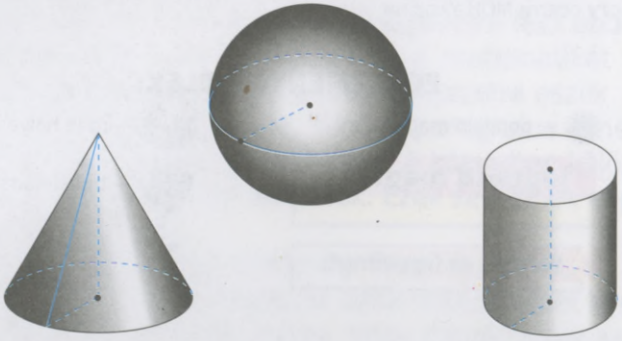
N. A. Taraszenkova,
I. M. Bohatirjova, O. M. Kolomijec,
Z. O. Szergyuk

# MATEMATIKA

Tankönyv az általános iskolák
6. osztálya számára



*Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériumának ajánlásával*

НОВОСЕЛИЦЬКА СЕРЕДНЯ ШКОЛА № 2

Csernyivci
„Bukrek"
2014

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723
Т19

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*
*(наказ Міністерства освіти і науки України від 07.02.2014 р. № 123)*

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

**Наукову експертизу проводив Інститут математики НАН України**
**Експерт — *І. В. Самойленко***, старший науковий співробітник відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України, кандидат фізико-математичних наук

**Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки НАПН України**
**Експерт — *О. І. Глобін***, старший науковий співробітник, завідувач лабораторії математичної та фізичної освіти, кандидат педагогічних наук

**Відповідальні за підготовку підручника до видання:**
***Р. В. Гладковський,*** головний спеціаліст департаменту загальної середньої та дошкільної освіти МОН України
***А. В. Паньков,*** науковий співробітник Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН України

**EGYEZMÉNYES JELEK:**

— gondold meg

**Jegyezd meg!**

**fordíts rá figyelmet:**

—írd le helyesen

— típusfeladat

**Тарасенкова Н. А. та ін.**

Т19 Математика : підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закл. з навч. угорськ. мовою / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Пер. з укр. — Чернівці : Букрек, 2014. — 304 с.

ISBN 978-966-399-613-4

**УДК 51(075.3)**
**ББК 22.1я723**

© Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, 2014
© Видавничий дім „Освіта", 2014
© Видавничий дім „Букрек", переклад угорською мовою, 2014

ISBN 978-617-656-303-7 (укр.)
ISBN 978-966-399-613-4 (угор.)

## KEDVES TANULÓK!

Már öt éve tanuljátok a matematikát, ezalatt rengeteg érdekes ismerettel gazdagodtatok. Ugyanakkor még számos új tudnivaló vár rátok.

Az emberek egész életük során alkalmazzák a matematikai ismereteket: a munkahelyükön, a hétköznapokban. Napjainkban a tudományok nagyon gyorsan fejlődnek, ezért elképzelhetetlen, hogy bármilyen területen dolgozó szakember boldogulni tudjon matematikai tudás nélkül.

Ahhoz, hogy megértsétek a matematikát, meg kell tanulnotok számolni, gondolkodni, összehasonlítani, levonni a következtetéseket, kérdéseket megfogalmazni és válaszolni rájuk, feladatokat elvégezni és megindokolni a válaszokat. Ezeket a képességeket úgy tudjátok fejleszteni, ha figyelmesen és alaposan dolgoztok a tanórákon és önállóan tanultok otthon. A tankönyv segítségetekre lesz ebben.

Hogyan lehet sikeresen tanulni a matematikát a tankönyv használatával? A tananyag 5 fejezetre oszlik, a fejezetek pedig paragrafusokra. Minden paragrafus elméleti és gyakorlati feladatokat is tartalmaz. A könyvben különleges jeleket (piktogramokat) láthattok. Ezek segítenek eligazodni a tananyagban.

A feladatokat négy nehézségi fokra osztottuk.

A (′), jellel ellátott feladatok azok felkészülését könnyítik meg, akik nem biztosak abban, hogy megértették az elméleti részt.

A (°), körrel jelzett feladatok közepesen nehezek, megoldásuk lehetővé teszi a matematika további tanulását.

Az egyezményes jelek nélküli feladatok már nehezebbek, megoldásuk kellő szintű tudást igényel.

A (*) csillaggal kiemelt feladatok a legnehezebbek, megoldásukhoz sok türelemre és kitartásra is szükség lehet, de a megfejtés öröme mindenért kárpótol majd benneteket.

**Sok sikert kívánunk az újdonságok megismerésében és örömet a matematika elsajátításában!**

# 1. FEJEZET TERMÉSZETES SZÁMOK OSZTHATÓSÁGA

## Ebben a fejezetben megtudod:

- mi a természetes szám osztója és többszöröse;
- milyen oszthatósági szabályok vannak;
- melyek a prímszámok és hogyan lehet őket meghatározni;
- hogyan lehet tényezőkre bontani a számokat;
- mi a számok legnagyobb közös osztója és hogyan kell azt meghatározni;
- mi a számok legkisebb közös többszöröse és hogyan kell azt meghatározni;
- hogyan alkalmazható a tananyag a gyakorlatban



ERATOSZTHENÉSZ szitája, rajz

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |

# 1. § A TERMÉSZETES SZÁMOK OSZTÓI ÉS TÖBBSZÖRÖSEI. PRÍMSZÁMOK (TÖRZSSZÁMOK)

Figyeljük meg az 1. ábrát. Azt látjuk, hogy 6 almát két kupacba osztottak úgy, hogy egy-egy kupacba 3 alma jutott. Ebben az esetben a 6-os a szám, az osztandó, 2 az osztó és 3 a hányados. De a 6-ot másképp is el lehet osztani. Három kupacba kettesével. Akkor a 6-os osztandónak 3 az osztója és 2 a hányadosa. Ez azt jelenti, hogy a 6-nak a 2 és a 3 osztója. Ugyanakkor a 6 mind a két számnak, a 3-nak és a 2-nek is a többszöröse. Az osztó és a többszörös is természetes szám.



1. ábra

**Jegyezd meg!**

Az ***osztó*** az a szám, ami az adott számot maradék nélkül osztja.
A ***többszörös*** az a szám, amelyet az adott szám maradék nélkül oszt.

Létezik-e más osztója is a 6-nak? Igen. A 6 osztható 1-gyel és önmagával is. Tehát összesen 4 osztója van a 6-nak: 1; 2; 3; 6.

**Figyeld meg:**

minden természetes számnak a 2-től kezdődően legalább két osztója van: az egy és maga a szám. A többi osztót meghatározott szabályok szerint lehet meghatározni.

**Feladat.** Határozzuk meg az alábbi számok összes osztóját: 1) 7; 2) 12; 3) 25!

**Megoldás.** 1) A 7-nek legalább két osztója van – az 1 és a 7. A 7 semmilyen más természetes számmal nem osztható, ezért a 7-nek csak 2 osztója van, az 1 és a 7.

2) A 12-nek is legalább két osztója van – az 1 és a 12. A továbbiakban ellenőrizzük le a szám oszthatóságát a többi természetes számmal is 2-től 11-ig. $12 : 2 = 6$, ezért 2 és 6 is osztója a 12-nek. $12 : 3 = 4$, tehát 3 és 4 is osztója a 12-nek. 12 5-tel, 7-tel, 8-cal, 9-cel, 10-zel és 11-gyel nem osztható. Tehát 12 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

3) A 25-nek is legalább két osztója van – az 1 és 25. 25 2-vel, 3-mal, 4-gyel valamint 6-tól 24-ig egyetlen számmal sem osztható. $25 : 5 = 5$, ezért az 5 osztója a 25-nek, méghozzá kétszeresen. Viszont az egyenlő osztókat csak egyszer számoljuk. Így a 25-nek nem négy, hanem mindössze három osztója van: 1; 5; 25.

**Jegyezd meg!**

Azokat a természetes számokat, melyeknek csak két osztójuk van (1 és maga a szám) ***prímszámoknak, törzsszámoknak*** nevezzük.

Azokat a természetes számokat, melyeknek kettőnél több ***osztójuk*** van, összetett számoknak nevezzük.

Például a 7 prímszám, a 12 és a 25 összetett szám.

Prímszám-e az 1? Esetleg összetett szám? Egyik sem, mivel az 1-nek csak egy osztója van. Vagyis az 1 különleges szám. Se nem prím, se nem összetett.

**Figyeld meg:**

a legkisebb prímszám a 2.

**További tudnivalók**

Ahhoz, hogy felsoroljuk a prímszámokat, alkalmazható egy módszer, amelyet Eratoszthenész már kr. e. a III. században alkalmazott. Eratoszthenész görög matematikus, csillagász, földrajztudós és költő Kirénében született (kr. e. 276 – kr. e. 194). Az ő tiszteletére nevezték el ezt a módszert „Eratoszthenész szitájának". A 4. oldalon látható ábra azt mutatja, hogyan alkalmazták ezt a szitát a 2 és 50 közé eső prímszámok meghatározására. Próbáld meg önállóan megmagyarázni az eljárás alapelvét.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mi az osztó?
2. Mi a többszörös?
3. Melyik két szám az osztója bármelyik 1-nél nagyobb természetes számnak?
4. Mely természetes számok a prímszámok? Hozz fel példát!
5. Nevezd meg a legkisebb prímszámot!
6. Mely természetes számok az összetett számok? Hozz fel példát!

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1'.** Mindegyik természetes számnak van osztója?

**2'.** Igaz-e, hogy 3 osztója az alábbi számoknaki:
1) 5; 2) 9; 3) 4; 4) 12?

**3'.** Igaz-e, hogy 12 többszöröse az alábbi számnak:
1) 5; 2) 9; 3) 4; 4) 3?

**4'.** Nevezz meg: 1) három törzsszámot; 2) három összetett számot.

**5'.** Vajon 1:
1) törzsszám; 2) összetett szám?

**6°.** Adottak a következő számok: 3, 4, 6, 8 és 9. Írd le az adott számok közül az alábbi szám osztóit: 1) 8; 2) 12; 3) 16; 4) 18.

**7°.** Adottak a következő számok: 2, 3, 5, 6 és 8. Írd le az adott számok közül az alábbi szám osztóit: 1) 9; 2) 15; 3) 32; 4) 40.

**8°.** Írd le az alábbi számok összes osztóját: 1) 8; 2) 14; 3) 28; 4) 39.

**9°.** Írd le az alábbi számok összes osztóját: 1) 9; 2) 11; 3) 25; 4) 36.

**10°.** Adottak a következő számok: 10, 12, 14, 16, 18 és 20. Írd le az adott számok közül az alábbiak többszöröseit: 1) 4; 2) 6; 3) 3; 4) 8.

**11°.** Adottak a következő számok: 14, 18, 21, 24, 28 és 30. Írd le az adott számok közül az alábbiak többszöröseit: 1) 6; 2) 7; 3) 10; 4) 3.

**12°.** Az egyik óvodába ajándékot hozott a Mikulás. Minden gyerek azonos számú játékot kapott. Hány ajándékot kapott mindegyik gyerek külön-külön, ha az óvodába 64 gyerek jár a Mikulás pedig 1) 256; 2) 320; 3) 448 ajándékot osztott szét összesen.

**13°.** Jelöld meg a számegyenesen az $A(2)$ pontot és még négy olyat, amelyek koordinátái az $A$ pont koordinátájának a többszörösei.

**14°.** Jelöld meg a számegyenesen a *B(3)* pontot és még három olyan pontot, melyek koordinátái a *B* pont koordinátájának a többszörösei.

**15°.** Adottak a következő számok: 10, 11, 13, 15, 18 és 23. Írd le az adott számok közül:
1) a prímszámokat; 2) az összetett számokat.

**16°.** Adottak a következő számok: 21, 25, 27, 29, 32 és 37. Írd le az adott számok közül:
1) a prímszámokat; 2) az összetett számokat.

**17°.** Adottak a következő számok: 7, 8, 10, 13, 19, 24, 31, 34, 37, 39, 42 és 43. Írd le az adott számok közül azokat, melyeknek:
1) csak két osztójuk van; 2) kettőnél több osztójuk van.

**18.** Hány osztója van 1) 125-nek; 2) 216-nak; 3) 256-nak; 4) 400-nak?

**19.** Határozd meg 1) 96; 2) 100; 3) 144; 4) 180 összes osztóját.

**20.** Határozd meg 1) 84; 2) 72; 3) 125; 4) 120 összes osztóját.

**21.** Egy üzletben színes ceruzát árulnak dobozokban. Minden dobozban 16 ceruza van. Tud-e vásárolni egy rajztanár ebben az üzletben:
1) 48 ceruzát; 2) 64 ceruzát; 3) 96 ceruzát; 4) 120 ceruzát?
Ha igen, akkor hány dobozzal?

**22.** Egy sportrendezvényen 108 tanuló vesz részt. Fel lehet-e osztani őket:
1) 6 tagú; 2) 12 tagú; 3) 16 tagú; 4) 24 tagú csapatokra?
Ha igen, akkor hány csapatra?

**23.** Határozd meg az alábbi számok összes kétjegyű többszörösét:
1) 8; 2) 13; 3) 16; 4) 22.

**24.** Határozd meg az alábbi számok összes kétjegyű többszörösét:
1) 9; 2) 11; 3) 12; 4) 15.

**25.** Határozd meg 25 összes 400-nál kisebb háromjegyű többszörösét.

**26.** Határozd meg azt a négy legkisebb számot, melynek 6 és 8 is osztója.

**27.** Fel lehet-e írni egy prímszámot:
1) két páros szám összegeként;
2) két páratlan szám összegeként;
3) egy páros és egy páratlan szám összegeként?
Válaszodat indokold meg! Hozz fel példákat.

**28*.** Keress négy olyan tetszőleges természetes számot, melynek pontosan három osztója van! Milyen szabályszerűséget vettél észre?

**29*.** Keress négy olyan tetszőleges természetes számot, melynek pontosan négy osztója van! Milyen szabályszerűséget vettél észre?

**30*.** Határozd meg 48-at két 25-nél kisebb prímszám négyzetének különbségeként.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**31.** Orsolya édességet vásárolt az üzletben és 2 hrn. 25 kop. visszajárót kapott. Kaphatott-e visszajárót csak 1) 5-ös; 2) 10-es; 3) 25-ös; 4) 50-es érmékben? Ha igen, akkor hány érmét kapott vissza?

**32.** Irénkének, Olga nővérének, édesanyjának és nagymamájának az életkora is osztója 165-nek. Határozd meg a nővér, az édesanya és a nagymama életkorát, ha Irénke 11 éves.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**33.** Számítsd ki: 1) $\left(1\frac{3}{11}+2\frac{1}{11}\right)+3\frac{6}{11}$; 2) $5\frac{16}{21}-\left(2\frac{7}{21}+2\frac{10}{21}\right)$.

**34.** Egy üzletben az egyik nap 180 kg paradicsomot adtak el, másnap 270 kg-ot. Hány százalékkal több paradicsomot adtak el másnap?

# 2. § OSZTHATÓSÁG 2-VEL, 10-ZEL ÉS 5-TEL

Írjuk le a természetes számsort:

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12...

Szorozzuk meg mindegyik számot 2-vel! Ily módon megkaptuk 2 többszöröseinek sorát:

2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24...

Ezeket a számokat *páros* számoknak nevezzük. Képlettel a következőképpen fejezhetjük ki:

$2n$, ahol $n$ – természetes szám.

A 0, 2, 4, 6 és 8 számjegyeket *páros számjegyeknek* nevezzük.

A természetes számsorban a páros számokat *páratlan* számok követik, melyek nem oszthatók 2-vel. Például 3, 5, 11 páratlan szám. Ezeket a számokat is megadhatjuk képlettel:

$2n + 1$, ahol $n$ — természetes szám.

Az 1, 3, 5, 7 és 9 számjegyeket *páratlan számjegyeknek* nevezzük.

Hogyan állapítható meg egy számról, hogy páros-e vagy páratlan? Ehhez a 2-vel való oszthatóság szabályát alkalmazzuk.

**Jegyezd meg!**

**A 2-vel való oszthatóság szabálya**
2-vel azok és csakis azok a számok oszthatók, amelyek utolsó számjegye páros.

Mivel 538 utolsó számjegye 8, amely páros, így 538 osztható 2-vel. Valóban, 538 : 2 = 269. Viszont 537 utolsó számjegye 7, ami páratlan, ezért ez a szám nem osztható 2-vel.

Írjuk le a természetes számok sora alapján 10 többszöröseit:

10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120...

Láthatjuk, hogy ebben a sorban minden szám utolsó számjegye 0. Ez a 10-zel való oszthatóság szabályának a lényege.

**Jegyezd meg!**

**A 10-zel való oszthatóság szabálya**
10-zel azok és csakis azok a számok oszthatók, melyek utolsó számjegye 0.

Például 1000 osztható 10-zel, 1001 pedig nem.

Érvényes-e a 10-zel oszthatósági szabálya az 5-tel való oszthatóságra? Nem, mert léteznek olyan számok, melyek oszthatók 5-tel, viszont nem oszthatók 10-zel. Például 2055.

A természetes számok sorából írjuk ki 5 többszöröseit:

5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60...

Láthatjuk, hogy ebben a sorban minden szám utolsó számjegye vagy 5 vagy 0. Ez az 5-tel való oszthatóság lényege.

**Jegyezd meg!**

**Az 5-tel való oszthatóság szabálya**
5-tel azok és csakis azok a számok oszthatók, melyek utolsó számjegye 5 vagy 0.

Például 85 osztható 5-tel, 86 pedig nem.

**Feladat.** Határozd meg 10 és 40 között azokat a páratlan számokat, melyek oszthatók 5-tel.

**Megoldás.**

**1. módszer.** Először írjuk le az összes páratlan számot 10 és 40 között:

11; 13; 15; 17; 19; 21; ...; 39.

Alkalmazva az 5-tel való oszthatóság szabályát a kiválasztott számokra, megkapjuk a keresett számokat: 15; 25; 35.

**2. módszer.** A keresett számok páratlanok és oszthatók 5-tel. Közöttük nem lehet olyan szám, melynek utolsó számjegye 0, mert akkor páros lenne. Tehát ki kell válogatni a 10 és 40 közötti számok közül azokat, melyek utolsó számjegye 5. Így a keresett számok: 15; 25; 35.

**Figyeld meg:**

5 többszörösei közül a páros számok oszthatók 10-zel is, a páratlanok pedig nem.



**További tudnivalók**

*A 4-gyel való oszthatóság szabálya.* 4-gyel azok a számok oszthatók, amelyekben az utolsó két számjegyből álló kétjegyű szám is osztható 4-gyel. Például, 3436 osztható 4-gyel, mivel 36 is osztható 4-gyel.

*A 8-cal való oszthatóság szabálya.* 8-cal azok a számok oszthatók, amelyekben az utolsó három számjegyből álló háromjegyű szám is osztható 8-cal. Például, 29176 osztható 8-cal, mivel 176 is osztható 8-cal.

*A 25-tel való oszthatóság szabálya.* 25-tel azok a számok oszthatók, amelyekben az utolsó két számjegyből álló kétjegyű szám is osztható 25-tel. Például, 6575 osztható 25-tel, mivel 75 is osztható 25-tel.

*A 125-tel való oszthatóság szabálya.* 125-tel azok a számok oszthatók, melyekben az utolsó három számjegyből álló háromjegyű szám is osztható 125-tel. Például, 36 375 osztható 125-tel, mivel 375 is osztható 125-tel.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mely számok párosak? Melyek páratlanok?
2. Mely számjegyek párosak? Melyek páratlanok?
3. Mondd el a 2-vel való oszthatóság szabályát.
4. Mondd el a 10-zel való oszthatóság szabályát.
5. Mondd el az 5-tel való oszthatóság szabályát.

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**35′.** Nevezz meg 1) három páros; 2) három páratlan számot.

**36′.** Igaz-e, hogy az alábbi szám páros:
1) 8; 2) 15; 3) 24; 4) 41?

**37′.** Igaz-e, hogy az alábbi szám páratlan:
1) 18; 2) 25; 3) 33; 4) 72?

**38′.** Nevezz meg három olyan számot, ami osztható 10-zel.

**39′.** Nevezd meg 5 három többszörösét.

**40°.** Írd ki 10-től 20-ig a:
1) páros; 2) páratlan számokat.

**41°.** Adottak az 5, 11, 13, 16, 24, 29, 30, 35, 48 és 51 számok. Az adott számok közül hány 1) páros; 2) páratlan?

**42°.** Adottak a természetes számok húsztól harmincig. Írd le közülük a 1) párosokat; 2) páratlanokat.

**43°.** Írd le a páros számokat húsz és negyven között.

**44°.** Adottak a 8, 12, 13, 15, 22, 25, 30, 32, 47 és 54 számok. Az adott számok közül hány 1) osztható 2-vel; 2) nem osztható 2-vel?

**45°.** Írd le huszonhattól negyvennyolcig azokat a számokat, melyek oszthatók 2-vel.

**46°.** Írd le három és ötven között azokat a számokat, amelyek oszthatók 10-zel.

**47°.** Adottak a 8, 10, 16, 20, 32, 35, 40, 56, 70, 99 és 110 számok. Az adott számok közül hány 1) osztható 10-zel; 2) nem osztható 10-zel?

**48°.** Írd le huszonöttől hetvenkettőig azokat a számokat, amelyek oszthatók 10-zel.

**49°.** Írd le háromtól ötvennégyig azokat a számokat, amelyek oszthatók 5-tel.

**50°.** Adottak a 7, 13, 15, 23, 25, 34, 40, 49, 55, 60, 78, 85 és 99 számok. Az adott számok közül hány 1) osztható 5-tel; 2) nem osztható 5-tel; 3) osztható 5-tel is és 2-vel is?

**51°.** Írd le kilenctől hatvanhatig az öttel osztható számokat.

**52°.** Írd le harminctól ötvenig azokat a számokat, amelyek oszthatók:
1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel.

**53°.** Nevezz meg három olyan tetszőleges számot, amely nem osztható:
1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel; 4) sem 2-vel, sem 5-tel.

**54°.** Jelöld meg a számegyenesen egytől tizenegyig azokat a pontokat, melyek koordinátája többszöröse:
1) 2-nek; 2) 5-nek; 3) 10-nek.

***55°.*** Jelöld meg a számegyenesen kettőtől tizenötig azokat a pontokat, melyek koordinátája többszöröse:
1) 2-nek; 2) 5-nek; 3) 10-nek.

**56°.** Adottak a 110, 224, 355, 154, 180, 203, 432, 518, 650 és 780 számok. Az adott számok közül írd le azokat, melyek oszthatók:
1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel; 4) 2-vel és 5-tel is.

***57°.*** Adottak a 125, 252, 305, 160, 191, 210, 336, 520, 651 és 890 számok. Az adott számok közül írd le azokat, melyek oszthatók:
1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel; 4) 2-vel és 5-tel is.

**58°.** Írj 33-hoz jobbról egy számjegyet úgy, hogy az így kapott szám osztható legyen 1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel.

**59°.** A 123* számban helyettesítsd a csillagot számjeggyel úgy, hogy a kapott szám osztható legyen 1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel.

***60°.*** A 135* számban helyettesítsd a csillagot számjeggyel úgy, hogy a kapott szám osztható legyen 1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel.

**61°.** Határozd meg a $125 \cdot 36 + 125 \cdot 3$ kifejezés értékét. A kapott számról állapítsd meg osztható-e 1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel.

***62°.*** Határozd meg a $137 \cdot 12 + 137 \cdot 18$ kifejezés értékét. A kapott számról állapítsd meg osztható-e 1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel.

**63.** Rajzold át a füzetedbe az 1. táblázatot és töltsd ki! Milyen törvényszerűséget vettél észre?

*1. táblázat*

| $a$ | $b$ | $a + b$ | $a - b$ |
|---|---|---|---|
| páros | páros | | |
| páros | páratlan | | |
| páratlan | páros | | |
| páratlan | páratlan | | |

**64.** Adottak száztól kétszázig a természetes számok. Hány olyan szám van közöttük, amely:
1) páros; 3) páratlan és 5-tel osztható;
2) páratlan; 4) páros és 5-tel osztható?

**65.** Fel lehet-e írni csak a 7 és 6 számjeggyel olyan számot, amely:
1) osztható 2-vel; 3) osztható 5-tel;
2) nem osztható 2-vel; 4) osztható 10-zel?
Ha igen, mondj példákat a megoldásra.

**66.** Egy édesanya tojást vásárolt a piacon. Egy dobozban 10 tojás volt. Lehetséges-e, hogy
1) 25 tojást; 2) 44 tojást; 3) 60 tojást vett?

**67.** Lászlónak 20 hrivnyája volt. Miután vásárolt 5 tollat, 2 hrivnya 42 kopijkát kapott vissza? Jól számolt a pénztáros?

**68.** A 6. B osztályban a fiúk 14 csokor virágot vettek március 8-ra. Minden csokorban 5 szál tulipán volt. Fel tudják-e köszönteni az osztályban tanuló 10 kislányt egyforma csokrokkal?

**69.** A 6. osztályban a szülők 10 doboz színes ceruzát vásároltak rajzórára. Minden dobozban 14 ceruza volt. Szét lehet-e osztani a 28 tanuló között a ceruzákat úgy, hogy mindenkinek 5 jusson?

**70.** Határozd meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyben van 5-ös számjegy és:
1) osztható 5-tel; 3) osztható 10-zel;
2) osztható 2-vel és 5-tel is; 4) nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel.

**71.** Határozd meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyben van 4-es számjegy és:
1) osztható 5-tel; 3) osztható 10-zel;
2) osztható 2-vel és 5-tel is; 4) nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel.

**72*.** Írd le azt a legkisebb 10-zel osztható háromjegyű számot, melyben a számjegyek összege 1) 7; 2) 8; 3) 11.

**73*.** Írd le azt a legnagyobb 5-tel osztható háromjegyű számot, melyben a számjegyek összege:
1) 15; 2) 20; 3) 22.

**74*.** A 2, 5 és 0 számjegyet tartalmazó négyjegyű számok közül írd le azokat, amelyek oszthatók:
1) 25-tel; 2) 4-gyel

**75*.** Hogyan lehet eldönteni anélkül, hogy elvégeznénk a számolást, hogy osztható-e a $24 \cdot 13 \cdot 45 \cdot 16$ szorzat:
1) 10-zel; 2) 25-tel?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**76.** Számold ki, mennyi az osztályodban tanuló gyerekek életkorának az összege! Osztható-e a kapott szám 1) 2-vel; 2) 5-tel; 3) 10-zel?

**77.** A 6.A osztály 400 kg papírhulladékot gyűjtött. Minden leadott mázsa után egy doboz csokoládét kaptak a gyerekek jutalmul. Egy dobozban 25 cukorka volt. Szét lehet-e egyenlően osztani a csokoládét a tanulók között, ha a 6. A osztályba 20 gyerek jár?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**78.** Számítsd ki:

1) 376,486 + 4,114; 2) 0,9879 + 359,0121; 3) 8,62 + 901,28.

**79.** Egy téglatest összes élei hosszának az összege 250 cm. Egy-egy él ennek az összegnek az 5%-a, 8%-a és 12%-a. Mekkora a téglatest térfogata.

# 3. § OSZTHATÓSÁG 3-MAL ÉS 9-CEL

Írjuk fel 9 többszöröseit:

9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90; 99; 108...

Láthatjuk, hogy a 9-cel való oszthatóság nem köthető az utolsó számjegyhez. A szám számjegyeinek összegétől függ. Később majd megtudod az indoklást is.

**Jegyezd meg!**

**A 9-cel való oszthatóság szabálya**

9-cel azok és csakis azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek az összege is osztható 9-cel.

Például 1476 osztható 9-cel, mert 1 + 4 + 7 + 6 = 18 és 18 osztható 9-cel. 1239 nem osztható 9-cel, mert 1 + 2 + 3 + 9 = 15 és 15 nem osztható 9-cel.

Hogyan állapítható meg, hogy egy szám osztható-e 3-mal? Ebben az esetben alkalmazzuk a 3-mal való oszthatóság szabályát.

**Jegyezd meg!**

**A 3-mal való oszthatóság szabálya**

3-mal azok és csakis azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek az összege is osztható 3-mal.

Például 237 számjegyeinek az összege 2 + 3 + 7 = 12. 12 osztható 3-mal, ezért 237 is osztható 3-mal. Valóban 237 : 3 = 79.

Állíthatjuk-e, ha egy szám osztható 9-cel, akkor 3-mal is. Igen. Mert, ha a számjegyek összege 9 többszöröse, akkor ez a szám osztható 9-cel, így 3-mal is. A fordított állítás viszont már nem helytálló: a 3-mal osztható szám nem minden esetben osztható 9-cel. Például 12, 33 és 213 osztható 3-mal, de 9-cel nem.

