egymást	párhuzamosak	$a \parallel b$
		kitérők	$a - b$
Az a egyenes és az α sík	az egyenes a síkban van		$a \in \alpha$
	az egyenes metszi a síkot	az egyenes merőleges a síkra	$a \perp \alpha$
		az egyenes nem merőleges a síkra	$a \times \alpha$
	az egyenes nem metszi a síkot	az egyenes és a sík párhuzamos	$a \parallel \alpha$
Két sík, α és β	metszik egymást	merőlegesek	$\alpha \perp \beta$
		nem merőlegesek	$\alpha \times \beta$
	nem metszik egymást	párhuzamosak	$\alpha \parallel \beta$

BŐVEBBEN

A kitérő egyenesek „ ⋅ ” jele újkori eredetű. Az ábrázoló geometriából vették át. Ez a jelölés azt tükrözi, hogy az egyenesek egyetlen síkot sem határoznak meg. Valóban, ha a kötőjel a síkra illeszkedő egyenest jelöli, a pont viszont a síkra merőleges egyenest, akkor könnyen belátható, hogy az ilyen egyenesekre nem fektethető sík.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mit tanulmányoz a térmértan?
2. Sorold fel a térelemeket! Hogyan jelöljük őket?
3. Fogalmazd meg a síkok tulajdonságát!
4. Hozz fel példát párhuzamos és kitérő egyenesekre!
5. Milyen lehet az egyenes és a sík kölcsönös helyzete?
6. Mi a síkra húzott merőleges? Hozz fel példát merőlegesre és ferdére!
7. Milyen lehet két sík kölcsönös helyzete?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

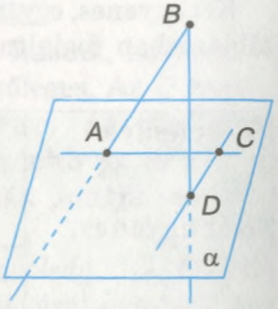
913'. Vegyél fel egy α síkot, jelölj rajta egy A, B és C pontot! Húzd meg az AB, BC és AC egyeneseket!

914'. A 369. ábrán az α sík és az AB, AC, BD és CD egyenesek láthatók.

1) Az A, B, C és D pontok közül melyek vannak az α síkon?

2) Mely egyenesek illeszkednek az α síkra?

3) Metszik-e egymást az AC és BD, az AB és AC, az AB és CD egyenesek?



369. ábra

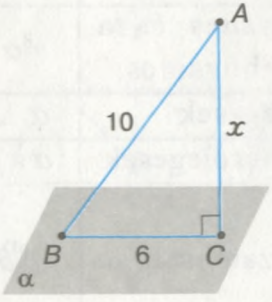
915'. Hány sík fektethető három pontra, melyek:

1) egy egyenesre illeszkednek;

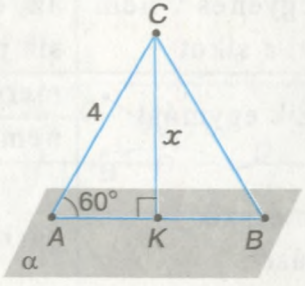
2) nem egy egyenesre illeszkednek?

916'. Hány merőleges egyenes húzható az adott ponton keresztül az adott egyenesre, ha: 1) a pont az adott egyenesre illeszkedik; 2) a pont nem illeszkedik az adott egyenesre?

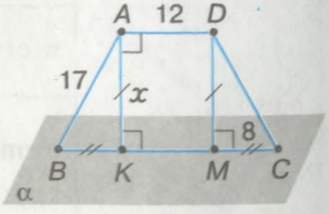
917'. Hány egyenlő hosszúságú ferde húzható az adott pontból az adott síkra?



370. ábra



371. ábra



372. ábra

918°. Egy α síkon vegyél fel egy A és egy C pontot, a síkon kívül pedig egy B pontot! Húzd meg az AC, AB, BC egyeneseket! A meghúzott egyenesek közül melyek metszik az α síkot?

919°. Lehet-e a síknak és az egyenesnek csak két közös pontja? Miért?

920°. Az alábbi állítások közül melyek igazak: 1) két egyenes párhuzamos, ha nem metszik egymást; 2) az adott egyenesre merőleges két egyenes párhuzamos; 3) az egyenes, amely metszi a két párhuzamos egyenes egyikét, metszi a másik egyenest is

921°. A 370., 371., 372. ábrán minden pont az ABC síkon van. Határozd meg az x szakasz hosszát!

922°. A síkhoz nem tartozó A pontból egy AC merőlegest és egy AB ferdét húztak a síkra. Töltsd ki a 30. táblázatot!

30. táblázat

AC		2 cm	6 cm	12 cm	
AB	5 cm		10 cm		25 cm
BC	4 cm	$2\sqrt{3}$ cm		12 cm	24 cm

923°. Rajzolj két egymást metsző α és β síkot! Jelölj meg olyan pontokat, melyek: 1) csak az α síkra illeszkednek; 2) csak a β síkra illeszkednek; 3) mindkét síkhoz tartoznak!

924°. Három pontra két síkot illesztettek. Hogyan helyezkednek el ezek a pontok?

925. Minden esetben lehet-e négy pontra síkot fektetni?

926. Egy egyenesen és a rajta kívül lévő ponton keresztül csak egy sík fektethető. Bizonyítsd be!

927. Egy síkhoz tartozik-e minden olyan egyenes, amely metszi az adott háromszög oldalait? Indokold meg a választ!

928. Az AB és CD szakaszok metszik egymást! Egy síkon vannak-e az AC, BD, BC és AD egyenesek? Indokold meg a választ!

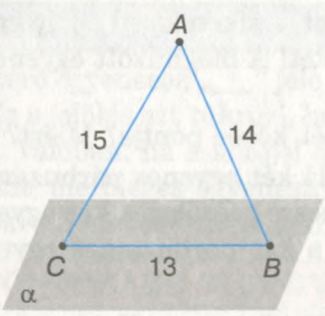
929. Az a és b egyenes metszéspontja az A pont. Egy síkra illeszkednek-e azok az egyenesek, amelyek nem az A pontban metszik az adott egyeneseket? Indokold meg a választ!

930. Lehet-e *az* a egyenes párhuzamos a *b* és *c* kitérő egyenesek mindegyikével? Indokold meg a választ!

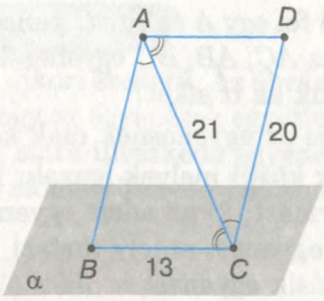
931. A c és d egyenesek metszik a párhuzamos a és b egyeneseket. Lehet-e a c és a d egyenes kitérő? Válaszodat indokold meg!

932. Az OM egyenes merőleges az O középpontú körvonal síkjára. Számítsd ki a körvonal sugarát, ha a merőleges hossza 12 cm, az M pont, illetve a körvonal pontjainak távolsága pedig: 1) 13 cm; 2) 15 cm!

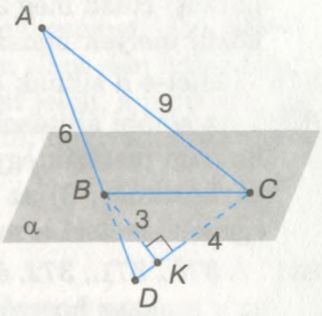
933. A síkhoz nem tartozó M pontból MA, MB, MC és MD egyenlő ferdéket húztak a síkra. Lehet-e az $ABCD$ négyszög: 1) négyzet; 2) paralelogramma; 3) téglalap? Indokold meg a választ!



373. ábra



374. ábra



375. ábra

934. Egy síkhoz nem tartozó pontból egy merőlegest és egy ferdét húztak a síkra. Az általuk közbezárt szög φ, a merőleges hossza pedig d. Határozd meg a ferde és vetületének a hosszát, ha: 1) $d = 4$ cm, $\varphi = 45°$; 1) $d = 8$ cm, $\varphi = 30°$!

935. Az α és a β sík metsző egyenese az a egyenes. Az a egyenes az α síkra, a b a β síkra illeszkedik. Ezen egyenesek metszéspontja az A pont. Illeszkedik-e az A pont az a egyenesre? Indokold meg a választ!

936*. Bizonyítsd be, hogy az adott egyenest metsző párhuzamos egyenesek egy síkra illeszkednek!

937*. Az a és a b egyenes metszi egymást. Milyen az a és a c egyenes kölcsönös helyzete, ha a c és b egyenesek: 1) párhuzamosak; 2) metszők?

938*. Az a és a b egyenes kitérő. Egy c egyenes metszi az a és a b egyenest is. Metszi-e az a és a b egyenest a c egyenessel párhuzamos d egyenes? Válaszodat indokold meg!

939*. Az a és a b egyenes kitérő. Milyen az a és a c egyenes kölcsönös helyzete, ha a c és b egyenesek: 1) párhuzamosak; 2) metszők?

940*. Egy szakasz nem metszi az adott síkot. Bizonyítsd be, hogy a felező pont távolsága a síktól egyenlő a végpontok síktól való távolságának számtani közepével!

941*. A 373., 374., 375. ábrákon az ABC sík merőleges az α síkra és a BC egyenesben metszi azt. Határozd meg az A pont és az α sík távolságát!

942*. Három síknak van közös pontja. Igaz-e, hogy a síkoknak van közös egyenesük? Hány egyenest kapunk ezen síkok páronkénti metszésekor?

943*. Három sík páronként metszi egymást rendre az a, b és c egyenesekben. Bizonyítsd be, ha a síkoknak van közös A pontjuk, akkor az a, b és c egyenesek is az A pontban metszik egymást!

944*. Az α és β síkokat a φ síkkal metszették. A metsző egyenesek rendre az a és a b. Bizonyítsd be, hogyha az a és a b egyenes metsző, akkor a metszéspont illeszkedik az α és β síkok metsző egyenesére!

945*. Adottak a közös kezdőpontú félegyenesek. A három félegyenes közül egyik sem tartozik közös síkhoz. Hány különböző síkot fektethetünk a félegyenesekre úgy, hogy minden síkra két adott félegyenes illeszkedjen, ha összesen: 1) három félegyenes; 2) négy félegyenes; 3) n félegyenes adott?

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

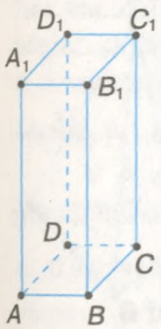
946. Mivel magyarázható, hogy az oldalkocsis motorkerékpár stabil, míg az oldalkocsi nélkülinek póttámasztékra van szüksége?

947. Ahhoz, hogy leellenőrizzék, egy síkon vannak-e az asztal lábai, a minőségi ellenőr két zsinórt használ. Elégséges-e ez a pontos mérés elvégzéséhez?

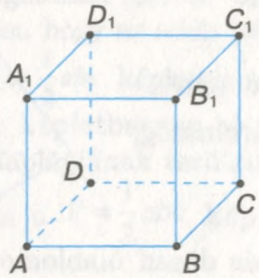


28.§ POLIÉDEREK (SOKLAPOK)

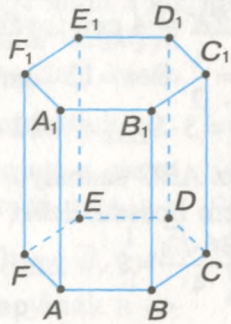
Számodra már ismeretes néhány test, mint például a derékszögű paralelepipedon, a téglatest (376. ábra) és a kocka (377. ábra). Ezeket a testeket az egyik legjellegzetesebb osztályba soroljuk, a *poliéderekhez*, vagyis a *soklapokhoz*. A poliéder felszíne sokszögekből áll, melyeket *lapoknak* nevezünk. Innen ered a „soklap", „poliéder" elnevezés. Bármely két *szomszédos lap*nak van közös része, amit *élnek* nevezünk, a szomszédos élek páronként egy pontban metszik egymást – a poliéder *csúcsában*. Későbbi tanulmányaidban megismerkedsz a soklapok osztályozásával és tulajdonságaival. Most csak két poliéderről fogsz tanulni: a hasábról és a gúláról.



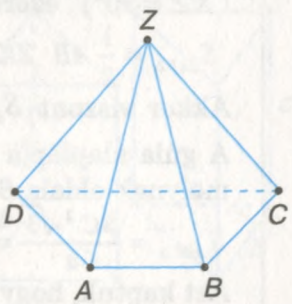
376. ábra



377. ábra



378. ábra



379. ábra

? Mi a különbség a hasáb és a gúla között? Bármely hasábnak két *alaplapja* van, két egybevágó párhuzamos síkokra illeszkedő sokszög, a gúlának viszont csak egy. Az egyenes hasáb *oldallapjai* téglalapok, a gúláé – háromszögek. Az egyenes hasáb oldalélei párhuzamos egyenlő hosszúságú szakaszok, a gúláé pedig egy pontban metszik egymást, amit a *gúla csúcsának* nevezünk.

Például a 376. ábrán látható $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ hasáb alaplapja az $ABCDEF$ és az $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ hatszög, oldallapjai pedig az ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1 és FAA_1F_1 téglalapok. A $ZABCD$ gúla alaplapja a 379. ábrán az $ABCD$ négyszög, az oldallapjai a ZAB, ZBC, ZCD és ZDA háromszögek. A gúla csúcsa a Z pont.

Attól függően, hány oldalú sokszög a hasáb vagy a gúla alaplapja, a hasábot (gúlát) *háromoldalúnak*, *négyoldalúnak*, esetleg *n-oldalúnak* nevezzük. A derékszögű paralelepipedon (376. ábra) és a kocka (377. ábra) is négyoldalú hasáb. A 378. ábrán hatoldalú hasáb, a 379. ábrán négyoldalú gúla látható.

A hasáb (gúla) *palástja* vagy *oldalfelszíne* az oldallapok összessége, *teljes felszíne* pedig minden lapja.

A hasáb (gúla) ***palástja*** az oldallapok területeinek összege.

A hasáb (gúla) ***teljes felszíne*** minden lap területének összege.

Az oldalfelszínt és a teljes felszínt megfelelően S_{of}-nel, illetve S_{tf}-nel jelöljük.

A meghatározások a hasáb és a gúla palástjának és teljes felszínének a kiszámítására utalnak.

F e l a d a t. Határozzuk meg annak a gúlának a felszínét, melynek alaplapja 6 cm oldalú szabályos háromszög, minden oldaléle pedig 5 cm hosszú!

M e g o l d á s. Használjuk a 380. ábra jelöléseit. Legyen $ZABC$ az adott gúla, melyben $AB = BC = AC = 6$ cm és $ZA = ZB = ZC = 5$ cm. A gúla oldallapjai egybevágó egyenlőszárú háromszögek, ezért $S_{ZAB\Delta} = S_{ZBC\Delta} = S_{ZCA\Delta}$. Húzzuk meg a ZAB oldallap ZK magasságát! A ZKB háromszög derékszögű ($K\angle = 90°$), ezért $ZK = 4$ cm, továbbá:

$$S_{ZAB\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot ZK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

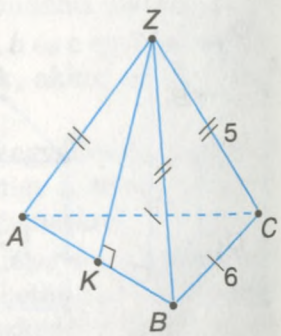
Akkor viszont $S_{of} = 3 \cdot S_{ZAB\Delta} = 3 \cdot 12 = 36$ (cm²).

A gúla alaplapja az ABC szabályos háromszög, melynek oldala 6 cm hosszú, ezért

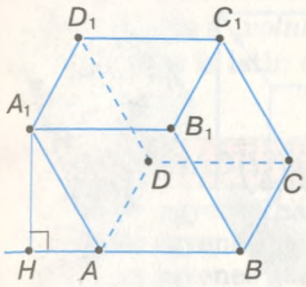
$$S_{ABC\Delta} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Azt kaptuk, hogy:

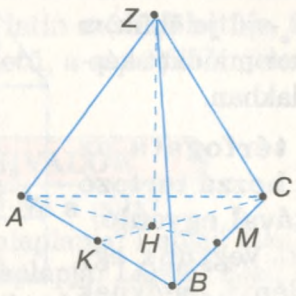
$$S_{tf} = S_{of} + S_{ABC\Delta} = 36 + 9\sqrt{3} = 9\left(4 + \sqrt{3}\right) \text{ (cm}^2\text{)}.$$



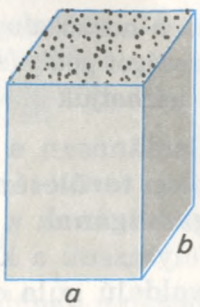
380. ábra



381. ábra



382. ábra



383. ábra

A hasáb magasságának nevezzük ez egyik alaplap tetszőleges pontjából a másik alapra húzott merőlegest.

Az egyenes hasáb (378. ábra) valamennyi oldaléle merőleges az alaplapjaira. Innen ered a megnevezése is: „egyenes hasáb". Az egyenes hasáb oldaléle egyben a magassága is. A 381. ábrán egy ferde hasáb látható. Ennek az oldaléle nem egyenlő a hasáb magasságával.

A gúla magassága az a merőleges, amit a csúcsából húztak alaplapjának a síkjára.

A gúla oldalélei nem merőlegesek az alaplapra, ha ez nincs külön megadva. Ezért a gúla magasságát másképp határozzuk meg. A 382. ábrán egy négyoldalú $ZABC$ gúla látható, melynek magassága ZH.

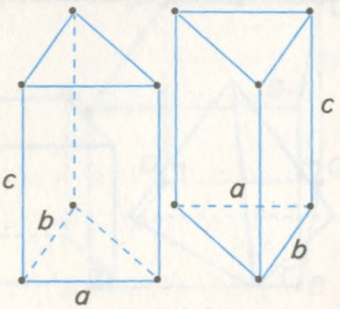
Minden soklap, mint bármelyik test, rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy felületekkel határolt térrész. Ha ennek a térrésznek a mértékét valamilyen számmal fejezzük ki, akkor a testek egy másik jellemzőjét kapjuk, a ***„térfogatot"***.

A 6. osztályos tananyagból már tudod az a, b és c élű téglatest térfogatának képletét: $V = abc$, és az a élű kocka térfogatát, $V = a^2$.

? Hogyan határozható meg a hasáb és a gúla térfogata? Vizsgáljuk meg!

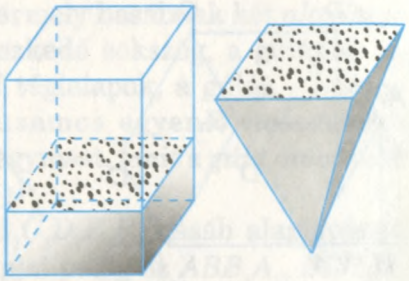
Használjunk három edényt! Az egyik háromoldalú hasáb alakú, melynek élei a, b és c (383.ábra). A másik kettő háromoldalú egyenes hasáb, melyek magassága c és az alaplapjaik a és b befogójú derékszögű háromszög (384. ábra). Töltsük meg a téglatestet homokkal, majd a homokot öntsük át a két háromoldalú hasábba! Láthatjuk, hogy mind a két hasáb térfogata egyenlő a téglatest térfogatának felével. Vagyis levonhatjuk a következtetést, hogy az adott háromoldalú hasáb térfogatát a $V = \frac{1}{2}abc$ képlettel számíthatjuk ki.

A $V = abc$ képletben az ab szorzat a paralelepipedon alaplapjának területét adja meg, a c a magassága; a $V = \frac{1}{2}abc$ képletben az $\frac{1}{2}ab$ szorzat a háromoldalú hasáb alaplapjának a területe, c a magassága.



384. ábra

Ha a hasáb alaplapját S_a-val jelöljük, a magasságot pedig H-val, akkor mindkét képletet leírhatjuk $V = S_a \cdot H$ alakban.



385. ábra

Általánosan **a hasáb térfogata az alaplap területének és a hozzá tartozó magasságának a szorzatával egyenlő.**

Folytassuk a kísérletet! Vegyünk egy négyoldalú gúla alakú edényt, melynek alaplapja a és b oldalú téglalap, magassága c (385. ábra). Töltsük meg homokkal, majd öntsük át a homokot egy azonos alapterületű és magasságú egyenes hasábba! Azt kapjuk, hogy a gúla térfogata a hasáb térfogatának harmadával egyenlő.

Leírhatjuk tehát, hogy $V = \frac{1}{3} S_a \cdot H$.

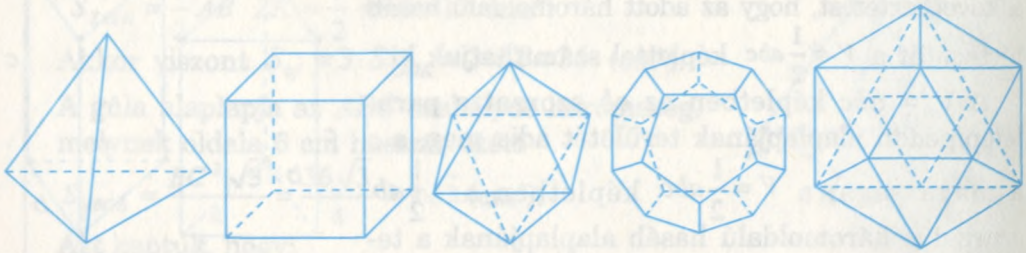
Közérthetőbben: **a gúla térfogata az alaplapterületének és a hozzá tartozó magasság szorzatának a harmadával egyenlő.**

BŐVEBBEN

1. Már az ókortól fogva különös figyelmet szenteltek öt poliéderre: a *tetraéderre* (386. ábra), a *hexaéderre* (387. ábra), az *oktaéderre* (388. ábra), a *dodekaéderre* (389. ábra) és az *ikozaéderre* (390. ábra). Ezek a testek mind *szabályos soklapok*. Minden lapjuk szabályos sokszög, és minden csúcsban egyenlő számú él találkozik. A tetraéder, oktaéder és ikozaéder lapjai szabályos háromszögek, a hexaéderé (kockáé) négyzetek, a dodekaéderé ötszögek. A tetraéder, a hexaéder és a dodekaéder minden csúcsából három, az oktaéder minden csúcsából négy, az ikozaéderéből pedig öt él indul.