**Feladat.** Határozzuk meg az összes 5 és 1 számjegyet tartalmazó háromjegyű számot, amely osztható 9-cel.

**Megoldás.** Jelöljük az ismeretlen számjegyet *-gal. A keresett szám számjegyeinek az összege: 5 + 1 + * = 6 + *. Ennek az összegnek osztódni kell 9-cel, ezért a csillagot csak a 3-as számjeggyel helyettesíthetjük. A továbbiakban írjuk le az összes 1, 3, és 5 számjegygyel képezhető háromjegyű számot: 135; 153; 315; 351; 513; 531.



**További tudnivalók**

Felmerülhetett bennetek a kérdés, „mi a magyarázata annak, hogy a számjegyek összege alapján eldönthető, hogy egy szám osztható-e 9-cel vagy nem? Szemléltessük az esetet példákkal.

99 és 999 osztható 9-cel, viszont 100 és 1000 nem osztható 9-cel. Írjuk fel ezeket a számokat két szám összegeként:

$99 = 90 + 9$; $100 = 99 + 1$;

$999 = 900 + 90 + 9$; $1000 = 999 + 1$.

Elemezzük ezeket az összegeket! A baloldali oszlopban minden összeadandó osztható 9-cel, míg a jobboldaliban nem.

Összességében elmondható, ha egy összeg minden összeadandója osztható egy adott számmal, akkor az összeg is osztható ezzel a számmal; ha az egyik összeadandó nem osztható az adott számmal, míg az összes többi pedig igen, akkor az összeg sem osztható az adott számmal.

Bontsuk 351-et helyi érték szerint összeg alakra:

$$351 = \mathbf{3} \cdot 100 + \mathbf{5} \cdot 10 + \mathbf{1} =$$
$$= \mathbf{3} \cdot (99 + 1) + \mathbf{5} \cdot (9 + 1) + \mathbf{1} =$$
$$= \mathbf{3} \cdot 99 + \mathbf{3} \cdot 1 + \mathbf{5} \cdot 9 + \mathbf{5} \cdot 1 + \mathbf{1} =$$
$$= \mathbf{3} \cdot 99 + \mathbf{5} \cdot 9 + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \mathbf{1} =$$
$$= \mathbf{3} \cdot 99 + \mathbf{5} \cdot 9 + 9.$$

A kapott összeg mindegyik összeadandója osztható 9-cel így 351 is osztható 9-cel. Láthatjuk, hogy a következtetésünk az utolsó összeadandótól függ, melyet a $\mathbf{3} + \mathbf{5} + \mathbf{1} = 9$ összegből kaptunk.
Ez az összeg viszont nem más, mint a számjegyek összege.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mondd el a 9-cel való oszthatóság szabályát.
2. Mondd el a 3-mal való oszthatóság szabályát.
3. Állíthatjuk-e, ha egy szám osztható 9-cel, akkor osztható 3-mal is?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**80′.** Nevezz meg három olyan számot, amely osztható 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**81′.** Mely esetben helyes az az állítás, hogy 9-cel azok és csakis azok a számok oszthatók, melyek, ...
1) számjegyeinek szorzata osztható 9-cel;
2) számjegyeinek összege osztható 9-cel;
3) utolsó számjegye 9?

**82′.** Mely esetben helyes az az állítás, hogy 3-mal azok és csakis azok a számok oszthatók, melyek .... 1) utolsó számjegye 3;
2) utolsó számjegye 9;
3) számjegyeinek összege osztható 3-mal?

**83°.** Adottak a 35; 44; 49; 53; 66; 111; 126 és 135 számok. Az adott számok közül hány 1) osztható 9-cel; 2) nem osztható 9-cel?

**84°.** Adott a természetes számsor hetventől százhúszig. Írd le azokat a számokat, melyek oszthatók 9-cel.

**85°.** Adott kilencventől százharmincháromig a természetes számsor. Az adott számok közül írd le azokat, amelyek oszthatók 9-cel.

**86°.** Adottak az 23; 24; 37; 39; 44; 48; 56; 59; 63 és 73 számok. Írd le közülük 3 többszöröseit.

**87°.** Adottak a 17; 23; 35; 43; 45; 51; 71 és 88 számok. Az adott számok közül hány 1) osztható 3-mal; 2) nem osztható 3-mal?

**88°.** Adott a természetes számsor negyvenegytől hatvanig. Írd le a számok közül azokat, melyek oszthatók 3-mal.

***89°.*** Adott a természetes számsor hetvenhéttől százkettőig. Írd le a számok közül azokat, melyek oszthatók 3-mal.

**90°.** Nevezz meg négy olyan háromjegyű számot, amely:
1) osztható 9-cel; 2) osztható 3-mal.

**91°.** Nevezz meg három olyan négyjegyű számot, amely:
1) osztható 9-cel; 2) osztható 3-mal.

**92°.** Egy számegyenesen jelöld meg egytől tizenháromig azokat a pontokat, melyek koordinátája többszöröse 1) 9-nek; 2) 3-nak.

***93°.*** Egy számegyenesen jelölj meg 5 pontot, melyek koordinátája többszöröse 9-nek vagy 3-nak.

**94°.** Írj 70-hez balról egy számjegyet úgy, hogy az így kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**95°.** Írj 131-hez jobbról egy számjegyet úgy, hogy az így kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

***96°.*** Írj 128-hoz balról egy számjegyet úgy, hogy az így kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**97°.** A 1*21 számban helyettesítsd a csillagot olyan számjeggyel, hogy a kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

***98°.*** Az 50*9 számban helyettesítsd a csillagot olyan számjeggyel, hogy a kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**99°.** Határozd meg az $5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1$ kifejezés értékét és döntsd el, hogy a kapott szám osztható-e 1) 9-cel; 2) 3-mal.

***100°.*** Határozd meg az $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$ kifejezés értékét és döntsd el, hogy a kapott szám osztható-e 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**101.** Egy csokoládégyárban dobozonként 9 csokoládét csomagolnak. Lehetséges-e, hogy egy ilyen dobokozat tartalmazó ládában: 1) 243 csokoládé; 2) 424 csokoládé; 3) 513 csokoládé legyen?

**102.** Száztól kétszázig hány olyan szám van. amely osztható:
1) 9-cel; 2) 3-mal.

**103.** Le lehet-e írni csak 2 és 3 számjegyekkel olyan számot, amely osztható 1) 9-cel; 2) 3-mal? Ha igen, hozz fel példát.

**104.** Írd le a legnagyobb olyan háromjegyű számot, amely osztható:
1) 9-cel; 2) 3-mal.

***105.*** Írd le a legkisebb olyan négyjegyű számot, amely osztható:
1) 9-cel; 2) 3-mal.

**106.** Írd le az összes olyan háromjegyű számot, amelyben azonosak a számjegyek és oszthatók: 1) 9-cel; 2) 3-mal; 3) 3-mal és 5-tel is.

**107.** Az 1**37 számban helyettesítsd a csillagokat számjegyekkel úgy, hogy a kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**108.** A 8*5*0 számban helyettesítsd a csillagokat számjegyekkel úgy, hogy a kapott szám osztható legyen 1) 9-cel; 2) 3-mal.

**109.** Írd le az összes olyan ötjegyű számot, melyben három darab ötös számjegy van és osztható 9-cel.

**110.** Írd le az összes olyan négyjegyű számot, melyben két darab ötös számjegy van és osztható 3-mal.

**111*.** András gondolt egy háromjegyű számra. Tudjuk, hogy ez a szám osztható 9-cel, minden számjegye 3 többszöröse és első két számjegyének az összege egyenlő a harmadik számjeggyel. Melyik számra gondolt András? Hány megoldása van a feladatnak?

**112*.** Hány olyan szám van egytől százig, amely nem osztható sem 9-cel, sem 3-mal?

**113*.** Írd le az 1, 3 és 0 számjegyeket tartalmazó négyjegyű számok közül azokat, melyek oszthatók 1) 18-cal; 2) 6-tal.

**114*.** Szilárd elfelejtette a *85228 kód első számjegyét, csak arra emlékezett, hogy ez a hatjegyű szám osztható 3-mal. Hány lehetséges kódot kell a kisfiúnak kipróbálnia ahhoz, hogy kinyissa a csomagmegőrző ajtaját?

**115*.** Írd le azt a legkisebb és legnagyobb négyjegyű számot, amely 3-mal is és 5-tel is osztható.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**116.** András megnyerte a fiatal költők versenyét és 822 hrivnya összegű pénzjutalmat kapott. Úgy döntött, hogy a nyereményen megosztozik édesapjával és édesanyjával. El tudják-e osztani a jutalmat egyenlően? Mennyi pénzt kapnak külön-külön?

**117.** Tímeát megbízta az édesanyja, hogy vásároljon 3 kg almát. 25 hrivnyát adott neki. A kislány megvette az almát és 1 hr. 62 kop. visszajárót adott az édesanyjának. Becsapták-e Tímeát?

**118.** Számítsd ki az 5. osztályos év végi jegyeidnek az összegét! Osztható-e a kapott szám 1) 9-cel; 2) 3-mal?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**119.** Mennyivel kevesebb 104,72 és 13,16 összege 154,36-nál és mennyivel több 89,28-nál?

**120.** Egy kikötőből a másikba egy gőzhajó és egy motoros hajó indult el egyszerre. A gőzhajó sebessége 32,4 km/h, a motorosé pedig 35,8 km/h. Mekkora lesz köztük a távolság az indulástól számított 4,5 óra múlva?

## 4. § SZÁMOK SZORZATRA BONTÁSA. LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ

Már tudjátok, hogy bármely 1-nél nagyobb természetes számnak több osztója is van, ezért felírható osztóik szorzataként. Például: $5 = 1 \cdot 5$; $6 = 1 \cdot 6$ vagy $6 = 2 \cdot 3$; $18 = 1 \cdot 18$, $18 = 2 \cdot 9$ vagy $18 = 3 \cdot 6$. Az ilyen egyenlőségekre azt mondjuk, hogy az adott számot *tényezőkre bontottuk*, magát a szorzatot pedig a szám *tényezős felbontásának* nevezzük.

Az 5 prímszám. Ezt a számot csak egyféleképpen lehet tényezőkre bontani. A 6 és a 18 összetett szám. Ezeknek két vagy több felbontása is létezik. Ugyanakkor ezek a felbontások különbözők. A $6 = 2 \cdot 3$ felbontásban mind a két tényező törzsszám, míg a $18 = 2 \cdot 9$ szorzatban az első tényező prímszám, a második pedig összetett, amit szintén felbonthatunk tényezőkre

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Viszont ebben a felbontásban már minden tényező prím.

**Jegyezd meg!**

Egy szám azon felbontását, melyben minden tényező prímszám, a szám ***prímtényezős felbontásának*** nevezzük.

Prímtényezős felbontás-e $5 = 1 \cdot 5$ szorzat? Nem. Ebben a felbontásban az egyik tényező nem prímszám. Ez a szám az 1. Mégis elfogadjuk, hogy bármely prímszámnak is létezik prímtényezős felbontása. Ehhez elegendő leírni az adott prímszámot. Például az 5-ös prímszámra az $5 = 5$ felbontást kapjuk.

**1. feladat** Bontsuk prímtényezőkre 210-et.

**Megoldás.**

| | |
|---|---|
| 210 | 2 |
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

A számok prímtényezős felbontásának segítségével határozzuk meg két szám közös osztóit. Például 12-nek és 30-nak két közös prím osztója van, a 2 és a 3. Viszont 12 és 30 osztható 6-tal is, azaz a közös prímosztók szorzatával. A 6 a legnagyobb olyan szám, amelyikkel el lehet osztani a 12-t és a 30-at is. Ezt a számot 12 és 30 *legnagyobb közös osztójának* nevezzük.

Így írjuk le: lnko (12; 30) = 6 és úgy olvassuk, hogy 12 és 30 legnagyobb közös osztója a 6.

**2. feladat** Határozzuk meg 18 és 45 legnagyobb közös osztóját.

**Megoldás.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 | 2 | 45 | 3 |
| 9 | 3 | 15 | 3 |
| 3 | 3 | 5 | 5 |
| 1 | | 1 | |

$18 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 2 \cdot 3^2$

$45 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$

$lnko\ (18; 45) = 3^2 = 9$

*Felelet:* $lnko(18; 45) = 3^2 = 9$.

**Jegyezd meg!**

***Két szám legnagyobb közös osztója*** az a legnagyobb szám, amellyel mind a két szám osztható.

**Jegyezd meg!**

**A legnagyobb közös osztó meghatározásának algoritmusa**
Ahhoz, hogy meghatározzuk két szám lnko-ját:
1) bontsuk fel az adott számokat prímtényezőkre;
2) határozzuk meg a közös prímtényezők szorzatát.

Meg lehet-e határozni két olyan szám lnko-ját, melyeknek az 1-en kívül nincs más közös osztója. Igen. Az ilyen számok legnagyobb közös osztója az 1.

Azokat a számokat, melyek legnagyobb közös osztója 1, *relatív prímeknek* nevezzük. Például lnko(8; 21) = 1. Ezért 8 és 21 relatív prím. Két különböző prímszám is relatív prím. Például lnko(7; 13) = 1, ezért 7 és 13 relatív prím.

Meg lehet-e határozni kettőnél több szám legnagyobb közös osztóját? Igen. Ugyanúgy kell eljárnunk, mint ahogy a 3 feladatban. Például, határozzuk meg lnko(9; 12; 30)-t! Azt kapjuk, hogy $9 = 3 \cdot 3 = 32$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 22 \cdot 3$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Innen lnko(9; 12; 30) = 3.



**További tudnivalók**

Érdekes módszert írt le a legnagyobb közös osztó meghatározására Euklidész (kb. kr. e 365-300-ban) ógörög matematikus „Elemek" című művében. A tudós tiszteletére ezt az eljárást „euklidészi algoritmusnak" nevezzük.

Tegyük fel, hogy meg kell határozni $a$ és $b$, $a > b$ számok legnagyobb közös osztóját. Alkossunk ezekből a számokból $a$ és $b$, valamint $a - b$ és $b$ számpárokat. Könnyű belátni, hogy ezen számpárok legnagyobb közös osztója ugyanaz a szám: lnko $(a; b)$ = lnko $(a - b; b)$. Jelöljük $a - b$-t $c$-vel. A $c$ és $b$ számok közül válasszuk ki a nagyobbat. Legyen ez a $b$ szám. Vonjuk ki a nagyobb számból a kisebbet: $b - c$. Így lnko $(a; b)$ = lnko $(a - b; b)$ = lnko $(c; b)$ = lnko $(b; c)$ = lnko $(b - c; c)$. Az eljárást addig folytatjuk, míg nem kapunk azonos számokat $(d; d)$. A d szám lesz az a és b szám legnagyobb közös osztója.

Például, lnko (56; 16) = lnko (56 - 16; 16) = lnko (40; 16) = = lnko (40 - 16; 16) = lnko (24; 16) = lnko (24 - 16; 16) = = lnko (8; 16) = lnko (16; 8) = lnko (16 - 8; 8) = lnko (8; 8) = 8.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mit nevezünk egy szám prímtényezős felbontásának?
2. Fel lehet-e bontani prímtényezőkre egy prímszámot?
3. Hogyan kell prímtényezőkre bontani egy összetett számot?
4. Mit nevezünk két szám legnagyobb közös osztójának?
5. Hogyan kell meghatározni két szám legnagyobb közös osztóját?
6. Mely számok a relatív prímek?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**121′.** Prímtényezős felbontások-e az alábbi egyenlőségek:
1) $10 = 2 \cdot 5$; 2) $10 = 10$; 3) $10 = 2{,}5 \cdot 4$?

**122′.** Igaz-e, hogy 12 és 8 közös osztója:
1) 8; 2) 4; 3) 12; 4) 2?

**123′.** Igaz-e, hogy 12 és 8 legnagyobb közös osztója:
1) 8; 2) 4; 3) 12; 4) 2?

**124′.** Igaz-e, hogy 7 és az alábbi szám relatív prím:
1) 3; 2) 14; 3) 16; 4) 42?

**125°.** Mely prímszámokkal osztható az alábbi szám:
1) 15; 2) 32; 3) 36; 4) 44?

**126°.** Hány prímtényezőre bontható az alábbi szám:
1) 17; 2) 18; 3) 22; 4) 56?

**127°.** Bontsd prímtényezőkre az alábbi számokat:
1) 28; 2) 48; 3) 64; 4) 72.

**128°.** Bontsd prímtényezőkre az alábbi számokat:
1) 42; 2) 54; 3) 84; 4) 96.

**129°.** Határozd meg a $3 \cdot 5 \cdot 7$ számkifejezés értékének összes osztóját.

**130°.** Igaz-e, hogy 4 közös osztója az alábbi számpároknak:
1) 16 és 22; 2) 24 és 30; 3) 36 és 64; 4) 44 és 96?

**131°.** Míztől hatvanig írd ki azokat a természetes számokat, melyek oszthatók 1) 6-tal; 2) 9-cel; 3) 12-vel.

**132°.** Jelöld meg a számegyenes azon pontjait, melyek koordinátái 16 osztói.

**133°.** Jelöld meg a számegyenes azon pontjait, melyek koordinátái 12 osztói.

**134°.** Igaz-e, hogy 24 és 18 legnagyobb közös osztója:
1) 72; 2) 4; 3) 6; 4) 8?

**135°.** Határozd meg az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját:
1) 28 és 42; 2) 34 és 51; 3) 64 és 48; 4) 75 és 125.

**136°.** Határozd meg az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját:
1) 24 és 36; 2) 26 és 65; 3) 70 és 105; 4) 96 és 144.

**137°.** Határozd meg az alábbi törtek számlálójának és nevezőjének a legnagyobb közös osztóját:

1) $\frac{45}{75}$; 2) $\frac{72}{156}$; 3) $\frac{52}{156}$; 4) $\frac{44}{132}$.

**138°.** Határozd meg az alábbi törtek számlálójának és nevezőjének a legnagyobb közös osztóját:

1) $\frac{35}{55}$; 2) $\frac{48}{112}$; 3) $\frac{34}{136}$; 4) $\frac{42}{154}$.

**139°.** Határozd meg azt a legkisebb számot, amelynek és 24-nek a legkisebb közös osztója: 1) 6; 2) 8; 3) 12.

**140°.** Igaz-e, hogy az alábbi számpárok relatív prímek:
1) 6 és 21; 2) 27és 111; 3) 36 és 117; 4) 44 és 95?

**141°.** Adottak az 5; 12; 18; 25; 26; 33; 37 számok. Írd le az adott számok közül az összes olyan számpárt, melyek relatív prímek.

**142°.** Írd le a húsznál kisebb számok közül az összes olyan kétjegyű számot, amely a 20-hoz relatív prím.

**143°.** Írd le a húsznál nagyobb, de harmincnál kisebb számok közül az összes olyan számot, amely a 25-höz relatív prím.

**144.** Sorold fel az összes olyan számot, melynek a prímtényezős felbontásában két egyjegyű prímszám szerepel.

**145.** Határozd meg az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját:
1) 204 és 420; 2) 144 és 324; 3) 625 és 875; 4) 126 és 378.

**146.** Határozd meg az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját:
1) 162 és 270; 2) 154 és 396; 3) 279 és 496; 4) 270 és 495.

**147.** Legfeljebb hány azonos csomagot lehet készíteni 150 tollból és 315 ceruzából?

**148.** Legfeljebb hány azonos csokor állítható össze 540 tulipánból és 405 nárciszból?

**149.** Adottak a természetes számok húsztól harmincig. Írd le az adott számok közül azokat a számpárokat, amelyek relatív prímek.



***150.*** Adottak a természetes számok negyventől ötvenig. Írd le az adott számok közül azokat a számpárokat, amelyek relatív prímek.

**151.** Határozd meg az alábbi számhármasok legnagyobb közös osztóját:
1) 15, 45 és 80; 2) 16, 28 és 36; 3) 34, 36 és 90; 4) 42, 70 és 98.



***152.*** Határozd meg az alábbi számhármasok legnagyobb közös osztóját:
1) 8, 12 és 20; 2) 25, 40 és 100; 3) 32, 36 és 60; 4) 44, 66 és 132.

**153.** Legfeljebb hány azonos csomagot tudunk készíteni 135 mandarinból, 189 almából és 243 csokoládéból?

**154.** Legfeljebb hány azonos csokor készíthető 336 fehér, 528 vörös és 720 sárga rózsából?

**155*.** Melyik az a legkisebb háromjegyű szám, amelynek és 312-nek a legkisebb közös osztója 39.

**156*.** Melyik az a legnagyobb háromjegyű szám, amelynek és 252-nek a legkisebb közös osztója 42.

**157*.** Határozd meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját:
1) 54, 108, 162 és 378; 2) 405, 630, 945 és 1350.



## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**158.** Egy 52x78 cm méretű téglalap alakú fémlapot a lehető legkevesebb egybevágó négyzetre kell felvágni. Hány négyzetet kapunk, és mekkora lesz egy ilyen négyzet mérete?

**159.** Édesapa eldöntötte, hogy ki szeretné csempéztetni a fürdőszobát négyzet alakú csempével úgy, hogy egyetlen csempét se kelljen elvágni. Minden fal téglalap alakú, melyek méretei rendre: 240 cm és 140 cm; 240 cm és 220 cm; 240 cm és 140 cm. Mekkora lehet egy csempe legnagyobb mérete? Hány ilyen csempére van szükség a fürdőszoba kicsempézéséhez?



## ISMÉTLŐ FELADATOK

**160.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $(x + 6{,}5) - 7{,}9 = 18{,}4$; 2) $(x - 13{,}8) \cdot 2{,}6 = 39{,}52$.

**161.** Egy arany-ezüst ötvözet 33%-a arany. Mennyi arany és mennyi ezüst van 2,6 kg ilyen ötvözetben?

## 5. § LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

Írjuk le 4 többszöröseit! Ehhez elegendő a természetes számsor minden tagját megszorozni 4-gyel:

4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44...

Hasonlóképpen határozzuk meg 6 többszöröseit:

6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66...

4 és 6 többszörösei között vannak olyan számok, amelyek mind a két számmal oszthatók:

12; 24; 36; 48...

Ezek a számok 4 és 6 közös többszörösei. Közülük 12 a legkisebb. Ez 4 és 6 *legkisebb közös többszöröse.*

Így írjuk: lkkt(4; 6) = 12, így olvassuk: 4 és 6 legkisebb közös többszöröse 12.

**Jegyezd meg!**

Két szám ***legkisebb közös többszöröse*** az a legkisebb szám, amelyet el lehet osztani mindkét számmal.

A számok legkisebb közös többszöröse meghatározható a számok prímtényezős felbontása segítségével.

**1. feladat** Határozzuk meg 18 és 45 legnagyobb közös többszörösét.

**Megoldás.**

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3;$

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5.$

$lkkt\ (18; 45) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90.$

*Felelet:* $lkkt(18; 45) = 90.$

**Jegyezd meg!**

**A legkisebb közös többszörös meghatározásának algoritmusa**

Ahhoz, hogy meghatározzuk két szám lkkt-jét:

1) bontsuk fel az adott számokat prímtényezőkre;
2) írjuk le az egyik szám prímtényezős felbontását;
3) pótoljuk ki a másik szám prímtényezős felbontásából azokkal a tényezőkkel, amelyek nem szerepeltek az első felbontásban;
4) határozzuk meg a kapott szorzatot.

Hogyan határozzuk meg két relatív szám legkisebb közös többszörösét? több szám lkkt-jét?

Mivel két relatív prímnek az 1-esen kívül nincs más közös osztója, így a relatív prímek legkisebb közös többszöröse a számok szorzata. Például lkkt $(8; 21) = 8 \cdot 21 = 168$.

Több szám legkisebb közös többszörösét ugyanolyan eljárással határozzuk meg, mint két számét. Határozzuk meg például lkkt (9; 12; 15). Mivel: $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$. Ezért lkkt $(9; 12; 15) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5 = 9 \cdot 4 \cdot 5 = 180$.



**További tudnivalók**

Kiderült, hogy két $a$ és $b$ szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között összefüggés van, amit az alábbi képlettel lehet megadni: $\text{lnko}(a; b) \cdot \text{lkkt}(a; b) = a \cdot b$.

Például 54 és 48 esetében:

$$54 = 2 \cdot 3^3,$$
$$48 = 2^4 \cdot 3.$$

Innen lnko (54; 48) = 6, lkkt (54; 48) = 432. A képlet alapján kapjuk, hogy:

$$\text{lnko}(54; 48) \cdot \text{lkkt}(54; 48) = 432 \cdot 6 = 2592 = 54 \cdot 48.$$

**IDÉZD FEL A LÉNYEGET!**

1. Mit nevezünk két szám közös többszörösének?
2. Mit nevezünk két szám legkisebb közös többszörösének?
3. Hogyan kell meghatározni két szám legkisebb közös többszörösét?
4. Hogyan kell meghatározni két prímszám legkisebb közös többszörösét?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**162′.** Nevezd meg 4 és 10 három közös többszörösét! Köztük van-e a két szám legkisebb közös többszöröse, azaz lkkt (4; 10)?

**163′.** Igaz-e, hogy két prímszám legkisebb közös többszöröse egyenlő 1) a számok összegével; 2) a számok különbségével; 3) a számok szorzatával; 4) a számok hányadosával?

**164′.** Igaz-e, hogy 5 és 3 legkisebb közös többszöröse
1) 8; 2) 15; 3) 24; 4) 30?

**165°.** Írd ki az alábbi számok közös többszöröseit tíztől harmincötig:
1) 2 és 5; 2) 4 és 8; 3) 4 és 12.

**166°.** Írd ki az alábbi számok közös többszöröseit húsztól negyvenig:
1) 3 és 5; 2) 3 és 6; 3) 3 és 12.

**167°.** Jelölj meg egy számegyenesen két olyan pontot, melynek a koordinátája 2 és 3 közös többszöröse! (A számegyenes egysége a füzetlapod egy kockája legyen!)

**168°.** Jelölj meg egy számegyenesen három olyan pontot, melynek a koordinátája 3 és 4 közös többszöröse! (A számegyenes egysége a füzetlapod egy négyzetrácsának hossza legyen!)

**169°.** Határozd meg az a és b szám lkkt-jét, ha: 1) $a = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 7$;
2) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$;
3) $a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, $b = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

**170°.** Határozd meg az alábbi számok legkisebb közös többszörösét:
1) 12 és 18; 2) 15 és 18; 3) 14 és 21.

**171°.** Határozd meg az alábbi számok lkkt-jét:
1) 24 és 28; 2) 24 és 32; 3) 24 és 36.

**172°.** Határozd meg az alábbi törtek számlálójának és nevezőjének lkkt-jét:

1) $\frac{15}{25}$; 2) $\frac{9}{25}$; 3) $\frac{96}{144}$; 4) $\frac{32}{54}$.

**173°.** Határozd meg az alábbi törtek nevezőinek lkkt-jét:

1) $\frac{1}{12}$ és $\frac{1}{64}$; 2) $\frac{1}{9}$ és $\frac{1}{33}$; 3) $\frac{1}{8}$ és $\frac{1}{112}$; 4) $\frac{1}{45}$ és $\frac{1}{75}$.

**174°.** Határozd meg az alábbi törtek nevezőinek legkisebb közös többszörösét:

1) $\frac{1}{45}$ és $\frac{1}{105}$; 2) $\frac{1}{20}$ és $\frac{1}{75}$; 3) $\frac{1}{112}$ és $\frac{1}{84}$.

**175°.** Tudjuk, hogy lkkt (x; y) = xy. Mit lehet elmondani ezekről a számokról?

**176.** Tudjuk, hogy egy ládában 80-nál kevesebb alma van, és hogy a számuk osztható 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal. Hány alma van a ládában?

**177.** Édesanya a farsangra 50-nél kevesebb fánkot sütött. Tudjuk, hogy a fánkokat négyesével, vagy hatosával, de kilencesével is tálcára lehetne rakni. Hány fánkot sütött édesanya?

**178.** Gyuri nagyapja még nincs 90 éves, viszont életkora osztható 6-tal, 8-cal, 9-cel és 12-vel. Hány éves Gyuri nagyapja?

**179.** Határozd meg az alábbi számpárok legkisebb közös többszörösét:
1) 64 és 54; 3) 100 és 125; 5) 168 és 140; 7) 125 és 225;
2) 95 és 114; 4) 121 és 88; 6) 144 és 324; 8) 185 és 111.

**180.** Határozd meg az alábbi számpárok legkisebb közös többszörösét:
1) 162 és 243; 2) 192 és 256; 3) 252 és 189; 4) 264 és 300.

**181.** Határozd meg az alábbi számpárok legkisebb közös többszörösét:
1) 8, 12 és 18; 3) 33, 44 és 121; 5) 18, 24 és 32; 7) 21, 28 és 42;
2) 16, 32 és 48; 4) 35, 84 és 105; 6) 25, 45 és 60; 8) 11, 13 és 23.

**182.** Határozd meg az alábbi számpárok legkisebb közös többszörösét:
1) 22, 33 és 55; 2) 16, 20 és 36; 3) 10, 25 és 35; 4) 11, 17 és 19.

**183.** Oldd meg az alábbi egyenleteket és határozd meg az lkkt (x; y):
1) $4{,}12x + 11{,}68 = 160$ és $3{,}34y - 20{,}64 = 300$;
2) $2{,}36x - 7{,}2 = 99$ és $1{,}55y + 7{,}25 = 170$.

**184.** Adottak a természetes számok tíztől húszig. Írd le az adott számok közül az összes olyan számpárt, amely relatív prím és határozd meg a legkisebb közös többszörösüket.

**185*.** Keresd meg azt a legkisebb négyjegyű számot, mely osztható 31-gyel is és 3-mal is.

**186*.** Keresd meg azt a legnagyobb háromjegyű számot, mely osztható 28-cal is és 5-tel is.

**187*.** Két természetes számról tudjuk, hogy azonos számjegyekből állnak és oszthatók 9-cel. Határozd meg az összes ilyen számpárt és számítsd ki legkisebb közös többszörösüket.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**188.** Az *N* város határában az út mentén 30 méterenként villanyoszlopok állnak. Úgy döntöttek, hogy az oszlopokat kicserélik, és az újakat 45 méterenként állítják fel. Hány méterre lesz a legközelebbi olyan oszlop *N* várostól (az első oszlopot nem számítva), amit a régi oszlop helyére tesznek.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**189.** A *BC* szakasz hossza 24 cm. Az *AD* szakasz 5 cm-rel hosszabb a *BC* szakasznál és 7 cm-rel rövidebb az *MN* szakasznál. Határozd meg a *BC*, *AD* és *MN* szakaszok hosszainak összegét.

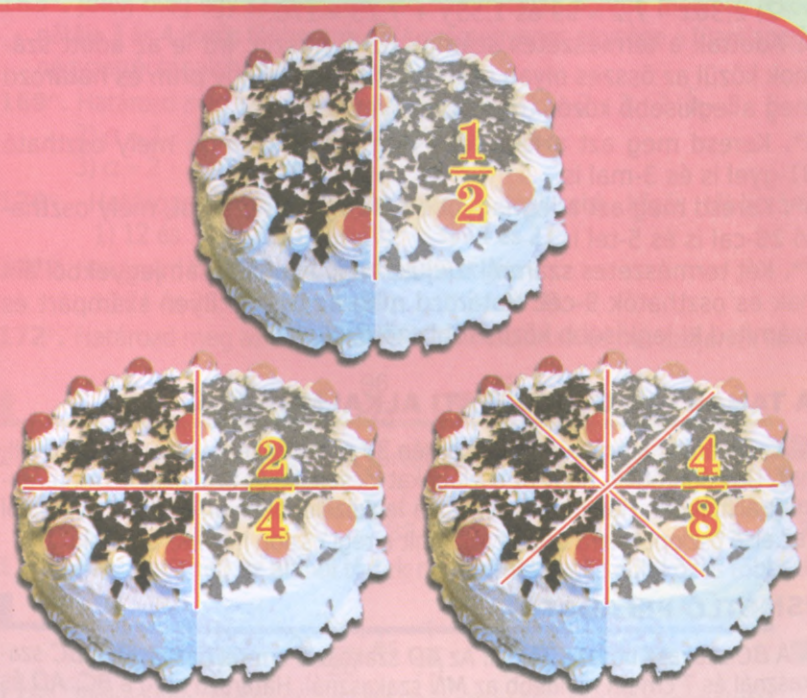
**190.** Határozd meg azt a három számot, melyek átlaga 12 és a második szám pedig kétszer nagyobb az elsőnél és háromszor kisebb a harmadiknál.

# 2. FEJEZET

# KÖZÖNSÉGES TÖRTEK ÉS A VELÜK VÉGZETT MŰVELETEK

## Ebben a fejezetben megtudod:

- mi a tört alaptulajdonsága;
- hogyan kell egyszerűsíteni a törteket;
- hogyan kell közös nevezőre hozni a törteket;
- hogyan kell összehasonlítani a különböző nevezőjű törteket;
- hogyan kell a törtszámokkal műveleteket végezni;
- hogyan kell közönséges törtet tizedes tört alakban leírni;
- hogyan alkalmazható a megtanult tananyag a gyakorlatban

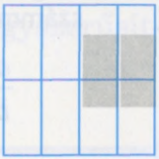



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

# 6. § A TÖRT ALAPTULAJDONSÁGA. A TÖRTEK EGYSZERŰSÍTÉSE, BŐVÍTÉSE



2. ábra



3. ábra

Figyeljük meg a 2. és a 3. ábrát! Láthatjuk, hogy két egybevágó négyzetet részekre osztottunk: az elsőt 4 egyenlő részre (2. ábra), a másodikat 8 egyenlő részre (3. ábra). Mind a két rajzon a négyzetek azonos része van kiszínezve. Viszont az első ábrán a négyzet $\frac{1}{4}$-e, míg a másikon a négyzet $\frac{2}{8}$-a van befestve. Tehát az $\frac{1}{4}$ felcserélhető $\frac{2}{8}$-dal, ami azt jelenti, hogy: $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$.

Ahhoz, hogy megértsük, hogyan lehet $\frac{1}{4}$-ből $\frac{2}{8}$-ot kapni, gondoljuk végig, hogyan jártunk el. A második négyzetet kétszer több egyenlő részre osztottuk, mint az elsőt (ezt mutatja a nevező). Ezért, ha a második esetben kétszer több részt veszünk el, akkor ugyanannyit kapunk, mint az elsőben. Az első négyzet egy része egyenlő a második négyzet két részével. Ebből következik: $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{2}{8}$. Fordított sorrendben haladva azt kapjuk, hogy: $\frac{2}{8}=\frac{2:2}{8:2}=\frac{1}{4}$. Ezt a tulajdonságot a *tört alaptulajdonságának* nevezzük.

**Jegyezd meg!**

**A tört alaptulajdonsága**

A tört értéke nem változik, ha a számlálóját és a nevezőjét megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}, \text{ ha } c\neq 0; \quad \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}, \text{ ha } c\neq 0.$$

**1. feladat** Egy édesanya olyan tábla tejcsokoládét vásárolt, amely 18 kockából állt. Tímea azt mondta, hogy megette a tábla $\frac{1}{6}$-át, János pedig azt állította, hogy a $\frac{3}{18}$-át. Az édesanya szerint a gyerekek ugyanannyi csokoládét ettek meg. Igaza van-e az édesanyának?

**Megoldás.** Tímea és János más egységekkel mértek. Tímea a tábla hatodával mért, míg János a tábla tizennyolcad részével. Az alaptulajdonság alapján: $\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$. Tehát, Tímea és János valóban azonos mennyiségű csokoládét evett meg. Az édesanyának igaza volt.

**Figyeld meg:**

Ha a törtek értékei egyenlők, akkor ebben az esetben ezek a törtek egy szám különböző alakjai.

Az alaptulajdonság értelmében leírhatjuk, hogy: $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$. Ebben az esetben a tört számlálóját és a nevezőjét elosztottuk 2-vel, és egy olyan törtet kaptunk, melynek a számlálója és a nevezője is kisebb lett, 3 és 8. Ezt az eljárást a *tört egyszerűsítésének* nevezzük.

Vajon minden tört egyszerűsíthető? Nem. Például az $\frac{5}{7}$ tört számlálójának és nevezőjének az 1-en kívül nincs más

közös osztója. 5 és 7 relatív prím, ezért az $\frac{5}{7}$ tört nem egyszerűsíthető. Az ilyen törteket *egyszerűsíthetetlen* törteknek nevezzük. Például az $\frac{5}{8}$, $\frac{20}{21}$, $\frac{19}{36}$ törtek egyszerűsíthetetlenek.

**Jegyezd meg!**

**A tört egyszerűsítésének szabálya**

Ahhoz, hogy egy törtet egyszerűsítsünk:

1) meg kell határozni a számláló és a nevező egytől különböző közös osztóját;
2) el kell osztani a tört számlálóját a közös osztóval és ez az eredmény lesz az új tört számlálója;
3) el kell osztani a tört nevezőjét a közös osztóval és ez az eredmény lesz az új tört nevezője.

Például:

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Ha az egyszerűsítés után kapott tört még mindig egyszerűsíthető, akkor az eljárás mindaddig megismételhető, amíg nem kapunk egyszerűsíthetetlen törtet:

$$\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

**Figyeld meg:**

Ha egy törtet a számláló és a nevező legnagyobb közös osztójával egyszerűsítettük, akkor rögtön az egyszerűsíthetetlen tört alakot kapjuk meg.

**További tudnivalók**

Az ókori Rómában a törtek eléggé érdekes rendszerét használták. Az alapjának a tömegegység 12-ed részét választották, melyet asnak (libránák) neveztek.

Az *as.* $\frac{1}{12}$-ét pedig *unciának*. A rómaiak az utat, az időt és más mennyiségeket is a tömeghez viszonyítottak. Ennek megfelelően azt mondták, hogy megtettek hét uncia utat vagy elolvasták a könyvből három unciányi részét. Ebben az esetben természetesen nem arról volt szó, hogy mérlegen mérték volna a megtett utat vagy az elolvasott oldalakat. Ez a rómaiak számára azt jelentette, hogy megtették az út $\frac{7}{12}$-ét vagy elolvasták a könyv $\frac{3}{12}$-ét.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mondd el a tört alaptulajdonságát.
2. Magyarázd meg, megváltozik-e a tört értéke, ha csak a számlálóját szorozzuk meg egy természetes számmal.
3. Magyarázd meg, megváltozik-e a tört értéke, ha csak a nevezőjét szorozzuk meg egy természetes számmal.
4. Mit értünk a tört egyszerűsítésén?
5. Minden tört egyszerűsíthető?
6. Hogyan kell törtet egyszerűsíteni?
7. Milyen törtet nevezünk egyszerűsíthetetlen törtnek?
8. Melyik számmal kell egyszerűsíteni a törtet, hogy azonnal egyszerűsíthetetlen törtet kapjunk?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**191′.** Igaz-e, hogy a tört értéke nem változik, ha:
1) a számlálót megszorozzuk 5-tel;
2) a nevezőt megszorozzuk 5-tel;
3) a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk 5-tel?

**192′.** Igaz-e, hogy a tört értéke nem változik, ha:
1) a számlálót elosztjuk 7-tel;
2) a nevezőt elosztjuk 7-tel;
3) a számlálót és a nevezőt is elosztjuk 7-tel?

**193′.** Irénke azt állítja, hogy ő helyesen alkalmazta a törtek alaptulajdonságát, amikor $\frac{2}{7}$-ből: 1) $\frac{4}{7}$-et; 2) $\frac{4}{14}$-et; 3) $\frac{2}{14}$-et; 4) $\frac{4}{28}$-ot kapott. Igazat állít-e a kislány?

**194′.** András azt állítja, hogy az alábbi egyenlőséget a tört alaptulajdonságának megfelelően írta le:

1) $\frac{10}{16}=\frac{10:2}{16:4}$; 2) $\frac{10}{16}=\frac{10:2}{16:2}$; 3) $\frac{10}{16}=\frac{10:5}{16:4}$.

Igaza van-e a kisfiúnak?

**195°.** Adott az $\frac{5}{9}=\frac{20}{36}$. egyenlőség. Mennyivel szorozták meg a tört számlálóját és nevezőjét, mennyivel bővítették a törtet:

1) 2-vel; 2) 4-gyel; 3) 5-tel; 4) $\frac{1}{4}$-del?

**196°.** Szorozd meg $\frac{7}{11}$ 1) 2-vel; 2) 3-mal; 3) 4-gyel! 4) 5-tel! Írd le az egyenlőségeket.

**197°.** Helyettesítsd a csillagot olyan számmal, melyre teljesül az egyenlőség:

1) $\frac{5\cdot *}{8\cdot *}=\frac{30}{48}$; 2) $\frac{7\cdot *}{9\cdot *}=\frac{28}{36}$; 3) $\frac{15\cdot *}{17\cdot *}=\frac{45}{51}$; 4) $\frac{10\cdot *}{11\cdot *}=\frac{70}{77}$.

**198°.** Helyettesítsd a csillagot olyan számmal, melyre teljesül az egyenlőség:

1) $\frac{3\cdot *}{10\cdot *}=\frac{15}{50}$; 2) $\frac{11\cdot *}{12\cdot *}=\frac{66}{72}$.

**199°.** Milyen számot kell beírni a törtek számlálójába, hogy az adott törttel azonos értékű törtet kapjunk? Rajzold át a füzetedbe a 2. táblázatot és töltsd ki.

*2. táblázat*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{\quad}{10}$ | $\frac{\quad}{25}$ | $\frac{\quad}{35}$ | $\frac{\quad}{65}$ |
| $\frac{3}{8}$ | $\frac{\quad}{24}$ | $\frac{\quad}{40}$ | $\frac{\quad}{56}$ | $\frac{\quad}{96}$ |
| $\frac{8}{9}$ | $\frac{\quad}{27}$ | $\frac{\quad}{45}$ | $\frac{\quad}{81}$ | $\frac{\quad}{117}$ |

**200°.** Rajzolj egy számegyenest! A számegyenes egysége a füzeted tíz négyzetrácsának hossza legyen! Jelöld ezen a számegyenesen az $A\left(\frac{1}{2}\right)$, és $B\left(\frac{1}{5}\right)$ pontot! Milyen törtekkel lehet még kifejezni ezeknek a pontoknak a koordinátáit? Írj le két-két egyenlőséget.

**201°.** Adott a $\frac{24}{64}$ tört. Igaz-e, hogy a számláló és a nevező legnagyobb közös osztója:

1) 4; 2) 8; 3) 12; 4) 16?

**202°.** A törtek alaptulajdonsága alapján döntsd el, igaz-e, hogy $\frac{12}{18}$ egyenlő: 1) $\frac{2}{8}$-dal; 2) $\frac{4}{9}$-del; 3) $\frac{2}{3}$-dal; 4) $\frac{3}{8}$-dal?

**203°.** Egyszerűsíthetetlen-e az alábbi tört:

1) $\frac{6}{15}$; 2) $\frac{9}{27}$; 3) $\frac{10}{11}$; 4) $\frac{22}{35}$?

**204°.** Helyettesítsd a csillagot olyan számmal, melyre teljesül az alábbi egyenlőség:

1) $\frac{*}{8}=\frac{20}{32}$; 2) $\frac{6}{*}=\frac{36}{42}$; 3) $\frac{*}{5}=\frac{28}{35}$; 4) $\frac{9}{*}=\frac{72}{88}$.



***205°.*** Helyettesítsd a csillagot olyan számmal, melyre teljesül az alábbi egyenlőség:

1) $\frac{*}{9}=\frac{25}{45}$; 2) $\frac{4}{*}=\frac{16}{44}$; 3) $\frac{*}{12}=\frac{28}{48}$; 4) $\frac{10}{*}=\frac{70}{91}$.

**206°.** Oszd el a $\frac{16}{24}$, $\frac{32}{40}$, $\frac{48}{56}$, $\frac{8}{64}$ törtek számlálóját és nevezőjét 8-cal! Írd le a megfelelő egyenlőségeket.

**207°.** Egy mechanikus óra számlapján magyarázd meg az alábbi egyenlőségeket:

1) $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$; 2) $\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$; 3) $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$; 4) $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$.

**208°.** Egyszerűsítsd az alábbi törteket:

1) $\frac{36}{48}$; 2) $\frac{35}{75}$; 3) $\frac{44}{121}$; 4) $\frac{96}{112}$.



***209°.*** Egyszerűsítsd az alábbi törteket:

1) $\frac{26}{65}$; 2) $\frac{32}{96}$; 3) $\frac{38}{171}$; 4) $\frac{125}{675}$.

**210°.** Rajzolj egy számegyenest! A számegyenes egysége legyen a füzeted 16 négyzetrácsának hossza! Jelöld meg ezen a számegyenesen a következő számokat: $\frac{1}{16}$; $\frac{2}{16}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{6}{16}$; $\frac{8}{16}$; $\frac{10}{16}$; $\frac{12}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$. Az adott számok közül melyek jelölik ugyanazt a pontot? Írd le a megfelelő egyenlőségeket.



***211°.*** Rajzolj egy számegyenest! A számegyenes egysége legyen a füzeted 18 négyzetrácsának hossza! Jelöld meg ezen a számegyenesen a következő számokat: $\frac{2}{18}$; $\frac{3}{18}$; $\frac{4}{18}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{6}{18}$; $\frac{9}{18}$; $\frac{10}{18}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{16}{18}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$. Az adott számok közül melyek jelölik ugyanazt a pontot? Írd le a megfelelő egyenlőségeket.

**212°.** Add meg az alábbi tizedes törtek egyszerűsíthetetlen tört alakját:
1) 0,1; 2) 0,05; 3) 0,24; 4) 0,125.

**213°.** Melyik számot kell megszorozni 4-gyel, hogy az eredmény 0,4; 0,44; 1,2; 3,6, 1,44 legyen? Írd le a megfelelő egyenlőségeket közönséges tört alakban.

**214°.** Add meg az $a$ összes olyan természetes értékét, melyre az $\frac{a}{16}$ tört valódi és egyszerűsíthetetlen lesz.

**215°.** Add meg a $b$ összes olyan természetes értékét, melyre a $\frac{b}{18}$ tört valódi és egyszerűsíthetetlen lesz.

**216.** Írd le az $\frac{5}{12}, \frac{11}{18}, \frac{a}{8}, \frac{b}{9}$ törteket olyan törtalakban, ahol a nevező:
1) 72; 2) 144; 3) 504. Melyik esetben kellett a számlálót és a nevezőt a legkisebb számmal szorozni?

**217.** Írd le az $\frac{5}{15}, \frac{11}{25}, \frac{a}{3}, \frac{b}{5}$ törteket olyan törtalakban, ahol a nevező:
1) 900; 2) 1350; 3) 2700. Melyik esetben kellett a számlálót és a nevezőt a legkisebb számmal szorozni?

**218.** Adottak az: $\frac{5}{8}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{5}{16}, \frac{33}{64}, \frac{35}{128}$ törtek. Add meg ezeket a számokat olyan törtalakban, melynek nevezője: 1) $256a$; 2) $512a$; 3) $1024a$, ahol $a$ — természetes szám.

**219.** Adottak a: $\frac{2}{3}, 1\frac{2}{9}, 2\frac{5}{27}, \frac{35}{81}, \frac{11}{18}$ törtek. Add meg ezeket a számokat olyan törtalakban, melynek nevezője: 1) $162b$; 2) $324b$; 3) $648b$, ahol $b$ — természetes szám.

**220.** Egyszerűsítsd az alábbi törteket:
1) $\frac{192}{448}$; 2) $\frac{175}{385}$; 3) $\frac{625}{750}$; 4) $\frac{243}{567}$; 5) $\frac{135}{495}$; 6) $\frac{448}{512}$.

**221.** Egyszerűsítsd az alábbi törteket: 1) $\frac{135}{216}$; 2) $\frac{108}{288}$; 3) $\frac{625}{1125}$; 4) $\frac{132}{308}$.

**222.** Írd le az alábbi vegyes számokat áltört alakban és egyszerűsítsd azokat:
1) $1\frac{42}{105}$; 2) $1\frac{66}{99}$; 3) $3\frac{75}{250}$; 4) $4\frac{60}{144}$.

**223.** Add meg az alábbi mennyiségeket kilogrammban, az eredményt írd le egyszerűsíthetetlen törtalakban:
1) 15 g; 2) 125 g; 3) 250 g; 4) 640 g.

**224.** Add meg percben az alábbi mennyiségeket, az eredményt pedig írd le olyan vegyes számként, melynek törtrésze egyszerűsíthetetlen:
1) 640 sec; 2) 355 sec; 3) 425 sec; 4) 244 sec.

**225.** Add meg órában az alábbi mennyiségeket, az eredményt pedig írd le olyan vegyes számként, melynek törtrésze egyszerűsíthetetlen:
1) 370 min; 2) 450 min; 3) 552 min; 4) 636 min.

**226.** Egyszerűsítsd az alábbi törteket, ha a betűk természetes számokat jelölnek:
1) $\frac{2ab}{4a}$; 2) $\frac{3abc}{18c}$; 3) $\frac{15xy}{25x}$; 4) $\frac{16yz}{24xz}$.

**227.** Egyszerűsítsd az alábbi törteket, ha a betűk természetes számokat jelölnek:
1) $\frac{2abc}{6b}$; 2) $\frac{12ab}{16ac}$; 3) $\frac{14xy}{28y}$; 4) $\frac{32z}{24xyz}$.

**228.** Az $x$ mely értékére teljesül az alábbi egyenlőség:
1) $\frac{x}{13}=\frac{6}{26}$; 2) $\frac{x}{12}=\frac{20}{48}$; 3) $\frac{12}{x}=\frac{72}{114}$; 4) $\frac{10}{13x}=\frac{70}{91}$.

**229.** Az $x$ mely értékére teljesül az alábbi egyenlőség:
1) $\frac{x-2}{6}=\frac{8}{24}$; 2) $\frac{x+1}{5}=\frac{15}{25}$; 3) $\frac{5}{2x-3}=\frac{25}{35}$; 4) $\frac{9}{2x+1}=\frac{36}{44}$.

**230.** Egy tört számlálójának és nevezőjének az összege 105. Egyszerűsíthetetlen tört alakja $\frac{1}{2}$. Melyik ez a tört.

**231.** Egy tört számlálójának és nevezőjének az összege 136. Egyszerűsíthetetlen tört alakja $\frac{8}{9}$. Melyik ez a tört.

**232*.** Egyszerűsíthető-e egy olyan tört, amely egy egyszerűsíthetetlen törtet egészít ki egy egésszé? Vizsgálj meg néhány példát! Próbálj szabályszerűséget találni a megoldások között.

**233*.** Mennyi az $\frac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+4\cdot8\cdot12+7\cdot14\cdot21}{1\cdot3\cdot5+2\cdot6\cdot10+4\cdot12\cdot20+7\cdot21\cdot35}$ tört értéke?

**234*.** Egyszerűsítsd az alábbi törteket, vagy igazold, hogy egyszerűsíthetetlen:
1) $\frac{1197}{4273}$; 2) $\frac{1089}{3025}$; 3) $\frac{805}{1236}$; 4) $\frac{777}{11211}$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**235.** Marika azt mondta, hogy ő hamarabb befejezte a dolgozatot, mint Kati. Igazat mondott-e Marika, ha neki a dolgozat elvégzéséhez $\frac{7}{12}$ órára volt szüksége, míg Kati 35 perc alatt oldotta meg a feladatot.

**236.** Írd le, mennyi ideig tart 1) 1 tanóra; 2) 2 tanóra; 3) 4 tanóra; 4) 6 tanóra! Az eredményt add meg órában és írd le egyszerűsíthetetlen tört alakban.

**237.** Édesapa két dinnyét vásárolt, melyek együttes tömege 12 kg. Mindkét dinnyét egyenlően osztották el a családtagok, édesanya, édesapa, két nagymama, két nagyapa, Ilonka és öccse, Nándor között. Mekkora részt kapott egy-egy családtag kilogrammban kifejezve? Egyszerűsítsd az eredményt.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**238.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $(7x - 24) : 6 + 26 = 29$; 2) $(99 - 9y) \cdot 8 + 14 = 86$.

**239.** Egy téglalap egyik oldala háromszor hosszabb a másik oldalnál. Mekkorák a téglalap oldalai, ha a kerülete 72 cm.

# 7. § TÖRTEK KÖZÖS NEVEZŐRE HOZÁSA. TÖRTEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Már tudjátok, hogy $\frac{1}{4}$ helyettesíthető $\frac{4}{16}$-dal, mivel értékük egyenlő: $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$. Ebben az esetben úgy is fogalmazhatunk, hogy $\frac{1}{4}$-et 16-os *nevezőre hoztuk*. A tört új nevezőre hozásánál alkalmazzuk a tört alaptulajdonságát.

Gyakran előre tudjuk, milyen nevezőre kell hozni az adott törtet. Például $\frac{3}{10}$-et hozzuk 50-es nevezőre. Ehhez

először meg kell határozni, hogy az új 50-es nevező, hányszor nagyobb az adott tört nevezőjénél: $50 : 10 = 5$ (5-ször). Majd ugyanennyiszer kell növelni az adott tört számlálóját is: $3 \cdot 5 = 15$. Tehát, $\frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 5} = \frac{15}{50}$. Az 5-ös számot *pótszorzónak* nevezzük.

**Figyeld meg:**

- a pótszorzó természetes szám;
- a pótszorzó meghatározásához az új nevezőt el kell osztani az adott tört nevezőjével.

Vajon bármilyen nevezőre hozható egy tört? Nem. Például $\frac{7}{10}$ nem hozható 11-es vagy 25-ös nevezőre, mivel sem 11, sem 25 nem osztható 10-zel.

**Jegyezd meg!**

**Az új nevezőre hozás szabálya**

Ahhoz, hogy egy törtet új nevezőre hozzunk:

1) írjuk le az új nevezőt az új tört nevezőjébe;
2) határozzuk meg, mennyivel kell bővíteni a törtet, ehhez osszuk el az új nevezőt a régi nevezővel;
3) szorozzuk meg a számlálót a kapott hányadossal, vagyis a pótszorzóval és az eredményt írjuk az új tört számlálójába.

Például:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{24} = \frac{9}{24}$$

Ha a törteket úgy hoztuk új nevezőre, hogy ezek a nevezők egyenlők, akkor a törteket *közös nevezőre* hoztuk. Bizonyos esetekben előre tudjuk, milyen nevezőre kell bővíteni a törteket. Ilyenkor minden törtet az adott nevezőre kell hozni az ismert szabály szerint.

Leggyakrabban azonban nincs megadva az új nevező. Ilyenkor először tisztázni kell, milyen közös nevezőre kell hozni a törteket.

Általában a törteket olyan új nevezőre hozzák, amely a lehetséges legkisebb. Az ilyen nevezőt *legkisebb közös nevezőnek* nevezzük.

**Jegyezd meg!**

**A törtek legkisebb közös nevezője a nevezők legkisebb közös többszöröse (lkkt-je).**

Fogalmazzuk meg a törtek közös nevezőre hozásának szabályát.

**Jegyezd meg!**

**A törtek közös nevezőre hozásának szabálya**

Ahhoz, hogy két törtet közös nevezőre hozzunk:

1) meg kell határozni a nevezők legkisebb közös többszörösét;
2) meg kell határozni, mennyivel kell bővíteni az első törtet;
3) új nevezőre kell hozni az első törtet;
4) meg kell határozni, mennyivel kell bővíteni a második törtet;
5) új nevezőre kell hozni a második törtet.

**1. feladat.** Hozzuk közös nevezőre $\frac{1}{12}$-et és $\frac{5}{16}$-ot.

**Megoldás.**

lkkt $(12; 16) = 48$.

$\frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 4}{48} = \frac{4}{48}$; $\frac{5}{16} = \frac{5 \cdot 3}{48} = \frac{15}{48}$.

Már tudjátok, hogyan kell két azonos nevezőjű törtet összehasonlítani. Például: $\frac{3}{11} < \frac{7}{11}$, mivel $3 < 7$; $\frac{10}{11} > \frac{7}{11}$, mivel $10 > 7$.

Össze lehet-e hasonlítani két különböző nevezőjű törtet? Igen. Nézzünk egy példát.

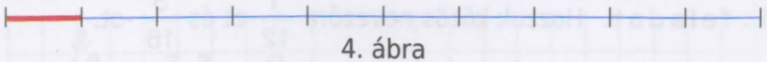
**2. feladat.** Hasonlítsuk össze $\frac{5}{12}$-et $\frac{5}{8}$-dal.

**Megoldás.** Hozzuk a két törtet a legkisebb közös nevezőre, 24-re. Ebben az esetben $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$, az $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$. Mivel a kapott törtek nevezői azonosak, így a számlálókat kell összehasonlítani: $10 < 15$. Ebből következik, hogy: $\frac{10}{24} < \frac{15}{24}$, ezért $\frac{5}{12} < \frac{5}{8}$.

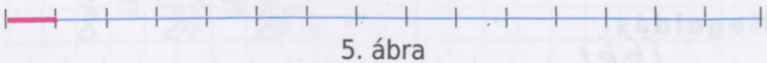
### További tudnivalók

Ha két különböző nevezőjű törtnek azonos a számlálója, akkor ezeket a törteket közös nevezőre hozás nélkül is össze tudjuk hasonlítani. Ebben az esetben azt a szabályt alkalmazzuk, hogy két azonos számlálójú tört közül az nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.