A szabályos testek két szó összetételéből kapták nevüket. Az első a lapok számára utal, a második a „*hedra*", ami „támaszték"-ot jelent (most lapnak nevezzük). Tehát a tetraéder négylap, a hexaéder hatlap, az oktaéder nyolclap, a dodekaéder tizenkétlap, az ikozaéder pedig húszlap.

Az első négy szabályos testet még i. e. a VI században Pitagorasz iskolájában fedezték fel. Majd három századdal később Euklidész „Elemek" című munkájában rámutatott, hogy csak öt szabályos test létezik.



386. ábra 387. ábra 388. ábra 389. ábra 390. ábra

2. A V jelölés a „*volume*„ latin szó első betűje, melynek jelentése „térfogat”. Az S jelölés is latin eredetű, a *superficils*, jelentése „felület”.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi az egyenes hasáb? Mi a gúla?
2. Mi az egyenes hasáb alaplapja? Lapjai? Élei? Csúcsai?
3. Mi az egyenes gúla alaplapja? Lapjai? Élei? Csúcsai?
4. Miért nevezzük a hasábot háromoldalúnak, négyoldalúnak, n-oldalúnak? Miért nevezzük így a gúlát?
5. Magyarázd el, mi a hasáb és a gúla palástja (oldalfelszíne)! Mi a teljes felszín?
6. Hogyan határozzuk meg az egyenes hasáb és a gúla palástját? Hogyan határozzuk meg a teljes felszínét?
7. Add meg az egyenes hasáb és a gúla magasságának meghatározását!
8. Írd le a hasáb és a gúla térfogatának a képletét!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

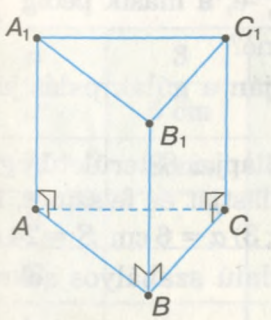
948'. Állapítsd meg a 391., 392., 393. ábra alapján:
1) milyen soklap van a rajzon;
2) hány alaplapja és lapja van;
3) milyen sokszög az alaplap;
4) milyen sokszögek az oldallapok!

949'. Nevezd meg a poliéderek csúcsait és éleit (391., 392., 393. ábra)! Hány lapra illeszkedik: 1) az A csúcsra; 2) a B csúcsra; 3) a C csúcsra?

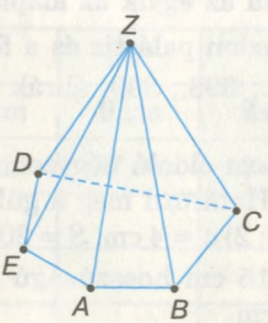
950'. Igaz-e, hogy:
1) az egyenes hasáb oldalfelszíne egy sokszög;
2) az egyenes hasáb teljes felszíne egy sokszög területe?

951'. Mely lapok területeinek az összege egyenlő a palásttal (391., 392., 393. ábra)? A teljes felszínnel?

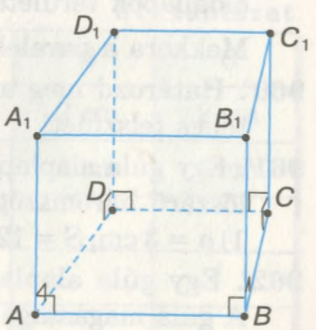
952'. Tekinthetjük-e a poliéder magasságának az egyik élét (391., 392., 393. ábra)?



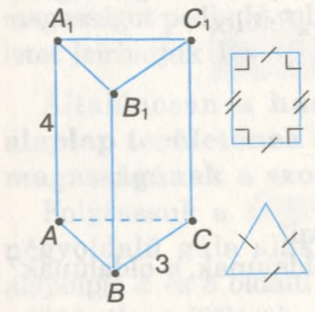
391. ábra



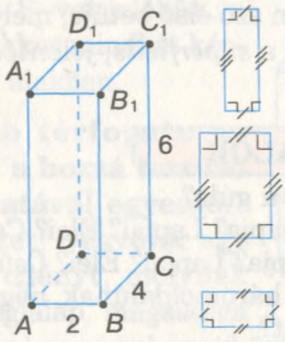
392. ábra



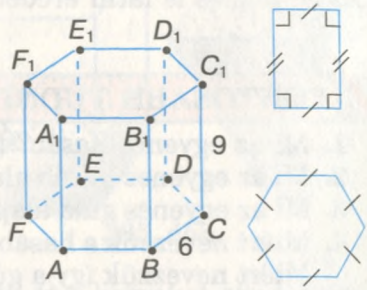
393. ábra



394. ábra



395. ábra



396. ábra

953'. Igaz-e, hogy:

1) az egyenes hasáb térfogata az alapok területeinek szorzatával egyenlő;

2) az egyenes hasáb térfogata az alap területének és az oldalélnek a szorzatával egyenlő;

3) a gúla térfogata az alap területének és magasságának a szorzatával egyenlő;

4) a gúla térfogata az alap területe harmadának és magasságának a szorzatával egyenlő?

954°. Rajzolj egy: 1) háromoldalú; 2) négyoldalú; 3) hatoldalú egyenes hasábot!

955°. Határozd meg a 394., 395. ábrák alapján a hasábok palástját és teljes felszínét!

956°. Mennyi annak a kockának a térfogata, melynek éle:
1) 2 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm?

957°. Egy egyenes hasáb alaplapja olyan téglalap, melynek oldalai 3 cm és 4 cm, oldaléle pedig: 1) 5 cm; 2) 10 cm; 3) 2 cm.
Számítsd ki a hasáb palástját és teljes felszínét!

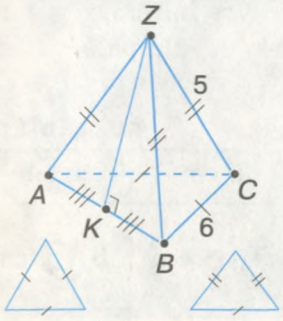
958°. Egy kocka felszíne: 1) 16 cm^2; 2) 8 cm^2; 3) 4 cm^2.
Mekkora az éle?

959°. Egy derékszögű paralelepipedon alaplapja 240 cm^2. Határozd meg az oldallapok területeit, ha az egyik az alaplap $\frac{1}{2}$-e, a másik pedig $\frac{1}{4}$-e!
Mekkora a paralelepipedon palástja és a felszíne?

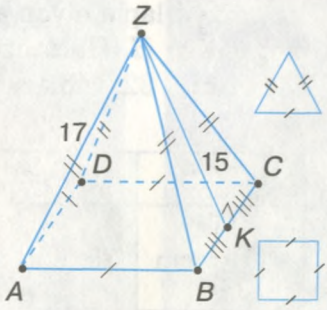
960°. Határozd meg a 397., 398., 399. ábrák alapján a gúlák palástját és teljes felszínét!

961°. Egy gúla alaplapja a cm oldalú négyzet, oldallapjai S területű egyenlőszárú háromszögek. Határozd meg a gúla palástját és felszínét, ha:
1) $a = 3$ cm, $S = 12$ cm^2; 2) $a = 4$ cm, $S = 20$ cm^2; 3) $a = 6$ cm, $S = 24$ cm^2!

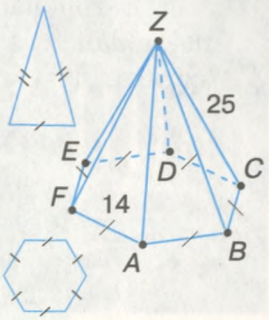
962°. Egy gúla alaplapja 15 cm hosszúságú n-oldalú szabályos sokszög. A gúla magassága 20 cm.
Határozd meg a gúla térfogatát, ha: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$!



397. ábra



398. ábra



399. ábra

963. Legkevesebb hány lapja (éle, csúcsa) lehet egy: 1) hasábnak; 2) gúlának?

964. Hogyan változik a kocka felszíne, ha a lapját:
1) háromszorosára növeljük; 2) 4-szeresére csökkentjük;
3) 50%-kal növeljük; 4) 75%-kal csökkentjük?

965. Hogyan változik meg a téglatest felszíne, ha egyik lapját:
1) háromszorosára növeljük; 2) 4-szeresére csökkentjük;
3) 50%-kal növeljük; 4) 75%-kal csökkentjük?

966. Határozd meg azon kocka és téglatest térfogatának az arányát, melyek:
1) alaplapjai egyenlők, magasságaik aránya pedig 1 : 5;
2) magassága egyenlő, az élek aránya pedig 1 : 1: 2!

967. Egy háromoldalú egyenes hasáb a és b alapélei α szöget zárnak be, oldaléle c. Határozd meg a hasáb palástját, felszínét és térfogatát, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = 30°$;
2) $a = b = 10$ cm, $c = 12$ cm, $\alpha = 60°$!

968. Egy egyenes hasáb alaplapja n-oldalú szabályos sokszög, melynek oldala a. A hasáb magassága H. Határozd meg a hasáb palástját, felszínét és térfogatát! Töltsd ki a 31. táblázatot!

969. Egy négyoldalú gúla minden éle a. Mekkora a gúla palástja és felszíne, ha:
1) $a = 2$ cm; 2) $a = 5$ cm; 3) $a = 1$ cm?

31. táblázat

n	3	3	4	4	6	6
a	5 cm	10 cm	9 cm	3 cm	2 cm	2 cm
H	8 cm	8 cm	27 cm	9 cm	4 cm	6 cm
S_p						
S_{tf}						
V						

970. Egy háromoldalú gúla minden lapja olyan szabályos háromszög, melynek oldala a. A gúla magassága H. Határozd meg a gúla palástját, felszínét és térfogatát! Töltsd ki a 32. táblázatot!

32. táblázat

a	5 cm	10 cm	9 cm	3 cm
H	$5\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm	$10\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm	$9\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm	$3\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm
S_p				
S_{tf}				
V				

971*. Az egyik kocka lapját összehasonlították a másik kocka lapjával. Kerületeik különbsége c, területeik különbsége d. Számítsd ki a kockák palástját, felszínét és térfogatát, ha:
1) $c = 16$ cm, $d = 56$ cm^2; 2) $c = 12$ cm, $d = 105$ cm^2!

972*. Egy 4 cm és 17 cm oldalhosszúságú téglalapot az a egyenes két hasonló téglalapra osztja. Mindkét téglalapra 10 cm magasságú hasábot emeltek. Határozd meg mindkét hasáb palástját, felszínét és térfogatát!

973*. Egy a befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójára négyzetet rajzoltak. A csúcsokat folyamatosan összekötötték, és így egy konvex hatszöget kaptak. Ez a hatszög egy H magasságú hasáb alaplapja. Határozd meg a hasáb palástját, felszínét és térfogatát!

974*. Egy a oldalú négyzet és egy b és c oldalhosszúságú téglalap kerülete egyenlő. Ezek a síkidomok két azonos magasságú gúla alaplapjai. Határozd meg mindkét gúla térfogatát, ha:
1) $a = 8$ cm, $b = 12$ cm; 2) $a = 8$ cm; $c = 10$ cm!
Melyik gúla térfogata nagyobb?

975*. Egy a oldalú négyzet és egy b és c oldalhosszúságú téglalap területe egyenlő. Ezek a síkidomok két azonos magasságú gúla alaplapjai. Határozd meg mindkét gúla térfogatát, ha: 1) $a = 6$ cm, $b = 9$ cm; 2) $a = 6$ cm, $c = 2$ cm! Melyik gúla térfogata kisebb?

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

976. Egy köbméter piros tégla tömege 1650 kg. Mekkora a tömege 5 m^3, 10 m^3 ilyen téglának? Járj utána, milyenek egy ilyen tégla méretei, és számítsd ki, hány tégla kell 1 m^3-hez, 5 m^3-hez, 10 m^3-hez!

977. Egy köbméter cékla tömege 650 kg. A teherautó rakterének méretei: 3 m × 2m ×1m. Határozd meg, mennyi céklát tud egy ilyen teherautó



400. ábra



401. ábra

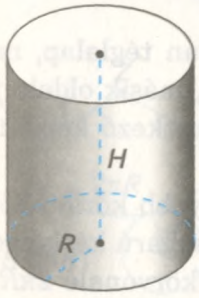
elszállítani: 1) fordulóval; 2) 4 fordulóval; 3) 10 fordulóval?

978. A Kheopsz piramis alapéle 230,4 m, eredeti magassága 146,6 m. Egy földrengés következtében leomlott a piramis teteje, a „pyramidon", ez a piramishoz hasonló gránittömb, amit általában a csúcsra szoktak helyezni (400. ábra). A piramis most 137,2 méter magas. Mekkora volt a piramis térfogata a földrengés előtt? Mekkora a ledőlt gránittömb térfogata? Mekkora lehet most a piramis térfogata?

979. I. e. 447–438-ban épült fel Athénban az Akropoliszon a Parthenón (a *parthenos* görög eredetű szó, jelentése „szűz"), Pallasz Athéné istennő temploma, az ókori görög művészet legnagyobb műemléke (401. ábra). A Parthenónt négy oldalról fehér márványoszlopok övezik. A templom alapjának méretei 30,89 m × 69,54 m, az oszlopok magassága 10,43 m. A hatalmas méretek ellenére az épület könnyűnek tűnik, nem pedig masszívnak. Mekkora lenne az építmény térfogata, ha tömör falakkal rendelkezne?

29.§ FORGÁSTESTEK

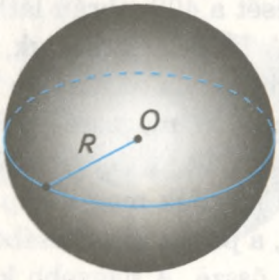
Néhány mértani testet létre lehet hozni úgy is, ha egy síkidomot elforgatunk egy egyenes körül. Például így kapjuk meg a hengert (402. ábra), a kúpot (403. ábra), a gömböt (404. ábra). Innen kapták a nevüket is: *„forgástestek"*.



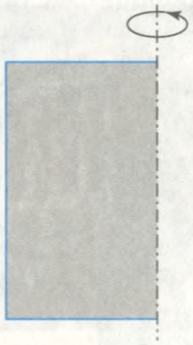
402. ábra



403. ábra



404. ábra



405. ábra



406. ábra



407. ábra

Ha egy téglalapot az egyik oldala körül forgatunk, akkor egyenes *körhengert* kapunk (405. ábra). Ez az oldal a henger *tengelye*, a vele szemben lévő oldal pedig az *alkotó*. Az alkotó merőleges az alapra, ezért a *henger magasságának* is tekinthetjük. A hengernek két alaplapja van, két egybevágó, párhuzamos síkokra illeszkedő R sugarú körlap.

Ha egy derékszögű háromszöget az egyik befogója körül forgatunk (406. ábra), akkor egyenes *körkúpot* kapunk. Ez a befogó a kúp *tengelye*, az átfogó pedig az *alkotója*. A *kúp alaplapja* R sugarú körlap. Az alkotó nem merőleges az alaplapra, ezért nem lehet a forgástest magassága. A *kúp magasságának* a tengelyét tekintjük.

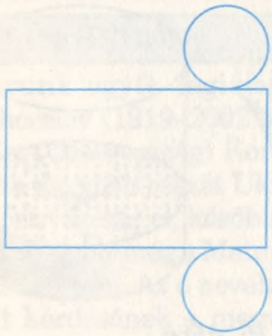
Ha egy félkörlapot forgatunk az átmérő körül (407. ábra), *gömböt* kapunk. Ez az átmérő a *gömb tengelye*. A gömbnek sem az alkotóját, sem a magasságát nem határozzuk meg.

Forgatás közben a henger (a kúp) alkotója írja le a *palástot*. A *henger teljes felszíne* a palást és a két alaplap területének az összege, a *kúp teljes felszíne* a palást és az alaplap területének az összege.

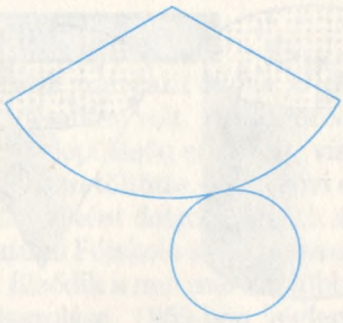
Figyeljünk meg egy papírból készült hengert és kúpot! Vágjuk szét ezeket a testeket az alkotójuk mentén! A henger esetében még mindkét alaplap kerületén is, a kúpnál az alaplap kerületén. Terítsük ki a szétvágott testeket egy sík felületen. Megkaptuk a *testek kiterítését*, hálóját. A henger kiterítését a 408. ábrán láthatjuk, a kúpét a 409.-en.

A halóról láthatjuk, hogy a henger kiterítése olyan téglalap, melynek egyik oldala az alaplap kerülete, ami $2\pi R$ (410. ábra), másik oldala pedig a henger H magassága. Ezért a henger palástját a következő képlettel számíthatjuk ki: $\boldsymbol{S_p = 2\pi RH}$.

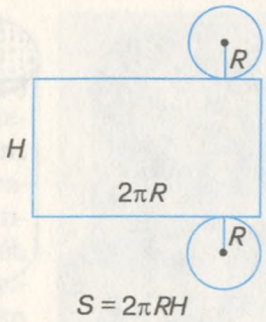
Figyeljük meg a kúp kiterítését! Egy l sugarú nagyobb körlap körcikkéből, a palást kiterítéséből (411. ábra) és egy kisebb R sugarú körlapból tevődik össze. A nagyobb körvonal hossza $2\pi l$, a kisebb körvonalé $2\pi R$, a nagyobb körlap területe πl^2, a körcikk S_p területe a kúp keresett palástja.



408. ábra



409. ábra



410. ábra

Írjuk le a $\frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{S_p}{\pi l^2}$ aránypárt!

Az aránypárból kifejezhetjük a kúp palástjának képletét:

$$S_p = \pi R l.$$

A henger (kúp) felszíne az alaplapok (az alaplap) területeinek és a palástnak az összegével egyenlő.

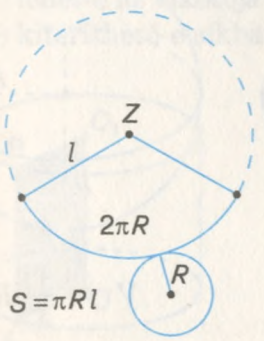
A gömb felszínét *gömbfelületnek* nevezzük. A gömbfelület sugara egyenlő a gömb sugarával és középpontja illeszkedik a gömb középpontjára (412. ábra). Az R sugarú O középpontú körlapot a gömb *főkörének*, az R sugarú O középpontú körvonalat a gömbfelület *főkörvonalának* nevezzük.

A hengertől és a kúptól eltérően a gömböt nem lehet síkba kiteríteni, mivel nem illeszkedik minden pontja egy síkra. Tehát a gömbfelület meghatározásához más utat kell választani. Ezzel későbbi tanulmányaitokban fogtok majd találkozni. Most elégedjünk meg a kikövetkeztetett szabállyal: **a gömbfelület a főkör területének a négyszerese**. Képlettel kifejezve ez így néz ki:

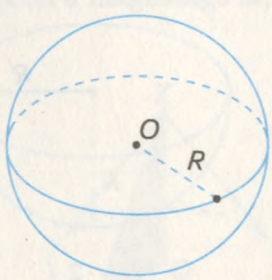
$$S_k = \pi R^2 \qquad S_g = 4\pi R^2.$$

A gömb térfogatának meghatározásához végezzünk el három kísérletet homokkal.

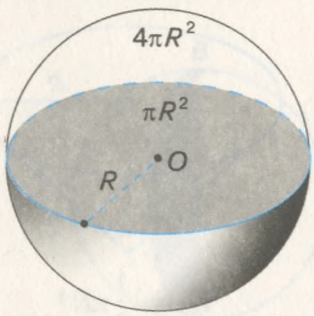
1. Hasonlítsuk össze egy R sugarú henger és egy n-oldalú egyenes hasáb térfogatát (414. ábra)! A hasáb magassága egyenlő a henger H magasságával,



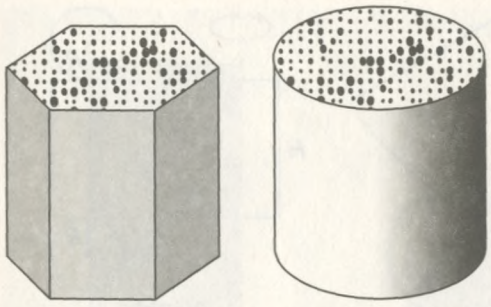
411. ábra



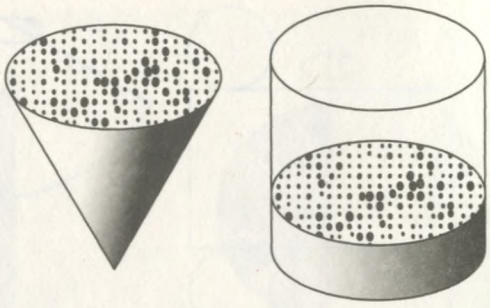
412. ábra



413. ábra



414. ábra



415. ábra

az alaplapja R sugarú körbe írt n-oldalú sokszög, ahol n elég nagy szám. Ha a hasábot megtöltő homokot átöntjük a hengerbe, azt vesszük észre, hogy szinte nincs is különbség a két térfogat között. Tehát a henger térfogatának képlete a $V = S_a \cdot H$.