Például, $\frac{1}{10} > \frac{1}{15}$, mivel $10 < 15$. A 4. és 5. ábra alapján próbáld meg önállóan megmagyarázni ezt a következtetést.



4. ábra



5. ábra

### IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mit jelent a tört új nevezőre hozása?
2. Mit nevezünk pótszorzónak?
3. Magyarázd el, hogyan kell meghatározni a pótszorzót.
4. Mondd el a tört új nevezőre hozásának szabályát.

**5.** Mi a törtek legkisebb közös nevezője?
**6.** Mondd el a törtek közös nevezőre hozásának szabályát.
**7.** Hogyan kell különböző nevezőjű törteket összehasonlítani?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**240′.** Lehet-e $\frac{3}{7}$-et az alábbi nevezőre hozni: 1) 15; 2) 21; 3) 27; 4) 42?

**241′.** Igaz-e, hogy: 1) $\frac{3}{5}=\frac{6}{15}$; 2) $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$; 3) $\frac{3}{5}=\frac{10}{15}$?

**242′.** Igaz-e, hogy $\frac{5}{9}$ és $\frac{5}{6}$ legkisebb közös nevezője: 1) 9; 2) 6; 3) 54; 4) 18?

**243°.** Adottak az alábbi egyenlőségek: 1) $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$; 2) $\frac{5}{9}=\frac{15}{27}$; 3) $\frac{6}{11}=\frac{30}{55}$. Mennyivel bővítették az első törteket?

**244°.** Mennyivel kell bővíteni a $\frac{7}{8}$ törtet, hogy az alábbi nevezőre hozd: 1) 24; 2) 48; 3) 96; 4) 120?

**245°.** Hozd $\frac{5}{6}$-ot: 1) 12-es; 2) 18-as; 3) 24-es; 4) 48-as nevezőre.

**246°.** Hozd az $\frac{1}{4}, \frac{7}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2}$ törteket 32-es nevezőre.

**247°.** Hozd az $\frac{1}{4}, \frac{22}{25}, \frac{19}{20}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$ törteket 100-as nevezőre.

**248°.** Mi lesz az alábbi törtek legkisebb közös nevezője? Hozd erre a nevezőre a törteket.

1) $\frac{5}{17}$ és $\frac{5}{34}$; 2) $\frac{7}{12}$ és $\frac{17}{36}$; 3) $\frac{2}{5}$ és $\frac{13}{20}$; 4) $\frac{3}{7}$ és $\frac{9}{28}$;

5) $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{5}$; 6) $\frac{5}{7}$ és $\frac{3}{5}$; 7) $\frac{2}{11}$ és $\frac{5}{7}$; 8) $\frac{3}{4}$ és $\frac{1}{6}$;

9) $\frac{5}{6}$ és $\frac{7}{8}$; 10) $\frac{3}{10}$ és $\frac{5}{8}$; 11) $\frac{11}{12}$ és $\frac{3}{8}$; 12) $\frac{11}{24}$ és $\frac{5}{28}$;

13) $\frac{11}{12}$ és $\frac{5}{18}$; 14) $\frac{3}{60}$ és $\frac{7}{50}$; 15) $\frac{5}{9}$ és $\frac{2}{15}$; 16) $\frac{6}{9}$ és $\frac{5}{21}$;

17) $\frac{4}{15}$ és $\frac{7}{25}$; 18) $\frac{5}{21}$ és $\frac{6}{35}$; 19) $\frac{5}{9}$ és $\frac{5}{24}$; 20) $\frac{5}{14}$ és $\frac{8}{21}$;

21) $\frac{7}{15}$ és $\frac{9}{40}$; 22) $\frac{5}{18}$ és $\frac{7}{27}$; 23) $\frac{5}{42}$ és $\frac{11}{105}$; 24) $\frac{7}{45}$ és $\frac{19}{60}$;

25) $\frac{11}{81}$ és $\frac{7}{72}$ 26) $\frac{5}{12}$ és $\frac{8}{35}$; 27) $\frac{5}{16}$ és $\frac{11}{21}$; 28) $\frac{7}{10}$ és $\frac{19}{27}$.

***249°.*** Mi lesz az alábbi törtek legkisebb közös nevezője? Hozd erre a nevezőre a törteket.

1) $\frac{5}{6}$ és $\frac{19}{36}$; 5) $\frac{1}{4}$ és $\frac{9}{10}$; 9) $\frac{7}{15}$ és $\frac{4}{21}$; 13) $\frac{5}{36}$ és $\frac{7}{27}$;

2) $\frac{3}{5}$ és $\frac{16}{25}$; 6) $\frac{5}{6}$ és $\frac{7}{10}$; 10) $\frac{8}{15}$ és $\frac{9}{35}$; 14) $\frac{13}{50}$ és $\frac{11}{75}$;

3) $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{5}$; 7) $\frac{11}{16}$ és $\frac{5}{28}$; 11) $\frac{7}{15}$ és $\frac{5}{18}$; 15) $\frac{13}{20}$ és $\frac{4}{21}$;

4) $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{11}$; 8) $\frac{7}{18}$ és $\frac{5}{24}$; 12) $\frac{2}{15}$ és $\frac{19}{50}$; 16) $\frac{7}{15}$ és $\frac{19}{26}$.

**250°.** Hasonlítsd össze az alábbi törteket:

1) $\frac{1}{6}$ és $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{3}{5}$ és $\frac{4}{15}$; 5) $\frac{31}{40}$ és $\frac{18}{35}$;

2) $\frac{7}{9}$ és $\frac{11}{27}$; 4) $\frac{11}{21}$ és $\frac{17}{28}$; 6) $\frac{5}{9}$ és $\frac{12}{39}$.

***251°.*** Hasonlítsd össze az alábbi törteket:

1) $\frac{1}{2}$ és $\frac{4}{7}$; 2) $\frac{7}{8}$ és $\frac{17}{24}$; 3) $\frac{9}{25}$ és $\frac{7}{10}$.

**252°.** Rendezd növekvő sorrendbe a: $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{13}{27}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{23}{27}$ számokat.

***253°.*** Rendezd csökkenő sorrendbe a: $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{24}$ számokat.

**254.** Hozd legkisebb közös nevezőre az alábbi törteket:

1) $\frac{5}{24}$ és $\frac{11}{40}$; 4) $\frac{11}{64}$ és $\frac{19}{56}$; 7) $\frac{5}{189}$ és $\frac{11}{315}$; 10) $\frac{23}{126}$ és $\frac{31}{441}$;

2) $\frac{5}{36}$ és $\frac{7}{90}$; 5) $\frac{12}{81}$ és $\frac{11}{135}$; 8) $\frac{125}{169}$ és $\frac{19}{221}$; 11) $\frac{37}{150}$ és $\frac{11}{375}$;

3) $\frac{17}{100}$ és $\frac{11}{250}$; 6) $\frac{19}{315}$ és $\frac{22}{735}$; 9) $\frac{7}{90}$ és $\frac{11}{135}$; 12) $\frac{11}{324}$ és $\frac{19}{405}$.

***255.*** Hozd legkisebb közös nevezőre az alábbi törteket:

1) $\frac{13}{24}$ és $\frac{11}{64}$; 2) $\frac{5}{72}$ és $\frac{7}{108}$; 3) $\frac{117}{300}$ és $\frac{11}{250}$; 4) $\frac{11}{140}$ és $\frac{19}{42}$;

5) $\frac{12}{81}$ és $\frac{23}{180}$; 6) $\frac{19}{81}$ és $\frac{25}{297}$; 7) $\frac{5}{189}$ és $\frac{15}{441}$; 8) $\frac{105}{117}$ és $\frac{21}{195}$.

**256.** Mely 12-es nevezőjű törtek esnek $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{2}$ közé?

**257.** Mely 18-as nevezőjű törtek esnek $\frac{2}{3}$ és $\frac{5}{6}$ közé?

**258.** Rajzolj egy számegyenest (az egység hossza 10 négyzetrács hosszával egyenlő). Jelöld ezen a számegyenesen az $A\left(\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(\frac{2}{5}\right)$ pontot, valamint azokat a pontokat, melyek koordinátája $\frac{a}{10}$ alakú, ahol $a$ — természetes szám! Mely számok helye a számegyenesen ugyanaz a pont? A megfelelő egyenlőségeket írd le a füzetedbe.

**259.** Rajzolj egy számegyenest (az egység hossza 8 négyzetrács hosszával egyenlő). Jelöld ezen a számegyenesen a $C\left(\frac{1}{2}\right)$ és $D\left(\frac{3}{4}\right)$ pontot, valamint azokat a pontokat, melyek koordinátája $\frac{a}{8}$ alakú, ahol $a$ — természetes szám! Mely számok helye a számegyenesen ugyanaz a pont? A megfelelő egyenlőségeket írd le a füzetedbe.

**260.** Hozd legkisebb közös nevezőre az alábbi törteket:

1) $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{10}$ és $\frac{22}{75}$; 2) $\frac{11}{16}$, $\frac{5}{8}$ és $\frac{25}{36}$; 3) $\frac{23}{48}$, $\frac{17}{64}$ és $\frac{13}{80}$.

**261.** Hozd legkisebb közös nevezőre az alábbi törteket:

1) $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{6}$ és $\frac{22}{27}$; 2) $\frac{5}{36}$, $\frac{9}{20}$ és $\frac{17}{48}$; 3) $\frac{23}{24}$, $\frac{17}{96}$ és $\frac{13}{16}$.

**262.** Hasonlítsd össze a következő számokat:

1) $1\frac{5}{18}$ és $1\frac{9}{16}$; 2) $2\frac{4}{75}$ és $2\frac{16}{125}$; 3) $3\frac{17}{72}$ és $3\frac{11}{24}$.

**263.** Hasonlítsd össze a következő számokat:

1) $1\frac{7}{16}$ és $1\frac{5}{12}$; 2) $3\frac{4}{35}$ és $3\frac{17}{140}$; 3) $5\frac{11}{81}$ és $\frac{47}{9}$.

**264.** Egy medence az egyik csövön keresztül 10 óra alatt telik meg vízzel, míg a másikon 6 óra alatt? Melyik csövön keresztül folyik ki több víz: az elsőn három óra alatt vagy a másodikon 4 óra alatt?

**265.** Egy 15 méter hosszú piros anyagot 6 egyenlő részre szabtak fel, a 24 m hosszú zöld anyagot pedig 9 egyenlő részre. Milyen színű a hosszabb rész?

**266.** Egy élelmiszerüzlet árukészletének $\frac{43}{66}$ része pékáru, $\frac{1}{4}$-e csokoládé és keksz, $\frac{1}{11}$-e pedig ásványvíz és gyümölcslé. Melyik áruból van a legtöbb?

**267*.** Hasonlítsd össze az alábbi törteket anélkül, hogy közös nevezőre hoznád:

1) $\frac{11}{38}$ és $\frac{19}{25}$; 2) $\frac{79}{123}$ és $\frac{41}{117}$; 3) $\frac{101}{153}$ és $\frac{245}{601}$.

Válaszodat indokold meg.

**268*.** Hasonlítsd össze az alábbi törteket anélkül, hogy közös nevezőre hoznád:

1) $\frac{84}{37}$ és $\frac{118}{45}$; 2) $\frac{145}{116}$ és $\frac{227}{143}$; 3) $\frac{605}{321}$ és $\frac{786}{605}$.

Válaszodat indokold meg.

**269*.** Az egyik szám $\frac{7}{15}$-e ugyanannyi, mint a másik szám $\frac{7}{20}$-a. Melyik szám nagyobb?

**270*.** Melyik tört nagyobb: $\frac{1000}{1001}$ vagy $\frac{1001}{1002}$?

**271*.** Bizonyítsd be, hogy $\frac{23}{75}=\frac{2323}{7575}=\frac{232323...}{757575...}$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**272.** Édesapa 10 lépéssel 9 m-t tesz meg, édesanya 14 lépéssel 10-et. Kinek hosszabb a lépése?

**273.** Nyáron Noémi a hobbikertjükben 2 vödör uborkát 40 perc alatt szedett le, nagymamája pedig 30 perc alatt 4 vödörrel. Ki szedett le gyorsabban egy vödör uborkát?

**274.** Édesanya 10 perc alatt 60 derelyét készít, lánya 15 perc alatt 90-et. Ki készít több derelyét 1 perc alatt?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

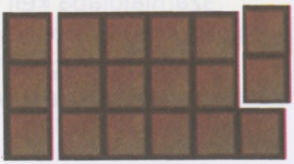
**275.** Helyettesítsd a 347* számban a csillagot számjeggyel úgy, hogy a kapott szám osztható legyen: 1) 9 -cel; 2) 3 -mal; 3) 5 -tel.

**276.** Határozd meg a téglatest legnagyobb oldallapjának területét, ha a térfogata 360 $cm^3$, két oldala pedig 12 cm és 40 mm

# 8. § TÖRTEK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

Már össze tudtok adni és ki tudtok vonni természetes számokat és azonos nevezőjű törteket. Különböző nevezőjű törteket is össze lehet adni és ki lehet vonni.

**1. feladat.** Egy édesanya olyan tábla tejcsokoládét vásárolt, amely 18 kockából állt. Tekla azt mondta, hogy ő megette a tábla $\frac{1}{6}$-át, János pedig azt, hogy az $\frac{1}{9}$-ét (6. ábra). A csokoládé hányad részét ette meg Tekla és János együtt?



6. ábra

**Megoldás.** Tekla és János más egységekkel mértek. Tekla a csokit hat részre osztotta, míg János kilencre. Ahhoz, hogy meghatározzuk az $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$, összeget, az összeadandókat azonos egységekkel kell leírni. Könnyen belátható, hogy ennél a tábla csokoládénál ez az $\frac{1}{18}$. Így a tábla $\frac{1}{6}$-a 3 ilyen rész, azaz $\frac{3}{18}$, míg az $\frac{1}{9}$-e 2 rész, vagyis $\frac{2}{18}$. Ez összesen 5 kocka, vagyis a tábla $\frac{5}{18}$-a.

Tehát a gyerekek a csokoládé $\frac{5}{18}$-átették meg.

A feladat megoldásakor valójában azonos nevezőjű törteket adtunk össze. Próbáljuk meg önállóan megfogalmazni a szabályt, és hasonlítsuk össze a tankönyvben található szöveggel.

**Jegyezd meg!**

**Különböző nevezőjű törtek összeadásának szabálya**

Ahhoz, hogy két különböző nevezőjű törtet összeadjunk:

1) a törteket közös nevezőre kell hozni;
2) a közös nevezőt az összeg nevezőjébe kell írni;
3) a kapott számlálókat össze kell adni és az eredmény számlálójába kell írni;
4) az eredményt egyszerűsíteni kell, ha lehetséges, és fel kell tüntetni az egész részt.

Például:

$$\frac{5}{6}+\frac{13}{15}=\frac{25+26}{30}=\frac{51}{30}=\frac{17}{10}=1\frac{7}{10}.$$

A különböző nevezőjű törtek összeadásánál ugyanúgy érvényesül a *felcserélhetőség és csoportosíthatóság törvénye*, mint a természetes számoknál.

**2. feladat.** Tekla és János együtt megették egy 18 kockából álló tábla tejcsokoládé $\frac{2}{3}$-át. Tekla elmajszolta a csokoládé $\frac{1}{2}$-ét, János pedig a többi részét. Mekkora részt evett meg János?

**Megoldás.** A feladat megoldásához meg kell határozni $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{2}$ különbségét. Mivel a csokoládé $\frac{2}{3}$-a 12 kocka, vagyis $\frac{12}{18}$, az $\frac{1}{2}$-e pedig 9 kocka, ami $\frac{9}{18}$, így $\frac{12}{18}-\frac{9}{18}=\frac{3}{18}$, vagyis a tábla $\frac{1}{6}$.

Tehát, János a tábla csokoládé $\frac{1}{6}$-át ette meg.

Fogalmazzuk meg, hogyan kell kivonni különböző nevezőjű törteket.

**Jegyezd meg!**

**Különböző nevezőjű törtek kivonásának szabálya**

Ahhoz, hogy két különböző nevezőjű törtet kivonjunk:

1) a törteket közös nevezőre kell hozni;
2) a közös nevezőt a különbség nevezőjébe kell írni;
3) a kapott számlálókat ki kell vonni és az eredmény számlálójába kell írni;
4) ha lehetséges, az eredményül kapott különbséget egyszerűsíteni kell, és fel kell tüntetni az egész részt.

**3. feladat.** Számítsuk ki: $\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{6}\right)-\frac{7}{12}$.

**Megoldás.** A példát kétféleképpen számíthatjuk ki.

**1. módszer.** $\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{6}\right)-\frac{7}{12}=\left(\frac{3}{24}+\frac{20}{24}\right)-\frac{14}{24}=\frac{23}{24}-\frac{14}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

**2. módszer.**

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{6}\right)-\frac{7}{12}=\frac{1}{8}+\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{1}{8}+\left(\frac{10}{12}-\frac{7}{12}\right)=\frac{1}{8}+\frac{3}{12}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}.$$

Ki lehet-e számolni két olyan vegyes szám összegét (különbségét), melyek törtrészei különböző nevezőjűek? Igen. Ebben az esetben a törtrészeket hozzuk közös nevezőre. Nézzünk egy példát.

**4 feladat.** Számítsuk ki a következő példákat:

1) $1\frac{5}{6}+3\frac{2}{5}$; 2) $3\frac{4}{7}-1\frac{9}{14}$.

**Megoldás.** 1. A példát kétféleképpen számíthatjuk ki.

**1. módszer.** $1\frac{5}{6}+3\frac{2}{5}=\frac{11}{6}+\frac{17}{5}=\frac{55}{30}+\frac{102}{30}=\frac{157}{30}=5\frac{7}{30}$.

**2. módszer.**

$$1\frac{5}{6}+3\frac{2}{5}=(1+3)+\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{5}\right)=4+\left(\frac{25}{30}+\frac{12}{30}\right)=4+\frac{37}{30}=4+1\frac{7}{30}=5\frac{7}{30}.$$

2. Alkalmazzuk a 2. módszert

$$3\overset{2}{\frac{4}{7}}-1\overset{1}{\frac{9}{14}}=2\frac{8-9}{14}=1\frac{14+8-9}{14}=1\frac{13}{14}.$$



## További tudnivalók

Létezik sok *matematikai* trükk, melyeket megmutathatsz barátaidnak, ismerőseidnek. Íme, ezek közül az egyik.

**Feladat.** Gondolj egy természetes számra, add hozzá az utána következő természetes számot, majd adj hozzá 9-et. A kapott számot felezd meg és vond ki belőle a gondolt számot. Milyen számot kaptál? Az eredmény könnyen megnevezhető. Ez a szám az 5.
Találj ki hasonló matematikai trükköt és oszd meg barátaiddal.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Fogalmazd meg két különböző nevezőjű tört összeadásának szabályát.
2. Fogalmazd meg két különböző nevezőjű tört kivonásának szabályát.
3. Magyarázd meg, hogyan kell olyan vegyes számokat összeadni vagy kivonni, melyek törtrésze különböző nevezőjű.



## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**277′.** Ha $\frac{3}{8}$-hoz hozzáadsz $\frac{3}{4}$-et akkor a kapott tört:

1) nevezője: a) 4; b) 2; c) 8; d) 12;
2) számlálója: a) 6; b) 9; c) 12; d) 16.

**278′.** Igaz-e, hogy $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{3}$ összege:

1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$?

**279′.** Ha $\frac{7}{8}$-ból kivonsz $\frac{1}{2}$-et, akkor a kapott tört:

1) nevezője: a) 2; b) 4; c) 6; d) 8;
2) számlálója: a) 6; b) 3; c) 8; d) 1.

**280′.** Igaz-e, hogy $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$ az: 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{24}$?

**281°.** Számítsd ki:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$; 3) $\frac{7}{12}+\frac{1}{4}$; 5) $\frac{2}{7}+\frac{5}{14}$; 7) $\frac{4}{27}+\frac{2}{9}$;

2) $\frac{1}{4}+\frac{3}{28}$; 4) $\frac{2}{5}+\frac{3}{25}$; 6) $\frac{5}{9}+\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{9}+\frac{5}{18}$.

**282°.** Számítsd ki: 1) $\frac{1}{6}+\frac{5}{12}$; 2) $\frac{3}{8}+\frac{5}{24}$; 3) $\frac{1}{3}+\frac{7}{9}$; 4) $\frac{11}{18}+\frac{1}{6}$.

**283°.** Hasonlítsd össze: 1) $\frac{1}{5}+\frac{2}{7}$ és $\frac{19}{35}$; 2) $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}$ és $\frac{5}{18}$;

3) $\frac{2}{11}+\frac{8}{33}$ és $\frac{15}{33}$.

**284°.** Hasonlítsd össze: 1) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$ és $\frac{17}{21}$; 2) $\frac{1}{8}$ $\frac{5}{12}$ és $\frac{13}{24}$.

**285°.** Jelöld a számegyenesen az alábbi példák eredményeit:

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$; $\frac{7}{12}+\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}+\frac{5}{12}$.

**286°.** Jelöld a számegyenesen az alábbi példák eredményeit:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$; $\frac{1}{10}+\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$.

**287°.** Határozd meg a kisebbítendőt, ha a különbség $\frac{13}{14}$, a kivonandó pedig $\frac{11}{42}$.

**288°.** Határozd meg az összeget, ha az első összeadandó $\frac{13}{25}$, a második összeadandó pedig $\frac{3}{20}$.

**289°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x}{36}-\frac{2}{9}=\frac{1}{4}$; 2) $\frac{x}{52}-\frac{4}{13}=\frac{1}{4}$; 3) $\frac{5}{18}+\frac{13}{45}=\frac{x}{90}$.

**290°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x}{4}-\frac{4}{9}=\frac{11}{36}$; 2) $\frac{x}{75}-\frac{1}{15}=\frac{11}{25}$; 3) $\frac{5}{16}+\frac{1}{3}=\frac{x}{48}$.

**291°.** Számítsd ki:

1) $\frac{11}{12}-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{17}{72}-\frac{2}{9}$; 5) $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}$; 7) $\frac{4}{9}-\frac{11}{27}$;

2) $\frac{16}{21}-\frac{3}{14}$; 4) $\frac{21}{25}-\frac{8}{15}$; 6) $\frac{5}{16}-\frac{5}{24}$; 8) $\frac{27}{49}-\frac{5}{14}$.

**292°.** Számítsd ki:

1) $\frac{19}{21}-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{51}{64}-\frac{9}{16}$; 3) $\frac{22}{39}-\frac{11}{26}$; 4) $\frac{17}{20}-\frac{13}{25}$.

**293°.** Hasonlítsd össze:

1) $\frac{3}{7}-\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{21}$; 3) $\frac{10}{11}-\frac{13}{44}$ és $\frac{25}{44}$;

2) $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}$ és $\frac{13}{18}$; 4) $\frac{17}{36}-\frac{2}{9}$ és $\frac{7}{36}$.

**294°.** Hasonlítsd össze:

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{8}$ és $\frac{7}{24}$; 2) $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}$ és $\frac{13}{36}$.

**295°.** Jelöld a számegyenesen az alábbi példák eredményeit:

$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$; $\frac{8}{9}-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}$; $\frac{7}{9}-\frac{1}{3}$.

**296°.** Jelöld a számegyenesen az alábbi példák eredményeit:

$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$; $\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$.

**297°.** Két tört összege $1\frac{2}{11}$, az egyik összeadandó $\frac{29}{55}$. Mennyi a második összeadandó?

**298°.** A kisebbítendő $1\frac{11}{65}$, a különbség $\frac{3}{26}$. Határozd meg a kivonandót.

**299°.** Három tört összege $2\frac{1}{4}$. Ezen törtek közül kettő $\frac{2}{5}$ és $\frac{3}{10}$. Határozd meg a harmadik összeadandót.

**300°.** Számítsd ki:

1) $2\frac{8}{21}-1\frac{2}{3}$; 2) $4\frac{9}{16}-2\frac{5}{24}$; 3) $1\frac{12}{13}-\frac{7}{65}$; 4) $5\frac{7}{20}-2\frac{13}{15}$.

**301°.** Számítsd ki:

1) $2\frac{7}{24}-1\frac{3}{8}$; 2) $4\frac{11}{16}-3\frac{5}{18}$.

**302°.** Egy nap alatt az egyik üzletben $\frac{5}{18}$ t gyümölcsöt adtak el. Az eladott mennyiség $\frac{7}{54}$-e alma volt, a többi szilva. Hány tonna szilvát adtak el?

**303°.** Egy $5\frac{24}{25}$ m hosszú göngyölegből $3\frac{3}{20}$ m anyagot vágtak le. Mennyi anyag maradt a göngyölegben?

**304°.** 3 kg banán 35 hrivnyába kerül, 5 kg narancs pedig 37 hrivnyába. Mennyivel drágább 1 kg banán 1 kg narancsnál?

**305°.** Határozd meg 4, 5 és 7, valamint 3, 5, 8 és 9 átlagát! Melyik átlag a nagyobb és mennyivel?

**306.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{9}{14}+\frac{11}{21}+\frac{3}{4}$; 3) $\frac{5}{6}+\frac{3}{16}+\frac{7}{12}$.

**307.** Számítsd ki:

1) $\frac{9}{10}+\frac{3}{5}+\frac{6}{7}$; 2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; 3) $\frac{7}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$.

**308.** Rendezd az alábbi összegeket értékük alapján növekvő sorrendbe:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$; $\frac{5}{12}+\frac{5}{6}$; $\frac{1}{6}+\frac{7}{12}$.

**309.** Rendezd az alábbi összegeket értékük alapján csökkenő sorrendbe:

$\frac{1}{4}+\frac{5}{24}$; $\frac{1}{3}+\frac{3}{8}$; $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$; $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}$.

**310.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x-\frac{3}{20}=\frac{5}{12}+\frac{4}{9}$; 2) $y-\frac{5}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{54}+\frac{8}{27}$.

**311.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x-\frac{5}{8}=\frac{7}{12}+\frac{5}{9}$; 2) $y-\frac{15}{32}=\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{7}{16}$.

**312.** Számítsuk ki:

1) $\frac{5}{24}-\frac{1}{60}-\frac{1}{40}$; 2) $\frac{2}{3}-\frac{5}{18}-\frac{49}{180}$; 3) $\frac{4}{5}-\frac{7}{15}-\frac{9}{35}$.

**313.** Számítsd ki:

1) $\frac{11}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$; 2) $\frac{2}{3}-\frac{5}{24}-\frac{3}{10}$; 3) $\frac{4}{5}-\frac{4}{45}-\frac{7}{25}$.

**314.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{7}-\left(\frac{9}{28}-\frac{3}{14}\right)$; 2) $1\frac{2}{9}-\left(1\frac{5}{27}-\frac{13}{18}\right)$; 3) $4\frac{2}{11}-\left(3\frac{15}{33}-2\frac{13}{22}\right)$.

**315.** Számítsd ki:

1) $3\frac{1}{7}-\left(\frac{19}{21}-\frac{1}{14}\right)$; 2) $2\frac{4}{9}-\left(1\frac{5}{6}-\frac{11}{12}\right)$; 3) $3\frac{5}{11}-\left(4\frac{15}{33}-3\frac{11}{55}\right)$.

**316.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{x}{28}+1\frac{2}{7}=2\frac{5}{28}$; 2) $1\frac{5}{9}-\frac{x}{81}=\frac{46}{81}$; 3) $\frac{x}{6}+\frac{1}{8}=1\frac{7}{24}$;

4) $\frac{3}{8}-x=\frac{1}{4}-\frac{3}{20}$; 5) $\left(\frac{4}{5}-y\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{10}$.

**317.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{x}{32}+1\frac{25}{32}=2\frac{5}{16}$; 2) $1\frac{5}{7}-\frac{x}{49}=\frac{43}{49}$; 3) $\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{4}-y\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$.

**318.** Az $AB$ szakaszon felvettek egy $M$ és $N$ pontot úgy, hogy az $AM$ szakasz hossza $\frac{3}{13}$-a, az $MN$ szakasz pedig $\frac{17}{78}$-a az $AB$ szakasznak. Hányad része az $NB$ szakasz az $AB$ szakasznak?

**319.** Az $MN$ szakaszon felvettek egy $A$ és $C$ pontot úgy, hogy az $MA$ szakasz hossza $\frac{5}{48}$-a, az $AC$ szakasz pedig $\frac{7}{64}$-e az $MN$ szakasz hosszának. Hányad része a $CN$ szakasz az $MN$ szakasznak?

**320.** Mennyivel kevesebb a $\frac{13}{36}-\frac{5}{48}$ különbség $\frac{97}{144}$-től és mennyivel több $\frac{15}{72}-\frac{1}{16}$ különbségétől?

**321.** Marika gondolt egy számra, majd ezt a számot növelte $\frac{15}{26}$-dal, később pedig még $\frac{14}{39}$-del. $2\frac{11}{13}$-det kapott eredményül. Melyik számra gondolt Marika?

**322.** András gondolt egy számra, majd ezt a számot növelte $\frac{7}{33}$-dal. Az eredményt csökkentette $\frac{19}{44}$-del. $1\frac{2}{11}$-et kapott eredményül. Melyik számra gondolt András?

**323*.** Bizonyítsd be az $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}<1$ egyenlőtlenséget! Mennyivel kisebb a bal oldali érték a jobb oldalitól?

**324*.** Adott az $a$ természetes szám. Mi több:

1) $\frac{a+1}{a}$ vagy $\frac{a}{a+1}$; 2) $\frac{a+1}{a}$ vagy $\frac{a+3}{a+2}$?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**325.** Tímea saját zsebpénzéből $3\frac{1}{4}$ hrivnyát Marikának adott. Így a két lánynak egyenlően $18\frac{1}{2}$ hrivnyája lett. Mennyi pénzük volt eredetileg a lányoknak?

**326.** Az iskolai atlétikai versenyen Szabolcs 1 km-t 3 perc 5 másodperc alatt futott le, András pedig 3 perc 10 másodperc alatt. Mekkora volt a két fiú sebessége (méter per másodpercben, m/sec). Mennyivel volt nagyobb Szabolcs sebessége András sebességénél?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**327.** Számítsd ki: 1) 24-nek a 4%-át; 2) 54-nek a 15%-át; 3) 3,6-nek a 30%-át.

**328.** Egy ötszög legkisebb oldala 3,4 cm hosszú. Minden oldal 1,8 cm-rel hosszabb az előző oldalnál. Mekkora az ötszög kerülete?

# 9. § TÖRTEK SZORZÁSA. A TÖRTRÉSZ MEGHATÁROZÁSA

A törteket, akárcsak a természetes számokat, össze lehet szorozni. Ahhoz például, hogy kiszámítsuk egy 3 cm és 4 cm oldalhosszúságú téglalap területét, az oldalhosszakat össze kell szorozni: $3 \cdot 4 = 12$ (cm$^2$). Mivel 3 cm = $\frac{3}{10}$ dm és 4 cm = $\frac{4}{10}$ dm, ezért ennek a téglalapnak a területe négyzetdeciméterben a $\frac{3}{10}$ és $\frac{4}{10}$ tört szorzatával egyenlő. Viszont 12 cm$^2$ = $\frac{12}{100}$ dm$^2$, így $\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$. Könnyen észrevehető, hogy a nevező a nevezők szorzatával: $100 = 10 \cdot 10$, a számláló pedig a számlálók szorzatával: $3 \cdot 4 = 12$ egyenlő. Ez a törtek szorzásának a lényege.

**Jegyezd meg!**

**A közönséges törtek szorzásának szabálya**

Ahhoz, hogy összeszorozzunk két közönséges törtet:

1) össze kell szorozni az adott törtek nevezőit és be kell írni a szorzat nevezőjébe;
2) össze kell szorozni az adott törtek számlálóit és be kell írni a szorzat számlálójába.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Például:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{8\cdot7}=\frac{15}{56}.$$

A törtek szorzására ugyanúgy, mint a természetes számok szorzására, érvényes a *szorzás felcserélhetőségi és csoportosítási tulajdonsága*, valamint az összegre vonatkozó *széttagolási tulajdonság*.

- Hogyan kell törtet természetes számmal vagy vegyes számmal szorozni?

Először az adott számot áltört alakban írjuk le, majd alkalmazzuk a törtek szorzásának fentebb megfogalmazott szabályát. Ugyanígy kell összeszorozni két vegyes számot. Például:

$$4\cdot\frac{7}{9}=\frac{4}{1}\cdot\frac{7}{9}=\frac{4\cdot7}{1\cdot9}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9};$$

$$2\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{7}=\frac{8\cdot\cancel{6}^{2}}{{}_{1}\cancel{3}\cdot7}=\frac{16}{7}=2\frac{2}{7}.$$

- Mit kapunk, ha egy törtet megszorozunk 1-gyel? Ugyanazt a törtet. Például: $\frac{2}{5}\cdot1=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2\cdot1}{5\cdot1}=\frac{2}{5}$.

- Mit kapunk, ha egy törtet megszorozunk 0-val? 0-t. Például: $\frac{3}{8}\cdot0=\frac{3\cdot0}{8}=\frac{0}{8}=0$.

Léteznek-e olyan számok, melyek szorzata 1? Igen. Például: $\frac{3}{4}$ és $\frac{4}{3}$; 7 és $\frac{1}{7}$.

Valóban: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{{}^{1}\cancel{3}\cdot\cancel{4}^{1}}{{}_{1}\cancel{4}\cdot\cancel{3}_{1}}=1$; $7\cdot\frac{1}{7}=\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{7}=\frac{{}^{1}\cancel{7}\cdot 1}{1\cdot\cancel{7}_{1}}=1$.

**Jegyezd meg!**

Azokat a számokat, melyek szorzata 1, ***reciprok számoknak*** nevezzük.

Hogyan kell leírni egy adott szám reciprokát? Ehhez elegendő az adott számot törtalakban leírni, és a kapott törtben kicserélni a számlálót a nevezőre, a nevezőt pedig a számlálóra. Például, $\frac{2}{3}$ reciproka $\frac{3}{2}$.

A természetes számok reciproka olyan tört, melynek a számlálója 1, a nevezője pedig az adott természetes szám. Például 5, 14 és 29 reciproka rendre $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{29}$.

**Figyeld meg:**

— 1-nek a reciproka 1;
— 0-nak nem létezik reciproka.

A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan feladattal, ahol meg kell határozni az adott törtrészre eső mennyiség nagyságát. Ezekben a feladatokban a *szám törtrészét kell meghatározni*. A lényeg abban rejlik, hogy az adott számot törttel kell megszorozni. Nézzünk egy példát.

**1. feladat.** Édesanya egy 30 cm-es roládot sütött. Tímea és János a barátaikkal csak egy kicsit meg akarták kóstolni a süteményt, de kiderült, hogy elfogyasztották a rolád $\frac{5}{6}$-át. Hány centiméter a rolád $\frac{5}{6}$-a?

**Megoldás.** A rolád teljes hossza 30 cm. Ha elosztjuk az egészet 6 egyenlő részre, akkor egy ilyen rész 5 cm hosszú lesz (7. ábra). A gyerekek 5 ilyen részt ettek meg, azaz $5 \cdot 5 = 25$ (cm-t). Ugyanezt az eredményt kapjuk, abban az esetben is, ha 30-t megszorzunk $\frac{5}{6}$-dal, vagyis:



7. ábra

$30 \cdot \frac{5}{6} = \frac{\overset{5}{\cancel{30}} \cdot 5}{1 \cdot \cancel{6}_1} = \frac{5 \cdot 5}{1} = \frac{25}{1} = 25$. Tehát a rolád $\frac{5}{6}$-a 25 cm hosszú.

Megfogalmazhatjuk a szabályt.

**Jegyezd meg!**

**A törtrész meghatározásának szabálya**

Ahhoz, hogy meghatározzuk a szám törtrészét, meg kell szorozni az adott számot a törtszámmal.



## További tudnivalók



8. ábra

A *Rhind-papirusz* – a Középbirodalom idejéből származó ókori egyiptomi útmutató számtanból és mértanból. Kr. e. 1650 körül Ahmesz egy kétszáz évvel korábban keletkezett művet másolt le egy 5,25 m hosszú és 33 cm széles papirusz tekercsre (8. ábra). A tekercset 1858-ban találták meg. Az írást 1870-ben fejtették meg, fordították le és adták ki. Napjainkban a papirusz nagyobb része Nagy-Britanniában, Londonban van, a többi pedig New Yorkban. A Rhind papirusz 84 feladat feltételét és megoldását tartalmazza, és a máig fennmaradt gyűjtemények közül a legteljesebb egyiptomi feladatgyűjtemény.

**IDÉZD FEL A LÉNYEGET!**

1. Mondd el a törtek szorzásának szabályát.
2. Hogyan kell vegyes számot vagy természetes számot törttel szorozni?
3. Hogyan kell meghatározni egy szám törtrészét?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**329′.** Igaz-e, hogy $\frac{5}{9}$ és $\frac{3}{11}$ szorzata egyenlő az alábbi törttel:

1) $\frac{5}{99}$; 2) $\frac{5}{11}$; 3) $\frac{5}{33}$?

**330′.** Igaz-e, hogy $\frac{5}{9} \cdot 1 = \ldots$

1) $\frac{9}{5}$; 2) $\frac{51}{9}$; 3) $\frac{5}{9}$; 4) 1?

**331′.** Igaz-e, hogy $\frac{2}{11} \cdot 0 = \ldots$

1) $\frac{2}{11}$; 2) $\frac{20}{11}$; 3) 1; 4) 0?

**332′.** Igaz-e, hogy $\frac{3}{7}$ és az alábbi szám reciprok értékű:

1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{9}{49}$; 3) $\frac{7}{7}$; 4) $\frac{7}{3}$?

**333′.** Helyesen határozta meg Marika 12-nek a $\frac{2}{3}$-át:

1) $\frac{12}{12} \cdot \frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}$; 3) $12 + \frac{2}{3}$; 4) $\frac{12}{1} \cdot \frac{2}{3}$?

**334°.** Számítsd ki:

1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$; 3) $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7}$; 7) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11}$;

2) $\frac{1}{5} \cdot \frac{6}{7}$; 4) $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{11}$; 6) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$; 8) $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8}$.

**335°.** Számítsd ki:

1) $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7}$; 2) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{13}$; 3) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$; 4) $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{11}$.

**336°.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10}$; 3) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7}$; 5) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{12}$; 7) $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{7}$;

2) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10}$; 4) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{11}$; 6) $\frac{10}{13} \cdot \frac{7}{10}$; 8) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8}$.

**337°.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $\frac{3}{11}\cdot\frac{7}{12}$; 2) $\frac{11}{14}\cdot\frac{7}{8}$; 3) $\frac{7}{8}\cdot\frac{16}{17}$; 4) $\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}$.

**338°.** Számítsd ki az alábbi törtek szorzatát:

1) $\frac{4}{7}$ és $\frac{7}{9}$; 3) $\frac{7}{9}$ és $\frac{2}{7}$; 5) $\frac{2}{7}$ és $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{4}{9}$ és $\frac{9}{16}$;

2) $\frac{5}{6}$ és $\frac{6}{11}$; 4) $\frac{11}{25}$ és $\frac{25}{27}$; 6) $\frac{5}{9}$ és $\frac{9}{10}$; 8) $\frac{18}{25}$ és $\frac{5}{18}$.

**339°.** Számítsd ki az alábbi törtek szorzatát:

1) $\frac{3}{8}$ és $\frac{8}{11}$; 2) $\frac{5}{7}$ és $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{3}{8}$ és $\frac{8}{15}$; 4) $\frac{11}{27}$ és $\frac{9}{11}$.

**340°.** Számítsd ki:

1) $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{16}$; 3) $\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{25}$; 5) $\frac{4}{15}\cdot\frac{25}{28}$; 7) $\frac{9}{14}\cdot\frac{49}{63}$;

2) $\frac{10}{13}\cdot\frac{39}{40}$; 4) $\frac{11}{12}\cdot\frac{4}{33}$; 6) $\frac{35}{36}\cdot\frac{54}{55}$; 8) $\frac{22}{35}\cdot\frac{63}{121}$.

**341°.** Számítsd ki:

1) $\frac{5}{26}\cdot\frac{13}{15}$; 2) $\frac{7}{11}\cdot\frac{22}{49}$; 3) $\frac{15}{29}\cdot\frac{58}{105}$; 4) $\frac{21}{26}\cdot\frac{39}{84}$.

**342°.** Keresd meg a hibát: $\frac{5}{18}\cdot\frac{12}{25}=\frac{5\cdot12}{18\cdot25}=\frac{1\cdot3}{4\cdot5}=\frac{3}{20}$ a számításban.

**343°.** Helyettesítsd a * jelet olyan számmal, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:

1) $\frac{2}{3}\cdot\frac{*}{5}=\frac{2}{15}$; 2) $\frac{3}{*}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$; 3) $\frac{*}{7}\cdot\frac{3}{11}=\frac{15}{77}$.

**344°.** Helyettesítsd a * jelet olyan számmal, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:

1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{*}{3}=\frac{4}{27}$; 2) $\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{*}=\frac{8}{35}$; 3) $\frac{*}{9}\cdot\frac{4}{11}=\frac{32}{99}$.

**345°.** Határozd meg a $\frac{7}{12}\cdot\frac{a}{14}$ kifejezés értékét, ha:

1) $a=2$; 2) $a=3$; 3) $a=4$; 4) $a=6$.

**346°.** Határozd meg a $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{b}$ kifejezés értékét, ha:

1) $b=9$; 2) $b=15$; 3) $b=18$; 4) $b=36$.

**347°.** Határozd meg a $\frac{a}{12}\cdot\frac{16}{d}$ kifejezés értékét, ha:

1) $a=5, d=35$; 2) $a=7, d=49$; 3) $a=9, d=45$; 4) $a=3, d=4$.

**348°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x:\frac{3}{16}=\frac{8}{17}$; 3) $x:\frac{5}{36}=\frac{6}{25}$; 5) $x:\frac{5}{36}=\frac{18}{35}$;

2) $x:\frac{4}{5}=\frac{5}{12}$; 4) $x:\frac{3}{14}=\frac{7}{12}$; 6) $x:\frac{11}{16}=\frac{32}{33}$.

**349°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x:\frac{4}{7}=\frac{28}{29}$; 2) $x:\frac{5}{6}=\frac{12}{35}$; 3) $x:\frac{13}{16}=\frac{8}{39}$.

**350°.** Mennyi az osztandó, ha az osztó $\frac{13}{14}$, a hányados pedig $\frac{7}{65}$.

**351°.** Mennyi a szorzat, ha az első szorzótényező $\frac{6}{13}$, a második pedig $\frac{65}{66}$.

**352°.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{4}\cdot 4$; 3) $7\cdot\frac{5}{21}$; 5) $1\cdot\frac{5}{43}$; 7) $\frac{9}{11}\cdot 0$;

2) $\frac{5}{11}\cdot 3$; 4) $8\cdot\frac{13}{24}$; 6) $\frac{7}{33}\cdot 1$; 8) $0\cdot\frac{15}{16}$.

**353°.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{8}\cdot 2$; 2) $5\cdot\frac{7}{15}$; 3) $1\cdot\frac{16}{41}$; 4) $\frac{35}{44}\cdot 0$.

**354°.** Egy üzletben a cukorkákat kis kiszerelésekben árusítják. Egy csomag tömege $\frac{2}{5}$ kg. Hány kg cukorka van

1) 5 csomagban; 2) 75 csomagban; 3) 150 csomagban?

**355°.** Egy ötszög minden oldala $\frac{17}{25}$ cm oldalú négyzetnek?

**356°.** Mekkora a kerülete a $\frac{7}{16}$ cm. oldalú négyzetnek?

**357°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $x:\frac{3}{16}=8$; 3) $x:\frac{5}{11}=22$; 5) $x:9=\frac{7}{36}$;

2) $x:\frac{4}{5}=1$; 4) $x:12=\frac{7}{24}$; 6) $x:24=\frac{17}{32}$.

**358°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $x:\frac{5}{41}=1$; 2) $x:\frac{9}{16}=32$; 3) $x:25=\frac{19}{45}$.

**359°.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{5}$; 3) $2\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{25}$; 5) $\frac{3}{8} \cdot 1\frac{3}{5}$; 7) $3\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25}$;

2) $\frac{5}{11} \cdot 4\frac{1}{8}$; 4) $2\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{24}$; 6) $\frac{7}{12} \cdot 1\frac{1}{14}$; 8) $3\frac{3}{7} \cdot \frac{49}{54}$.



***360°.*** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{7} \cdot 1\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{9} \cdot 2\frac{1}{4}$; 3) $1\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{39}$; 4) $2\frac{11}{26} \cdot \frac{13}{36}$.

**361°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $x : \frac{6}{17} = 5\frac{2}{3}$; 2) $x : \frac{4}{15} = 5\frac{5}{8}$; 3) $x : \frac{9}{11} = 1\frac{5}{6}$; 4) $x : \frac{14}{17} = 1\frac{23}{28}$.



***362°.*** Oldd meg az alábbi egyenleteket

1) $x : \frac{10}{13} = 1\frac{19}{20}$; 2) $x : \frac{11}{12} = 1\frac{4}{11}$.

**363°.** Mennyi az osztandó, ha az osztó $\frac{11}{18}$, a hányados pedig $1\frac{7}{11}$.

**364°.** Mennyi a szorzat, ha az első szorzótényező $\frac{7}{15}$, a második pedig — $1\frac{11}{49}$.

**365°.** Számítsd ki annak a téglalapnak a területét, melynek oldalai $\frac{16}{23}$ cm és $3\frac{17}{48}$ cm hosszúak.



***366°.*** Számítsd ki annak a téglalapnak a területét, melynek oldalai $\frac{17}{28}$ cm és $2\frac{10}{51}$ cm hosszúak.

**367°.** Adottak az: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{61}{10}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{6}{61}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{10}{61}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{6}{5}$ számok. Van-e közöttük reciprok értékű? Ha igen, akkor írd ki őket.

**368°.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{5} \cdot 5$; 4) $1\frac{1}{3} \cdot 0{,}75$; 7) $\frac{17}{19} \cdot 1\frac{2}{17}$; 10) $\frac{7}{16} \cdot 2\frac{2}{7}$;

2) $\frac{1}{12} \cdot 12$; 5) $\frac{5}{9} \cdot 1\frac{4}{5}$; 8) $5\frac{5}{9} \cdot 0{,}18$; 11) $\frac{3}{8} \cdot 2\frac{2}{3}$;

3) $4 \cdot 0{,}25$; 6) $1\frac{10}{11} \cdot \frac{11}{21}$; 9) $\frac{2}{7} \cdot 3{,}5$; 12) $\frac{25}{29} \cdot 1{,}16$.

**369°.** Számítsd ki:

1) $\frac{1}{11}\cdot 11$; 2) $8\cdot 0{,}125$; 3) $\frac{12}{13}\cdot 1\frac{1}{12}$; 4) $\frac{5}{16}\cdot 3{,}2$.

**370°.** Számítsd ki:

1) $\frac{2}{5}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}$; 2) $\frac{3}{7}\cdot 4\cdot\frac{7}{3}$; 3) $\frac{5}{9}\cdot 0{,}3\cdot\frac{9}{5}$; 4) $\frac{8}{9}\cdot 1\frac{1}{8}\cdot 6$.

**371°.** Számítsd ki:

1) $\frac{2}{7}\cdot 11\cdot\frac{7}{2}$; 2) $\frac{5}{11}\cdot 5\cdot\frac{11}{5}$; 3) $\frac{7}{8}\cdot 1{,}3\cdot\frac{8}{7}$; 4) $\frac{10}{11}\cdot 1{,}1\cdot 12$.

**372°.** Határozd meg a következő számok reciprokait:

1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{7}{9}$; 3) $4\frac{4}{7}$; 4) $5\frac{1}{6}$; 5) 1,7; 6) 3,25; 7) 5,9; 8) 1,125.

**373°.** Határozd meg a következő számok reciprokait:

1) $\frac{3}{11}$; 2) $3\frac{2}{9}$; 3) 1,2; 4) 2,25.

**374°.** Igaz-e, hogy 25-nek a $\frac{3}{5}$-e egyenlő:

1) 75; 2) 25; 3) 15; 4) 125?

**375°.** Rajzolj egy számegyenest (egy egység a füzet 6 négyzetrácsának hossza legyen)! Jelöld ezen a számegyenesen az $A\left(\frac{1}{6}\right)$ pontot, valamint azokat a pontokat, melyek távolsága az origótól az $A$ pont origótól mért távolságának kétszerese, háromszorosa, hatszorosa és kilencszerese! Mely számokat jelölik ezek a pontok?

**376°.** Rajzolj egy számegyenest (egy egység a füzet 8 négyzetrácsának hossza legyen)! Jelöld ezen a számegyenesen a $B\left(\frac{1}{8}\right)$ pontot, valamint azokat a pontokat, melyek távolsága az origótól a $B$ pont origótól mért távolságának kétszerese, négyszerese, ötszöröse és tizenkétszerese! Mely számokat jelölik ezek a pontok?

**377°.** Határozd meg: 1) 21-nek a $\frac{6}{7}$-ét; 2) 60-nak a $\frac{4}{15}$-ét; 3) 14-nek a $\frac{41}{42}$-ét; 4) $\frac{14}{27}$-nek a $\frac{3}{7}$-ét.

**378°.** Egy négyzet területe 45 cm$^2$. Mekkora a területe a négyzet:

1) $\frac{1}{5}$-ének; 2) $\frac{2}{9}$-ének; 3) $\frac{12}{35}$-ének?

**379°.** Egy téglalap területe 54 cm$^2$. Mekkora a területe a téglalap:

1) $\frac{1}{6}$-ának; 2) $\frac{7}{9}$-ének; 3) $\frac{11}{36}$-ának?

**380.** Számítsd ki:

1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7}\cdot 1\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{21}\cdot 2\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{26}$; 3) $1\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{22}\cdot\frac{3}{4}$.



***381.*** Számítsd ki:

1) $\frac{4}{11}\cdot\frac{14}{15}\cdot 3\frac{1}{7}$; 2) $\frac{3}{8}\cdot 2\frac{2}{9}\cdot 1\frac{1}{5}$; 3) $\left(2\frac{2}{3}\right)^3$.

**382.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $1\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{20}-\frac{4}{21}$; 2) $2\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{11}-\frac{25}{27}$; 3) $3\frac{5}{6}+2\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{42}$.

**383.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $\left(x-\frac{2}{15}\right):\frac{5}{18}=2\frac{4}{25}$; 2) $(3{,}6-x):1\frac{9}{13}=1\frac{23}{55}$.



***384.*** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $(x-5{,}95):1\frac{17}{28}=2\frac{13}{25}$; 2) $\left(x-\frac{5}{18}\right):\frac{16}{27}=1\frac{17}{64}$.

**385.** Egy téglalap oldalai reciprok számok. Az egyik oldal hossza $\frac{6}{17}$ cm. Mekkora a téglalap kerülete és területe.

**386.** Egy háromszög egyik oldala $1\frac{4}{15}$ m, a másik oldala 4-szer hosszabb, mint az első, a harmadik pedig $\frac{1}{5}$ m-rel rövidebb, mint a második. Határozd meg a háromszög kerületét.



***387.*** Egy háromszög egyik oldala $2\frac{3}{20}$ m, a másik oldala 5-ször hosszabb, mint az első, a harmadik pedig $\frac{3}{10}$ m-rel rövidebb a másodiknál. Határozd meg a háromszög kerületét.

**388.** Az egyik sportoló $1\frac{5}{12}$ perc alatt fut le egy kört a stadionban, a másik pedig $1\frac{5}{6}$ perc alatt. Mennyi idő alatt tesznek meg külön-külön 8 kört?

**389.** Édesanya az ünnepekre 5 kg cukorkát vásárolt kilogrammonként $20\frac{4}{5}$ hrivnyáért és 3 kg kekszet, amiből 1 kg $18\frac{7}{10}$ hrivnyába került. Mennyi pénzt költött az édesanya a vásárlásra?

**390.** Szabolcs három nap alatt olvasott el egy 270 oldalas könyvet. Az első nap alatt elolvasta a könyv $\frac{2}{9}$-ét, második nap a $\frac{4}{3}$-át annak, amit első nap olvasott el. Hány oldalt olvasott el Szabolcs a harmadik napon?

***391.*** Egy turista első nap 15 km tett meg, másnap az első napon megtett út $1\frac{1}{5}$-ét, a harmadik napon pedig a második napon megtett út $\frac{4}{9}$-ét. Milyen távolságot tett meg ez a turista a három nap alatt?

**392.** Számítsd ki:

1) $\left(2\frac{8}{9}+1\frac{7}{15}\right)\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{8}{49}\right)$;

2) $\left(4\frac{6}{7}-\frac{3}{28}+\frac{5}{14}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{135}\right)$.

**393*.** Határozd meg az alábbi szorzat értékét:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right).$$

**394*.** Add meg $\frac{7}{8}$-ot három különböző tört szorzataként! Hány különböző kifejezés adható meg?

**395*.** Egy kétjegyű szám számjegyeinek szorzata 9. Ha az első számjegyet 5-tel megnöveljük, akkor a számjegyek szorzata $2\frac{2}{3}$-szor megnő. Melyik ez a szám.

**396*.** Határozd meg a $\left(2+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$, kifejezés értékének és a $\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$ értéke reciprokának szorzatát.

**397*.** Egy téglalap oldalai reciprok számok. Az egyik oldalhossz mérőszáma számjegyeinek az összege 11. Határozd meg a téglalap kerületét! Hány esetet kell figyelembe venni?

**398*.** Két négyzet területének mérőszámai reciprok számok. Az egyik négyzet egy oldalhosszának és a másik négyzet egy oldalhosszának az összege 2,5 cm. Határozd meg mind a két négyzet kerületét.

**399*.** Két reciprok szám átlaga $1\frac{1}{84}$. Határozd meg ezeket a számokat, ha tudjuk, hogy azok egyszerűsíthetetlen törtek.

**400*.** Két reciprok törtnek és 3-nak az átlaga $1\frac{41}{60}$. Határozd meg ezeket a törteket, ha tudjuk, hogy azok egyszerűsíthetetlenek.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**401.** Édesapa a nyaraló felújításakor átépítette a $3\frac{1}{5}$ m és $6\frac{3}{7}$ m méretű szobát. A hosszabb oldalt $\frac{9}{14}$ m-rel csökkentette, a rövidebb oldalt pedig $1\frac{7}{10}$ m-rel megtoldotta. Mekkora az új szoba padlójának a területe?

**402.** Egy téglatest alakú benzintartály méretei $\frac{5}{6}$ m, $1\frac{1}{11}$ m és $\frac{22}{25}$ m. Belefér-e a tartályba 500 l benzin?

**403.** Egy téglalap alakú szoba padlójának méretei $7\frac{2}{3}$ m és $5\frac{5}{6}$ m. Hány méter szegőlécet kell vásárolni édesapának?

**404.** Édesapának az építkezéshez $12\frac{5}{14}$ m² fali csempére és $4\frac{2}{7}$ m² járólapra van szüksége. Mennyit kell édesapának fizetnie, ha a fali csempe négyzetmétere 84 hrivnya, a padlócsempe ára pedig négyzetméterenként 119 hrivnya?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

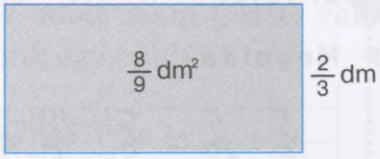
**405.** Egy kilencszázalékos oldatban 16,2 g jód van. Mekkora az oldat tömege?

**406.** Ismeretes, hogy egy ládában 110-nél több, de 130-nál kevesebb alma van. Az almák száma osztható 12-vel is és 5-tel is. Hány alma van a ládában?

**407.** Legfeljebb hány azonos csokrot lehet kötni 125 fehér, 75 rózsaszín és 175 sárga rózsából?

# 10. § TÖRTEK OSZTÁSA. A SZÁM MEGHATÁROZÁSA TÖRTRÉSZE ALAPJÁN

Már tudjátok, hogy az ismeretlen szorzótényezőt úgy határozzuk meg, hogy a szorzatot elosztjuk az ismert szorzótényezővel. Például, ha egy téglalap területe $\frac{8}{9}$ dm² és egyik oldala $\frac{2}{3}$ dm (9. ábra), akkor a másik oldal $\frac{8}{9}$ és $\frac{2}{3}$ hányadosával egyenlő.




9. ábra

Legyen a keresett hányados az $\frac{a}{b}$ alakú tört. Akkor leírhatjuk, hogy: $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{8}{9}$. Ebből könnyen belátható, hogy $a = 4$, $b = 3$, mivel $2 \cdot 4 = 8$, $3 \cdot 3 = 9$. Tehát, $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, vagyis $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Ugyanezt az eredményt kapjuk abban az esetben is, ha $\frac{8}{9}$ megszorozzuk $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ reciprokával. Valóban: $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{{}^{4}\cancel{8} \cdot \cancel{3}^{1}}{{}_{3}\cancel{9} \cdot \cancel{2}_{1}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Azt kaptuk, hogy az osztás felcserélhető szorzással, vagyis az osztó reciprokával való szorzással:

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2}.$$

Ebben rejlik a *törttel való osztás szabálya.*

**Jegyezd meg!**

**A közönséges törttel való osztás szabálya**

Ahhoz, hogy közönséges törttel osszunk:
1) meg kell határozni az osztó reciprokát;
2) az osztandót meg kell szorozni az osztó reciprokával.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

**1. feladat** Oszd el $\frac{5}{6}$-ot $\frac{5}{12}$-del.

**Megoldás.**

$$\frac{5}{6}:\frac{5}{12}=\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{5}=\frac{{}^{1}\cancel{5}\cdot 12^{2}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}_{1}}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 1}=\frac{2}{1}=2.$$

Hogyan kell természetes vagy vegyes számot törttel osztani? Először a természetes vagy vegyes számot felírjuk tört alakban, majd alkalmazzuk a törttel való osztás szabályát.