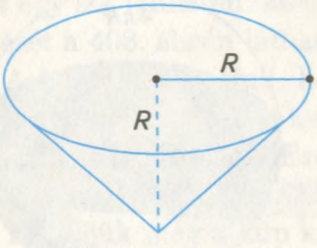
Véglegesen: $V = \pi R^2 \cdot H$.

2. A kúp térfogatát a vele azonos H magasságú és R sugarú henger térfogatával hasonlítjuk össze (415. ábra). A homok átöntése után megállapíthatjuk, hogy a **kúp térfogata a henger térfogatának a harmada**. Tehát a kúp térfogatának képlete a $V = \frac{1}{3} S_a \cdot H$ alakban írható le.

Véglegesen: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$.

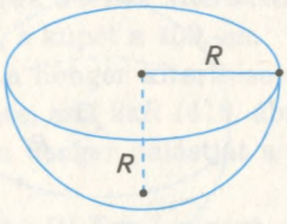
3. Az R sugarú gömb térfogatát a félgömb térfogatából vezethetjük le. A félgömb térfogatát viszont megkapjuk, ha összehasonlítjuk egy R sugarú és R magasságú kúp térfogatával. Miután átöntöttük a homokot a kúpból (416. ábra) a félgömbbe (417. ábra), megállapíthatjuk, hogy a félgömb térfogata a kúp térfogatának kétszerese. Tehát **a gömb térfogata** (418. ábra) **a kúp térfogatának négyszerese** és a következő képlettel számítható ki:

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$.



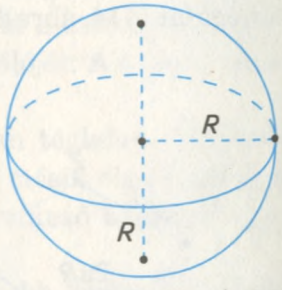
$V = \frac{1}{3} \pi R^3$

416. ábra



$V = \frac{2}{3} \pi R^3$

417. ábra



$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

418. ábra

BŐVEBBEN



Olekszij Pohorelov

Korunk egyik legismertebb mértantudósa Olekszij Pohorelov (1919–2002) akadémikus volt. A Bjelgorodi terület (Oroszország) Korocsi településén született, viszont élete nagyobb részét Ukrajnában töltötte. A harkovi egyetemet végezte el, később előadóként dolgozott is itt; munkahelye volt még a Matematikai Főiskola és Ukrajna egyéb intézményei. Az ő nevéhez fűződik a mai mértan több nyitott kérdésének a megválaszolása. 1959-ben véglegesen megoldotta a konkáv felületek héjhorpadásának problémáját. Ez a tény nemcsak elméleti jelentőséggel bír, hanem a gyakorlati haszna is óriási, mivel a repülőgépek külső burka és a hajótestek is mozgás közben behorpadnak. Ezért a munkájáért Pohorelov Lobacsevszkíj-díjat kapott, de számos más ösztöndíjjal és kitüntetéssel is rendelkezett. A legtöbb ukrán ember azonban a középiskolai mértankönyvek szerzőjeként ismeri, hiszen az utóbbi évtizedekben az ő könyveiből tanítottak.

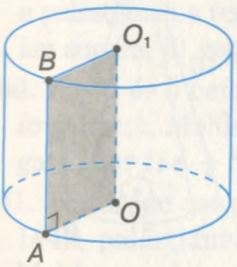
FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mik a forgástestek?
2. Mely síkidom forgatásából származtatható a henger, a kúp, a gömb?
3. Mi a henger és a kúp alkotója, tengelye, alaplapja, magassága?
4. Vezesd le a henger és a kúp palástjának képletét!
5. Hogyan határozható meg a henger és a kúp teljes felszíne?
6. Hogyan határozhatjuk meg a gömbfelületet?
7. Mi a henger, a kúp és a gömb térfogatképlete?

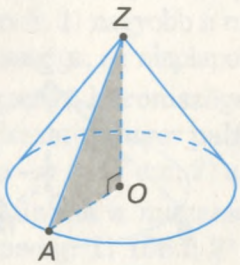
OLDD MEG A FELADATOKAT!

980'. Állapítsd meg a 419., 420., 421. ábrák alapján:

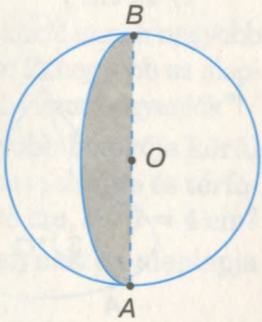
1) a forgástestek fajtáját;
2) hogyan keletkezett;
3) mi az adott forgástest tengelye és alkotója;
4) ha van alaplapja a testnek, akkor milyen forgástestről lehet szó;
5) lehet-e az alkotója egyben a magassága is;
6) kiteríthető-e síkba!



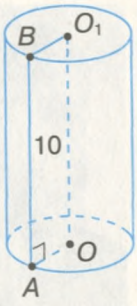
419. ábra



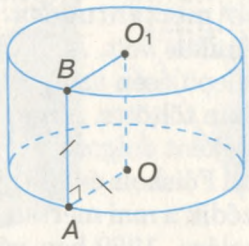
420. ábra



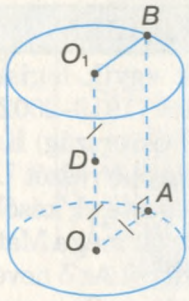
421. ábra



422. ábra



423. ábra



424. ábra

981'. Igaz-e, hogy a gömbfelület: 1) a henger; 2) a kúp; 3) a gömb palástja?

982'. Mi: 1) a henger; 2) a kúp palástjának kiterítése?

983'. Kiteríthető-e síkba a gömb?

984'. Írd le a 419. és 420. ábra jelöléseivel azt a kifejezést, mellyel kiszámítható:
1) a forgástestek palástja;
2) a forgástestek teljes felszíne;
3) a forgástestek térfogata!

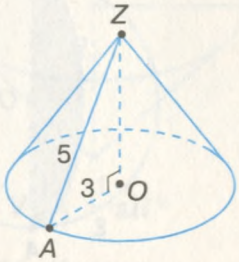
985'. Írj le a 421. ábra adataival kifejezést:
1) a gömbfelület területére; 2) a gömb térfogatára!

986°. Származtatható-e a henger:
1) négyzet átlója körüli forgatásával;
2) paralelogramma egyik oldala körüli forgatásával;
3) derékszögű trapéz egyik szára körüli forgatásával?

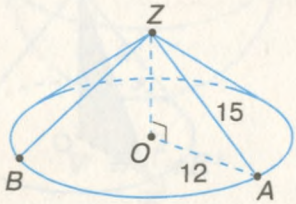
987°. Határozd meg a 422., 423. és 424. ábra adatai alapján az OO_1 tengelyű, AO=3 cm sugarú henger palástjának területét, teljes felszínét és térfogatát!

988°. Készítsd el az R sugarú, h magasságú henger hálóját, ha:
1) $R = 1$ cm, $h = 3$ cm; 2) $R = 2$ cm, $h = 4$ cm; 3) $R = 3$ cm, $h = 5$ cm!
Mekkora a palást területe? Mekkora a teljes felszín?
Mekkora a térfogat?

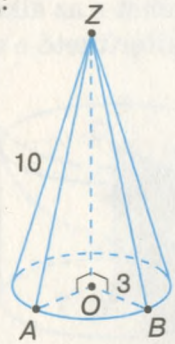
989°. Mekkora annak a kúpnak a palástja, teljes felszíne és térfogata, melynek az alkotója 10 cm, alaplapjának területe pedig:
1) 4π cm^2; 2) $2{,}56\pi$ cm^2; 3) 25π cm^2?



425. ábra



426. ábra



427. ábra

990°. Származtatható-e a kúp:
1) derékszögű háromszög átfogója körüli forgatásával;
2) egyenlőszárú háromszög szára körüli forgatásával;
3) szabályos háromszög oldala körüli forgatásával?

991°. Számítsd ki a 425., 426. és 427. ábrák adatai alapján a ZO tengelyű kúp palástját és teljes felszínét!

992°. Mekkora az R sugarú, h magasságú kúp palástja, teljes felszíne és térfogata, ha:
1) $R = 12$ cm, $h = 5$ cm;
2) $R = 3$ cm, $h = 4$ cm;
3) $R = 1$ cm, $h = 6$ cm?

993°. Határozd meg a h magasságú, D átmérőjű kúp alkotóját, ha:
1) $h = 4$ cm, $D = 6$ cm; 2) $h = 12$ cm, $D = 10$ cm; 3) $h = 8$ cm, $D = 12$ cm!

994°. Számítsd ki annak a gömbnek a térfogatát és felületét, melynek sugara:
1) 2 cm; 2) 3 dm; 3) 4 cm; 4) 5 dm!

995°. Egy gömb sugara R, térfogata V, felszíne S_g. Töltsd ki a 33. táblázatot!

33. táblázat

R	9 cm					8 cm
S_g		64π cm^2			49π cm^2	
V			288π cm^3	36π cm^3		

996. Hogyan változik a henger palástja és térfogata, ha: 1) a magasságát n-szeresére növeljük, sugarát pedig nem változtatjuk; 2) n-szeresére növeljük sugarát, alkotóját pedig nem változtatjuk?

997. Egy a és b oldalú téglalapot a kisebb oldala körül forgatunk. Mekkora a keletkezett henger palástja, teljes felszíne és térfogata, ha:
1) $a + b = 16$ cm; $a - b = 4$ cm; 2) $a + b = 32$ cm; $b - a = 8$ cm?

998. Határozd meg annak a hengernek az alkotóját, melynek az alaplapja 81π, a palástjának területe pedig: 1) 162π; 2) 126π!
Mekkora a henger teljes felszíne és térfogata?

999. Állapítsd meg, igazak-e a következő kifejezések: „két kúp közül annak nagyobb a palástjának a területe, melynek: 1) nagyobb a magassága; 2) nagyobb az alaplap sugara; 3) nagyobb a magassága, az alaplapok sugarai viszont egyenlők"!

1000. Egy a és b befogójú derékszögű háromszöget a nagyobb befogója körül forgatunk. Mekkora a keletkezett henger palástja, teljes felszíne és térfogata, ha: 1) $a + b = 31$ cm, $a - b = 17$ cm; 2) $a + b = 28$ cm, $b - a = 4$ cm?

1001. Határozd meg annak a kúpnak a magasságát, melynek az alaplapja 144π, palástjának területe pedig: 1) 156π; 2) 180π!
Mekkora a kúp teljes felszíne és térfogata?

1002. Határozd meg a: 1) 200 mm és 300 mm; 2) 0,7 dm és 1,4 dm sugarú gömbfelszínek arányát!

1003. Mennyi az r_1 és r_2 sugarú gömbök térfogatainak aránya, ha:
1) $r_1 + r_2 = = 17$ cm, $r_1 - r_2 = 7$ cm; 2) $r_1 + r_2 = 11$ cm, $r_2 - r_1 = 5$ cm?

1004*. Fejezd ki a henger palástját, teljes felszínét és térfogatát:
1) a h magasságával és az alaplap C kerületével;
2) a h magasságával és az alaplap S területével!

1005*. Egy 3 és 5 cm oldalhosszúságú téglalapot először rövidebb, majd hosszabb oldala körül is megforgatták. Egy négyzetet, melynek kerülete a téglalap kerületével egyenlő, szintén megforgattak az egyik oldala körül. Hasonlítsd össze a három keletkezett henger:
1) palástjainak területét; 2) teljes felszínét; 3) térfogatát!

1006*. Fejezd ki a kúp palástját, teljes felszínét és térfogatát:
1) a h magasságával és az alaplap C kerületével;
2) az l alkotóval és az alaplap S területével!

1007*. Fejezd ki:
1) a gömb V térfogatát az S felszínével;
2) a gömb S felszínét a V térfogatával;
3) a gömb V térfogatát a főkörvonal C hosszával;
4) a főkörvonal C hosszát az S felszínével!

1008*. Két gömb főkörei hosszának különbsége c, felszíneinek különbsége d. Számítsd ki a gömbök felszínét és térfogatát, ha:
1) $c = 4\pi$ cm, $d = 16\pi$ cm^2; 2) $c = 10\pi$ cm, $d = 45\pi$ cm^2!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

1009. Egy henger alakú fahasábból téglatest formájú gerendát kell ácsolni a lehető legnagyobb keresztmetszettel. Mekkora lesz a hulladék?

1010. Milyen messzire lát el a pilóta 2 km magasságból; 10 km magasságból? (A Föld átmérője $\approx 12{,}7$ ezer km.)

1011. A Merkúr átmérője $\approx$ 5 ezer km, a Vénuszé $\approx 12{,}4$ ezer km, a Földé $\approx 12{,}7$ ezer km, a Marsé pedig $\approx 6{,}8$ ezer km. Mekkora ezeknek a bolygóknak a felszíne?



ISMÉTLŐ KÉRDÉSEK

1. Sorold fel két egyenes, az egyenes és a sík, illetve két sík kölcsönös helyzetét a térben!
2. Mi a síkra nem illeszkedő pontból húzott merőleges? Mi a síkra húzott ferde?
3. Hogyan kell meghatározni a hasáb; a gúla palástját és teljes felszínét?
4. Hogyan kell meghatározni a henger; a kúp palástját és teljes felszínét?
5. Mi az egyenes hasáb, a gúla, a henger, a kúp térfogatképlete?
6. Hogyan számítható ki a gömb felszíne és térfogata?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll a rendelkezésedre.

1° Egy egyenes hasáb alaplapja 2 cm oldalhosszúságú négyzet. Magassága 6 cm. Mekkora a palást területe?

A. 12 cm^2. **B.** 24 cm^2. **C.** 48 cm^2. **D.** 72 cm^2.

2° Mekkora annak a háromoldalú gúlának a térfogata, melynek az alaplapja 6 cm^2 területű, magassága pedig 4 cm?

A. 2 cm^3. **B.** 8 cm^3. **C.** 10 cm^3. **D.** 24 cm^3.

3° Mekkora a 3 cm sugarú gömb felszíne és térfogata?

A. 9π cm^2, 27π cm^3. **B.** 12π cm^2, 4π cm^3.

C. 9π cm^2, 36π cm^3. **D.** 36π cm^2, 36π cm^3.

4 Egy henger és egy kúp sugara és magassága is egyenlő hosszúságú. Mennyivel nagyobb a henger palástja a kúp palástjánál, ha a sugár 3 cm, a magasság 4 cm?

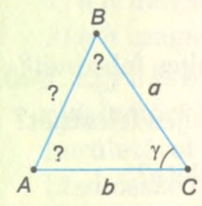
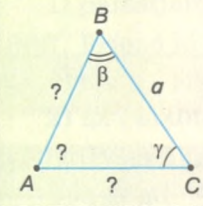
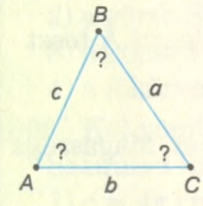
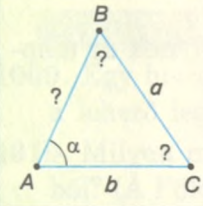
A. 9π cm^2. **B.** 12π cm^2. **C.** 27π cm^2. **D.** 36π cm^2.

5* Az α sík A és B pontjának távolsága 6 cm. A C pont nem illeszkedik az α síkra és $CA \perp \alpha$. A C és a B pont távolsága 2 cm-rel nagyobb, mint a C pont és az α sík távolsága. Mekkora a C pont és az α sík távolsága?

A. 20 cm. **B.** 16 cm. **C.** 10 cm. **D.** 8 cm.

ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

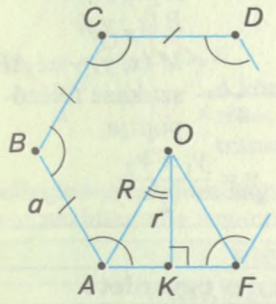
Alapfeladatok

A feladatok feltételei		A megoldás algoritmusa
	**Adva van:** $AC = b$, $BC = a$, $C\angle = \gamma$. **Meg kell határozni:** $AB, A\angle, B\angle$	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A\angle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $B\angle = 180° - A\angle$
	**Adva van:** $BC = a$, $B\angle = \beta$, $C\angle = \gamma$. **Meg kell határozni:** $AC, AB, A\angle$	1) $A\angle = 180° - \alpha - \beta$, 2) $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin A\angle}$, 3) $AB = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin A\angle}$
	**Adva van:** $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. **Meg kell határozni:** $A\angle, B\angle, C\angle$	1) $\cos A\angle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B\angle = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $C\angle = 180° - A\angle - B\angle$
	**Adva van:** $BC = a$, $AC = b$, $A\angle = \alpha$. **Meg kell határozni:** $AB, B\angle, C\angle$	1) $\sin B\angle = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a}$, 2) $C\angle = 180° - \alpha - B\angle$, 3) $AB = \frac{a\cdot\sin C\angle}{\sin\alpha}$

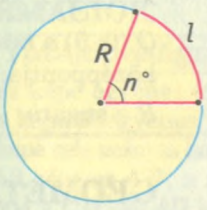
A háromszögek területképletei

$S = \frac{ah_a}{2}$, ahol h_a az a oldalhoz tartozó magasság	$S = p\cdot r$, ahol $p = \frac{a+b+c}{2}$ r a beírt körvonal sugara	$S = \frac{abc}{4R}$, ahol R a körülírt körvonal sugara	$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, ahol α a b és a c oldalak által közbezárt szög	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ahol $p = \frac{a+b+c}{2}$

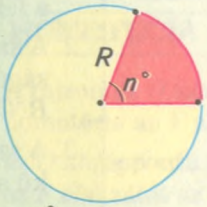
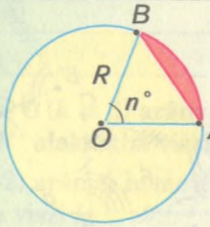
SZABÁLYOS SOKSZÖGEK

Szabályos n-szög	Tulajdonságok
 $AB = BC = \ldots = AF$ és $A\angle = B\angle = \ldots = F\angle$	1. A szabályos n-szög húr- és érintősokszög. $R = OA$ – a köré írt körének sugara. $r = OK$ – beírt körének sugara. 2. $AOF\angle = \frac{360°}{n}$ 3. $A\angle + B\angle + \ldots + F\angle = 180° \cdot (n-2)$ 4. $R = \frac{AK}{\sin AOK\angle} = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180°}{n}}$ 5. $r = \frac{AK}{\operatorname{tg} AOK\angle} = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}$.

A KÖRVÖNAL ÉS A KÖRÍV HOSSZA

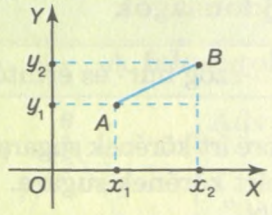
A körvonal hossza	A körív hossza
$C = 2\pi R$ vagy $C = \pi D$, ahol D a körvonal átmérője	 $l = \frac{\pi R n°}{180°}$

A KÖRLAP ÉS RÉSZEINEK TERÜLETE

A körlap területe	A körcikk területe	A körszelet területe
$S = \pi R^2$ vagy $S = \frac{\pi D^2}{4}$, ahol D a körlap átmérője	 $S = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$	 $S = S_{körcikk} - S_{AOB\Delta}$

SÍKBELI DESCARTES-FÉLE KOORDINÁTA-RENDSZER

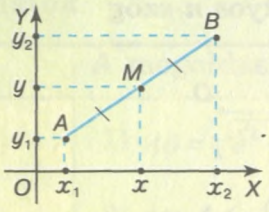
A szakasz hossza



$A\,(x_1; y_1)$, $B\,(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A szakasz felezőpontjának koordinátái

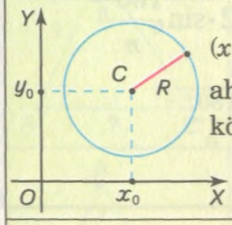


$A\,(x_1; y_1)$,
$B\,(x_2; y_2)$,
$M\,(x; y)$ – az AB szakasz felezőpontja

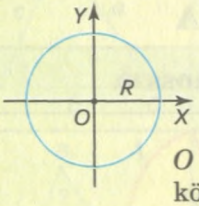
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

A görbe egyenlete

A körvonal egyenlete

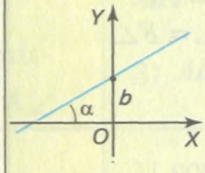


$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,
ahol $C\,(x_0; y_0)$ a körvonal középpontja,
R a sugara

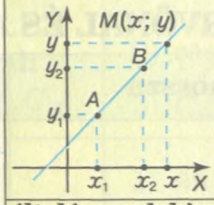


$x^2 + y^2 = R^2$
$O\,(0; 0)$ a körvonal középpontja,
R a sugara

Az egyenes egyenlete



iránytangenses alakja: $y = kx + b$
k – iránytangens,
$k = \operatorname{tg}\alpha$,
b – az OY tengely szakasza



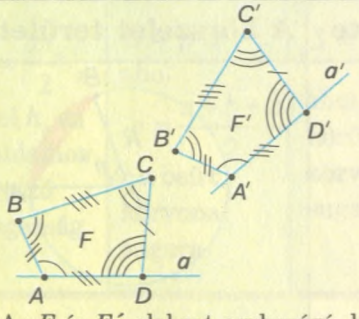
két ponton keresztül:
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$,
ahol $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ az a két pont, melyen keresztül megy az egyenes

általános alakja: $ax + by + c = 0$, ahol a, b és c egyszerre nullával nem egyenlő szám

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Egybevágósági transzformációk és tulajdonságaik

Egybevágósági transzformáció



Az F és F' alakzat egybevágó, ha létezik olyan egybevágósági transzformáció, ami az egyik alakzatot átviszi a másik alakzatba

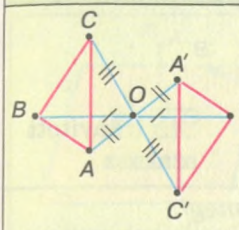
Tulajdonságai

1. Az egyenes képe egyenes (a képe a'), a félegyenes képe félegyenes.
2. A szakasz képe vele azonos hosszúságú szakasz ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $AD = A'D'$).
3. A szög képe vele azonos fokmértékű szög ($A\angle = A'\angle$, $B\angle = B'\angle$, $C\angle = C'\angle$, $D\angle = D'\angle$)

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Középpontos és tengelyes tükrözés

Középpontos tükrözés

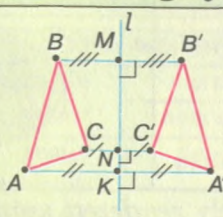


$AO = OA'$,
$BO = OB'$,
$CO = OC'$.

A középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció.

Jellegzetes tulajdonság: az egyenes képe vele párhuzamos egyenes vagy önmaga

Tengelyes tükrözés

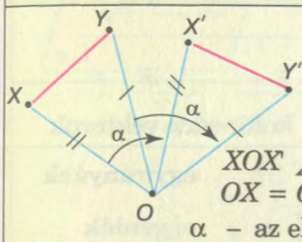


$BB' \perp l$ i $BM = MB'$,
$CC' \perp l$ i $CN = NC'$,
$AA' \perp l$ i $AK = KA'$.

A tengelyes tükrözés egybevágósági transzformáció

Elforgatás és párhuzamos eltolás

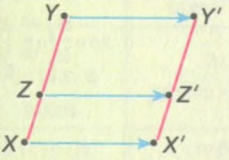
Elforgatás



$XOX' \angle = YOY' \angle = \alpha$,
$OX = OX'$, $OY = OY'$,
α – az elforgatás szöge,
az O pont a középpontja.

Az elforgatás egybevágósági transzformáció

Párhuzamos eltolás

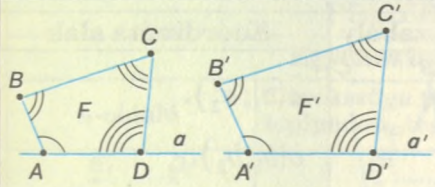


$XX' \| ZZ' \| YY'$ és
$XX' = ZZ' = YY'$

A párhuzamos eltolás egybevágósági transzformáció.
Jellegzetes tulajdonság:
az egyenes képe vele párhuzamos egyenes vagy önmaga

HASONLÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

Hasonlósági transzformáció



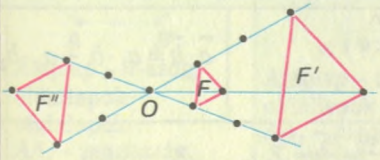
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k,$$

$k > 0$ – hasonlósági arány

Tulajdonságai

1. Az egyenes képe egyenes (a képe a'), a félegyenes képe félegyenes.
2. A szakasz képe vele arányos hosszúságú szakasz (az AB képe az $A'B'$, a BC képe a $B'C'$, a CD képe a $C'D'$, az AD képe az $A'D'$).
3. A szög képe vele azonos fokmértékű szög ($A\angle = A'\angle, B\angle = B'\angle, C\angle = C'\angle, D\angle = D'\angle$).
4. Ha $F \overset{k}{\sim} F'$, akkor $\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2$, (ahol S_F és $S_{F'}$ a hasonló F és F' síkidomok területei)

HOMOTÉCIA

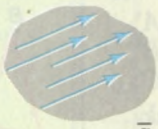


A rajzon az O középpontú $k > 0$ ($k = 3$) arányú homotécia az F alakzatot az F' alakzatba viszi át, az O középpontú $k < 0$ ($k = -2$) arányú homotécia az F alakzatot az F'' alakzatba viszi át.

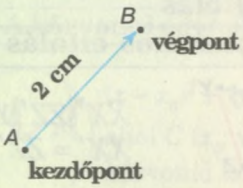
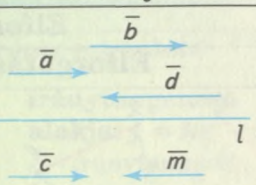
A homotécia hasonlósági transzformáció.

Jellegzetes tulajdonsága: megtartja az egyenesek párhuzamosságát.

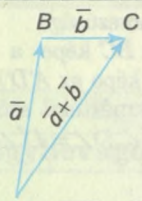
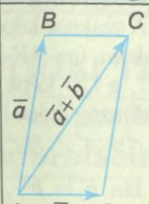
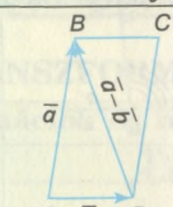
VEKTOROK

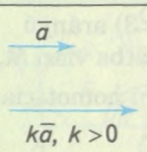
Erő	Mértani vektor	Ábrázolás
		 $\overline{AB}$ irányított szakasz

Bármely rendezett számpár egy vektort ad meg

A vektor jellemzői		A vektor koordinátái	Vektorok kölcsönös helyzete
		$A\,(x_1;\,y_1)$, $B\,(x_2;\,y_2)$, $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$	 kollineáris vektorok
irány	A – kezdőpont B – végpont	$\overline{AB} = \bar{a}(a_1;a_2)$	$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ egyirányúak $\bar{a} = \bar{c}$ egyenlők $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{d}$ ellentétes irányúak $\bar{a} = -\bar{m}$ ellentettek
hossz (abszolút érték)	$\lvert\overline{AB}\rvert = 2$ cm	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	

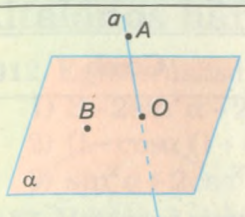
Vektorok összege

Háromszög-szabály	Paralelogramma-szabály	Koordináta alak
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	 $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$  $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$	$\bar{a}(a_1;a_2)$, $\bar{b}(b_1;b_2)$, $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{c}(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2)$

Vektor szorzása számmal		Vektorok skaláris szorzata	
	$\bar{a}(a_1;a_2)$ $k\bar{a}(ka_1;ka_2)$	$\bar{a}\cdot\bar{b} = \lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}})$ $\bar{a}^2 = \lvert\bar{a}\rvert^2$	$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$
		$\cos(\hat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2\cdot b_2^2}}$	
		$\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ $a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 = 0$	

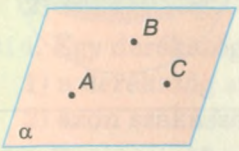
A TÉRMÉRTAN ALAPJAI

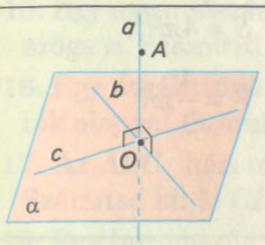
Alapfogalmak és tulajdonságaik



A pont, a egyenes, α sík

Az *ABC* sík egyetlen





AO merőleges az α síkra

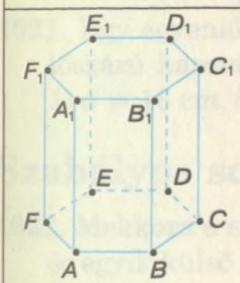
Az egyenes és a sík kölcsönös helyzete

Alakzatok	Kölcsönös helyzetük		Jelölés
a és *b* egyenes	metszik egymást	merőlegesek	$a \perp b$
		nem merőlegesek	$a \times b$
	nem metszik egymást	párhuzamosak	$a \parallel b$
		kitérők	a . b
Egy a egyenes és egy α sík	az egyenes illeszkedik a síkra		$a \in \alpha$
	az egyenes metszi a síkot	az egyenes merőleges a síkra	$a \perp \alpha$
		az egyenes nem merőleges a síkra	$a \times \alpha$
	az egyenes metszi a síkot	az egyenes párhuzamos a síkkal	$a \parallel \alpha$
α és β sík	metszik egymást	merőlegesek	$\alpha \perp \beta$
		nem merőlegesek	$\alpha \times \beta$
	nem metszik egymást	párhuzamosak	$\alpha \parallel \beta$

POLIÉDEREK, SOKLAPOK

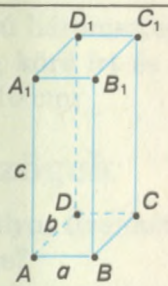
Egyenes hasáb

n-oldalú



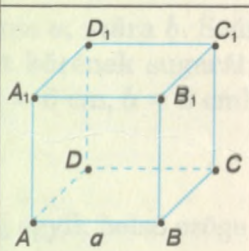
Alaplap – *n*-szög, oldallapok – téglalapok,
AA_1 – magasság,
$S_p = S_1 + \ldots + S_n$,
$S_{tf} = S_p + 2S_a$,
$V = S_a \cdot H$

Derékszögű paralelepipedon, téglatest



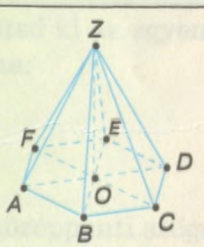
Alaplap – téglalap, oldallapok – téglalapok,
AA_1 – magasság,
$S_p = 2ac + 2bc$,
$S_{tf} = 2ac + 2bc + 2ab$,
$V = abc$

Kocka

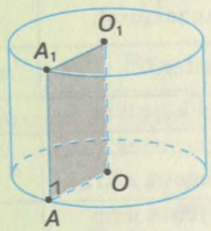
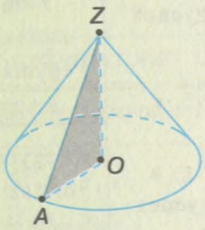
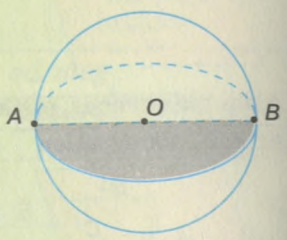


Alaplap – négyzet, oldallapok – négyzetek,
AA_1 – magasság,
$S_p = 4a^2$,
$S_{tf} = 6a^2$,
$V = a^3$

Gúla



Alaplap – *n*-szög, oldallapok – háromszögek,
ZO – magasság,
$S_p = S_1 + \ldots + S_n$,
$S_{tf} = S_p + S_a$,
$V = \frac{1}{3} S_a \cdot H$

FORGÁSTESTEK		
Henger	**Kúp**	**Gömb**
		
AA_1 – alkotó, magasság, $S_p = 2\pi RH$, $S_{tf} = S_p + 2S_a$, $V = S_a \cdot H = \pi R^2 H$	ZA – alkotó, ZO – magasság, $S_p = \pi Rl$, $S_{tf} = S_p + S_a$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	$S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

OLDD MEG A FELADATOKAT!

Általános háromszögek megoldása

1012. Egyszerűsítsd a következő kifejezést:
1) $3-2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$;
2) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;
3) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-1$!

1013. Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:
1) $(\sin 150°-\cos 120°)(\sin 120°-\cos 150°)$;
2) $\cos 150°\cdot \mathrm{tg}60°\cdot \mathrm{tg}30°+\sin 150°\cdot \sin 90°\cdot \cos 0°$!

1014. Egy derékszögű háromszög átfogója c, hegyesszöge α. Határozd meg:
1) a derékszög szögfelezőjének hosszát;
2) azon szakaszok hosszát, melyekre a szögfelező osztja az átfogót!

1015. Egy egyenlőszárú háromszög alapon lévő szögének szögfelezője l, szárszöge α. Számítsd ki a szárát!

1016. Egy derékszögű trapéz nagyobbik átlója d és α szöget zár be a nagyobbik alappal. Számítsd ki a trapéz hosszabbik szárát, ha a hegyesszöge β!

1017. Az ABC háromszögben AD a szögfelező, $AC = b$, $A\angle = \alpha$, $B\angle = \beta$. Számítsd ki: 1) CD; 2) AD hosszát!

1018. Egy háromszög két oldala 4 cm és 6 cm hosszú, az általuk bezárt szög 60°. Határozd meg a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát!

1019. Egy trapéz két alapja 2 cm és 5 cm. Az egyik szára 3 cm és 60°os szöget zár be a nagyobbik alappal. Határozd meg az átlókat!

1020. Egy paralelogramma egyik oldala a, az egyik átlója d, az általuk bezárt szög α. Számítsd ki a paralelogramma területét, ha:
1) $a=3\sqrt{3}$ cm, $d = 10$ cm, $\alpha = 60°$; 2) $a=2$ cm, $d = 8$ cm, $\alpha = 30°$!

1021. Egy egyenlőszárú háromszög alapja a, szára b. Számítsd ki az egyenlőszárú háromszög köré írt és beírt körének sugarát, ha:
1) $a = 16$ cm, $b = 10$ cm; 2) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm!

Szabályos sokszögek

1022. Mekkora a szabályos tizenkétszög egyik belső szöge, középponti szöge és egyik külső szöge?

1023. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek:
1) külső szöge 24°; 2) belső szöge 135°?

1024. Mekkora a szabályos hatoldalú sokszög beírt és köré írt körének sugara, ha:
1) a sugarak különbsége 6 cm; 2) a sugarak összege 8 cm?

1025. Szerkessz olyan szabályos hatszöget, melynek:
1) nagyobbik átlója 8 cm;
2) kisebbik átlója 6 cm!

1026. Fejezd ki a szabályos n-szög a oldalát a köré írt körének R sugarával és annak az ugyanannyi oldalú sokszögnek a b oldalával, melynek ez a körvonal a beírt köre!

1027. Egy szabályos háromszög kerülete P. Mekkora a háromszög köré írt körének hossza, ha:
1) $P = 5\sqrt{3}$ cm; 2) $P = 12$ cm!

1028. Számítsd ki annak a körvonalnak a hosszát, melyben a 45°-os középponti szöghöz 10 cm-es ív tartozik!

1029. Egy C hosszúságú körvonal köré olyan rombuszt írtak, melynek hegyesszöge α. Mekkora a rombusz területe?

1030. Számítsd ki annak a körnek az átmérőjét, melynek a területe egyenlő:
1) az m és n sugarú körlapok területeinek összegével;
2) az m és n sugarú körlapok területeinek különbségével!

1031. Mekkora annak a körlapnak a területe, melynek a 72°-os körcikke 20 cm^2?

Descartes-féle koordináták a síkon

1032. Az ABC háromszög csúcsai az $A(2; 1)$, $B(1; 3)$ és $C(5; 2)$ pont. Határozd meg az adott háromszöggel egybevágó KLM háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a két háromszög tükrös:
1) az abszcissza tengelyre; 2) az ordináta tengelyre; 3) az origóra!

1033. Az x mely értékénél lesz az AB szakasz hossza 4 egység, ha $A(2; 3)$, $B(0; x)$?

1034. Az M pont az ABC háromszög AC oldalát 1 : 3 arányban osztja. Számítsd ki a BM szakasz hosszát, ha a háromszög csúcsai az $A(1; 5)$, $B(2; -2)$ és $C(5; 5)$ pont! Hány megoldása van a feladatnak?

1035. Határozd meg a (4; 2), (7; – 2) és (1; 0) pontokkal megadott háromszög területét!

1036. Egy 3 cm sugarú körvonal érinti a koordináta-tengelyeket. Mekkora a körvonal középpontjának és a középpont: 1) abszcissza tengelyre; 2) ordináta tengelyre; 3) origóra vonatkoztatott tükörképének távolsága?

1037. Adva van az $y = 2x + 3$ egyenletű egyenes. Mi az egyenlete az adott egyenes: 1) abszcissza tengelyre; 2) ordináta tengelyre; 3) origóra vonatkoztatott tükörképének?

1038. Egy háromszög két csúcsa a (0; – 2) és (2; 0) koordinátájú pont, a harmadik csúcs az $y = -x$ egyenesre illeszkedik. Határozd meg a C csúcs koordinátáit, ha az ABC háromszög területe 8!

1039. Mekkorák az (1; 0), (2; 3) és (3; 2) pontokkal megadott háromszög súlyvonalai?

1040. Két körvonal kívülről érinti egymást. Bizonyítsd be, hogy a két körvonal közös érintő szakasza a körvonalak átmérőinek számtani közepe!

1041. (Leonardo Pisano, más néven Leonardo Fibonacci feladata, XIII. század.) Két torony távolsága egy síkságon 60 könyök. Az egyik torony 40 könyök magas, a másik 50 könyök. A két torony között van egy kút azonos távolságra a két torony tetejétől. Milyen messze van a kút a két torony alapjától?

Geometriai transzformációk

1042. Egy egybevágósági transzformáció az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi át. Határozd meg:
1) az $A'B'C'$ háromszög kerületét, ha $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm, $AC = 10$ cm;
2) az $A'B'C'$ háromszög szögeit, ha $A\angle = 30°$, $B\angle = 50°$, $C\angle = 20°$!

1043. Az ABC derékszögű háromszög B csúcsának az AC átfogó felezőpontjára vonatkozó tükörképe a D pont. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap!

1044. Húzz egy a egyenest és vegyél fel rajta kívül egy A pontot! Szerkeszd meg körzővel és vonalzóval az A pont a egyenesre vonatkozó A' tükörképét!

1045. Bizonyítsd be, hogy az egyenlőszárú trapéz alaplapjainak felezőpontját összekötő egyenes a trapéz szimmetriatengelye!

1046. Szerkeszd meg az ABC háromszög képét 150°-os elforgatásnál az óramutató járásával megegyező irányba, ha az elforgatás középpontja:
1) az A csúcs; 2) a háromszögön kívüli O pont!

1047. Egy párhuzamos eltolás az AB szakasz A pontját a B pontba, B pontját a B' pontba viszi át. Mekkora az AB' szakasz hossza, ha $AB = m$?

1048. Bizonyítsd be, hogy a trapéz alapjainak összege kisebb az átlók összegénél!

1049. Számítsd ki az $ABCD$ ($AB \| CD$) trapéz középvonalát, ha $AE = 10$ cm, (E – a szárak meghosszabbításainak metszéspontja), $AD = 4$ cm, $AB = 10$ cm!

1050. Egy négyszög oldalai 5 cm, 7 cm, 9 cm és 11 cm. Mekkorák az adott négyszöggel hasonló négyszög oldalai, ha a kerülete 128 cm?

1051. Két négyzet területének az aránya 1 : 9. Mekkora a nagyobbik négyzet oldala, ha a kisebbik kerülete m?

Síkbeli vektorok

1052. Az x mely értékénél merőlegesek az $\bar{a}\,(3x^2; 2)$ és $\bar{b}\,(1; x)$ vektorok?

1053. Alkothatnak-e az alábbi vektorok bázist:
1) $\bar{a}\,(1; 3)$ és $\bar{b}\,(-6; -18)$; 2) $\bar{a}\,(1; -1)$ és $\bar{b}\,(0; 3)$?

1054. Fejezd ki az $ABCD$ paralelogramma oldalvektorait az $\overline{AC} = \bar{a}$ és $\overline{BD} = \bar{b}$ átlóvektorokkal!

1055. A K pont egy $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja, az O pont az átlók metszéspontja. Bontsd fel a $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{KD}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ bázisvektorokra!

1056. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egységvektorok 60°-os szöget zárnak be. Bizonyítsd be, hogy a $2\underline{b}-\underline{a}$ vektor merőleges az $\underline{a}$ vektorra!

1057. Határozd meg az ABC háromszög AP és BM súlyvonalainak hajlásszögét, ha a háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0; -4)$, $C(0; 6)$ és $B(2; -2)$!

1058. Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög a és b befogóira, valamint c átfogójára igaz az $a+b \le \sqrt{2}c$ egyenlőtlenség!

1059. Az $ABCD$ négyzet AB oldalára illeszkedő M és P pont az oldalt három egyenlő részre osztja. Az O pont a DP és CM egyenesek metszéspontja. Mekkora a COD szög koszinusza?

1060. Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalainak felezőpontjait összekötő középvonala a BC és AD oldalak számtani közepe. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!

1061. Határozd meg azon egységvektorok végpontjainak mértani helyét, melyek kollineárisak az adott vektorral és kezdőpontjuk egy egység sugarú körvonalra illeszkedik!

A térmértan alapjai

1062. Hány párhuzamos élpárja van egy egyenes hasábnak, ha alaplapja: 1) háromszög; 2) négyszög; 3) n-szög?

1063. Hány kitérő élpárja van egy kockának? Egy háromoldalú hasábnak?

1064. Egy téglatest alakú épület hossza 120 m, térfogata 369600 m^3. Határozd meg az épület föld feletti magasságát, ha az épületet 15 m mélyre nyúlik a föld alá és a hossza $1\frac{5}{7}$-szerese a szélességének!

1065. Hogyan változik meg az n-oldalú szabályos gúla palástja, ha az alaplap területét 3-szorosára növeljük?

1066. Egy henger alakú vödör átmérője 25 cm, magassága 40 cm. Hány literes ez a vödör?

1067. Egy kúp alakú homokkupac kerülete 31,4 m, alkotója 5,8 m. Hány 5 tonnás teherbírású dömperrel lehet a homokot elszállítani? (1 m^3 homok tömege 1,6 t)

1068. A Hold felszíne $\approx$ 38 millió km^2, ami a Föld felszínének 0,075-e. Határozd meg a Hold és a Föld sugarainak arányát!

1069. Az első földgömböt 1492-ben készítette el Martin Behaim német térképész (1459–1507). Az átmérője 54 cm volt. Milyen méretarányban készült ez a földgömb? Mekkora volt ezen a földgömbön az egyenlítő és a délkör?

1070. A Föld felszínének 70,8%-át tengerek borítják. A maradék részt a földrészek és a szigetek foglalják el. Mekkora a szárazföld területe, ha a földet tökéletes gömbnek képzeljük el, melynek átmérője 12 742 km?