**2. feladat** Határozd meg a következő számok hányadosát: 1) 2 és $\frac{2}{3}$; 2) $4\frac{1}{5}$ és $\frac{4}{5}$.

**Megoldás.** 1) $2:\frac{2}{3}=\frac{2}{1}:\frac{2}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{{}^{1}\cancel{2}\cdot 3}{1\cdot\cancel{2}_{1}}=\frac{3}{1}=3$;

2) $4\frac{1}{5}:\frac{4}{5}=\frac{21}{5}:\frac{4}{5}=\frac{21}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{21\cdot\cancel{5}^{1}}{{}_{1}\cancel{5}\cdot 4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

Mi lesz az eredmény, ha 1-et elosztunk valamely törttel? Az adott tört reciprokát kapjuk. Például: $1:\frac{3}{5}=\frac{1}{1}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$.

**Figyeld meg:**

ha 1-et elosztunk egy törttel, akkor az eredmény az adott tört reciproka.

Mi lesz az eredmény, ha 0-t osztunk el valamely törttel?

Nullát kapunk. Például: $0:\frac{3}{5}=0\cdot\frac{5}{3}=\frac{0\cdot 5}{3}=\frac{0}{3}=0$.

El lehet-e osztani egy törtet nullával? Nem, mivel **nullával osztani nem lehet.**

A gyakorlatban sokszor kell az ismert törtrész alapján meghatározni az egész mennyiséget. Már tudjátok, ezekben a feladatokban a *számot határozzuk meg törtrésze alapján.* Ezeket a feladatokat az adott szám törttel való osztásával kell megoldani. Lássunk egy példát.

**3. feladat** Édesanya roládot sütött. Tekla és János levágtak a roládból 30 cm-t. Kiderült, hogy a gyerekek a sütemény $\frac{5}{6}$-át vágták. Milyen hosszú volt az egész rolád?



10. ábra

**Megoldás.** Ha a roládot 6 egyenlő részre osztjuk, akkor öt ilyen rész 30 cm hosszú. Tehát egy rész 30 : 5 = 6 cm (10. ábra), így az egész rolád 6 • 6 = 36 cm. Ugyanezt a eredmény kapjuk, ha 30-t elosztjuk $\frac{5}{6}$-dal, vagyis:

$$30:\frac{5}{6}=30\cdot\frac{6}{5}=\frac{^{6}\cancel{30}\cdot 6}{\cancel{5}_{1}}=\frac{6\cdot 6}{1}=\frac{36}{1}=36\ (\text{cm}).$$

Tehát az egész rolád 36 cm hosszú.

Megfogalmazhatjuk a szabályt.

**Jegyezd meg!**

**A szám meghatározásának szabálya törtrésze alapján**

Ahhoz, hogy meghatározzunk egy számot törtrésze alapján, a részértékét el kell osztani a törttel.



## További tudnivalók

Legyen adott két olyan természetes szám, ahol az egyik szám önmagától különböző osztóinak az összege egyenlő a másik számmal és a másik szám önmagától különböző osztóinak az összege egyenlő az első számmal. Az ilyen számokat barátságos számoknak nevezzük. Például 220 osztói az 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 és 110. Összegük 284. 284 osztói: 1, 2, 4, 71 és 142. Összegük 220. Ezért 220 és 284 barátságos szám. Ez a számpár a legkisebb barátságos számpár. További barátságos számok: 1184 és 1210, 2620 és 2924, 5020 és 5564, 6232 és 6368, 10744 és 10856, 12285 és 14595, 17296 és 18416, 63020 és 76084.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Fogalmazd meg, hogyan kell közönséges törtet közönséges törttel osztani.
2. Hogyan kell meghatározni a természetes szám és a közönséges tört, illetve a vegyes szám és a közönséges tört hányadosát?
3. Hogyan kell meghatározni egy számot törtrésze alapján?



## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**408'.** Igaz-e, hogy az alábbi számok $\frac{5}{7}$ reciprokai:

1) $\frac{5}{7}$; 2) $\frac{5}{1}$; 3) $\frac{7}{1}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{7}$; 6) $\frac{7}{5}$?

**409'.** Helyesen folytatta-e Ilonka az: $\frac{5}{9}:\frac{2}{7}=\ldots$ műveletet

1) $\frac{5}{9}:\frac{7}{2}$; 2) $\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{7}$; 3) $\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{2}$?

**410'.** Igaz-e, hogy $\frac{2}{9}$ és $\frac{1}{2}$ hányadosa az alábbi szám:

1) $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$; 2) $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{9}$; 3) $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{9}$?

**411'.** Igaza van-e Szabolcsnak, hogy $\frac{1}{6}:2=\ldots$ egyenlő

1) $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$?

**412'.** Igaz-e, hogy $1 : \frac{7}{9}$ egyenlő:

1) $1 \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$; 2) $1 \cdot \frac{7}{7} = 1$; 3) $1 \cdot \frac{9}{9} = 1$; 4) $1 \cdot \frac{9}{7} = \frac{9}{7}$?

**413°.** Számítsd ki:

1) $\frac{2}{5} : \frac{2}{15}$; 4) $\frac{13}{15} : \frac{13}{45}$; 7) $\frac{11}{12} \frac{11}{18}$; 10) $\frac{5}{24} : \frac{15}{64}$;

2) $\frac{3}{4} : \frac{3}{12}$; 5) $\frac{2}{5} : \frac{6}{25}$; 8) $\frac{13}{15} : \frac{26}{27}$; 11) $\frac{33}{81} : \frac{11}{45}$;

3) $\frac{4}{7} : \frac{4}{21}$; 6) $\frac{3}{4} : \frac{7}{12}$; 9) $\frac{2}{7} : \frac{8}{21}$; 12) $\frac{15}{38} : \frac{5}{19}$.

***414°.*** Határozd meg az alábbi számok hányadosát:

1) $\frac{5}{7}$ és $\frac{5}{14}$; 2) $\frac{3}{11}$ és $\frac{3}{22}$; 3) $\frac{7}{27}$ és $\frac{14}{81}$; 4) $\frac{3}{25}$ és $\frac{18}{75}$.

**415°.** Keresd meg a: $\frac{5}{18} : \frac{25}{36} = \frac{5 \cdot 25}{18 \cdot 36} = \frac{125}{648}$ számításban a hibát.

**416°.** Határozd meg a $\frac{7}{18} : \frac{14}{a}$ kifejezés értékét, ha:

1) $a = 3$; 2) $a = 9$; 3) $a = 12$; 4) $a = 36$.

***417°.*** Határozd meg a $\frac{3}{5} : \frac{b}{45}$ kifejezés értékét, ha:

1) $b = 9$; 2) $b = 15$; 3) $b = 18$; 4) $b = 33$.

**418°.** Helyettesítsd a * jelet olyan számmal, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:

1) $\frac{2}{15} : \frac{*}{45} = \frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{*} : \frac{15}{17} = \frac{1}{6}$; 3) $\frac{18}{*} : \frac{54}{85} = \frac{17}{63}$.

**419°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{1}{4} : x = \frac{7}{16}$; 2) $x \cdot \frac{5}{21} = \frac{25}{28}$; 3) $\frac{9}{11} \cdot x = \frac{27}{44}$.

***420°.*** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{1}{8} : x = \frac{11}{16}$; 2) $x \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$; 3) $\frac{8}{13} \cdot x = \frac{32}{65}$.

**421°.** Határozd meg az ismeretlen szorzótényezőt, ha az ismert szorzótényező $\frac{5}{13}$, a szorzat pedig $\frac{25}{78}$.

**422°.** Számítsd ki:

1) $1:\frac{13}{14}$; 4) $1:\frac{17}{21}$; 7) $7:\frac{14}{15}$; 10) $2:\frac{7}{8}$;

2) $1:\frac{15}{17}$; 5) $2:\frac{4}{7}$; 8) $6:\frac{18}{23}$; 11) $4:\frac{10}{11}$;

3) $1:\frac{9}{14}$; 6) $3:\frac{15}{16}$; 9) $3:\frac{6}{7}$; 12) $14:\frac{21}{22}$.



***423°.*** Számítsd ki:

1) $1:\frac{7}{9}$; 2) $1:\frac{7}{15}$; 3) $2:\frac{8}{11}$; 4) $8:\frac{24}{25}$.

**424°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $1:x=\frac{3}{4}$; 2) $2:x=\frac{8}{11}$; 3) $3:x=\frac{15}{17}$.



***425°.*** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $1:x=\frac{2}{7}$; 2) $4:x=\frac{4}{9}$; 3) $4:x=\frac{12}{25}$.

**426°.** Egy ötszög minden oldala egyenlő hosszúságú. Határozd meg az ötszög oldalát, ha a kerülete $\frac{40}{43}$ cm.

**427°.** Egy üzletbe $53\frac{1}{3}$ kg mandarint hoztak $n$ számú egyforma ládában. Hány kilogramm mandarin van egy-egy ládában, ha:
1) $n=4$; 2) $n=5$; 3) $n=8$?

**428°.** Számítsd ki:

1) $\frac{2}{7}:3\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}:1\frac{1}{4}$; 3) $2\frac{7}{8}:\frac{23}{24}$; 4) $1\frac{5}{8}:\frac{39}{40}$.



***429°.*** Számítsd ki: 1) $\frac{7}{9}:2\frac{1}{3}$; 2) $\frac{11}{19}:1\frac{20}{57}$; 3) $3\frac{1}{5}:\frac{24}{35}$; 4) $4:1\frac{5}{11}$.

**430°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $1:x=1\frac{5}{6}$; 2) $2:x=1\frac{3}{5}$; 3) $3:x=1\frac{5}{7}$.



***431°.*** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $1:x=2\frac{2}{7}$; 2) $13:x=1\frac{4}{9}$; 3) $6:x=2\frac{2}{5}$.

**432°.** Határozd meg az osztót, ha az osztandó $1\frac{13}{14}$, a hányados pedig $\frac{9}{28}$.

**433°.** Mekkora annak a négyzetnek az oldala, melynek a kerülete $2\frac{6}{7}$ cm.

**434°.** Mekkora annak a téglalapnak az egyik oldala, melynek a területe $3\frac{1}{5}$ cm², másik oldala pedig $\frac{2}{5}$ cm.

**435°.** Mekkora annak a téglalapnak az egyik oldala, melynek a területe $2\frac{2}{9}$ cm², másik oldala pedig $1\frac{2}{3}$ cm.

**436°.** Rajzolj egy számegyenest (egy egység legyen a füzet 5 négyzetrácsának hossza)! Jelöld ezen a számegyenesen az $A\left(2\frac{2}{5}\right)$ pontot! Oszd fel az $OA$ szakaszt négy egyenlő részre és jelöld meg a kapott pontokat! Írd le a pontok koordinátáit.

**437°.** Rajzolj egy számegyenest (egy egység legyen a füzet 7 négyzetrácsának hossza)! Jelöld ezen a számegyenesen az $A\left(1\frac{5}{7}\right)$ pontot! Oszd fel az $OA$ szakaszt három egyenlő részre és jelöld meg a kapott pontokat! Írd le a pontok koordinátáit.

**438°.** Ismeretes, hogy egy szám $\frac{1}{3}$-a 2. Igaz-e, hogy a keresett szám egyenlő az alábbi számmal:

1) $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; 2) $2 : \frac{1}{3} = 6$; 3) $2 : 3 = \frac{2}{3}$?

**439°.** Határozd meg azt a számot:

1) amelynek az $\frac{1}{3}$-a $\frac{5}{6}$;

2) amelynek a $\frac{2}{7}$-e $\frac{4}{21}$;

3) amelynek az $\frac{5}{6}$-a $\frac{25}{42}$.

**440°.** Milyen hosszú az $AB$ szakasz, ha: 1) a szakasz $\frac{2}{3}$-a 18 cm; 2) a szakasz $\frac{5}{7}$-e 35 cm?

**441°.** Mekkora az a szög, amelynek: 1) $\frac{5}{6}$-a derékszög; 2) $2\frac{1}{4}$-e egyenesszög?

**442°.** Mekkora az a szög, amelynek: 1) $\frac{9}{10}$-e derékszög; 2) $1\frac{1}{9}$-e egyenesszög?

**443.** Számítsd ki:

1) $\frac{5}{7}:\frac{15}{28}:\frac{2}{9}$;

2) $\frac{6}{11}:\frac{8}{33}:\frac{8}{27}$;

3) $\frac{14}{25}:\frac{42}{55}:\frac{44}{45}$;

4) $5:\frac{20}{39}:\frac{65}{72}$;

5) $7:\frac{63}{80}:\frac{110}{117}$;

6) $13:\frac{52}{57}:\frac{95}{96}$;

7) $2\frac{1}{4}:\frac{3}{8}:\frac{1}{2}$;

8) $1\frac{1}{9}:1\frac{13}{27}:\frac{63}{64}$;

9) $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}:1\frac{2}{3}:1\frac{1}{5}$.

**444.** Számítsd ki:

1) $\frac{3}{8}:\frac{21}{32}:\frac{48}{49}$; 2) $\frac{1}{6}:\left(\frac{9}{22}:\frac{54}{77}\right)$; 3) $1\frac{4}{5}:2\frac{4}{25}:1\frac{19}{66}$.

**445.** Határozd meg az alábbi kifejezés értékét:

1) $2\frac{1}{6}-1\frac{2}{9}:3\frac{2}{3}$;

2) $4\frac{2}{5}:\left(\frac{7}{10}+2\frac{3}{5}\right)$;

3) $7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3:\left(\frac{4}{9}\right)^2$;

4) $\frac{5}{7}:\left(\frac{15}{28}\cdot\frac{2}{9}\right)$;

5) $2\frac{1}{4}:\left(\frac{3}{8}:\frac{1}{2}\right)$;

6) $1\frac{1}{2}:\left(1\frac{1}{4}:1\frac{2}{3}\right):1\frac{1}{5}$.

**446.** Számítsd ki:

1) $1\frac{23}{45}:\left(3\frac{2}{5}-1\frac{2}{15}\right)$; 2) $6\frac{2}{3}:\left(\frac{35}{48}:\frac{21}{32}\right)$; 3) $1\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2:\left(\frac{8}{15}\right)^2$.

**447.** Egy téglalap területe $3\frac{1}{3}$ cm². Határozd meg a téglalap kerületét, ha egyik oldala 5 cm.

**448.** Egy téglalap kerülete $2\frac{2}{3}$ cm. Határozd meg a téglalap területét, ha egyik oldala $\frac{5}{6}$ cm.

**449.** Egy téglalap egyik oldala $3\frac{9}{10}$ m, a másik $2\frac{3}{5}$-ször rövidebb. Határozd meg a téglalap kerületét és területét.

**450.** Egy háromszög egyik oldala $2\frac{4}{5}$ m, a másik oldala $1\frac{1}{5}$-ször rövidebb az első oldalnál, a harmadik oldal pedig $1\frac{10}{11}$-szer rövidebb a második oldalnál. Határozd meg a háromszög kerületét.

**451.** Az egyik sportoló $1\frac{2}{13}$ perc alatt fut le öt kört a stadionban, a másik pedig $1\frac{9}{26}$ perc alatt hét kört. Mennyi idő alatt tesznek meg külön-külön 13 kört?

**452.** Szabolcs első nap 90 oldalt olvasott el a könyvből. Ez $1\frac{1}{2}$-e annak, amit a második napon olvasott el, és az $1\frac{1}{4}$-e annak, amit a harmadik napon. Hány oldalt olvasott el Szabolcs három nap alatt?

**453.** Egy turista az első nap 18 km tett meg. Ez a $\frac{6}{7}$-e annak, amit a második napon tett meg és $1\frac{2}{7}$-e annak, amit a harmadik napon. Mekkora utat tett meg a turista három nap alatt?

**454*.** Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\dfrac{\dfrac{3}{\dfrac{1}{3}+1}-2}{1-\dfrac{3}{4}}$; 2) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$; 3) $2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}}$.

**455*.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $15\frac{3}{8}:\left(2\frac{3}{4}x+5\frac{5}{6}\right)-1\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$;

2) $4{,}5:\left(47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-x\cdot 0{,}75\right)\cdot 2{,}4:0{,}88\right)=\frac{4}{11}$.

**456*.** Édesanya úgy osztott szét 72 diót gyermekei között, hogy a középső fiú a $\frac{3}{4}$-ét kapta annak, amit a legfiatalabb, a legidősebb pedig $\frac{1}{3}$-át annak, amit a középső fiú kapott. Hány diót kaptak a fiúk külön-külön?

**457*.** *Bhãskara* (indiai matematikus) *feladata:* Ha egy számot megnövelünk kétharmadával és még eggyel, akkor 11-et kapunk. Melyik ez a szám.

**458*.** *Bhãskara feladata:* Ha egy számot megszorzunk 5-tel, majd a kapott szorzatból kivonjuk a szám egyharmadát, a különbséget el-

osztjuk 10-zel, az eredményhez hozzáadjuk az eredeti szám $\frac{1}{3}$-át, $\frac{1}{2}$-ét, majd $\frac{1}{4}$-ét, 68-at kapunk. Melyik ez a szám?

**459*.** *Régi matematikai feladvány.* Egy földműves az első napon eladta a vásárra szánt libáinak a felét és még egy fél libát, a második napon a maradék $\frac{1}{3}$-át és még $\frac{1}{3}$ libát, a harmadikon túladott a megmaradt libáinak $\frac{1}{5}$-én és még $\frac{1}{5}$ libán, végül a negyedik napon eladta maradék 19 libáját is. Hány libája volt a földművesnek?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**460.** A közegészségügyi szabályoknak megfelelően az ablak területe a padló területének $\frac{1}{12}$-e kell, hogy legyen. Elég világos-e a szoba, ha tudjuk, hogy két téglalap alakú ablaka van, melyek méretei $1\frac{1}{6}$ m és 2 m, a téglalap alakú padló mérete pedig $6\frac{2}{3}$ m és $4\frac{1}{5}$ m?

**461.** A szoba egyik téglalap alakú falának mérete 6,6 m és $3\frac{1}{3}$ m. Hány tekercs tapétát kell vásárolni a fal kitapétázásához, ha egy tekercs 53 cm széles és 10 m hosszú?

**462.** A gyümölcssaláta elkészítéséhez az édesanyának $\frac{3}{4}$ kg banánra van szüksége, ami a hozzávaló alma mennyiségének $1\frac{1}{5}$-e, a kiviének pedig $\frac{27}{32}$-e. Mennyi alma és kivi kell a gyümölcssalátához?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**463.** Létezik-e olyan háromszög, melynek a belső szögei:
1) 90°, 80°, 70°; 2) 75°, 70°, 45°; 3) 60°, 70°, 80°?

**464.** Egy csónak 1,2 óra alatt teszi meg az utat az egyik kikötőtől a másikig. Visszafelé 2 óra alatt. A csónak sebessége állóvízben 11,2 km/h, a víz sebessége a csónak sebességének 25%-a. Mekkora a távolság a két kikötő között?

# 11. § KÖZÖNSÉGES TÖRTEK TIZEDES TÖRT ALAKJA. KÖZÖNSÉGES TÖRTEK TIZEDES TÖRT ALAKJÁNAK KÖZELÍTŐ ÉRTÉKE

Az 5. osztályban már megtanultad, hogy bármely tizedes tört leírható közönséges tört alakban. Például, $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, $0{,}135 = \frac{135}{1000} = \frac{27}{200}$. Ebben az esetben a *tizedes törtet közönséges tört alakban írtuk le.* A fordított műveletnél a *közönséges törtet kell tizedes tört alakban leírni.*

Írjuk le a $\frac{7}{25}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ törteket tizedes tört alakban! Ehhez a számlálót el kell osztani a nevezővel. Azt kapjuk, hogy:

$$\frac{7}{25} = 0{,}28; \qquad \frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots;$$

$$\frac{5}{6} = 0{,}83333333\ldots.$$

7-et osztva 25-tel az eredmény 0,28 lett. A másik két esetben az osztást nem lehet befejezni, mivel a maradék ismétlődik. Ezért abbahagytuk az osztást, és kitettünk három pontot.

0,28-at véges tizedes törtnek, 0,6666... és 0,8333.. törteket pedig szakaszos végtelen tizedes törteknek nevezzük. Ezen törtek tizedes tört alakjában végtelenül ismétlődő számok vannak, ezek a tört periódusa. A $\frac{2}{3}$ periódusa $\frac{5}{6}$-é pedig 3. A periódus kezdődhet rögtön a tizedesvessző után, mint $\frac{2}{3}$-nál, és néhány számjegy után is, mint $\frac{5}{6}$ esetében.

A végtelen szakaszos tizedes törtek rövid felírása: 0,83333... = 0,8(3). Úgy olvassuk, hogy nulla egész nyolctized és 3 a szakaszban.

Helyes-e, hogy a szakasz csak egy számjegyből állhat. Nem. A szakasz több számjegyből is állhat. Például az 5,4121121121... tizedes törtben a szakasz három számjegyből áll: 5,4(121).

**Figyeld meg:**

egy közönséges tört tizedes tört alakja vagy véges, vagy végtelen szakaszos..

Össze lehet-e hasonlítani két végtelen szakaszos tizedes törtet, lehet-e velük műveleteket végezni. Igen. Ebben az esetben a számok közelítő értékeit használjuk. Nézzünk meg egy példát.

Írjuk le $\frac{5}{12}$-t tizedes tört alakban:

$$\frac{5}{12} = 5:12 = 0{,}4166666\ldots = 0{,}41(6).$$

Kerekítsük ezt a törtet egyesekre, tizedekre, századokra, ezredekre úgy, ahogy azt az 5. osztályban tanultátok. A következő számsorozatot kapjuk: 0; 0,4; 0,42; 0,417; 0,4167; ... . Ebben a számsorban az első két érték lefelé, a harmadik, negyedik és ötödik felfelé van kerekítve. Tehát egy ilyen számsor nem jellemzi egyértelműen a kapott törtet. A pontosabb becslés különleges eljárást igényel.

*Kerekítsük* 0,41(6)-t egyesekre, tizedekre, századokra, ezredekre *lefelé*! Ehhez elhagyjuk az adott csoportot követő számjegyeket: 0; 0,4; 0,41; 0,416; 0,4166; ... .

*Kerekítsük* 0,41(6)-t egyesekre, tizedekre, századokra, ezredekre *felfelé*! Ehhez az adott csoport számjegyéhez ad-

junk hozzá 1-et, és hagyjuk el a következő számjegyeket: 1; 0,5; 0,42; 0,417; 0,4167; ....

Könnyen belátható, hogy 0,41(6), és így $\frac{5}{12}$-re is teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$0 < \frac{5}{12} < 1$; $0{,}4 < \frac{5}{12} < 0{,}5$; $0{,}41 < \frac{5}{12} < 0{,}42$ és így tovább.

Az egyenlőtlenségek külső tagjait a *közönséges törtek közelítő értékeinek* nevezzük. Ezeket az értékeket használják a törtek *meghatározott pontosságú becslésénél* például egy tizedes jegyre, két tizedes jegyre. Nézzük meg a fenti egyenlőtlenségeket! Az első egyenlőtlenség mutatja $\frac{5}{12}$ becslését egészekre, a második tizedekre, a harmadik századokra. Másképpen fogalmazva a $0 < \frac{5}{12} < 1$ egyenlőtlenségről elmondhatjuk, hogy $\frac{5}{12}$-t egészekre becsültük.



**További tudnivalók**

Felmerülhetett bennetek az a kérdés, hogy mely törtek tizedes tört alakja véges, és melyeké végtelen szakaszos. Nézzünk néhány példát.

Írjuk le $\frac{3}{16}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{3}{20}$ és $\frac{7}{12}$ törteket tizedes tört alakban.

$\frac{3}{16} = 3:16 = 0{,}1875$; $\frac{3}{20} = 3:20 = 0{,}15$;

$\frac{8}{25} = 8:25 = 0{,}32$; $\frac{7}{12} = 7:12 = 0{,}58(3)$.

Láthatjuk, az első három tört tizedes tört alakja véges, a negyediké végtelen szakaszos. Bontsuk az adott törtek nevezőit prímtényezőkre:

$25 = 5 \cdot 5$; $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Az első három felbontásban csak 2-es és 5-ös prímtényező van, a harmadikban 2 is és 5 is. A negyedik felbontásban viszont az egyik prímtényező 3. Ez az oka annak, hogy $\frac{7}{12}$ tizedes tört alakja végtelen és szakaszos.

**Egy egyszerűsíthetetlen közönséges törtnek csak abban az esetben véges a tizedes tört alakja, ha a nevező prímtényezős felbontásában 2-es és 5-ös tényezőn kívül nincs más tényező.**

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Magyarázd meg, hogyan kell a közönséges törteket tizedes tört alakban leírni!
2. Hozz fel példát véges tizedes törtre!
3. Hozz fel példát végtelen szakaszos tizedes törtre! Nevezd meg a periódusát!
4. Hogyan kerekítjük lefelé (felfelé) a tizedes törteket?
5. Mit értünk a közönséges törtek tizedes tört alakjának közelítő értékén?
6. Hogyan kell a közönséges törteket adott pontossággal megbecsülni?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**465′.** Igaz-e, hogy a 0,23; 0,23333...; 1,(3); 2,25; 6,5(7); 7,812 számok között vannak 1) véges; 2) végtelen szakaszos tizedes törtek? Nevezd meg őket.

**466′.** Igaza van-e Szabolcsnak akkor, amikor azt állítja, hogy egy végtelen szakaszos tizedes tört szakaszában csak 1) nulla; 2) egy; 3) két; 4) 3; 5) 1000; 6) bármennyi számjegy lehet?

**467′.** Helyesen írtuk-e le az adott tizedes tört lefelé kerekített értékeit? Ha nem, mutass rá a hibára.

| 1) 5,555... | 2) 6,333... | 3) 1,666... |
|---|---|---|
| 5; 5,5; 5,55; 5,555; | 6; 6,3; 6,33; 6,334; | 2; 1,6; 1,66; 1,666. |

**468′.** Helyesen írtuk-e le az adott tizedes tört felfelé kerekített értékeit? Ha nem, mutass rá a hibára.

| 1) 5,555... | 2) 6,333... | 3) 1,666... |
|---|---|---|
| 6; 5,6; 5,56; 5,556; | 6; 6,3; 6,33; 6,333; | 2; 1,7; 1,67; 1,667. |

**469°.** Leírható-e $\frac{2}{9}$ 1) véges; 2) végtelen szakaszos tizedes tört alakban?

**470°.** Írd fel tizedes tört alakban a következő törteket:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{4}{7}$.

Melyik lett véges és melyik végtelen szakaszos tört?

**471°.** Írd le tizedes tört alakban a következő törteket:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{20}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $\frac{2}{7}$.

Melyik lett véges és melyik végtelen szakaszos tört?

**472°.** Helyes-e az alábbi egyenlőség:

1) $\frac{7}{11} = 0{,}636363\ldots$; 2) $\frac{8}{15} = 0{,}533333\ldots$.

Nevezd meg a számok szakaszát.

**473°.** Értelmezd az alábbi felírásokat:

1) 0,(7); 3) 1,5(3); 5) 4,(17); 7) 0,(298);
2) 3,(2); 4) 0,(35); 6) 5,1(62); 8) 1,(314).

**474°.** Értelmezd az alábbi felírásokat:

1) 0,(6); 2) 0,(19); 3) 4,32(7).

**475°.** Írd le a következő törteket tizedes tört alakban:

1) $\frac{7}{16}$; 3) $\frac{9}{25}$; 5) $\frac{8}{9}$; 7) $\frac{4}{15}$; 9) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{9}$;

2) $\frac{3}{32}$; 4) $\frac{12}{125}$; 6) $\frac{11}{12}$; 8) $\frac{22}{75}$; 10) $\frac{2}{5}$; 12) $\frac{41}{50}$.

Milyen tizedes törtet kaptál, végest vagy végtelen szakaszosat? Ha lehetséges, nevezd meg a szakaszt.

**476°.** Írd le a következő törteket tizedes tört alakban:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{13}{16}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{24}{25}$.

Milyen tizedes törtet kaptál, végest vagy végtelen szakaszosat? Ha lehetséges, nevezd meg a szakaszt.

**477°.** Milyen számjegyet kell a * helyére pótolni, hogy teljesüljenek az alábbi egyenlőségek:

1) $\frac{4}{9} = 0{,}(*)$; 3) $\frac{12}{33} = 0{,}(*)$; 5) $\frac{7}{24} = 0{,}291(*)$;

2) $\frac{5}{11} = 0{,}(*)$; 4) $\frac{5}{22} = 0{,}2(*)$; 6) $\frac{8}{27} = 0{,}(*)$?

**478°.** Milyen számjegyet kell a * helyére pótolni, hogy teljesüljenek az alábbi egyenlőségek:

1) $\frac{9}{11} = 0{,}(*)$; 2) $\frac{13}{15} = 0{,}8(*)$; 3) $\frac{11}{24} = 0{,}458(*)$; 4) $\frac{19}{27} = 0{,}(*)$?

**479°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a 2,3456 tizedes tört számszomszédja:
1) 2,2 és 2,3; 2) 2,33 és 2,34; 3) 2,4 és 2,5; 4) 2,34 és 2,35?

**480°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a 0,121212... tizedes tört számszomszédja:
1) 0,1 és 0,2; 2) 0,21 és 0,22; 3) 0,11 és 0,12; 4) 0,122 és 0,123?

**481°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a 0,272727... tizedes tört számszomszédja:
1) 0,26 és 0,27; 2) 0,1 és 0,2; 3) 0,277 és 0,278; 4) 0,27 és 0,28?

**482°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a 0,5(71) tizedes tört számszomszédja:
1) 0,56 és 0,57; 2) 0,5 és 0,6; 3) 0,570 és 0,571; 4) 0,516 és 0,517?

**483°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a 1,3(47) tizedes tört számszomszédja:
1) 1,4 és 1,5; 2) 1,35 és 1,36; 3) 1,347 és 1,348; 4) 1,37 és 1,38?

**484°.** Hasonlítsd össze az alábbi számokat:
1) 0,22(23) és 0,2223; 2) $2\frac{2}{3}$ és 2,67; 3) $\frac{1}{7}$ és 0,1428(57).

**485°.** Hasonlítsd össze a következő számokat: 1) 0,34(56) és 0,3457; 2) $7\frac{1}{9}$ és 7,1112.

**486°.** Írd le az alábbi közönséges törteket tizedes tört alakban és a kapott számot kerekítsd tizedekre: 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{16}{25}$; 3) $\frac{7}{15}$; 4) $\frac{19}{75}$.

**487°.** Írd le az alábbi közönséges törteket tizedes tört alakban és a kapott számot kerekítsd századokra: 1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{16}{125}$; 3) $\frac{11}{45}$; 4) $\frac{17}{32}$.

**488°.** Írd le az alábbi közönséges törteket tizedes tört alakban és a kapott számot kerekítsd századokra: 1) $\frac{9}{11}$; 2) $\frac{21}{125}$; 3) $\frac{13}{40}$; 4) $\frac{15}{32}$.

**489°.** A téglalap egyik oldala 4,2 cm, a másik $2\frac{4}{7}$ cm. Határozd meg a téglalap kerületét! Add meg az eredményt tizedes tört alakban két tizedesjegynyi pontossággal.

**490°.** A téglalap egyik oldala $3\frac{3}{4}$ cm, a másik 3,25 cm. Határozd meg a téglalap kerületét! Az eredményt add meg tizedes tört alakban két tizedesjegynyi pontossággal.

**491°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a $\frac{11}{16}$ tört számszomszédja:

1) 0,6 és 0,7; 2) 0,06 és 0,07; 3) 0,5 és 0,6; 4) 0,8 és 0,9?

**492°.** Az alábbi számpárok közül melyik lesz a $\frac{13}{32}$ tört számszomszédja:

1) 0,3 és 0,4; 2) 0,04 és 0,05; 3) 0,4 és 0,5; 4) 0,41 és 0,42?

**493°.** Írd le a következő közönséges törteket tizedes tört alakban:

1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{4}{25}$; 4) $\frac{3}{16}$. Becsüld a kapott értékeket egy tizedesjegynyi pontossággal.

**494°.** Becsüld a kapott értékeket egy tizedesjegynyi pontossággal:

1) $\frac{8}{9}$; 2) $\frac{11}{12}$; 3) $\frac{16}{25}$; 4) $\frac{9}{16}$. Becsüld meg a kapott értékeket egy tizedesjegynyi pontossággal.

**495°.** Rendezd a következő számokat növekvő sorrendbe: $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$; 0,96; 0,88.

**496°.** Rendezd a következő számokat csökkenő sorrendbe: $\frac{8}{15}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{14}$; 0,56; 0,69.

**497.** Tartalmazhat-e a szakasz 1) két azonos számjegyet; 2) három azonos számjegyet? 3) lehet-e a szakasz összes számjegye azonos? Indokold meg a válaszodat.

**498.** Igaz-e, hogy csak azokat a közönséges törteket lehet véges tizedes tört alakban felírni, melyek nevezője 1) páros; 2) páratlan? Indokold meg a válaszodat.

**499.** Igaz-e, hogy csak azokat a közönséges törteket lehet végtelen szakaszos tizedes tört alakban felírni, melyek nevezője 1) páros; 2) páratlan? Indokold meg a válaszodat.

**500.** Megváltozik-e a tört értéke, ha:

1) a szakaszban lévő számot megszorozzuk 2-vel; 2) a szakaszban lévő számot elosztjuk 1-gyel; 3) a szakaszban lévő számhoz 0-át adunk; 4) a szakaszban lévő számhoz jobbról hozzáírunk egy 0-át? Indokold meg a válaszodat.

**501.** Megváltozik-e a szakaszban lévő számjegyek száma, ha:

1) a törtet megszorozzuk 2-vel; 2) a törtet elosztjuk 2-vel; a törthöz hozzáadunk 2-őt? Indokold meg a válaszodat.

**502.** Az alábbi számok közül melyik a legnagyobb:

1) 0,0(73), 0,073 vagy $\frac{4}{55}$; 2) $\frac{14}{39}$, 0,358974 vagy 0,3589(74)?

**503.** Az alábbi számok közül melyik a legkisebb:

1) 0,121(95), 0,12195 vagy $\frac{5}{41}$; 2) $\frac{31}{27}$, 1,15 vagy 1,(14)?

**504.** Rendezd az $A\left(\frac{27}{22}\right)$, $B(1{,}2(3))$, $C(1{,}23)$, $D(1{,}(27))$, $E(1{,}227)$ pontokat koordinátáik növekedésének sorrendjébe! Melyik pont van legtávolabb az origótól?

**505.** Rendezd az $A\left(\frac{41}{33}\right)$, $B(1{,}2(4))$, $C(1{,}24)$, $D(1{,}2(43))$, $E(1{,}243)$ pontokat koordinátáik növekedésének sorrendjébe! Melyik pont van legtávolabb az origótól?

**506.** Számítsd ki:

1) $1\frac{7}{16}+1{,}05-3\frac{7}{12}+6\frac{4}{15}$;

2) $1\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{12}{17}+2\frac{14}{51}\right)-1\frac{7}{9}$;

3) $3\frac{5}{8}:\left(1\frac{5}{64}+6\frac{7}{32}\right)-0{,}404$;

4) $\left(6\frac{18}{25}+2\frac{16}{125}\right):2{,}212+5\frac{1}{6}$.

Az eredményt írd le tizedes tört alakban.

**507.** Számítsd ki: 1) $3\frac{23}{15}+7{,}45-1\frac{11}{25}-4\frac{13}{75}$; 2) $3\frac{1}{13}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{8}\right)-1\frac{2}{26}$.

Az eredményt írd le tizedes tört alakban.

**508.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $1{,}1\cdot\left(5x-\frac{9}{28}\right)=\frac{11}{105}$; 2) $\left(2\frac{29}{30}x+\frac{13}{42}\right)\cdot 0{,}125=\frac{17}{56}$.

Az egyenlet gyökét írd le tizedes tört alakban! Kerekítsd századokra 1) lefelé; 2) felfelé.

**509.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $1{,}4\cdot\left(9\frac{5}{12}x-\frac{15}{164}\right)=\frac{14}{123}$; 2) $\left(x-4\frac{19}{39}\right)\cdot 0{,}375=\frac{75}{104}$.

Az egyenlet gyökét írd le tizedes tört alakban! Kerekítsd századokra 1) lefelé; 2) felfelé.

**510.** Becsüld meg a közönséges tört tizedes értékét századnyi pontossággal és hasonlítsd össze a tizedes törttel:

1) $\frac{12}{19}$ és 0,61; 2) $\frac{11}{41}$ és 0,29; 3) $\frac{98}{119}$ és 0,85; 4) $2\frac{14}{75}$ és 2,18.

**511.** Becsüld meg a közönséges tört tizedes értékét századnyi pontossággal és hasonlítsd össze a tizedes törttel:

1) $\frac{8}{17}$ és 0,45; 2) $\frac{12}{53}$ és 0,25; 3) $\frac{77}{123}$ és 0,61; 4) $3\frac{23}{86}$ és 3,23.

**512.** A háromszög egyik oldala $6\frac{43}{76}$ cm, a másik oldala $\frac{7}{38}$ cm-rel hosszabb az első oldalnál, a harmadik oldal pedig $2\frac{125}{228}$ cm-rel rövidebb az első oldalnál. Határozd meg a háromszög kerületét! Az eredményt add meg tizedes törtalakban két tizedesjegynyi pontossággal.

**513.** A háromszög egyik oldala $8\frac{10}{87}$ cm, a másik oldala $1\frac{13}{29}$ cm-rel rövidebb az első oldalnál, a harmadik oldal pedig $3\frac{23}{87}$ cm-rel hosszabb az első oldalnál. Határozd meg a háromszög kerületét! Az eredményt add meg tizedes törtalakban három tizedesjegynyi pontossággal.

**514*.** Számítsd ki $\frac{6}{17}$, $\frac{5}{29}$ és $\frac{13}{19}$ átlagát! Az eredményt írd le tizedes törtalakban két tizedesjegynyi pontossággal! Ezután írd le a megadott közönséges törteket tizedes törtalakban két tizedesjegynyi pontossággal és határozd meg az átlagukat. Hasonlítsd össze a két eredményt.

**515*.** Melyik a legnagyobb a következő számok közül: 1,(036); 1,036; 1,03(6) vagy $\frac{171}{165}$?

**516*.** Rendezd az $A\left(\frac{211}{210}\right)$, $B(1{,}0047619)$, $C(1{,}0047(619))$, $D(1{,}0(47619))$, $E(1{,}(047619))$ pontokat koordinátáik csökkenésének sorrendjébe! Melyik pont van legközelebb az origóhoz?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**517.** Mérd meg önmagad, édesanyád és édesapád magasságát centiméterben! Határozd meg saját testmagasságod arányát az édesanyádéhoz, illetve az édesapádéhoz képest! Az eredményt kerekítsd felfelé és lefelé századokra.

**518.** Határozd meg saját szobád területét négyzetméterekben! Az eredményt add meg felfelé és lefelé kerekítve is két tizedesjegynyi pontossággal.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

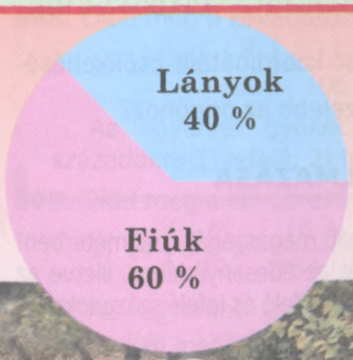
**519.** Határozd meg a következő számok legkisebb közös többszörösét: 1) 26 és 65; 2) 45 és 105; 3) 21 és 28.

**520.** Egy kocka térfogata 27 $cm^3$, ami egy másik kocka térfogatának 21,6 %-a. Határozd meg a nagyobbik kocka lapjának kerületét.

# 3. FEJEZET
# ARÁNYOK ÉS ARÁNYPÁROK

## Ebben a fejezetben megtudod:

- mit nevezünk aránynak és mik a tulajdonságai;
- mi az aránypár;
- mik az arányos mennyiségek;
- hogyan kell egy számot adott számok arányában osztani;
- mi a méretarány vagy a lépték;
- mi a körvonal, a kör, a körcikk és mik a térbeli forgástestek;
- mi a diagram, hány fajta diagram létezik, és hogyan kell diagramot rajzolni;
- hogyan kell százalékos feladatokat megoldani;
- mi a véletlen események valószínűsége és hogyan kell azt meghatározni;
- hogyan alkalmazható a megtanult tananyag a gyakorlatban






# 12. § AZ ARÁNY ÉS TULAJDONSÁGAI

Valószínűleg már hallottad a következő kifejezéseket: „a győzelmi esély 50 az 50-hez", „a hajdinakásához szükséges termény és víz aránya 1 a 2-höz", „a nyereséget 2 a 3-hoz arányban osztották el". Minden mondat valamely számok viszonyát fejezi ki: 50-t az 50-hez, 1-t a 2-höz, 2-t a 3-hoz. Hogy meghatározzuk ezt a viszonyt, ki kell számítani a számok hányadosát. Az első állításban $50 : 50 = 1$ értéket kapunk. Ez azt jelenti, hogy a nyerési és a vesztési esély ugyanolyan. A második frázis alapján azt kapjuk, hogy $1 : 2 = 0{,}5$. Vagyis, kétszer annyi vízre van szükségünk, mint hajdinakására. A harmadik esetet magyarázd meg önállóan.

**Jegyezd meg!**

Az $a$ és $b$ nullától különböző számok hányadosát az $a$ és $b$ szám arányának nevezzük.

Így írjuk: $a:b$ vagy $\frac{a}{b}$. Úgy olvassuk, hogy „$a$ és $b$ aránya".

Az $a$ és $b$ számokat az *arány tagjainak* nevezzük. Ha elvégezzük az osztást, akkor az eredményt az *arány értékének* nevezzük. Például a $25 : 2$ kifejezés 25 és 2 arányát mutatja, 12,5 pedig ennek az aránynak az értéke.

Az arány azt mutatja, hogy melyik két számot viszonyítjuk egymáshoz. Az arány értéke pedig azt jelzi, hányszor nagyobb az első szám a másodiknál vagy pedig azt, hogy a második szám hányad része az elsőnek. Például a $\frac{7}{2}$ arány azt mutatja, hogy 7 3,5-szer nagyobb 2-nél. A $\frac{2}{7}$

arány értéke pedig azt, hogy a 2 hányad része a 7-nek. A 7 a 2-höz arányt és a 2 a 7-hez arányt *kölcsönösen fordított* arányoknak nevezzük ugyanúgy, mint a $\frac{7}{2}$ és $\frac{2}{7}$, tört esetében.

**Figyeld meg:**

1) ha $a > b$, akkor az $a$ és $b$ szám aránya azt mutatja, hányszor nagyobb az $a$ szám a $b$-nél;
2) ha $a < b$, akkor az $a$ és $b$ szám aránya azt mutatja, hogy az $a$ szám hányada a $b$-nek.

Az arányra, akárcsak bármely két szám hányadosára, érvényes az osztás minden tulajdonsága.

**Jegyezd meg!**

**Az arány alaptulajdonsága**

Az arány értéke nem változik, ha a tagjait megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal:

$a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)$, vagy $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$, $c\neq 0$;

$a:b=(a:c):(b:c)$, vagy $\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$, $c\neq 0$.

Feladatok megoldásánál mind az azonos mértékű mennyiségek, mind a különböző mértékű mennyiségek arányát is fel lehet írni.

**1. feladat** A világ legnehezebb csontos hala, a holdhal, hossza akár 3 m is lehet, a legkisebbé, a gébé pedig körülbelül 16 mm. Hasonlítsd össze a halak hosszát.

**Megoldás.** 1. Maghatározhatjuk, hányszor hosszabb a holdhal a gébnél. Ehhez írjuk le a nagyobbik hal hosszának az arányát a kisebbik hal hosszához. Az adott mennyiségeket váltsuk át azonos mértékegységekre:

$$3\text{ m} : 16\text{ mm} = 3000\text{ mm} : 16\text{ mm} = \frac{3000}{16} = \frac{375}{2} = 187{,}5.$$

2. Azt is meg tudjuk határozni, hogy a géb hossza hányad része a holdhal hosszának. Ehhez írjuk le a fordított arányt és határozzuk meg az értékét:

$$16\text{ mm} : 3\text{ m} = 16\text{ mm} : 3000\text{ mm} = \frac{16}{3000} = \frac{2}{375}.$$

**Figyeld meg:**

azonos fajtájú mennyiségek aránya mértékegység nélküli szám.

**2. feladat** Határozd meg a gepárd sebességét, ha 2 másodperc alatt 55 métert tesz meg.

**Megoldás.** A sebesség meghatározásához ki kell számolni a megtett út és az eltelt idő arányát: $55\text{ m} : 2\text{ sec} = 27{,}5\text{ m/sec}$.

**Figyeld meg:**

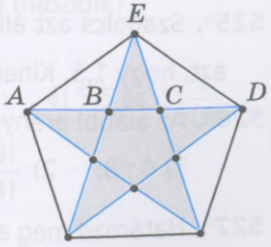
különböző fajtájú mennyiségek aránya egy új mennyiség, melynek a mértékegysége eltér az eddigi mértékegységektől.

## További tudnivalók

A szabályos csillagötszög (pentogram) mindig is a tökéletességével hívta fel magára a figyelmet (11. ábra). A síkidom különlegessége abban rejlik, hogy az ötágú csillagot alkotó szakaszok aránya egyenlő:

$AD : AC = AC : CD = AB : BC =$
$= AD : AE = AE : EC$ és így tovább.

Pitagorasz (kr. e. 570-490) ógörög matematikus és tanítványai ezt a sokszöget választották szövetségük jelképének. Napjainkban sok nemzet lobogóján és címerében található meg az ötágú csillag.




11. ábra

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mit nevezünk két szám arányának; mi az arány értéke?
2. Mit mutat két szám aránya?
3. Mely arányok kölcsönösen fordított értékűek? Hozz fel példát.
4. Fogalmazd meg az arányok alaptulajdonságát.
5. Mivel egyenlő az azonos fajtájú mennyiségek aránya? különböző fajtájú mennyiségek aránya?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**521′.** Igaz-e, hogy az arány egy:
1) szám; 2) kifejezés; 3) egyenlet; 4) egyenlőtlenség?

**522′.** Igaz-e, hogy az arány értéke:
1) szám; 2) kifejezés; 3) egyenlet; 4) egyenlőtlenség?

**523′.** Olvasd fel a következő arányokat: 1) $8 : 5$; 2) $\frac{11}{14}$; 3) $0{,}7 : 10$; 4) $\frac{1}{12}$. Nevezd meg az arány tagjait. Mit mutat ezeknek a számoknak az aránya?

**524′.** Igaz-e, hogy egy arány értéke nem változik, ha tagjait:
1) megszorozzuk 2-vel;
2) növeljük 2-vel;
3) 2-szeresére növeljük;
4) elosztjuk 3-mal;
5) csökkentjük 3-mal;
6) 2-szeresére csökkentjük?

**525°.** Szabolcs azt állítja, hogy a $15 : 10$ arány értéke $\frac{3}{2}$, Péter pedig azt, hogy 1,5. Kinek van igaza?

**526°.** Az alábbi arányok közül melyik értéke 0,5:
1) $4 : 8$; 2) $\frac{10}{18}$; 3) $14 : 7$; 4) $\frac{5}{10}$?

**527°.** Határozd meg az alábbi arányok értékét:
1) $16 : 4$; 2) $1{,}8 : 0{,}9$; 3) $\frac{6}{12}$; 4) $\frac{36}{63}$; 5) $\frac{0{,}12}{0{,}48}$; 6) $2{,}8 : 49$.

**528°.** Határozd meg az alábbi arányok értékét:
1) $5 : 15$; 2) $2{,}5 : 0{,}5$; 3) $\frac{0{,}2}{5}$; 4) $\frac{3{,}4}{17}$.

**529°.** Fordított értékűek-e az alábbi arányok:

1) $\frac{2}{5}$ és $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{14}{9}$ és $\frac{9}{14}$; 3) 8 : 11 és 11 : 8; 4) $\frac{3}{4}$ és $\frac{8}{6}$?

**530°.** Fordított értékűek-e az alábbi arányok:

1) $\frac{3}{7}$ és $\frac{21}{9}$; 2) 5 : 0,2 és 2 : 0,5?

**531°.** Helyettesítsd a csillagot aránnyal úgy, hogy a kapott arányok fordított értékűek legyenek:

1) 4 : 9 és *; 2) 10 : 3 és *; 3) $\frac{2}{13}$ és *; 4) $3\frac{1}{4}$ és *?

**532°.** Írj le néhány olyan arányt, melynek az értéke a $\frac{8}{40}$ arány értékével egyenlő! Milyen tulajdonságot alkalmaztál?

**533°.** Írj le néhány olyan arányt, melynek az értéke az 5 : 15 arány értékével egyenlő! Milyen tulajdonságot alkalmaztál?

**534°.** Mennyi az alábbi arányok értéke:

1) 12 cm : 6 cm; 2) 0,2 m : 5 m; 3) 4 km : 60 min; 4) 20 m : 5 sec?

**535°.** Mennyi az alábbi arányok értéke:

1) 30 dm : 5 dm; 2) 10 m : 2 sec?

**536°.** A 6. A osztályba 32 tanuló jár. Közülük 14 fiú. Hányszor több lány tanul az osztályban, mint fiú? Az osztály hányad részét teszik ki a fiúk és mennyit a lányok?

**537°.** Egy 14 méter hosszú kötelet két részre vágtak úgy, hogy az egyik rész 8 méter. Hányszor hosszabb az egyik rész a másiknál? A kötél hányad része az első darab és hányad része a második?

**538.** Határozd meg az alábbi arányok értékét:

1) 5 és 22,5; 2) 1,8 és 81; 3) $\frac{5}{63}$ és $\frac{1}{2}$; 4) 5,5 és $11\frac{1}{12}$.

**539.** Határozd meg az alábbi arányok értékét:

1) 45 és 1,5; 2) $3\frac{2}{3}$ és 1,1.

**540.** Mekkora a sebessége annak a gépkocsinak, ami 100 km-t:

1) 1 óra; 2) 0,8 óra; 3) $1\frac{1}{3}$ óra; 4) 30 perc alatt tesz meg.

**541.** Az egyik brigád 52 $m^2$ falat 5 óra alatt festett le, egy másik 4 óra alatt 43 $m^2$-t. Melyik brigád teljesítménye nagyobb?

**542.** Az egyik varrodai műszak 4 nap alatt 42 kosztümöt varr meg, egy másik 6 nap alatt 63-t. Melyik brigád teljesítménye nagyobb?

**543.** Az $a$ mely értékénél lesz az alábbi arány értéke 5:

1) $a : 2{,}5$; 2) $3\frac{1}{3} : a$?

**544.** A $b$ mely értékénél lesz az alábbi arány értéke $\frac{1}{5}$:

1) $0{,}8 : b$; 2) $b : 3\frac{3}{4}$?

**545*.** Egy kötélgombolyagból levágtak 15 métert. Milyen hosszú volt eredetileg a kötél, ha a levágott rész aránya az egész kötélhez 1 : 5.

**546*.** Két szám aránya 2 : 5. Mennyivel kell elosztani a második számot, hogy a számok aránya 2 : 3 legyen?

**547*.** Egy könyv árát leszállították az árának $\frac{1}{5}$-vel. Meg lehet-e mondani, hogy hányszor volt drágább az eredeti ár az újnál?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**548.** Magyarázd meg a következő állításokat: 1) a lekvár elkészítéséhez egy a kettőhöz arányban kell a gyümölcsöt és a cukrot készletezni; 2) egy téglalap alakú párkány oldalainak az aránya egy a háromhoz.

**549.** Mérd meg otthon két szoba szélességét és hosszúságát. Határozd meg a szobák alapterületeinek arányát! Milyen következtetést tudsz levonni a kapott eredményből?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**550.** Írd le a következő számkifejezést és határozd meg az értékét: háromszorozd meg 10,5 és 11,4 összege kétszeresének és 3,5 és 2,8 szorzatának a különbségét.

**551.** Két szám összege 10,5, különbsége 2,5. Melyik ez a két szám.

# 13. § ARÁNYPÁR ÉS TULAJDONSÁGAI

Már tudjátok, hogy két azonos értékű kifejezés egyenlő egymással. Például 1,2 : 0,3 és 16 : 4 arányok egyenlők, mivel értékük 4. Tehát leírhatjuk az alábbi egyenlőséget:

$$1{,}2 : 0{,}3 = 16 : 4 \text{ vagy } \frac{1{,}2}{0{,}3} = \frac{16}{4}.$$

Az ilyen egyenlőségnek külön neve van, *aránypárnak* nevezzük.

**Jegyezd meg!**

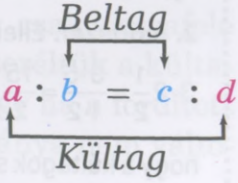
**Két arány egyenlőségét *aránypárnak* nevezzük.**

**Figyeld meg:**

az aránypár azt mutatja, hogy a jobb és baloldali arány értéke egyenlő.

Így írjuk: $a : b = c : d$ vagy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Úgy olvassuk, hogy „$a$ és $b$ aránya egyenlő $c$ és $d$ arányával”, vagy „$a$ úgy aránylik a $b$-hez, mint $c$ a $d$-hez”.

Az $a$ és $d$ számokat kültagoknak, a $b$ és $c$ számokat pedig beltagoknak nevezzük (12. ábra).




12. ábra

**Figyeld meg:**

aránypár csak nullától különböző számokkal írható fel.

Számítsuk ki az $1{,}2 : 0{,}3 = 16 : 4$ aránypár kültagjainak és beltagjainak szorzatát! Kültagokra vonatkozóan azt kapjuk, hogy $1{,}2 \cdot 4 = 4{,}8$, a beltagok esetében pedig $-0{,}3 \cdot 16 = 4{,}8$. Ez az *aránypár alaptulajdonsága*.

**Jegyezd meg!**

**Az aránypár alaptulajdonsága**

Az aránypárban a kültagok szorzata a beltagok szorzatával egyenlő:

$$\text{ha } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ akkor } ad=bc.$$

És fordítva: ha $ad = bc$ és az $a$, $b$, $c$ és $d$ számok nullától különbözőek, akkor $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

**1. feladat** Aránypár-e a $3:5=1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$ egyenlőség?

**Megoldás.**

**1. módszer.** Alkalmazzuk a meghatározást: $3:5=\frac{3}{5}$ és $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}=\frac{3}{2}:\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 5}=\frac{3}{5}$. Az arányok értékei egyenlők, így a $3:5$ és $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$ egyenlőség aránypár.

**2. módszer.** Ellenőrizzük, teljesül-e az aránypár alaptulajdonsága a: $3\cdot 2\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 2}=\frac{15}{2}$ és $5\cdot 1\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{15}{2}$ aránypár esetében. Azt kaptuk, hogy a kültagok szorzata $3\cdot 2\frac{1}{2}$ egyenlő $5\cdot 1\frac{1}{2}$ a beltagok szorzatával. Tehát a $3:5=1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}$ egyenlőség aránypár.

Cseréljük meg az $1{,}2 : 0{,}3 = 16 : 4$ aránypár kültagjait, 1,2 és 4-t! Egy másik egyenlőséget kaptunk: $4 : 0{,}3 = 16 : 1{,}2$. Ez az egyenlőség is aránypár. Valóban, az 1,2 és 4 kültagok megcserélésével sem a szorzatuk, sem a beltagok szorzata nem változik. Ugyanígy sem a kültagok, sem a beltagok szorzata sem változik, ha megcseréljük a beltagokat: $1{,}2 : 16 = 0{,}3 : 4$. De a kapott $1{,}2 : 16 = 0{,}3 : 4$ és $4 : 0{,}3 = 16 :$

1,2 aránypárok különböznek az eredeti 1,2 : 0,3 = 16 : 4 aránypártól, mivel értékük különböző. Az adott aránypár értéke 4, a kapott aránypároké pedig megfelelően $\frac{3}{40}$ és $\frac{40}{3}$. Másképpen azt is mondhatjuk, hogy a *számok aránya* megváltozott.

Az 1,2 : 16= 0,3 : 4 és a 4 : 0,3 = 16 : 1,2 aránypárokban az arányok értékei reciprok számok $\frac{3}{40}$ és $\frac{40}{3}$. Ezért az ilyen aránypárokat *kölcsönösen fordított* aránypároknak nevezzük. A fordított aránypárokban az arányok azonosak a leírás sorrendjének pontosságával. Mind a két aránypárban bizonyos mennyiségeket hasonlítunk össze, egy nagyobbat és egy kisebbet, például egy vonalzó és egy tankönyv vastagságát. Viszont az első esetben a kisebbiket viszonyítjuk a nagyobbikhoz, míg a másik esetben pont fordítva, a nagyobbikat a kisebbikhez. Azt is mondhatjuk, hogy a második aránypár az első aránypár, csak visszafelé van leírva, jobbról balra. Egyszerre megcseréltük a kültagokat is és a beltagokat is. Elfogadjuk, hogy ha a fordított aránypárra térünk át, akkor a számok aránya nem változik.