1. fejezet

1. §

1. 2) $BOA\angle$, $COA\angle$, $DOA\angle$; 3) $\sin BOA\angle = \frac{1}{2}$, $\cos BOA\angle = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} BOA\angle = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin COA\angle = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos COA\angle = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} COA\angle = \sqrt{3}$, $\sin DOA\angle = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos DOA\angle = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} DOA\angle = -1$. **3.** 1) Nem, igen, igen; 2) igen, nem, igen. **5.** 1) „+”, „+”, „+”; 2) „+”, „–”, „–”. **7.** 1) Tompa; 2) hegyes; 3) tompa. **9.** 1) 1; 2) 5; 3) 6; 4) 0. **10.** 1) 0; 2) 1; 3) 0. **11.** 1) 0; 2) – 1 vagy 1. **12.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **13.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen. **15.** 1) „+”; 2) „+”; 3) „+”. **16.** 1) Hegyes; 2) tompa; 3) tompa. **17.** 1) $\beta > \alpha$; 2) $\beta > \alpha$; 3) $\beta > \alpha$. **18.** 1) $1 \le \sin\alpha + 1 \le 2$; 2) $-0{,}5 \le \cos\alpha + 0{,}5 \le 1{,}5$; 3) $0{,}2 \le \sin\alpha + 0{,}2 \le 1{,}2$. **19.** 1) sin 5°, sin 15°, sin 20°, sin 66°, sin 75°; 2) cos 80°, cos 75°, cos 46°, cos 16°, cos 9°. **20.** 1) sin 92°, sin 101°, sin 125°, sin 150°, sin 176°; 2) cos 91°, cos 97°, cos 102°, cos 165°, cos 175°. **21.** 1) „+”; 2) „–”; 3) „+”. **22.** 1) „–”; 2) „–”; 3) „+”. **23.** 1) – 3; 2) 16; 3) 32. **24.** 1) 0; 2) nem létezik; 3) – 0,75. **26.** *Útmutatás:* két esetet vizsgálj! **28.** Igen. Például: 1) 45°; 2) 135°. **31.** 1) Nem. **32.** $AC = \cos\alpha$, $BC = \sin\alpha$, $AD = \cos^2\alpha$, $BD = \sin^2\alpha$, $CD = \sin\alpha\cos\alpha$. **33.** 150°. **34.** 120°.

2. §

35. 1) a) 1; b) 2; c) $\cos^2\alpha$; d) $\sin^2\alpha$; 2) a) $\sin\alpha$; b) $-\cos\alpha$; c) $-\operatorname{tg}\alpha$; d) 0; 3) a) $\cos\alpha$; b) $\sin\alpha$; c) 0; d) $2\cos\alpha$. **36.** 1) $2\cos^2\alpha$; 2) $2\sin^2\alpha$; 3) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; 4) 1. **38.** sin 70°, sin 55°, sin 30°, sin 15°, sin 4°. **39.** – cos 75°, – cos 60°, – cos 58°, – cos 35°, – cos 20°. **40.** 1) 3; 2) 2; 3) 1. **41.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$; 3) $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$. **42.** 1) – 0,5; 2) 1; 3) 0; 4) 0,5. **43.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\sin\alpha$; 3) $2\sin\alpha$; 4) 0. **45.** $\alpha = 90°$. **46.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^3\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$; d) $\sin^2\alpha$; 5) 1; 6) $\sin^2\alpha$. **48.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen. **49.** 1) 2; 2) 10; 3) 5. **50.** 1) $\cos\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$; 2) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. **51.** 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$. **52.** 1) $\cos\alpha = 0{,}8$, $\sin\alpha = 0{,}6$; 2) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; 3) $\cos\alpha = \frac{60}{61}$, $\sin\alpha = \frac{11}{61}$. **53.** 1) $\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$; 2) $2\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha + \sin\alpha$; 4) 1. **55.** 1) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 2) 1; 3) $0{,}5\cos^2\alpha$; 4) 2. **56.** 1) 2; 2) 3; 3) –1. **57.** 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{10}{21}$. **58.** $\frac{m^2-1}{2}$. **59.** 1) 1; 2) 0; 3)0. **60.** ≈ 4,8 km. **61.** $\alpha \approx 18°26'$.

3. §

62. 3). **63.** 2) 12 cm. **65.** BC – legnagyobb, AC – legkisebb. **66.** $B\angle$ – legnagyobb, $C\angle$ – legkisebb. **67.** 1) $6\sqrt{2}$ cm; 2) $\approx 57°9'$. **68.** 1) $4\sqrt{2}$ cm; 2) $2\sqrt{6}$ cm; 3) ≈ 6 cm. **69.** 1) $\approx 25°40'$; 2) $\approx 18°13'$; 3) $\approx 28°8'$. **70.** 1) $B\angle$ – legnagyobb, $A\angle$ – legkisebb; 2) a szögek egyenlők; 3) $A\angle$ – legnagyobb, $C\angle$ – legkisebb. **71.** 1) AB – legnagyobb, AC – legkisebb; 2) AB – legnagyobb, AC – legkisebb; 3) BC – legnagyobb, AB – legkisebb. **72.** 1) $BC > AC$; 2) $AC > BC$; 3) $BC > AC$. **73.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **74.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **75.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **76.** 1) $\sqrt{3}$ cm; 2) 3 cm; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. **77.** 1) 8 cm; 2) $8\sqrt{2}$ cm; 3) $8\sqrt{3}$ cm. **78.** $1 : \sqrt{3} : 2$. **79.** 1) Igen; 2) nem; 3) nem. **80.** 1) $a \approx 7{,}1$ cm, $c \approx 9{,}7$ cm; 2) $a \approx 2$ cm, $c \approx 1{,}5$ cm. **81.** $\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. **82.** 1) $B\angle \approx 135°31'$, $C\angle \approx 14°29'$; 2) $B\angle \approx 102°58'$, $C\angle \approx 32°2'$. **83.** 1) $\approx 48°31'$ vagy $\approx 131°29'$; 2) $\approx 109°29'$ vagy $\approx 26°31'$. *Útmutatás:* két esetet vizsgálj! **84.** $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **85.** 6 cm, ≈ 3, 1 cm , $\approx 4{,}4$ cm. **86.** 1) $b \approx 5{,}2$ cm, $c \approx 7$ cm; 2) $b \approx 8{,}2$ cm, $c \approx 7{,}3$ cm. **87.** 1) $3\sqrt{2}$ cm; 2) 4,8 cm. **88.** 1) $5(\sqrt{2}+1)$, $5(\sqrt{2}+2)$; 2) $4(\sqrt{2}+1)$, $4(2-\sqrt{2})$. **89.** 1) Alap; 2) alap; 3) szár. **90.** *Útmutatás:* az $ABD\triangle$-ben és $BCD\triangle$-ben alkalmazd a szinusztétel 2. következményét! **91.** *Útmutatás:* hosszabbítsd meg a BM súlyvonalat az M ponttól $MD = BM$ szakasszal! Vizsgáld meg a $BCD\triangle$! **92.** $BC > AC$. **93.** 1) 16,9 cm; 2) 6,25 cm. **94.** 1) $2\sqrt{2}$ cm; 2) 4 cm; 3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **95.** $\approx 27{,}8$ cm. **96.** $\frac{(a^2-b^2)\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}{2(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}$. **97.** *Útmutatás:* jelöld BD-vel az $ABC\triangle$ szögfelezőjét! Alkalmazd az $ABD\triangle$-ben és a $BCD\triangle$-ben a szinusztételt! **98.** *Útmutatás:* jelöld BD-vel az $ABC\triangle$ súlyvonalát! Alkalmazd az $ABD\triangle$-ben és a $BDC\triangle$-ben a szinusztételt! **99.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy a CC_1 súlyvonalra illeszkedik az O pont, ami a BB_1 súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja! Alkalmazd a szinusztételt először a $BCC_1\triangle$ és $ACC_1\triangle$, majd a $BOC\triangle$ és a $B_1OC\triangle$! **100.** *Útmutatás:* az $AKC\triangle$-ben és $BKD\triangle$-ben alkalmazd a szinusztételt! **101.** *Útmutatás:* alkalmazz pótszerkesztést! Rajzolj olyan háromszöget, melynek oldalai egyenlő hosszúságúak a trapéz száraival és az alapjai különbségével! **102.** *Útmutatás:* alkalmazz pótszerkesztést! Rajzolj olyan háromszöget, melynek oldalai egyenlő hosszúságúak a trapéz átlóival és az alapjai összegével! **103.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **104.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$ cm. **105.** *Útmutatás:* az $ABD\triangle$-ben és a $DBC\triangle$-ben alkalmazd a szinusztétel 1. következményét! **106.** *Útmutatás:* jelöld az átlók hajlásszögét α-val! Minden oldalt fejezz ki a köré írt körének sugarával és az oldallal szembeni szöggel! Majd alkalmazd a húrnégyszögek tulajdonságát! **107.** $\approx 101{,}3$ m.

4. §

108. 3). **109.** $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. **110.** $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. **111.** – 0,25. **112.** 1) $b^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{2}$; 2); $c^2 = a^2 + b^2 - ab$; 3) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}$. **113.** 1) $\cos A\angle = 0{,}65$, $\cos B\angle = \frac{83}{160}$, $\cos C\angle = \frac{5}{16}$; 2) $\cos A\angle = \frac{13}{14}$, $\cos B\angle = \frac{1}{2}$, $\cos C\angle = \frac{1}{7}$; 3) $\cos A\angle = \frac{23}{28}$, $\cos B\angle = \frac{29}{56}$, $\cos C\angle = \frac{1}{16}$. **114.** 1) ≈ 5,6 cm; 2) $\alpha \approx 28°\,57'$. **115.** 1) ≈ 3,6 cm; 2) ≈ 2,8 cm; 3) ≈ 7,2 cm. **116.** 1) $A\angle \approx 36°20'$, $B\angle \approx$ $\approx 117°17'$, $C\angle \approx 26°23'$; 2) $A\angle \approx 46°34'$, $B\angle \approx 28°57'$, $C\angle \approx 104°29'$; 3) $A\angle \approx 44°25'$, $B\angle\, 57°7'$, $C\angle \approx 78°28'$. **117.** 1) $\alpha < 90°$; 2) $\alpha = 90°$; 3) $90° < \alpha < 180°$. **118.** 1) Tompaszögű; 2) hegyesszögű; 3) derékszögű. **119.** 1) 90°; 2) ≈ 117°17'; 3) ≈ 93°42'. **120.** 1) ≈ 14,8 cm; 2) 7 cm; 3) ≈ 17 cm. **122.** 1) 13 cm; 2) ≈ 6,1 cm. **123.** 1) ≈ 8,7 cm és 14 cm; 2) ≈ 7,5 cm és ≈ 14,7 cm; 3) ≈ 14,3 cm és ≈ 8,2 cm. **124.** $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$. **125.** ≈ 6,8 cm vagy ≈ 2,1 cm. **126.** ≈ 6,5 cm. **127.** 1) ≈ 5,7 cm vagy ≈ 10,8 cm; 2) ≈ 7,2 cm és ≈ 13,4 cm. **128.** Ha az α szöget növeljük 0°-tól 90°-ig, akkor a cos α értékek csökkennek és pozitívak, így az a oldal hossza nő. A szög további növelésekor 90°-tól 180°-ig a cosα értékek csökkennek 0-tól –1–ig. Ezért az a oldal hossza tovább nő. **130.** *Útmutatás*: Legyen az $ABCD$ négyszög paralelogramma. A koszinusztétel alapján határozd meg AC^2 és BD^2! **131.** 15 cm és 25 cm. **132.** 5 cm, 10 cm. **133.** 6 cm, 7 cm. **134.** ≈ 9,8 cm és ≈ 12,2 cm. **135.** 27 cm. **136.** *Útmutatás:* hosszabbítsd meg az $AM = m_a$ súlyvonalat az M ponttól $MD = AM$ szakasszal és igazold, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma! **137.** 13 cm. **138.** $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. **139.** *Útmutatás*: a $BOM\triangle$-ből és az $AOM\triangle$-ből a koszinusztétel alapján határozd meg a BM^2-et és AM^2-et! **140.** *Útmutatás:* alkalmazd a szinusztételt! **141.** $\alpha \approx 45°$. **142.** ≈ 338,8 m.

5. §

43. $x = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (41. ábra); $x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ (42. ábra); $\cos x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ (43. ábra). **144.** $c \approx 1{,}6$, $\alpha \approx 111°19'$, $\beta \approx 38°41'$ (44. ábra); $\alpha = 105°$, $a \approx 2{,}1$, $b \approx 2{,}9$ (45. ábra). **145.** 1) $b \approx 4{,}1$, $\alpha \approx 47°2'$, $\gamma \approx 102°58'$; 2) $a \approx$ $\approx 4{,}6$, $\beta \approx 48°51'$, $\gamma \approx 71°9'$; 3) $c \approx 2{,}1$, $\alpha \approx 92°40'$, $\beta \approx 42°20'$; 4) $c \approx 9{,}6$, $\alpha \approx 30°12'$, $\beta \approx$ $\approx 44°48'$; 5) $a \approx 6{,}1$, $\beta \approx 25°13'$, $\gamma \approx 34°47'$. **146.** 1) $b \approx 2{,}1$, $c \approx 2{,}9$, $\alpha \approx 105°$; 2) $a \approx 1{,}5$, $b \approx 1{,}8$, $\gamma \approx 75°$; 3) $b \approx 3{,}6$, $c \approx 5{,}3$, $\alpha = 102°$; 4) $a \approx 4{,}5$, $c \approx 12{,}3$, $\beta = 50°$; 5) $a \approx 4{,}7$, $b \approx 2{,}1$, $\gamma = 30°$. **147.** 1) $\alpha \approx 29°56'$, $\beta \approx 93°49'$, $\gamma \approx 56°15'$; 2) $\alpha \approx 36°20'$, $\beta \approx 26°23'$, $\gamma \approx 117°17'$; 3) $\alpha \approx 34°3'$, $\beta \approx 101°32'$, $\gamma \approx 44°25'$; 4) $\alpha \approx 28°57'$, $\beta \approx 46°34'$, $\gamma \approx 104°29'$; 5) $\alpha \approx 46°34'$, $\beta \approx 75°31'$, $\gamma \approx 57°55'$. **148.** 1) $b \approx 4{,}8$, $d_1 \approx 4{,}3$, $\approx 44°40' \approx 135°20'$; 2) $b \approx 8{,}4$, $d_1 \approx 6{,}9$, $\approx 54°47'$, $\approx 125°13'$; 3) $b \approx 2{,}8$, $d_1 \approx 6{,}4$, $\approx 73°44'$, $\approx 106°16'$. **149.** 1) $c \approx 17{,}8$, $\beta \approx 32°23'$, $\gamma \approx 107°37'$; 2) $b \approx 55{,}1$, $\beta \approx 102°58'$, $\gamma \approx 32°2'$; 3) $a = 7{,}8$, $\alpha =$ $= 30°$, $\beta = 75°$; 4) $b \approx 45{,}6$, $\beta \approx 130°32'$, $\gamma \approx 19°28'$; 5) $c \approx 17{,}8$, $\beta \approx 32°23'$, $\gamma \approx 107°37'$.

150. 1) $\alpha \approx 30°45'$, $\beta \approx 24°9'$, $\gamma \approx 125°6'$; 2) $\alpha \approx 115°$, $b \approx 1{,}9$, $c \approx 1{,}7$; 3) $b \approx 2{,}8$, $\alpha \approx 27°20'$, $\gamma \approx 112°40'$; 4) $\alpha \approx 12°21'$, $\beta \approx 147°39'$, $a \approx 12{,}5$. **151.** 1) $a \approx 6{,}9$, $b \approx 1{,}9$, $c \approx 7{,}8$, $C\angle = 113°$; 2) $a \approx 2$, $b \approx 3$, $c \approx 4$, $C\angle = 104°$; 3) $a \approx 4$, $b \approx 5$, $c \approx 7$, $C\angle = 34°$. **152.** 1) $c \approx 28{,}1$, $A\angle \approx 10°49'$, $B\angle \approx 38°6'$, $C\angle$ 131°5'; 2) $b \approx 24{,}2$, $A\angle \approx 38°12'$, $B\angle \approx 93°53'$, $C\angle \approx 47°55'$; 3) $c = 13{,}5$, $A\angle \approx 53°58'$, $B\angle \approx 68°55'$, $C\angle \approx 57°7'$. **153.** 1) ≈ 3,9 cm, ≈ 8,6 cm; 2) ≈ 3,7 cm, ≈ 6,7 cm. 154. 1) ≈ 4,8 cm, ≈ 4 cm, ≈ 6,2 cm; 2) ≈ 3,8 cm, ≈ 4,7 cm, ≈ 3,6 cm. **155.** 13 cm, 14 cm, 15 cm. **156.** a, $a\left(1+\sqrt{2}\right)$, $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **157.** ≈ 6,4 cm, ha $C\angle$ hegyes; ≈ 11,7 cm, ha $C\angle$ tompa. **158.** ≈ 57,4 cm, ≈ 67,7 cm, ≈70,5 cm. **159.** $2R\sin\alpha$, $2R\sin\beta$, $2R\sin(\alpha+\beta)$. **160.** 9 cm, 24 cm, 22°, 98°. **161.** $A\angle \approx 55°46'$, $B\angle \approx 124°14'$, $C\angle \approx 138°36'$, $D\angle \approx 41°24'$. **162.** $\frac{25\sqrt{39}}{39}$ cm. **163.** $\frac{2\sqrt{3\left(a^2+b^2+ab\right)}}{3}$. **164.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. **165.** ≈ 39,7 cm, ≈ 42,4 cm. *Útmutatás:* a kisebbik alap egyik csúcsán keresztül húzz a szárral párhuzamos egyenest! A szinusztétel alapján számítsd ki a kapott háromszög oldalait! **166.** $S = \frac{\left(a^2-b^2\right)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. *Útmutatás:* a kisebbik alap egyik csúcsán keresztül húzz a szárral párhuzamos egyenest! A szinusztétel alapján számítsd ki a kapott háromszög oldalait! **167.** $BC = \frac{a\sin\alpha\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha_1+\beta_1)}$. **169.** ≈ 44°20'. **171.** ≈ 29 m. **172.** ≈ 924,3 m. **173.** $AC = \frac{a\sin\beta\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\beta_1)}$. **174.** ≈ 162 m.

6. §

175. 1) b), c); 2) c), e). **176.** 6 n. e. (59. ábra);10 n.e. (60. ábra). **177.** c) 36 n. e. **178.** 1) 15 cm²; 2) 24 cm²; 3) 56 cm². **179.** 1) ≈ 1,9 cm²; 2) ≈ 7,3 cm²; 3) ≈ 17,7 cm². **180.** 1) 120 cm²; 2) $8\sqrt{5}$ cm²; 3) 336 cm². **181.** 1) 84 cm²; 2) 24 cm²; 3) 42 cm². **183.** 1) 12 cm²; 2) 90 cm²; 3) 156 cm². **184.** 1) 16 cm; 2) 8 cm. **185.** 1) $S \approx 34{,}5$ cm²; 2) $\gamma \approx 36°52'$; 3) $b = 24$ cm; 4) $a \approx 3{,}7$ cm. **186.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **187.** Ha az α szög fokmértéke nő 0°-tól 90°-ig, akkor a háromszög területe is nő. Az α szög további növekedésénél 90°-tól 180°-ig a háromszög területe csökken. A háromszög területe az $\alpha = 90°$ esetén a legnagyobb. **188.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a paralelogrammát az átlója két egyenlő területű háromszögre bontja! **189.** 1) ≈ 5,6 cm²; 2) ≈ 11,5 cm². **191.** 1) ≈ 1,4 cm²; 2) ≈ 29,8 cm². **192.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a paralelogrammát az átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja! **193.** 1) ≈ 19,3 cm²; 2) ≈ 41,1 cm². **194.** 1) 36 cm²; 2) ≈ 21,1 cm². **195.** 1) ≈ 19,1 cm²; 2) ≈ 26,8 cm². **196.** *Útmutatás:* jelöld az $ABC\Delta$ AD szögfelezőjét l-lel. Az $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ képlettel határozd meg az ABC, ACD és az ABD háromszögek területét, és alkalmazd az $S_{ABC\Delta} = S_{ACD\Delta} + S_{ABD\Delta}$ egyenlőséget. **197.** $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **198.** 1) 12 cm, 5,6 cm, 4,2 cm; 2) ≈ 12,9 cm, 12 cm,

11,2 cm. **199.** 36 cm, 51 cm, 75 cm. **200.** 84 cm^2. **201.** 1) $\approx$ 14,9 cm; 2) $\approx$ 10,4 cm. **202.** 1) 13 cm; 2) 16,25 cm. **203.** 1) $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm, $r = \sqrt{3}$ cm; 2) S = 6 cm^2, r = 1 cm; 3) S = 12 cm^2, R = 3,125 cm; 4) S = 24 cm^2, r = 2 cm, 5) R = 8,125 cm, r = 1,5 cm. **204.** *Útmutatás:* alkalmazd: 1) az $a = 2R\sin\alpha$, képleteket; 2) alkalmazd az $R = \frac{a}{\sin\alpha}$ képletet. **205.** $\frac{l^2\sin^2\alpha}{2\sin(\alpha-45°)\cos(\alpha-45°)}$. **206.** $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **207.** $S = \frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **208.** *Útmutatás*: jelöld O ponttal az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontját. Akkor ennek a négyszögnek a területe egyenlő az ABO, BCO, CDO és ADO háromszögek területeinek összegével! **209.** 288 cm^2. **210.** 270 cm^2. **211.** 12 cm. **212.** $S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$. *Útmutatás*: az egyik súlyvonalat hosszabbítsd meg egy olyan szakasszal, melynek hossza egyenlő a súlyvonal hosszának $\frac{1}{3}$-val. **213.** $S = 1:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$. *Útmutatás*: fejezd ki az $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ képletekből a háromszög oldalait és helyettesítsd be Heron képletébe! **215.** $\approx$ 1,9 kg. **216.** AD = 400 m.

2. fejezet

7. §

217. 81. ábra. **218.** 1) OA; 2) OM; 3) O pont; 4) $AOB\angle$. **219.** 1) b; 2) c. **220.** 1) 20 cm; 2) 32 cm; 3) 40 cm. **221.** 3 és 4. **222.** 1) 1,5 cm; 2) 2 cm; 3) $\frac{P}{8}$. **223.** 1) 4 cm; 2) 8 cm; 3) $\frac{d}{2}$. **224.** 1) 108°; 2) 150°; 3) 160°. **225.** 1) 18°; 2) 15°; 3) 36°. **226.** 1) 10; 2) 3; 3) 12. **227.** 1) 120°; 2) 154°; 3) 146°. **228.** 1) 8; 2) 12; 3) 9. **229.** 1) 36; 2) 10; 3) 20. **230.** 1) β = 36°, γ = 36°, n = 10; 2) α = 140°, γ = 40°, n = 9; 3) α = 160°, β = 20°, n = 18; 4) α= 120°, β = 60°, γ = 60°; 5) α = 168°, β = 12°, n = 30; 6) α = 135°, γ = 45°, n = 8; 6) β = 30°, γ = 30°, n = 12. **231.** *Útmutatás:* a sokszög külső szöge a $180° - \frac{180°(n-2)}{n}$ képlettel határozható meg. Hasonlítsd össze a külső szögét és a középponti szögét! **232.** *Útmutatás:* határozd meg a $\frac{180°(n-2)}{n}$ és $\frac{360°}{n}$ összegét! **233.**1) 4-szeresére; 2) 9-szeresére. **234.** $\frac{n-2}{n}$. **235.** 1) 4; 2) 3. **236.** 1) 8; 2) 12. **237.** 1) 7; 2) 5. **238.** 120°. **239.** 1) Igen; 2) igen. **240.** Nem. **241.** 60°. **242.** *Útmutatás:* 1) először bizonyítsd be a háromszögek egybevágóságát; 2) bizonyítsd be, hogy a keletkezett négyszögek egyenlőszárú

trapézok; 3) határozd meg a háromszögek megfelelő szögeit és alkalmazd az egyenlőszárú háromszög tulajdonságát! **244.** *Útmutatás:* először bizonyítsd be a háromszögek egybevágóságát! **246.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy az n-szög minden oldala és szöge egyenlő! **247.** 60°. **248.** *Útmutatás:* győződj meg arról, hogy a szabályos nyolcszög minden szöge 135°, minden oldala $a(\sqrt{2}-1)$! **249.** *Útmutatás:* kösd össze az adott pontot az n-szög csúcsaival, majd számítsd ki a keletkezett háromszögek területeinek összegét! **250.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy a kapott háromszög minden szöge 60°! **251.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy a sokszögek egy csúcsnál lévő szögeinek összege 360°! **252.** *Útmutatás:* alkalmazd az előző feladat útmutatását!

8. §

253. 1) $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$; 2) $R=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $r=\frac{a}{2}$; 3) $R=a$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **254.** 1) 1; 2) 1; 3) 1. **255.** 1) 1; 2) 1,75; 3) 1,5. **256.** 1) 12 cm; 2) $5\sqrt{3}$ cm; 3) 18 cm. **257.** 1) 12 cm; 2) $16\sqrt{3}$ cm; 3) 18 cm. **258.** 1) 5 cm; 2) 6 cm; 3) 8 cm. **259.** *Útmutatás:* hasonlítsd össze az $a_3=R\sqrt{3}$ és $a_3=2r\sqrt{3}$ képleteket! **260.** 1) $R=2$ cm, $r=1$ cm, $P=6\sqrt{3}$ cm; 2) $a=12$ cm, $r=2\sqrt{3}$ cm, $P=36$ cm; 3) $a=36$ cm, $R=12\sqrt{3}$ cm, $P=108$ cm; 4) $a=3\sqrt{3}$ cm, $R=3$ cm, $r=1{,}5$ cm. **261.** 1) 8 cm; 2) $2\sqrt{2}$ cm. **262.** 1) 1,5 cm; 2) 2 cm; 3) 2,5 cm. **263.** 1) 8 cm; 2) 16 cm; 3) 48 cm. **264.** 1) $R=3\sqrt{2}$ cm, $r=3$ cm, $P=24$ cm; 2) $a=16$ cm, $r=8$ cm, $P=64$ cm; 3) $a=20$ cm, $R=10\sqrt{2}$ cm, $P=80$ cm; 4) $a=4$ cm, $R=2\sqrt{2}$ cm, $r=2$ cm. **265.** 1) 24 cm; 2) 30 cm; 3) 42 cm. **266.** 1) 2 cm; 2) 8 cm; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. **267.** 1) 1,5 cm; 2) 9 cm; 3) 15 cm. **268.** 1) $R=20$ cm, $r=10\sqrt{3}$ cm, $P=120$ cm; 2) $a=14$ cm, $r=7\sqrt{3}$ cm, $P=84$ cm; 3) $a=20$ cm, $R=20$ cm, $P=120$ cm; 4) $a=6$ cm, $R=6$ cm, $r=3\sqrt{3}$ cm. **269.** 1) 6 cm; 2) $2m\sqrt{3}$. **270.** 1) 4 cm, 8 cm; 2) n, $2n$. **271.** 1) 2 cm, $2\sqrt{2}$ cm; 2) 1 cm, $\sqrt{2}$ cm. **272.** 1) $6(2+\sqrt{3})$, $3(3+2\sqrt{3})$; 2) $10(2+\sqrt{3})$, $5(3+2\sqrt{3})$; 3) $2m(2+\sqrt{3})$, $m(3+2\sqrt{3})$. **273.** 1) $\sqrt{6}$ cm; 2) $3\sqrt{6}$ cm; 3) $\frac{P\sqrt{6}}{9}$. **274.** 1) 5 cm; 2) 1 cm; 3) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. **275.** 1) 30 cm; 2) 34 cm; 3) $2a$. **276.** 1) 14 cm; 2) 12 cm; 3) $\frac{2a}{3}$. **277.** 1) 24 cm; 2) $24\sqrt{3}$; 3) $\frac{2P\sqrt{3}}{3}$. **278.** 1) $a=3$ cm, $R=3$ cm, $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm; 2) $a=4$ cm, $R=4$ cm, $r=2\sqrt{3}$ cm; 3) $a=\frac{d}{2}$, $R=\frac{d}{2}$, $r=\frac{d\sqrt{3}}{4}$. **279.** 1) 4 cm, $2\sqrt{3}$ cm; 2) 16 cm, $4\sqrt{3}$ cm; 3) $2a$, $a\sqrt{3}$. **280.** 1) $a=10$ cm, $r=5\sqrt{3}$ cm; 2) $a=12$ cm, $r=6\sqrt{3}$ cm; 3) $a=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $r=\frac{d}{2}$. **281.** *Útmutatás:* két esetet vizsgálj!

1) $6\sqrt{3}$ cm vagy $3\sqrt{3}$ cm; 2) 6 cm vagy 3 cm; 3) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ vagy $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **282.** Szabályos háromszög. **283.** Szabályos négyszög. **284.** Nem. **285.** 1) $4\sqrt{3}$ cm; 2) $6\sqrt{3}$ cm. **286.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **287.** 1) Ha $n < 6$; 2) ha $n = 6$; 3) ha $n > 6$. **288.** 1) $2(3 + 2\sqrt{3})$; 2) $4(3 + 2\sqrt{3})$. **289.** $\frac{a}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$. **290.** $\frac{a}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$. **291.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **292.** *Útmutatás:* bontsd fel a sokszöget nyolc egybevágó háromszögre és vizsgálj meg egyet! 1) Alkalmazd a koszinusztételt! 2) Alkalmazd Pitagorasz tételét! **293.** *Útmutatás:* alkalmazd az előző feladat útmutatását! **294.** 5,3 m. **295.** 4,2 m; 2,3 m; 2,1 m.

9. §

296. 1) Az R sugarú körön jelölj egy tetszőleges pontot! 2) Vedd körzőnyílásba a körvonal R sugarát és az adott ponttól jelölj ki a körvonalon egymásután öt pontot! 3) Kösd össze az adott pontot és egy hatszöget kapsz! **299.** 1) Mérj fel körzővel egy tetszőleges A ponttól az $AB = a$ szakaszt! 2) Vedd körzőnyílásba az a szakaszt és rajzolj körvonalat, melynek középpontja az A pont, majd olyat melynek középpontja a B pont! 3) Az adott körvonalak C metszéspontját kösd össze az adott A és B pontokkal. Vizsgáld meg a kapott ABC háromszöget! **300.** *Útmutatás:* rajzolj adott sugarú körvonalat, húzz a körvonal középpontján keresztül merőleges egyeneseket! **302.** *Útmutatás:* írj az adott körvonalba megfelelő sokszöget! A körvonalhoz a sokszög csúcsain keresztül húzott érintők metszéspontjai a körülírt sokszög csúcsai. **303.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a körvonalba írt szabályos hatszög oldala egyenlő a körvonal sugarával. **304.** *Útmutatás:* először határozd meg a köré írt körvonal sugarát! **305.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a négyzet csúcsai a rombusz átlói által bezárt szög szögfelezőinek és az oldalak metszéspontjai! **306.** *Útmutatás:* húzd meg az n oldalú sokszög oldalfelező merőlegeseit! A merőlegesek és a körvonal metszéspontjai, valamint az adott n-szög csúcsai lesznek a $2n$-szög csúcsai. **308.** *Útmutatás:* alkalmazd az előző feladat állítását! **310.** *Útmutatás:* először bizonyítsd be, hogy a $CDEO$ és $BOFA$ négyszögek rombuszok! **312.** 1) $R \approx 2{,}6$ cm; 2) $R \approx 3{,}4$ cm. **313.** 1) $R \approx 3$ cm; 2) $R \approx 5{,}8$ cm. **314.** 1) $R \approx 5{,}3$ cm; 2) $R \approx 3{,}6$ cm. **315.** 1) $R \approx 4$ cm; 2) $R \approx 5{,}8$ cm. **316.** *Útmutatás:* szerkessz egy kisegítő egyenlőszárú AOB háromszöget, melynek AB az alapja, OC a magassága, $D \in OC$, $AD = OD$ és $DC = AB$! **317.** *Útmutatás:* alkalmazd az előző feladat útmutatását! **318.** *Útmutatás:* a négyzet minden csúcsától mérj fel az átló felével egyenlő szakaszt, majd a kapott nyolc pontot folyamatosan kösd össze! **319.** *Útmutatás:* rajzolj egy körvonalat, és oszd fel öt egyenlő részre. Kösd össze a kapott pontokat és egy csillagot kapsz!

10. §

321. 1) 10π cm; 2) 20π cm; 3) 24π cm. **322.** 1) 4π cm; 2) 6π cm; 3) 8π cm. **323.** 1) 2 cm; 2) 7 cm; 3) 1 cm. **324.** 1) $D = 5$ cm, $C = 5\pi$ cm; 2) $R = 10$ cm, $C = 20\pi$ cm; 3) $R = 9{,}2$ cm, $D = 18{,}4$ cm; 4) $R = 4{,}8$ cm, $C = 9{,}6\pi$ cm; 5) $D = 22$ cm, $C = 22\pi$ cm. **325.** *Útmutatás:* először határozd meg a körvonal sugarát! **326.** 1) 10 π-vel növekszik; 2) csökken 6 π-vel; 3) 2-szeresére növekszik. **327.** 1) 6π cm; 2) 12π cm. **328.** 1) 8π cm; 2) $8\sqrt{2}\,\pi$ cm. **329.** 1) 13π cm; 2) 25π cm; 3) 20π cm. **330.** 1) 3π cm; 2) $2\sqrt{2}\,\pi$ cm; 3) $4\sqrt{3}\,\pi$ cm. **331.** 1) $10\sqrt{3}\,\pi$ cm; 2) 20π cm. **332.** 1) π cm; 2) 2π cm; 3) 4π cm. **333.** 1) $\frac{36}{\pi}$ cm; 2) 108 cm; 3) $\frac{60}{\pi}$ cm. **334.** 1) 80°; 2) 108°; 3) 80°. **335.** 1) 8π cm; 2) 12π cm. **336.** 1) $14{,}4\pi$ cm; 2) $9{,}6\pi$ cm. **337.** 1) 6π cm; 2) 24π cm. **338.** 1) $\frac{5\pi\sqrt{73}}{2}$ cm; 2) $\frac{13\pi\sqrt{41}}{5}$ cm. **339.** $8\sqrt{3}\,\pi$ cm; 2) $7\sqrt{3}\,\pi$ cm. **340.** 1) 6 cm; 2) 1 cm. **341.** *Útmutatás:* először határozd meg a körvonal sugarát! **342.** 1) ≈ 15 cm; 2) 1,5 *m*. **343.** 1) 3 cm; 2) 5 cm. **344.** A kerületeik egyenlők. **345.** 1) $\frac{15\pi}{4}$ cm; 2) 90 cm; 3) 30°. **346.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$. **347.** 1) $\frac{a\pi}{3}$; 2) $\frac{a\pi\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2a\pi\sqrt{3}}{9}$. **348.** 1) $2\pi\,(a+b)$; 2) $a\,\pi$; 3) $2a\,\pi$. **349.** 1) 16π cm; 2) 2π cm. **350.** 1) 50π cm; 2) 130π cm. **351.** Az adott körvonal hossza. **352.** 294 cm. **353.** $1\frac{1}{3}$ cm. **354.** Az első körvonal. **355.** $1 : \sqrt{3}$. **356.** 94. **357.** 1) ≈ 64 cm; 2) ≈ 80 cm. **358.** ≈ 126 m. **359.** $\approx 5{,}7$ m. **360.** *Útmutatás:* először meg kell számolni, hányszor tekeredik fel a vödör lánca a dobra! **361.** ≈ 40024 km.

11. §

363. 1) 16π cm^2; 2) 36π cm^2; 3) 81π cm^2. **364.** 1) 25π cm^2; 2) 36π cm^2; 3) 64π cm^2. **365.** 1) 5 cm; 2) 3 cm; 3) 6 cm. **366.** *Útmutatás:* először határozd meg a körlap sugarát! **367.** *Útmutatás:* alkalmazd a $D = 2R$ és a $C = 2\pi R$ képletet! **368.** 1) Növekszik 9-szeresére; 2) csökken 4-szeresére; 3) 16-szorosára növekszik. **369.** 2. **370.** 1) $\frac{\pi}{4}$ cm^2; 2) 9π cm^2; 3) 16π cm^2. **371.** 1) 2 cm; 2) 4 cm. **372.** 1) 25π cm^2, 50π cm^2; 2) 49π cm^2, 98π cm^2; 3) 81π cm^2, 162π cm^2. **373.** 1) 25π cm^2; 2) 169π cm^2; 3) 100π cm^2. **374.** 1) 108π cm^2; 2) 144π cm^2. **376.** 1) π cm^2; 2) 2π cm^2; 3) 10π cm^2. **377.** 1) 18π cm^2; 2) 45π cm^2; 3) 72π cm^2. **378.** 1) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; 2) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$. **379.** *Útmutatás:* alkalmazd az $S = \pi R^2$ képletet! **380.** 1) 4π cm; 2) 2π cm; 3) 18π cm. **381.** 1) $C = 20\pi$ cm, $S = 100\pi$ cm^2; 2) $R = 10$ cm, $S = 100\pi$ cm^2; 3) $R = 5$ cm, $C = 10\pi$ cm; 4) $R = 1$ cm, $S = \pi$ cm^2; 5) $C = 6\pi$ cm, $S = 9\pi$ cm^2; 6) $R = 6$ cm, $S = 36\pi$ cm^2;

7) $R = 3$ cm, $C = 6\pi$ cm. **382.** A félkör területe nagyobb. **383.** 2-szeresére. **384.** A köré írt körlap területe a beírt kör területének négyszerese. **385.** 1) 10 cm; 2) 12 cm. **386.** 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **387.** 1) 16π cm^2, 4π cm^2; 2) 4π cm^2, π cm^2. **388.** 1) 8π, 4π; 2) 18π, 9π. **389.** $S = \pi(R-r)(R+r)$. **390.** 1) 60π cm^2; 2) 8π cm^2. **391.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **392.** 1) 160°; 2) 72°. **393.** 1) $\approx 12{,}6$ cm; 2) ≈ 6 cm. **394.** 1) $R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$; 2) $R^2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$; 3) $R^2(\pi - 2)$; 4) $R^2(4 - \pi)$. **395.** $\frac{8S}{\pi}$. **396.** $\frac{Q\pi\sqrt{3}}{3}$. **397.** $\frac{m^2\pi}{4}$. **398.** $\frac{9l^2}{64\pi}$. **399.** 3 : 2. **400.** $S\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}R\right)$. **401.** a^2. **402.** 10 cm. **403.** 1) $\approx 644{,}4$ cm^2; 2) ≈ 1790 cm^2. **404.** 0,75. **405.** 43,4%. **406.** $\approx 9{,}6$ dm^2.

3. fejezet

12. §

410. Az A pont a II. negyedben van, a B pont a IV. negyedben van, a C pont az I. negyedben van, a D pont a III. negyedben van, az E pont a II. negyedben van, az F pont az I. negyedben van, a K pont a IV. negyedben van, az L pont a III. negyedben van. **411.** 1) $B(3; -4)$; 2) $B(-3; 4)$; 3) $B(-3; -4)$; 4) $B(3; 4)$. **412.** 1) Igen, nem, nem; 2) nem, nem, igen. **413.** 1) Nem; 2) igen, az OX tengely; 3) igen, az OY tengely. **415.** 1) 5; 2) 17; 3) $\sqrt{145}$; 4) $5\sqrt{5}$. **416.** 1) $d = \sqrt{26}$, $R = \frac{\sqrt{26}}{2}$, 2) $d = 10$, $R = 5$; 3) $d = 5$, $R = 2{,}5$. **417.** 1) $AB = 2$, $BC = 3\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$; 2) $AB = 25$, $BC = 11$, $AC = 30$; 3) $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 4$, $AC = 2\sqrt{2}$. **418.** 1) $AB = BC = 3\sqrt{10}$; 2) $AB = AC = \sqrt{10}$; 3) $AB = AC = \sqrt{13}$. **419.** *Útmutatás*: alkalmazd Pitagorasz tételét! **420.** 1) 2; 2) -3 vagy 3; 3) 4. **421.** 1) (4; 0) és (0; 4); 2) (0; 0). **422.** 1) 10, 10, 12; 2) $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 6. **423.** 1) Lehet, a D és az M pontban; 2) lehet a D pontban. **424.** 1) $D(-6; 9)$ vagy $D(10; 1)$ vagy $D(22; 17)$;2) $D(-2; 1)$ vagy $D(2; -1)$ vagy $D(4; 3)$. *Útmutatás*: három esetet vizsgálj! **425.** 1) (9; 4); 2) (2; -3). **426.** (3; 1) és (2; -1) vagy (-1; 3) és (-2; 1). **428.** 1) Téglalap; 2) négyzet. **429.** 1) 50 n. e.; 2) 18 n.e. **430.** 1) 34 n.e.; 2) 84,5 n.e. **432.** 1) 135°; 2) 45°. **434.** 1) Derékszögű; 2) tompaszögű. **435.** 1) 4,5 n. e.; 2) 7 n. e. **436.** 7 n. e. **437.** 12,5 n. e. **438.** 1) $a\ \sqrt{2}$ – az egy egység oldalú négyzet átlója; $a\ \sqrt{5}$ – az 1 és 2 egység oldalú téglalap átlója; 2) $a\ \sqrt{2}$ – a két egység oldalú négyzet átlója; $a\ \sqrt{5}$ – a 2 és 4 egység oldalú téglalap átlója. **440.** 1) Nem; 2) igen. **441.** $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ m.

13. §

442. 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **443.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **444.** A (1; 1), B (5; 1), M (3; 1) (155. ábra); $A(2; 3)$, $B(2; -1)$, $M(2; 1)$ (156. ábra); $A(-1; -1)$, $B(3; 1)$, $M(1; 0)$ (157. ábra). **445.** 1) (1; 0); 2) (3,5; 2,5); 3) (8; 12). **446.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **447.** 1) $B(-5; -6)$; 2) O (0; 0); 3) $A(-15; 19)$; 4) $O(3,5; -1)$; 5) $B(-11; -7)$; 6) $A(-3; 12)$. **448.** 1) $(1,5; 4,5)$, $(4,5; 1,5)$, $(0; 0)$, $BM = 6\sqrt{2}$; 2) $(2,5; -1,5)$, $(1; -1)$, $(0,5; -2,5)$, $BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; 3) $(0,5; 2)$, $(2; 0)$, $(0,5; -1)$, $BM = 2,5$. **449.** 1) $(-0,5; 0,5)$; 2) $(-2; 10)$; 3) $(1,5; -0,5)$. **450.** 1) $O(-2; -1)$; 2) $O(2; 1)$; 3) $O(2; -1)$. **451.** 1) $P(-4,5; 0)$, $Q(-4; -2)$, $T(-3,5; -4)$; 2) $P(3; 0,5)$, $Q(5; -2)$, $T(7; -4,5)$. **452.** 1) 3,5; 5; $\frac{\sqrt{37}}{2}$; 2) 25, 17, $\sqrt{82}$. **454.** 1) $O(-1,5; -0,5)$, $D(-6; -2)$; 2) $O(-2; 10)$, $C(-2; 16)$. **455.** 1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **456.** 1) (3,5; 1); 2) $(-1,5; 2,5)$. **457.** 1) $A(1; 3)$, $B(-3; 3)$, $C(3; -3)$; 2) $A(26; 50)$, $B(12; 2)$, $C(-10; 2)$; 3) $A(2; -1)$, $B(-2; -5)$, $C(-2; 3)$; 4) $A(-1; -3)$, $B(1; 7)$, $C(5; 1)$. **459.** 1) Nem; 2) igen. **461.** Igen.

14. §

466. $C(0; 0)$, $R = 2$ (162. ábra); $C(1; 0)$, $R = 2$ (163. ábra); $C(1; 2)$, $R = 2$ (164. ábra). **468.** 1) $C(2; 1)$, $R = 4$; 2) $C(1; 3)$, $R = \sqrt{3}$; 3) $C(-3; 4)$, $R = \sqrt{5}$; 4) $C(-4; 1)$, $R = 5$; 5) $C(0; 3)$, $R = \sqrt{2}$; 6) $C(-1; 0)$, $R = 7$. **469.** 1) Nem; 2) A pont – igen, B, C, D pontok – nem; 3) Nem. **470.** 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$; 3) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$. **471.** 1) $x^2 + (y+1)^2 = 25$; 2) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 3) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 4) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 32$; 5) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 32$. **472.** 1) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 18$; 2) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$; 3) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$. **473.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **474.** 1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$; 2) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$; 3) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$. **475.** 1) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$; 2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$; 3) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. **476.** 1) A pont – igen, B, C pontok – nem; 2) B pont – igen, A, C pontok – nem. **477.** 1) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$; 2) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$. **479.** 1) Az egyenes metszi a körvonalat; 2) az egyenes érinti a körvonalat. **480.** 1) $B(-6; 2)$; 2) $B(-2; -2)$. **481.** 1) $x^2 + (y-1)^2 = 8$ vagy $x^2 + (y-5)^2 = 8$; 2) $x^2 + y^2 = 13$ vagy $x^2 + (y-6)^2 = 13$. **483.** 1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; 2) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$. **484.** 1) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ vagy $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$; 2) $(x-2,5)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$ vagy $(x+2,5)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$. **485.** 1) $(x-12)^2 + (y-15)^2 = 225$ vagy $x^2 + (y-3)^2 = 9$; 2) $x^2 + (y-3)^2 = 9$ vagy $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 9$. **486.** 1) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$; 2) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$. **487.** 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$; 2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. **489.** 1) $4\sqrt{6}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $2\sqrt{21}$;

2) $\sqrt{18+12\sqrt{2}}$, $\sqrt{18-12\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}$. **490.** 1) $(x-12)^2+(y-5)^2=169$; 2) $(x-4)^2+(y-1{,}5)^2=28{,}25$. **491.** 1) $(2\sqrt{3};-2)$, $(-2\sqrt{3};-2)$; 2) $(2;2\sqrt{3})$, $(2;-2\sqrt{3})$. **492.** 1) $R=\sqrt{82}$, $C(-4;5)$; 2) $R=\sqrt{34}$, $C(5;-3)$; 3) $R=2\sqrt{6}$, $C(2;-2)$; 4) $R=2$, $C(4;0)$. **494.** 20. **495.** Ha az adott tárgyakat egy háromszög csúcsainak tekintjük, akkor a fényforrást az adott háromszög köré írt körvonal középpontjába kell elhelyezni.

15. §

496. 1) $k=3$; 2) $k=-3$; 3) $k=1$; 4) $k=-2$; 5) $k=-\sqrt{3}$; 6) $k=\sqrt{2}$. **498.** $A(1;1)$, $B(3;2)$, az AB egyenes egyenlete a 3) egyenlet (174. ábra); $A(-1;2)$, $B(2;-2)$, az AB egyenes egyenlete a 2) egyenlet (175. ábra); $A(-2;-1)$, $B(2;3)$, az AB egyenes egyenlete az 1) egyenlet (176. ábra). **499.** 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $y=x$; 4) $y=-x$. **501.** 1) $y=2$, $x=-1$; 2) $y=-2$, $x=-1$; 3) $y=2$, $x=4$; 4) $y=2$, $x=-4$; 5) $y=-2$, $x=4$. **502.** 1) $P=12$, $S=9$; 2) $P=32$, $S=64$; 3) $P=38$, $S=78$. **503.** 1) $x+y-1=0$; 2) $3x+5y+4=0$; 3) $3x-y-10=0$. **504.** 1) AB: $3x+2y=0$, BC: $3x+4y-6=0$, AC: $y+3=0$; 2) AB: $2x+y=0$, BC: $4x-3y+10=0$, AC: $3x-y-5=0$; 3) AB: $2x+y+1=0$, BC: $3x-y-6=0$, AC: $x+y-2=0$. **505.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **506.** 1) Például (4; 1) és (2; 3); 2) például (0; –3) és (–2; 2); 3) például (–1; 2) és (3; –4). **507.** 1) $y=3x+1{,}5$; 2) $2x+y+1=0$; 3) $x-2y-8=0$. **508.** 1) $\left(\frac{12}{7};\frac{27}{14}\right)$ 2) $\left(\frac{13}{15};\frac{12}{5}\right)$; 3) $(-19;-14)$. **509.** 1) $y=x$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. **512.** 1) $y=5x+5$ vagy $y=5x-5$; 2) $y=-x+5$ vagy $y=-x-5$. **513.** 1) $y=x+3$; 2) $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+1$. **514.** 1) $y=0{,}3x+2y-6=0$, $3x+4y=0$; 2) $3x-y=0$, $2x+y-10=0$, $4x-3y=0$. **515.** 1) $D(-6;-2)$; 2) $D(9;6)$. **516.** $y=x-a$, $y=x+a$, $y=-x-a$, $y=-x+a$. **517.** 1) $y-2=0$, $x+y-1=0$, $x-y-1=0$ vagy $y-2=0$, $x-y+3=0$, $x+y-5=0$; 2) $y+3=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$ vagy $y+3=0$, $\sqrt{3}x+3y+2\sqrt{3}+9=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$. **518.** 1) 45° és 45°; 2) 135° és 45°. **519.** 1) 0,65; 2) 2,5; 3) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$. **520.** 1) $\frac{2}{3}$ n. e; 2) 4,8 n. e. **524.** $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}=\frac{c_1-d_1}{d_2-c_2}$. **525.** 1) A $2a_1x+2a_2y-\left(a_1^2+a_2^2\right)=0$ egyenes; 2) a $\left(2b_1-2a_1\right)x+\left(2b_2-2a_2\right)y+\left(a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2\right)=0$ egyenes. **526.** 1) $y=R$, $y=-R$; 2) $x=R$, $x=-R$. **527.** $yy_0+xx_0=R^2$. **528.** 12. **529.** 1) $\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$; 2) $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; **530.** 1) $\frac{|y_0-b-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}$; 2) $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **533.** Egyenes. **534.** 0,5 óra, 2 km.

16. §

535. $A(0; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (183. ábra); $A(-1; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(1;0)$ (184. ábra); $A(1; 1)$, $B(1; 4)$, $C(3; 1)$ (185. ábra). **536.** Igen (186. ábra); nem (187. ábra); nem (188. ábra). **538.** 1) (0; 0), (0; 2), (2; 2), (2; 0) vagy (0; 0), (0; 2), (– 2; 2), (– 2; 0); 2) (– 1; 0), (1; 0), (– 1; 2), (1; 2) vagy (– 1; 0), (1; 0), (– 1; – 2), (1; – 2); 3) (1; 1), (1; – 1), (– 1; 1), (– 1; – 1). **539.** 1) (0; 0), (0; 6), (8; 0) vagy (0; 0), (0; 6), (– 8; 0); 2) (0; – 3), (0; 3), (8; 3) vagy (0; –3), (0; 3), (8; – 3), vagy (0; – 3), (0; 3), (– 8; 3), vagy (0; – 3), (0; 3), (– 8; – 3); 3) (– 4; 0), (4; 0), (4; 6), vagy (– 4; 0), (4; 0), (4; –6), vagy (– 4; 0), (4; 0), (– 4; 6), vagy (– 4; 0), (4; 0), (– 4; – 6). **540.** 1) $\sqrt{13}$, 2,5, $\frac{\sqrt{73}}{2}$; 2) $\sqrt{61}$, 6,5, $\frac{\sqrt{601}}{2}$; 3) $\sqrt{193}$, 12,5, $\frac{\sqrt{2353}}{2}$. **541.** 1) $\sqrt{85}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) 5. **542.** 1) 5; 2) 13; 3) 25. **543.** 1) $(-a; 0)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $(a; 0)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ vagy $(0; -a)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ $(0; a)$; $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$; 2) *Útmutatás:* 12 esetet vizsgálj! **544.** Az adott négyzetek két csúcsa közös. Ha a másik két csúcs az OY tengelyen van, akkor az abszcisszáik ellentétes számok. Ha a közös csúcsuk az OX tengelyen van, akkor a másik két csúcs ordinátája ellentétes szám. **545.** Igen. Például azon háromszögek, melyek csúcsai az (1; 1), (2; 1) és (1; 2), valamint a (2; 2), (4; 2) és (2; 4) koordinátájú pontok. *Útmutatás:* ahhoz, hogy igazoljuk az adott alakzatok létezését, elég példát felhozni. **546.** 13 cm. **547.** *Útmutatás:* vegyél fel olyan derékszögű koordinátarendszert, melynek az origója illeszkedik az AB szakasz egyik végpontjára. **548.** 1) A körvonal középpontja a (2; 0) koordinátájú pont, sugara $2\sqrt{2}$; 2) az AB szakaszra merőleges egyenes a szakaszt 5 : 2 arányban osztja az A ponttól számítva. **551.** 1) $a = 12\sqrt{2}$, $d = 24$; 2) $a = 2\sqrt{2}$, $d = 4$. **552.** 1) Nem; 2) érinti. **553.** *Útmutatás:* vegyél fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az az oldal, amelyre a súlyvonalat húzták, illeszkedjen az abszcissza tengelyre, a súlyvonal talppontja pedig az origóra. **556.** Az M pont és a körvonal távolsága $3\frac{1}{3}$. **560.** Az $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$ egyenes, ahol b az A és a B pont távolsága. *Útmutatás:* vegyél fel olyan koordináta-rendszert, melyben az A pont az origóban, a B pont az abszcissza tengelyen van. **563.** *Útmutatás:* illessz a rajzra koordináta-rendszert és határozd meg a harmadik oldal felezőpontját!

4. fejezet

17. §

566. Az adott transzformáció nem egybevágósági, mert nem tartja meg két pont között a távolságot. **567.** 1) Az X' és Y' pontok a képei; 2) az CX' és $X'Y'$ szakaszok a képei; 3) igen. **568.** Igen. **569.** $AB = A'B'$. **570.** 1) Nem létezik; 2) létezik. **571.** *Útmutatás:* B középpontú 3 cm sugarú körvonal. **576.** 1) Nem létezik; 2) létezik, ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybevágók; 3) nem létezik. **577.** 1) Igen; 2) igen. **578.** 1) Nem féltetlenül. **580.** Nem féltetlenül. **581.** Igen. **582.** Nem. Egyenlőszárú háromszögre lehetséges. **583.** *Útmutatás:* alkalmazd az egybevágósági transzformációról szóló tétel következményét. **585.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem mindig. **586.** *Útmutatás:* alkalmazd az egybevágósági transzformációról szóló tétel következményét. **588.** *Útmutatás:* az a és b párhuzamos egyeneseket egy transzformáció az a' és b' egymást metsző egyenesekbe viszi át. Mivel a transzformáció megtartja a pontok sorrendjét, ezért az a és b egyenesek egymást metszők. **589.** 5 cm^2 (203. ábra); $(6\sqrt{3} - 4)$ cm^2 (204. ábra).

18. §

590. 228. *b* ábra. **593.** 229. *c* ábra. **597.** Szerkeszd meg a háromszög csúcsainak szimmetrikus képeit! **598.** 1) A' $(-3; -5)$; 2) A' $(3; -5)$; 3) A' $(-5; -7)$. **599.** 1) A' $(-2; -2)$, B' $(-6; -6)$; 2) A' $(6; -2)$, B' $(2; -6)$; 3) A' $(2; 2)$, B' $(-2; -2)$. **601.** *Útmutatás:* szerkeszd meg az MN szakasz felező merőlegesét! **605.** *Útmutatás:* szerkeszd meg a körvonal tetszőleges pontjának a körvonal középpontjára szimmetrikus képét! **606.** 1) A' $(-4; -5)$; 2) A' $(4; 5)$. **607.** 1) A' $(2; -1)$, B' $(4; -1)$; 2) A' $(-3; 3)$, B' $(3; -3)$; 3) A' $(3; -2)$, B' $(6; -4)$. **609.** *Útmutatás:* először határozd meg azt a pontot, melyre a C és a B pontok tükrösek. **610.** *Útmutatás:* alkalmazd az A és B pontok tükrösségének tulajdonságait! **611.** *Útmutatás:* alkalmazd azt az ismertető jelet, hogyha egy négyszög átlóit metszéspontjuk felezi, akkor ez a négyszög paralelogramma. **612.** 1) A' $(-1; -2)$, C' $(-7; -3)$, B' $(-4; -6)$. **613.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **615.** *Útmutatás:* ha az $ABCD$ négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor az A, B, C és D csúcsok képei megfelelően a C, D, A és B. Tehát az AB és BC oldalak képei a CD és DA oldalak. Ezért $AB \| CD$ és $BC \| DA$. **616.** Az adott egyenestől egyenlő távolságra lévő egyenes. **617.** *Útmutatás:* először húzd meg azt az l egyenest melyre az A és A' pontok tükrösek, majd jelöld ki a B' és C' pontokat, a B és a C pontok l egyenesre vonatkoztatott képeit! **620.** *Útmutatás:* alkalmazd azt, hogy a középpontok mértani helye mindegyik körvonal szimmetria, tengelye. **621.** *Útmutatás:* vedd figyelembe a rombusz átlóinak tulajdonságát. **625.** Trapéz – egytől nem több; téglalap, rombusz – kettő; négyzet – négy. **627.** *Útmutatás:* rajzolj egy O középpontú, OA sugarú körvonalat. Mérj fel az A ponttól három OA hosszúságú húrt, így megkapod az A' pontot! **629.** *Útmutatás:* szerkeszd meg az a egyenes P pontra vonatkoztatott képét. **630.** *Útmutatás:* vegyél fel az adott egyenesen két tetszőleges M és N pontot. Akkor az A' pont

az A pont adott egyenesre vonatkoztatott képe az M és N középpontú, MA és NA sugarú körvonalak metszéspontja. **631.** *Útmutatás:* a tengelyes szimmetria tulajdonságai alapján igazold, hogy a háromszög oldalai egyenlők. **632.** *Útmutatás:* szerkeszd meg a B pont l egyenesre vonatkoztatott B_1 képét. Az AB_1 és az l egyenesek N metszéspontja a keresett pont. **633.** *Útmutatás:* szerkeszd meg valamelyik szög száraira az M pont M_1 és M_2 tükörképeit. Húzd meg az M_1M_2 egyenest. Jelöld meg ezen egyenes és a szög szárainak metszéspontjait X-szel és Y-nal. Az $MXY\triangle$ a keresett háromszög. **634.** *Útmutatás:* vedd figyelembe a 632. feladat megoldását.

19. §

635. 242., *c* ábra. **636.** *Útmutatás:* mérd fel az OM szakasszal egyenlő ON szakaszt. **642.** 1) Az elforgatás középpontjára illeszkedő egyenes; 3) az adott szöggel egyenlő szögbe. **645.** *Útmutatás:* forgasd el az adott egyenes két tetszőleges pontját adott szögre az M pont körül. **646.** *Útmutatás:* forgasd el az A pont körül adott szögre a körvonal középpontját és egy tetszőleges pontját. **647.** Az elforgatások középpontjainak mértani helye az XX' szakasz felező merőlegese. **648.** Az elforgatások középpontjainak mértani helye a körvonalak középpontjait összekötő szakasz felező merőlegese. **652.** *Útmutatás:* mutasd meg, hogy a közös kezdőpontú szakaszok esetében a magasságok metszéspontja, a többi esetében – olyan háromszög csúcsai, melyek szárai egyenlő hosszúságúak és szárszöge 120°. **653.** *Útmutatás:* 120°-ra forgasd el a háromszöget. **654.** *Útmutatás:* a négyzetet 90°-ra forgasd el. **655.** *Útmutatás:* a körvonalak középpontjait összekötő szakasz felező merőlegesén vedd fel azt a pontot, melyből a szakasz 45°-os szög alatt látszik. **656.** Az elforgatás középpontja az AA' és BB' szakaszok felező merőlegeseinek középpontja. Ha $AA' \| BB'$ és $AA' \neq BB'$ vagy $AA' = BB'$, nem létezik az elforgatás középpontja, mivel az AA' és BB' szakaszok felező merőlegesei nem metszik egymást. **657.** *Útmutatás:* a B csúcs körül forgasd el a háromszöget 90°-ra! **659.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$. **660.** 1) 10 perc alatt 13-ra; 2) 20 perc alatt 13-ra. **661.** *Útmutatás:* határozd meg annak az elforgatásnak a középpontját, amely az $ABCD$ téglalapot az $A_1B_1C_1D_1$ téglalapba viszi át (246. ábra). Ehhez rajzold meg az AA_1 és BB_1 szakaszok l_1 és l_2 felező merőlegeseinek O metszéspontját. Egy 90°-os O pont körüli elforgatás az $ABCD$ téglalapot az $A_1B_1C_1D_1$ téglalapba viszi át.

20. §

662. 255., *b* ábra. **665.** Igen. **666.** 1) Igen; 2) nem. **669.** Ha $AB \| CD$ vagy AB és CD egy egyenesre illeszkednek. **672.** Ha $AB \| CD$ és $AB = CD$ vagy $AB = CD$ és az AB, CD szakaszok egy egyenesre illeszkednek. **673.** Végtelen. **675.** 4 cm^2. **676.** *Útmutatás:* hajts végre olyan párhuzamos eltolást, amely az $ABCD$ ($BC \| AD$) trapéz AB szárának B végpontját a C csúcsba viszi át. Vizsgáld meg a kapott háromszöget. **677.** *Útmutatás:* párhuzamosan told el a trapéz szárát úgy, ahogy azt a 258. ábra mutatja. **678.** *Útmutatás:* párhuzamosan told el a

trapéz átlóját úgy, ahogy azt a 259. ábra mutatja. **679.** 4 cm. *Útmutatás:* használd a 258. ábrát. **680.** *Útmutatás:* használd a 258. ábrát. **681.** *Útmutatás:* használd a 259. ábrát. **682.** *Útmutatás:* tételezzük fel, hogy ABC háromszög AM és BN súlyvonalai egyenlők. A BN szakaszt told el párhuzamosan úgy, hogy az N pont az M pontba menjen át. Az $AMB'\triangle$egyenlőszárú. Vizsgáld meg az ANB és BMA háromszögeket. **684.** *Útmutatás:* használd a 259. ábrát. **685.** *Útmutatás:* hajtsd végre azt a párhuzamos eltolást, amely az ABC háromszög CM súlyvonalának C végpontját az M pontba viszi át. **686.** *Útmutatás:* legyen az A és B helységek közötti keresett út az $AMNB$ töröttvonal (261. ábra). Szerkeszd meg az A pont A' képét annál a párhuzamos eltolásnál, amely az M pontot az N pontba viszi át! Határozd meg az $A'B$ egyenes és a B faluhoz közelebbi folyópart K metszéspontját! Húzz a K pontból merőlegest a másik folyópartra!

21. §

687. *271., b* ábra. **689.** 1) $k = 4$. **690.** $k = 1$. **692.** Nem. Például a négyzet nem hasonló a téglalappal, bár szögeik egyenlők, nem hasonló a rombusszal, bár oldalaik arányosak. **693.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **694.** 1) 0,25; 2) 4; 3) 25. **698.** Az O pont az A és A' pontok között van. **699.** 1) Igen; 2) igen. **700.** Igen, mert $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$. **701.** Igen. **702.** 1 : 4. **704.** 14 cm, 21 cm, 28 cm, 35 cm. **705.** 1) 1 : 16; 2) 4 : 25; 3) $m^2 : n^2$ **706.** 1) 2 : 3; 2) 1 : 4; 3) $\sqrt{m} : \sqrt{n}$. **707.** 1) 16 cm; 2) 24 cm; 3) 32 cm. **708.** 1) 56 cm^2; 2) 100 cm^2; 3) 120 cm^2. **709.** Nem. **710.** Igen. **711.** Igen, $k = 0{,}5$. **712.** Igen. **713.** A hasonlóság középpontja az AA' és BB' egyenesek metszéspontja. **716.** A középvonal hosszabb. *Útmutatás:* Legyen az adott trapéz $ABCD$, melynek az alapjai BC és AD. Az N és M pontok megfelelően az AB és CD oldalakon vannak. Az $NBCM$ és $ANMD$ trapézok hasonlók. Ezért $\frac{BC}{NM} = \frac{NM}{AD}$, innen $NM = \sqrt{BC \cdot AD}$. A trapéz középvonala: $\frac{1}{2}(BC + AD)$. Vagyis $\sqrt{BC \cdot AD} < \frac{1}{2}(BC + AD)$. **717.** 1) 1 : 2; 2) $\sqrt{6}$: 3. **719.** *Útmutatás:* rajzolj olyan rombuszt, melynek csúcsai az AB és AC oldalakon vannak, hegyesszöge α. Az ilyen rombusz hasonló a keresettel. **720.** *Útmutatás:* jelölj ki a szög BA szárán egy tetszőleges K pontot! Rajzold meg a B és K pontok B' és K' képeit a P középpontú $-\frac{1}{2}$ arányú homotéciára vonatkoztatva! Jelöld a BC és $B'K'$ egyenesek N metszéspontját! Húzd meg az NP egyenest! **721.** Igen.

5. fejezet

22. §

731. 1) Nem. **732.** $|\overline{CD}| = |\overline{BA}| = |\overline{BC}| = |\overline{DA}| = 4$, $|\overline{MB}| = |\overline{AM}| = 2$. **733.** 12. **734.** 1) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AM}$; 2) $\overline{BA}, \overline{BM}, \overline{CM}, \overline{MA}$. **737.** A feladatnak két megoldása van. **738.** 1) 2 cm; 2) 4 cm. **739.** 12. **740.** Az M középpontú 1 cm sugarú körvonal. **741.** A H középpontú 1 cm sugarú körvonal. **743.** 1) Sík.

23. §

751. 1) $\overline{AN}$; 2) $\overline{CB}$. **756.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\bar{0}$; 3) $\bar{0}$. **757.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\bar{0}$; 3) $\bar{0}$. **759.** 1) 1; 2) 1; 3) 2. **762.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$. **767.** *Útmutatás*: két esetet vizsgálj meg: az A, B és C pontok egy egyenesen vannak, az A, B és C pontok nem egy egyenesen vannak. **770.** 1) 2; 2) 0. 771. 1) $\overline{AC}$; 2) $4\overline{CD}$. **773.** –1. **775.** 1) $\bar{a}$ és $\bar{b}$ merőlegesek; 2) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. **782.** *Útmutatás*: használd a 781. feladatot! **783.** *Útmutatás*: használd a 782. feladatot! **784.** *Útmutatás*: használd a 782. feladatot! **785.** *Útmutatás*: használd a 782. feladatot! **787.** *Útmutatás*:1) $\overline{CA} = 2\overline{DB}$; 2) *Útmutatás*: a D pont az ABC háromszög súlypontja. **792.** *Útmutatás*: az M pont akkor és csak akkor illeszkedik az AB egyenesre, ha $\overline{BM}$ és $\overline{BA}$ vektorok kollineárisak.

24. §

798. 1) $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$; 2) $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. **799.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem; 4) igen. **800.** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{d}$, $\bar{h}$, $\bar{p}$, $\bar{t}$. **801.** 1) $\overline{AB}$ (3; 0); 2) $\overline{AB}$ (5; – 6). **803.** 1) $\sqrt{2}$; 2) 5; 3) 13; 4) 10. **804.** 1) $\sqrt{140}$; 2) $3\sqrt{2}$. **805.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **806.** 1) (4; 6); 2) (– 1; – 3). **809.** (– 4; – 3). **810.** 1) (5; 20); 2) (– 3; – 12). **811.** 1) (– 6; 6). **812.** 1) (3; 1); 2) (– 5; 2). **813.** 1) $\bar{a} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$; 2) $\bar{a} = 2\bar{e}_1$. **815.** $\lambda = 2$. **816.** 1) (9; 8); 2) (4; –13). **817.** 1) $\lambda = 0$; 2) $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$. **818.** 2) $\lambda = \pm 2$. **820.** 1) (3; 4); (2; –1); (8; –5). **821.** $\sqrt{34}$, $\sqrt{10}$. **822.** $\overline{AM}$ (–8; 3). **823.** Igen. **824.** 1)) $2\bar{e}_1$, $2\bar{e}_2$, $-2\bar{e}_1$, $-2\bar{e}_2$. **825.** *Útmutatás*: mutasd meg, hogy a $\overline{DC}$ és $\overline{AB}$ vektorok kollineárisak, az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ vektorok nem kollineárisak. **828.** 1) 5. **830.** 1) $B(1, 2)$, $C(3; 1)$, $\overline{CA}$ (–2; –5). **831.** b (± 8; ± 6). **832.** 1) $\bar{d}$ $(-\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$. **834.** 6. **835.** F (–3; 12).

25. §

841. 1) 4; 2) 9; 3) 25. **842.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **843.** 1) $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok merőlegesek; 2) $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok merőlegesek; 3) $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorok merőlegesek. **845.** 1) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 3) 18; 4) –18; 9) –30; 10) 6. **846.** 1) 45°; 2) 180°; 3) 30°. **847.** 1) $4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$. **848.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 2. **849.** 1) –3; 2) –22; 3) –4. **851.** 1) 90°; 2) 60°. **853.** 1) az a és b vektorok hajlásszöge hegyes; 3) a és b vektorok egyirányúak. **854.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 1; 6) –1. **855.** 1) $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$. **857.** 1) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}| = 5$. **860.** 1) $\approx 82°$. **861.** 1) $\approx 63°$. **862.** 1) – 60; 2) – 19. **863.** – 5. **864.** 60°. **865.** 1) derékszög; 2) 0°; 3) nem tompaszög. **867.** 1) –1,2. **869.** 45°. **871.** –1,5. **872.** 66.

26. §

880. 1) $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$; 2) $\overline{AB} \cdot \overline{MP} = 0$; 5) $\overline{AM} = \overline{MB}$. **883.** *Útmutatás:* legyen az $ABCD$ négyszög négyzet. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$. Határozd meg a vektorok skaláris szorzatát! **884.** *Útmutatás:* legyen az $ABCD$ négyszög téglalap. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$. Határozd meg a vektorok skaláris négyzetét! **885.** *Útmutatás:* legyen az ABC háromszög

derékszögű ($B\angle = 90°$). $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Határozd meg az egyenlőség jobb és bal oldalának skaláris négyzetét! **888.** *Útmutatás:* vezess be egy bázist! Írd fel a vektorokat a bázisvektorok lineáris kombinációjaként! Vedd figyelembe, hogy az egyenlő vektorok koordinátái is egyenlők! **891.** *Útmutatás:* mutasd meg, hogy az $\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{EC}$ vektorok kollineárisak. **893.** *Útmutatás:* mutasd meg, hogy $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NK}$! **898.** A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzeteinek összegével. **903.** *Útmutatás:* használd a 781. feladatot! **907.** *Útmutatás:* határozd meg az $\vec{a}\left(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1}\right)$ és $\vec{c}(1;\ 1)$ vektorok skaláris szorzatát! **908.** x – bármely nem negatív szám, $y = 0$. **911.** 120°.

6. fejezet

27. §

915. 1) Végtelen; 2) egy. **916.** 1) Végtelen; 2) egy. **917.** Végtelen. **919.** Nem. **920.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **922.** 1) 3 cm; 2) 4 cm; 3) 8 cm; 4) $12\sqrt{2}$ cm; 5) 7 cm. **924.** *Útmutatás:* két esetet vegyél figyelembe: a három pont egy egyenesre illeszkedik; nem illeszkedik egy egyenesre. **925.** Nem. **926.** *Útmutatás:* vedd figyelembe a síkok tulajdonságát. **927.** Nem. **928.** Igen. **929.** Igen. **930.** Nem. **931.** Nem. **932.** 1) 10 cm; 2) 18 cm. **933.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **934.** 1) $4\sqrt{2}$ cm, 4 cm; 2) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm, $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. **935.** Igen. **937.** 1) Metszik egymást, kitérők; 2) metszőek, párhuzamosak, kitérők. **939.** 1) Metszik egymást, kitérők; 2) metszőek, párhuzamosak, kitérők. **940.** *Útmutatás:* alkalmazd a trapéz középvonalának tulajdonságát! **942.** Nem; három egyenes. **946.** *Útmutatás:* vedd figyelembe a síkok tulajdonságát. **947.** *Útmutatás:* két egymást metsző egyenesre csak egy sík fektethető.

28. §

953. 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) igen. **956.** 1) 16 cm^2, 24 cm^2; 2) 100 cm^2, 150 cm^2; 3) 64 cm^2, 96 cm^2. **957.** 1) 94 cm^2; 2) 164 cm^2; 3) 52 cm^2. **958.** 1) 2 cm^2; 2) $\sqrt{2}$ cm^2; 3) 1 cm^2. **959.** 360 cm^2, 840 cm^2. **961.** 1) 48 cm^2, 57 cm^2; 2) 80 cm^2, 96 cm^2; 3) 96 cm^2, 132 cm^2. **962.** 1) $375\sqrt{3}$ cm^3; 2) 1500 cm^3; 3) $2250\sqrt{3}$ cm^3. **963.** 1) 5 lap, 9 él, 6 csúcs; 2) 4 lap, 6 él, 4 csúcs. **964.** 1) 9-szeresére nő; 2) 16-szorosára csökken; 3) 2,25-szorosára növekszik; 4) 16-szor csökken. **966.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$. **967.** 1) 140 cm^2, 188 cm^2, 120 cm^3; 2) 480 cm^2, $480 + 200\sqrt{3}$ cm^2, $600\sqrt{3}$ cm^3. **968.** 1) 120 cm^2, $\frac{240+25\sqrt{3}}{2}$ cm^2; $50\sqrt{3}$ cm^3; 2) 240 cm^2, $240 + 50\sqrt{3}$ cm^2, $200\sqrt{3}$ cm^3, 3) 972 cm^2, 1134 cm^2, 2187 cm^3; 4) 108 cm^2, 126 cm^2, 81 cm^3; 5) $6\sqrt{3}$ cm^2, $48 + 12\sqrt{3}$ cm^2, $24\sqrt{3}$ cm^3; 6) 72 cm^2, $72 + 12\sqrt{3}$ cm^2, $36\sqrt{3}$ cm^3.

969. 1) $4\sqrt{3}$ cm^2, $4\sqrt{3}+4$ cm^2; 2) $25\sqrt{3}$ cm^2, $25\sqrt{3}+25$ cm^2; 3) $\sqrt{3}$ cm^2, $\sqrt{3}+1$ cm^2. **970.** 1) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm^2, $25\sqrt{3}$ cm^2, $\frac{125\sqrt{2}}{12}$ cm^3; 2) $75\sqrt{3}$ cm^2, $100\sqrt{3}$ cm^2, $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ cm^3; 3) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ cm^2, $81\sqrt{3}$ cm^2, $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ cm^3; 4) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2, $9\sqrt{3}$ cm^2, $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm^3. **971.** 1) 324 cm^2, 486 cm^2, 729 cm^3, 100 cm^2, 150 cm^2, 125 cm^3; 2) 1444 cm^2, 2166 cm^2, 6859 cm^3, 1024 cm^2, 1536 cm^2, 4096 cm^3. **972.** 100 cm^2, 108 cm^2, 40 cm^3; 400 cm^2, 528 cm^2, 640 cm^3. **973.** $2aH\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$, $2aH(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})$, $6a^2H$. **974.** Annak a poliédernek a térfogata nagyobb, melynek az alaplapja négyzet. **975.** Az adott poliéderek térfogatai egyenlők. **977.** 1) 7800 kg; 2) 15600 kg; 3) 39 t.

29. §

981. 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **982.** 1) Téglalap; 2) körcikk. **983.** Nem. **986.** 1) Nem; 2) nem mindig; 3) nem. **989.** 1) 40π cm^2, 48π cm^2, 40π cm^3; 2) 32π cm^2, $37{,}12\pi$ cm^2, $25{,}6\pi$ cm^3; 3) 100π cm^2, 110π cm^2, 250π cm^3. **990.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem. **992.** 1) 156π cm^2, 300π cm^2, 240π cm^2; 2) 15π cm^2, 24π cm^2, 12π cm^3; 3) $\pi\sqrt{37}$ cm^2, $\pi(\sqrt{37}+1)$ cm^2, 2π cm^3. **993.** 1) 15π cm^2, 24π cm^2, 12π cm^3; 2) 65π cm^2, 90π cm^2, 100π cm^3; 3) 60π cm^2, 96π cm^2, 96π cm^3. **994.** 1) 16π cm^2, $\frac{32\pi}{3}$ cm^3; 2) 36π cm^2, 36π cm^3; 3) 64π cm^2, $\frac{256\pi}{3}$ cm^3; 4) 100π cm^2, $\frac{500\pi}{3}$ cm^3. **995.** 1) 324π cm^2, 972π cm^3; 2) 4 cm, $\frac{256\pi}{3}$ cm^3; 3) 6 cm, 144π cm^2; 4) 3 cm, 36π cm^2; 5) $\frac{7}{2}$ cm, $\frac{343\pi}{3}$ cm^3; 6) 256π cm^2, $\frac{2048\pi}{3}$ cm^3. **996.** 1) n-szeresére nő, n-szeresére nő; 2) n-szeresére nő, n^2-szeresére nő. **997.** 1) 120π cm^2, 320π: cm^2, 600π cm^3; 2) 480π cm^2, 1280π cm^2, 4800π cm^3. **998.** 1) 324π cm^2, 729π cm^3; 2) 288π cm^2, 567π cm^3. **999.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem. **1000.** 1) 175π cm^2, 224π cm^2, 392π cm^3; 2) 240π cm^2, 384π cm^2, 768π cm^3. **1001.** 1) 300π cm^2, 240π cm^3; 2) 324π cm^2, 432π cm^3. **1002.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{1}{4}$. **1003.** 1) $\frac{125}{1728}$; 2) $\frac{27}{512}$. **1004.** 1) Ch, $Ch+\frac{C^2}{2\pi}$, $\frac{C^2h}{4\pi}$; 2) $2h\sqrt{S\pi}$, $2h\sqrt{S\pi}+2S$, SH. **1005.** A négyzet oldala körüli forgatással nyert henger térfogata a legnagyobb. A legnagyobb annak a hengernek a felszíne és térfogata, melyet a téglalap 3 cm-es oldala körüli forgatásával nyertek. **1006.** 1) $\frac{C}{2}\sqrt{h^2+\frac{C^2}{4\pi^2}}$, $\frac{C}{2}\sqrt{h^2+\frac{C^2}{4\pi^2}}+\frac{C^2}{4\pi}$, $\frac{C^2h}{12}$; 2) $l\sqrt{\pi S}$, $l\sqrt{\pi S}+S$, $\frac{S}{3}\sqrt{l^2-\frac{S}{\pi}}$. **1007.** 1) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$; 2) $\sqrt[3]{9\pi V^2}$; 3) $\frac{C^3}{6\pi^2}$; 4) $\sqrt[3]{6\pi^2V}$. **1008.** 1) 100 π cm^2, 36 π cm^2, $\frac{500\pi}{3}$ cm^3, 36 π cm^3; 2) 196 π cm^2, 16 π cm^2, $\frac{1372\pi}{3}$ cm^3, $\frac{32\pi}{3}$ cm^3. **1009.** ≈36,3%. **1010.** ≈ 225,4 km, ≈ 504,08 km. **1011.** ≈ 78,5 ezer km^2, ≈ 482,81 ezer km^2, ≈ 506,45 ezer km^2, ≈ 145,19 ezer km^2.

A tanultak ismétlése

1012. 1) 1; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$. **1013.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) 1. **1014.** 1) $\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+45°)}$; 2) $\frac{\sqrt{2}c\sin\alpha}{2\sin(\alpha+45°)}$, $\frac{\sqrt{2}c\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45°)}$. **1015.** $\frac{l\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$. **1016.** $\frac{d\sin\alpha}{\sin\beta}$. **1017.** 1) $\frac{b\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$; 2) $\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$. **1018.** $\sqrt{7}$ cm. **1019.** $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{19}$ cm. **1020.** 1) 45 cm²; 2) 8 cm². **1021.** 1) $\frac{25}{3}$ cm, $\frac{8}{3}$ cm; 2) 3,125 cm, 1,5 cm. **1022.** 150°, 30°, 30°. **1023.** 1) 15; 2) 8. **1024.** 1) $12(2+\sqrt{3})$ cm, $6\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$ cm; 2) $16(2-\sqrt{3})$ cm, $8\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})$ cm. **1025.** *Útmutatás:* határozd meg a köré írt körének sugarát! **1026.** $a=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$. **1027.** 1) $\frac{10\pi}{3}$ cm; 2) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ cm. **1028.** 80 π cm. **1029.** $\frac{C^2}{\pi^2\sin\alpha}$. **1030.** 1) $2\sqrt{m^2+n^2}$; 2) $2mn\sqrt{\pi}$. **1031.** 100 cm². **1032.** 1) $K(2;-1)$, $L(1;-3)$, $M(5;-2)$; 2) $K(-2;1)$, $L(-1;3)$, $M(-5;2)$; 3) $K(-2;-1)$, $L(-1;-3)$, $M(-5;-2)$. **1033.** $3-2\sqrt{3}$, $3+2$. **1034.** 7 vagy $\sqrt{53}$. Két esetet vizsgálj! **1035.** 9 n.e. **1036.** 1) 6 cm; 2) 6 cm; 3) $6\sqrt{2}$ cm. **1037.** 1) $y=-2x-3$; 2) $y=-2x+3$; 3) $y=2x-3$. **1038.** $C(5;-5)$. **1039.** $\left(2;\frac{5}{3}\right)$. **1041.** 22,5 és 37,5 könyök. **1042.** 1) 25 cm; 2) $A'\angle=30°$, $B'\angle=50°$, $C'\angle=20°$. **1043.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy a paralelogramma átlói metszik egymást és metszéspontjuk felezi őket! **1047.** 2 cm. **1048.** *Útmutatás:* legyen az $ABCD$ négyszög trapéz $(AB\|CD)$. Párhuzamosan told el az egyik átlót, például a BD átlót úgy, hogy a B csúcs a C csúcsba kerüljön! **1049.** 6 cm vagy 4 cm. **1050.** 20 cm, 28 cm, 36 cm és 44 cm. **1051.** 0,75 *m*. **1052.** $x=0$, $x=\frac{-2}{3}$. **1053.** 1) Nem, 2) igen. **1054.** $\overline{AB}=\frac{\bar{a}}{2}-\frac{\bar{b}}{2}$, $\overline{BC}=\frac{\bar{a}}{2}+\frac{\bar{b}}{2}$. **1055.** $\overline{BD}=-\overline{AB}+\overline{AD}$, $\overline{CO}=\frac{AB}{2}-\frac{AD}{2}$. **1056.** *Útmutatás:* határozd meg az $\bar{a}$ és $2\bar{b}-\bar{a}$ vektorok skaláris szorzatát! **1057.** ≈ 43°. **1059.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **1061.** Egy 1 egység sugarú körvonal. **1062.** 1) 6. **1064.** 29 m. **1065.** $\sqrt{3}$-szorosára növekszik. **1066.** 6,25 l. **1067.** 25. **1068.** ≈ 0,5-ször. **1070.** ≈ 15 millió km².

Alakzatok, síkidomok
– egybevágók 174
– hasonlók 137
– homotetikusak 138
– középpontosan szimmetrikusak 119
– tengelyesen szimmetrikusak 119

Bázis 174

Egybevágósági transzformáció 114
Egyenesek kitérők 185
– párhuzamosak 185
– metszők 185
Egyenes hasáb 192
– palástja 192
– teljes felszíne 192
Egyenes és sík párhuzamossága 186
– merőlegessége 186
Egyenlet egyenesé 101
– iránytangenses alak 101
– általános alak 101
– két ponton keresztül 101
– alakzaté 95
Egyirányú vektorok 149
Egységvektor 149
Ellentétes irányú vektorok 149
Ellentett vektorok 149
Elforgatás adott pont körül 126
– szöge 126

Ferde 185
Forgástestek 199

Gúla 192
– palástja 192
– teljes felszíne 192
Gömb 200
– tengelye 200
Gömbfelület 201

Hasonlósági arány 136
Hasonlósági transzformáció 136
Háromszög szabály
Henger 200
– palástja 200
– teljes felszíne 200
Heron képlete 40
Homotécia 138
– középpontja 139

Iránytangens 100

Ív 75

Kollineáris vektorok 149
Koordináta-rendszer 84
– Descartes-féle 84
Kotangens 15
Körcikk 74
Körszelet 75
Középpontos tükrözés 118
– szimmetria 119
Kúp 200
– palástja 201
– teljes felszíne 201

***n*-oldalú hasáb 192**
– gúla 192
n-szög 50
Nullvektor 149

Paralelogramma szabály 154
Párhuzamos eltolás 131
Planimetria, síkmértan 184
Poliéder, soklap 191
Pont és sík távolsága 186
Pont képe középpontos tükrözésnél 118
– tengelyes tükrözésnél 120

Síkmértan, planimetria 184
Síkok
– párhuzamosak 187
– merőlegesek 187
– egymást metszők 187
Szabályos sokszög 50
– oldallap magassága 52
– középpontja 52
– középponti szöge 52
Szimmetria
– középpontja 119
– tengelye 120
Sztereometria, térmértan 184

Tengelyes tükrözés 120
– szimmetria 120
Térmértan, sztereometria 184
Tétel
– hasonló síkidomok területei arányáról 138
– koordinátákkal megadott két pont távolsága 84
– koszinusz, általánosított Pitagorasz-tétel 26
– szabályos soszögek tulajdonsága 51
– szinusz 18
– szakaszt felező pont koordinátái 199
Tükrözés
– középpontja 119
– tengelye 120

Vektorok 148
– abszolút értéke 149
– egyenlősége 149
– hajlásszöge 168
– hossza 149
– koordinátái 164
– különbsége 155
– összege 154
– skaláris négyzete 169
– skaláris szorzata 168
– szorzása számmal 156

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з угорською мовою навчання

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Переклад з української

Перекладач *Кулін Юдік Імріївна*

Угорською мовою

Редактор *З. З. Кулін*
Художній редактор *А. М. Віксенко*
Технічний редактор *С. М. Максимець*
Коректор *Е. С. Сабов*
Комп'ютерна верстка *В. С. Товтін*

Малюнки художників *Е. Авраменка, О. Дядика*
Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, О. Гордієвич, В. Соловйов*

Підписано до друку 12.08.2009. Формат 70×100 1/16.
Папір офсетний. Гарнітура шкільна. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 19,5 + 0,33 форзац.
Обл.-вид. арк. 19,8 + 0,4 форзац. Наклад 1885 прим. Зам. 529. Вид. № 234.

Верстка, редагування та друк

Букрек
видавничий дім
publishing house

Свідоцтво про внесення
до Державного реєстру суб'єкта
видавничої справи ЧЦ №1 від 10.07.2000 р.

телефони
[0372]

Приймальня	552 943
Друкарня	526 353
Реалізація	526 956
Бухгалтерія	527 049

факс
[0372] 552 943

адреса
58000, м. Чернівці,
вул. Радищева, 10

e-mail
info@bukrek.net

web-сайт
www.bukrek.net