Megváltozik-e az arány, ha a beltagokat megcseréljük a megfelelő kültagokkal. Nem. Valóban, ha az $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ aránypárban megcseréljük az $a$ és $b$, a $c$ és $d$ tagokat, akkor fordított arányok egyenlőségét kapjuk: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Ez az aránypár pedig az adott aránypár fordítottja.

Az aránypár alaptulajdonsága alapján könnyen meghatározható az aránypár ismeretlen tagja.

**2. feladat.** Határozzuk meg a következő aránypárok ismeretlen tagját:

1) $x : 28 = 3 : 12$; 2) $30 : y = 5 : 8$.

**Megoldás.** 1. Az $x : 28 = 3 : 12$ aránypárban az egyik költag ismeretlen. Az aránypárok alaptulajdonsága értelmében: $12x = 28 \cdot 3$. Vagyis: $x = \frac{28 \cdot 3}{12} = 7$.

2. A $30 : y = 5 : 8$ aránypárban az egyik beltag ismeretlen. Az aránypárok alaptulajdonsága alapján: $5y = 30$. Vagyis: $y = \frac{30 \cdot 8}{5} = 48$.

**Jegyezd meg!**

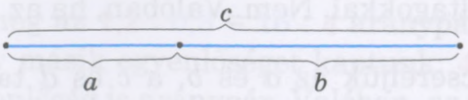
**Az aránypár ismeretlen tagjának meghatározása**

1. Ismeretlen költagot úgy kell maghatározni, hogy a beltagok szorzatát el kell osztani az ismert költaggal.
2. Ismeretlen beltagot úgy kell maghatározni, hogy a költagok szorzatát el kell osztani az ismert beltaggal.



**További tudnivalók**

1. Más nyelvek az arány szó helyett a latin eredetű *proporció* szót használják.
2. Az aranymetszés olyan arányosság, amelyben egy $c$ szakaszt felosztunk $a$ és $b$ részre (13. ábra), ahol a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik rész az egészhez: $a : b = b : c$. Ezen arány értéke megközelítőleg 0,618.




13. ábra

Ismereteink szerint az aranymetszés szabályát már az Ókori Egyiptomban is alkalmazták. A Kheopsz-piramis, a templomok szerkezete, a domborművek, Tutanhamon sírjából előkerült használati tárgyak, ékszerek arról tanúskodnak, hogy az egyiptomi mesterek alkalmazták az aranymetszés szabályát.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mi az aránypár? Hozz fel példát!
2. Írj le egy aránypárt betűkkel! Nevezd meg az aránypár kül- és beltagjait!
3. Fogalmazd meg az aránypár alaptulajdonságát!
4. Írd le betűkkel az aránypár alaptulajdonságát!
5. Mely aránypárokat nevezzük fordítottaknak, származtatottaknak?
6. Megváltozik-e az aránypár, ha csak a beltagokat vagy csak a kültagokat cseréljük meg?
7. Hogyan kell meghatározni az aránypár ismeretlen tagját?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**552′.** Aránypárok-e az alábbi egyenlőségek:

1) $12 + 8 = 15 + 5$; 3) $4 : 2 = 12 : 6$; 5) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$;

2) $14 - 4 = 20 - 10$; 4) $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$; 6) $8 : 2 = 4 \cdot 1$?

Válaszodat indokold meg.

**553′.** Olvasd fel a következő aránypárokat:

1) $24 : 8 = 9 : 3$; 2) $3 : 2 = 0{,}15 : 0{,}1$; 3) $\frac{2}{15} = \frac{0{,}4}{3}$; 4) $\frac{4{,}5}{5} = \frac{9}{10}$.

Nevezd meg az aránypárok kül- és beltagjait.

**554′.** Hogyan kell leellenőrizni, hogy az $5 : 4 = 1{,}5 : 1{,}2$ egyenlőség aránypár-e:

1) a meghatározás alapján; 2) alaptulajdonsággal?

**555′.** Igaz-e, hogy az alábbi aránypárok fordítottak:

1) $\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$ és $\frac{9}{3} = \frac{6}{2}$; 2) $3 : 9 = 2 : 6$ és $6 : 2 = 9 : 3$?

**556′.** Olvasd fel jobbról balra az alábbi aránypárokat:

1) $33 : 11 = 18 : 6$; 2) $0{,}5 : 4 = 1{,}5 : 12$.

Milyen aránypárt kaptál az adotthoz viszonyítva? Miért?

**557°.** Az alábbi arányok közül melyekből lehet aránypárt alkotni:

1) $4 : 8$; 2) $0{,}2 : 4$; 3) $5 : 10$; 4) $\frac{12}{24}$? Válaszodat indokold.

***558°.*** Az alábbi arányok közül melyekből lehet aránypárt alkotni:

1) $6 : 2$; 2) $1{,}8 : 0{,}6$; 3) $12 : 3$; 4) $\frac{15}{5}$?

**559°.** Lehetnek-e az alábbi számok egy aránypár tagjai:
1) 3, 6, 9, 12; 2) 1, 2, 4, 8; 3) 0, 1, 2, 3; 4) 4, 0, 5, 1?

**560°.** Írj le aránypárt az alábbi számokkal: 1) 1, 2, 4, 8; 2) 2, 3, 6, 9; 3) 0,5, 1, 2, 4; 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$. A megoldást írd le hányados és törtalakban is.

**561°.** Írj fel aránypárt az alábbi számokkal:
1) 2, 4, 6, 12; 2) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, 3, 5.
A megoldást írd le hányados és törtalakban is.

**562°.** Ellenőrizd le, teljesül-e az aránypár alaptulajdonsága:
1) $18 : 9 = 30 : 15$; 3) $0{,}5 : 3 = 10 : 60$; 5) $\frac{0{,}2}{4} = \frac{0{,}15}{3}$;
2) $2 : 25 = 3 : 37{,}5$; 4) $\frac{2}{9} = \frac{7}{31{,}5}$; 6) $\frac{8}{0{,}2} = \frac{60}{1{,}5}$.

**563°.** Ellenőrizd le, teljesül-e az aránypár alaptulajdonsága:
1) $40 : 8 = 15 : 3$; 2) $5 : 0{,}4 = 25 : 2$; 3) $\frac{4{,}5}{9} = \frac{3{,}5}{7}$; 4) $\frac{2{,}4}{0{,}2} = \frac{6}{0{,}5}$.

**564°.** Írj le aránypárt az alábbi egyenlőségek alapján:
1) $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$; 2) $5 \cdot 2 = 0{,}4 \cdot 25$; 3) $\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{2}{7} \cdot 3$.
Hány aránypárt lehet leírni? Válaszodat indokold meg.

**565°.** Írj le aránypárt az alábbi egyenlőségek alapján:
1) $8 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \cdot 4$; 2) $1{,}3 \cdot 10 = 2\frac{1}{6} \cdot 6$.

**566°.** Ellenőrizd le kétféleképpen is, aránypárok-e az alábbi egyenlőségek:
1) $18 : 3 = 30 : 5$; 3) $\frac{16}{14} = \frac{14}{12}$; 5) $\frac{3}{0{,}4} = \frac{1{,}5}{0{,}2}$;
2) $2{,}5 : 6{,}25 = 3 : 7{,}5$; 4) $\frac{0{,}8}{4} = \frac{4}{2}$; 6) $\frac{2}{1{,}2} = \frac{5}{3}$.

**567°.** Ellenőrizd le kétféleképpen is, aránypárok-e az alábbi egyenlőségek:
1) $28 : 7 = 2 : 0{,}5$; 2) $\frac{2}{3} : 5 = 0{,}1 : \frac{3}{4}$; 3) $\frac{3{,}2}{24} = \frac{2}{3}$; 4) $\frac{2{,}5}{20} = \frac{0{,}5}{4}$.

**568°.** Kölcsönösen fordítottak-e az alábbi aránypárok:
1) $15 : 3 = 2 : 0{,}4$ és $3 : 15 = 0{,}4 : 2$; 2) $15 : 3 = 2 : 0{,}4$ és $15 : 10 = 3 : 2$;
3) $\frac{15}{3} = \frac{2}{0{,}4}$ és $\frac{15}{2} = \frac{3}{0{,}4}$; 4) $\frac{15}{3} = \frac{2}{0{,}4}$ és $\frac{0{,}4}{2} = \frac{3}{15}$?
Válaszodat indokold meg.

**569°.** Kölcsönösen fordítottak-e az alábbi aránypárok:

1) $4:0{,}5=16:2$ és $4:16=0{,}5:2$; 2) $\frac{4}{0{,}5}=\frac{16}{2}$ és $\frac{2}{0{,}5}=\frac{16}{4}$?

**570°.** Írj olyan aránypárt, melynek az értéke 1) 3; 2) 0,2: 1) 3; 2) 0,2. Írj az aránypárral fordított aránypárt.

**571°.** Írj olyan aránypárt, melynek az értéke 5. Írj az aránypárral fordított aránypárt.

**572°.** Határozd meg az alábbi aránypárok ismeretlen tagját:

1) $12 : x = 4 : 5$; 5) $0{,}8 : y = 2 : 1\frac{1}{4}$; 9) $\frac{12}{0{,}5}=\frac{80}{z}$;

2) $5 : 8 = 15 : y$; 6) $z : 4{,}2 = 9 : 10{,}8$; 10) $\frac{x}{1{,}8}=\frac{1}{0{,}3}$;

3) $8 : 3 = 16 : z$; 7) $\frac{x}{7}=\frac{0{,}5}{0{,}3}$; 11) $\frac{0{,}7}{y}=\frac{2{,}1}{33}$;

4) $2{,}4 : x = 0{,}8 : 5$; 8) $\frac{48}{5{,}1}=\frac{y}{3{,}4}$; 12) $\frac{0{,}4}{7}=\frac{z}{4{,}2}$.

**573°.** Határozd meg az alábbi aránypárok ismeretlen tagját:

1) $15 : x = 5 : 7$; 3) $39 : 1{,}5 = 52 : z$; 5) $\frac{3}{0{,}8}=\frac{60}{y}$;

2) $9 : 3 = y : 0{,}5$; 4) $\frac{x}{10}=\frac{1{,}3}{1{,}5}$; 6) $\frac{7}{10{,}5}=\frac{z}{0{,}3}$.

**574.** Adott az $a : b = c : d$ aránypár. Aránypárok-e a következő egyenlőségek:

1) $a : c = b : d$; 3) $5a : 5b = c : d$;

2) $d : b = c : a$; 4) $4a : 2b = 8c : 4d$?

Válaszodat indokold meg.

**575.** Adott az $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ aránypár. Aránypárok-e a következő egyenlőségek:

1) $a : d = b : c$; 2) $d : c = b : a$; 3) $\frac{a}{6b}=\frac{6c}{d}$; 4) $\frac{4a}{b}=\frac{12c}{3d}$?

Válaszodat indokold meg.

**576.** Egy aránypár kültagjai 15 és 7, egyik beltagja 3. Határozd meg az ismeretlen beltagot! Írd le az összes aránypárt, amelyeket ezekkel a számokkal lehet alkotni.

**577.** Egy aránypár kültagjai 9 és 24, egyik beltagja 36. Határozd meg az ismeretlen beltagot! Írd le az összes aránypárt, amelyeket ezekkel a számokkal lehet alkotni.

**578.** Egy aránypár beltagjai 1,25 és 8, egyik kültagja 2,5. Határozd meg az ismeretlen kültagot.

**579.** Egy aránypár beltagjai 4,5 és 4, egyik kültagja 12,5. Határozd meg az ismeretlen kültagot.

**580.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $x:4{,}5=3\frac{1}{5}:2\frac{1}{4}$;

2) $1{,}2:y=1\frac{1}{3}:1\frac{3}{7}$;

3) $2\frac{2}{3}:1\frac{7}{9}=\frac{1}{5}:(x-0{,}6)$;

4) $\frac{0{,}2}{x-5}=\frac{0{,}5}{2{,}5}$;

5) $6y:84=\frac{4}{11}:\frac{8}{11}$;

6) $\frac{4{,}5}{27}=\frac{7y}{21}$;

7) $(2x-1{,}5):2\frac{1}{7}=1\frac{2}{3}:\frac{5}{14}$;

8) $\frac{0{,}84}{\frac{7}{15}}=\frac{0{,}5y+2{,}5}{3\frac{1}{3}}$.

**581.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $1\frac{1}{9}:x=2\frac{2}{3}:3\frac{3}{5}$;

2) $\frac{1{,}25}{y+2}=\frac{0{,}6}{2{,}4}$;

3) $6x:3\frac{1}{3}=2{,}4:\frac{1}{12}$;

4) $\frac{4\frac{1}{2}}{0{,}6}=\frac{4y-2}{\frac{4}{9}}$.

**582*.** Gondoltunk egy számra, azt megkétszereztük, majd 6-tal csökkentettük. A kapott szám úgy aránylik a 9-hez, mint 4 a 4,5-hez. Melyik számra gondoltunk?

**583*.** Ismeretes, hogy $x : y = 5 : 8$ és $y : z = 16 : 7$. Határozd meg $z$ értékét, ha $x = 2{,}4$.

**584*.** Ismeretes, hogy $x : y = y : z = 2$. Határozd meg $x$ és $z$ arányát.

**585*.** Határozd meg $x$ értékét, ha:

1) $x : y = 3 : 2$, $y : z = 2 : 1$, $z : 1 = 1 : 0{,}25$;

2) $x:\frac{1}{2}=y:\frac{1}{3}$, $y:\frac{1}{4}=z:\frac{1}{5}$, $z:\frac{1}{3}=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**586.** Adolf Zeising, az aranymetszés kutatásával foglalkozó német tudós 1855-ben jelentetett meg könyvet „A kísérleti esztétika" címen. Ebben a könyvben a szerző abszolút érvényűnek tekintette az aranymetszést minden természeti jelenségre és a művészetre is. Az ókor és a felvilágosodás korának tudósaira támaszkodva megállapította, hogy az aranymetszés-

nek megfelelően viszonyulnak egymáshoz az emberi arc és test részei. A 14 – 15 ábrákon az esztéta számításai láthatók.



14. ábra



15. ábra

Állapítsd meg a 14 – 15. ábrákon, mely szakaszok aránya felel meg az aranymetszésnek! Végezz méréseket a saját tenyereden vagy a barátodén és ellenőrizd, teljesül-e a 15. ábrán látható szakaszok aránya.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**587.** Határozd meg az alábbi mennyiségek arányát:
1) 1,6 m és 20 cm; 2) 2 kg és 750 g; 3) 1 óra és 40 perc.

**588.** Az egyik osztályba 40-nél kevesebb tanuló jár. Az osztály $\frac{1}{7}$-e a Fő utcán lakik, az $\frac{1}{3}$-a a Karácsony utcában, az $\frac{1}{2}$-e a Petőfi utcában, a többiek a Sevcsenko utcában. Hány tanuló jár ebbe az osztályba?

# 14. § EGYENES ÉS FORDÍTOTT ARÁNYOSSÁG

Aránypárral feladatokat is meg lehet oldani.

Tudjátok, hogy az áru értéke függ a megvásárolt mennyiségtől, minél többet vásárolsz, annál többet fizetsz. Az ilyen mennyiségeknek *egyenesen arányos mennyiségeknek* nevezzük.

**Jegyezd meg!**

Két mennyiség ***egyenesen arányos***, ha az egyik bizonyos mértékű növelésével (csökkentésével), a másik mennyiség ugyanolyan mértékben nő (csökken).

**1. feladat1.** 2 kg cukorkáért 72 hrivnyát fizettek. Mennyibe fog kerülni 4,5 kg ugyanilyen cukorka?

**Megoldás.**

$2\,kg - 72\,hrv$

$4{,}5\,kg - x$

$\frac{2}{4{,}5} = \frac{72}{x}$;

$x = \frac{4{,}5 \cdot 72}{2}$;

$x = 162.$

*Felelet:*

*4,5 kg cukorka 162 hrivnyába kerül.*

**Figyeld meg:**

ha két mennyiség egyenesen arányos akkor a megfelelő értékeik aránya aránypárt alkot.

A gyakorlatban az egyenesen arányos mennyiségeken kívül fordítottan arányos mennyiségekkel is találkozhatunk. Például, ha az iskolába menet késésben vagy, gyorsítasz, hogy idejében megérkezz. Tehát, a sebességed függ az időtől: minél kevesebb az időd, annál nagyobb lesz a sebességed. Az ilyen mennyiségeket *fordítottan arányos mennyiségeknek* nevezzük.

**Jegyezd meg!**

Két mennyiség fordítottan arányos, ha az egyik bizonyos mértékű növelésével (csökkentésével) a másik ugyanilyen mértékben csökken (nő).

**2. feladat** Egy személygépkocsi 90 km/h sebességgel haladt, a Cserkaszi-Kijev távolságot 2 óra alatt tette meg. Mekkora sebességgel haladt visszafelé, ha Kijevből 2,5 óra múlva érkezett meg Cserkasziba?

**Megoldás.**

$$\begin{array}{ll} 90\ km/h & -\ 2\ h \\ x & -\ 2{,}5\ h \end{array}$$

$$\frac{x}{90} = \frac{2}{2{,}5};\ x = \frac{90 \cdot 2}{2{,}5};\ x = 72.$$

*Felelet:*

*visszafelé a gépkocsi sebeségge72 km/h volt.*

**Figyeld meg:**

ha két mennyiség fordítottan arányos, akkor a megfelelő értékeik aránya forditott aránypárt alkot.

Vajon két mennyiség minden esetben egyenesen vagy fordítottan arányos? Vizsgáljuk meg! Például, egy beteg gyerek láza napokon keresztül hol növekszik, hol csökken. Itt nincs összefüggés, így arányosság sem lehet. Viszont a gyerek magassága az életkorral együtt nő. Ezen menynyiségek között van összefüggés, tehát megvizsgálhatjuk, hogy fennáll-e egyenes arányosság? Könnyen belátható, hogy ezek a mennyiségek nem arányosak, így fölösleges

azzal foglalkozni, hogy egyenesen vagy fordítottan arányosak-e. Ha két mennyiség arányos, akkor csak két lehetőség van, amelyek kizárják egymást: vagy egyenesen arányosak, vagy fordítottan.

### További tudnivalók



Az aranymetszés történetével közvetve összeköthető az olasz matematikus és szerzetes, a pisai Leonardo (1180 – 1240), aki Fibonacci (Bonaccio fia) néven vált ismertté. Bejárta Keletet, megismertette Európával az indiai (arab) számjegyeket. 1202-ben látott napvilágot „Az abakusz könyve" című munkája, melyben összegyűjtötte az akkor ismeretes összes feladatot. Az egyik feladat így szólt: „Hány pár nyulat hoz a világra egy év alatt egy pár nyúl?" Ezen a problémán gondolkozva Fibonacci az alábbi sorozatot alkotta meg:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... .

Napjainkban ezt a számsort Fibonacci sorozatnak nevezzük. A sorozat érdekessége, hogy a harmadik tagtól kezdődően minden tag az előtte lévő két tag összege:

$0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 2$; $1 + 2 = 3$; $2 + 3 = 5$;
$3 + 5 = 8$; $5 + 8 = 13$; $8 + 13 = 21$; $13 + 21 = 34$

és így tovább, a szomszédos tagok aránya pedig közelít az aranymetszés értékéhez. Például,

$21 : 34 = 0{,}617$, viszont $34 : 55 = 0{,}618$.

### IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Milyen mennyiségeket nevezünk egyenesen arányosoknak? Hozz fel példát!
2. Hogyan kell olyan feladatot megoldani, amelyben egyenesen arányos mennyiségek szerepelnek?
3. Milyen mennyiségeket nevezünk fordítottan arányosoknak? Hozz fel példát!
4. Hogyan kell olyan feladatot megoldani, amelyben fordítottan arányos mennyiségek szerepelnek?
5. Két mennyiség minden esetben arányos?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**589′.** Két mennyiség egyenesen arányos. Hogyan változik meg az egyik mennyiség, ha a másodikat a) ötszörösére növeljük; b) felére csökkentjük?
Válaszodat indokold meg.

**590′.** Egy feladat feltételei alapján az alábbi adatokat jegyezteljétek le:
1) 3 — 36, 4 — 48;
2) 70 — 3, 60 — 2;
3) 2 — 100, 4 — 50.
Egyenesen arányosak-e a feladatban szereplő mennyiségek?

**591′.** Két mennyiség fordítottan arányos. Hogyan változik meg az egyik mennyiség, ha a másodikat:
a) négyszeresére növeljük; b) hatszorosára csökkentjük?
Válaszodat indokold meg.

**592′.** Egy feladat feltételei alapján az alábbi adatokat jegyezték le:
1) 80 — 4, 160 — 2;
2) 3 — 18, 5 — 30;
3) 10 — 8, 4 — 20.
Fordítottan arányosak-e a feladatban szereplő mennyiségek?

**593°.** Állapítsd meg az alábbi mennyiségekről, hogy egyenesen arányosak-e:
1) az áru értéke és mennyisége;
2) a cukorkás doboz tömege és a dobozban lévő cukorkák száma;
3) az állandó sebességgel haladó személygépkocsi által megtett út és a ráfordított idő;
4) adott távolság megtételéhez szükséges idő és sebesség;
5) egy ember tömege és magassága;
6) a lekvárhoz szükséges gyümölcs és cukor mennyisége;
7) a téglalap kerülete és egyik oldalának a hossza;
8) a négyzet oldala és kerülete.

**594°.** Határozd meg az $x$ értékét, ha a feladatban szereplő mennyiségek egyenesen arányosak.
1) 3 kg cukorka — 36 hrn, 6 kg cukorka — $x$;
2) 15 alkatrész — 3 óra, $x$ — 2 óra.

**595°.** Mennyibe kerül 10 kg cukorka, ha 4 kg ugyanilyen cukorkáért 128 hrivnyát kell fizetni?

**596°.** 3 kg alma 24 hrivnyába kerül. Mennyibe kerül 7 kg ebből az almából?

**597°.** Egy szárnyashajó 4 óra alatt 80 km-t tett meg. Mekkora utat tesz meg ez a hajó 2 óra alatt, ha a sebessége állandó?

**598°.** Egy turista 20 km tett meg 5 óra alatt. Milyen idő alatt tesz meg ez a turista 28 km-t, ha a sebessége állandó?

**599°.** 1 kg rozslisztből 1,4 kg kenyeret lehet sütni. Mennyi liszt szükséges 42 q kenyérhez?

**600°.** 3 kg zöldkávéból 2,5 kg pörkölt kávét kapunk. Mennyi zöld kávé szükséges 10 kg pörkölt kávéhoz?

**601°.** Egy személygépkocsi 210 km tett meg 3 óra alatt. Mekkora utat tesz meg ez a kocsi 2 óra alatt, ha a sebessége állandó?

**602°.** A farok nélküli gibbon a fákon ugrálva 2 óra alatt 32 km tesz meg. Mekkora távolságot tesz meg a gibbon 3 óra alatt?

**603°.** Állapítsd meg az alábbi mennyiségekről, hogy fordítottan arányosak-e:

1) az áru értéke és a megvásárolt mennyiség értéke;
2) a cukorkás doboz tömege és az ára;
3) adott távolság megtételéhez szükséges idő és sebesség;
4) az állandó sebességgel haladó személygépkocsi által megtett út és a ráfordított idő;
5) az elvégzendő munka mennyisége és a ráfordított idő;
6) az adott munka elvégzését jellemző termelékenység és az idő;
7) adott mennyiség szállítására szükséges teherautók száma és az autók teherbírása;
8) a négyzet oldala és területe.

**604°.** Határozd meg az $x$ értékét, ha a feladatban szereplő mennyiségek fordítottan arányosak.

1) 3 óra — 80 km/h,
4 óra — $x$;

2) 5 munkás — 8 nap,
$x$ — 10 nap.

**605°.** Egy megrendelést 3 asztalos 12 nap alatt teljesített. Hány nap alatt készült volna el ezzel a megrendeléssel 6 asztalos, ha ugyanolyan teljesítménnyel dolgoznak?

**606°.** Hány nap alatt végez a kijelölt munkával 6 munkás, ha 2 munkás ugyanezt a feladatot 9 nap alatt végzi el?

**607°.** A vörös óriáskenguru 3 órán át 55 km/h sebességgel haladt. Mekkora sebességgel kell haladnia a kengurunak ahhoz, hogy ezt a távolságot 2,5 óra alatt tegye meg?

**608°.** Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak az új menetrend szerint, ha most 4 óra alatt teszi meg a két állomás közötti távolságot, amit a régi menetrend szerint 100 km/h sebességgel 5 óra alatt tett meg?

**609.** 4 kg keksz ára 56 hrivnya. Mennyibe kerül 3 kg abból a cukorkából, melynek a kilogrammonkénti ára 2 hrivnyával drágább a kekszénél?

**610.** 5 kg alma 40 hrivnyába kerül. Mennyibe kerül 2 kg körte, ha a körte ára 4 hrivnyával drágább, mint az almáé.

**611.** Az asztali óra ingája 15 perc alatt 730-szor leng ki. Hányat leng ki 1 óra alatt? Mennyi idő alatt leng 2190-et?

**612.** Natika 60 hrivnyát fizetett 24 füzetért. Mennyibe kerül 20 ilyen füzet? Hány ilyen füzetet lehet venni 45 hrivnyáért?

**613.** Egy kannában 12 liter tej van. A tejet széttöltötték 6 azonos üvegbe. Hány liter tej került egy üvegbe? Hány háromliteres üveget lehet megtölteni a kannából?

**614.** Egy vízcsapból percenként 6 liter víz folyik ki. Mennyi víz folyik ki egy félóra alatt? Mekkora idő alatt folyik ki 27 liter víz?

**615.** Két állomás között a távolság 360 km. Mennyi idő alatt teszi meg ezt a távolságot a 90 km/h sebességgel haladó vonat? Mekkora sebességgel kell haladnia a vonatnak, hogy ezt a távolságot 4 óra 30 perc alatt tegye meg?

**616.** Két falu között a távolság 18 km. Mennyi idő alatt teszi meg ezt a távolságot a 12 km/h sebességgel haladó kerékpáros? Mekkora sebességgel kell haladnia a gyalogosnak ahhoz, hogy ezt a távolságot 6 óra alatt tegye meg?

**617.** Két traktoros 6 nap alatt szánt fel egy adott földterületet. Hány nap alatt szántja fel ezt a földterületet 4 ugyanilyen teljesítményű traktor? Hány traktorra van szükség ahhoz, hogy ezt a földterületet 2 nap alatt szántsák fel?

**618.** Egy adott rakományt nyolc dömper 3 nap alatt szállít le. Hány nap alatt szállítja el ugyanezt az árut 6 ilyen dömper? Hány dömperre van szükség ahhoz, hogy ezt az árut 2 nap alatt szállítsák el?

**619.** Alkoss feladatot 1) egyenes arányosságra, melyet a $\frac{3}{x}=\frac{36}{60}$ aránypárral lehet megoldani;

2) fordított arányosságra, melyet az $x : 4 = 120 : 160$ aránypárral lehet megoldani! OLDD MEG A FELADATOKAT!.

**620.** Alkoss feladatot 1) egyenes arányosságra, melyet az $\frac{5}{x}=\frac{60}{72}$ aránypárral lehet megoldani;

2) fordított arányosságra, melyet a $3 : x = 90 : 60$ aránypárral lehet megoldani! OLDD MEG A FELADATOKAT!.

**621*.** Tamás a vasútállomástól 20 perc alatt ér be a faluba. Milyen idő alatt teszi meg ugyanezt az utat kerékpárral, ha kerékpárral kétszer gyorsabban halad?

**622*.** Egy adott munkát a mester 3 nap alatt végez el, a tanítványával együtt 2 nap alatt. Hány nap alatt készülne el a tanítvány ezzel a munkával egyedül?

**623*.** Dénes a futópályán 4 kört fut le az alatt az idő alatt, míg Katica 3 kört. Katica 12 kört futott. Hány kört futott le ez alatt az idő alatt Dénes?

**624*.** Egy medencéből 1 óra 15 perc alatt engedik le a vizet. A művelet megkezdésétől számítva milyen idő múlva lesz a medencében az eredeti vízmennyiség 0,2-e?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**625.** Egy könyv nyomtatásánál úgy tervezték, hogy oldalanként 28 sor, soronként pedig 40 betű lesz. Később kiderült, hogy célszerűbb lenne, ha oldalanként 35 sor lenne. Hány betű lesz ebben az esetben egy sorban, ha a betűk oldalankénti száma nem változik?

**626.** 12 darab sütemény elkészítéséhez 1 tojás sárgájára és 3 evőkanál cukorra van szükség. Mennyi alapanyagra van szükség 24 ilyen sütemény elkészítéséhez? Hány sütemény lesz 3 tojásból?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**627.** Milyen szám kerül a lánc utolsó szemébe, a négyzetbe?




**628.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $15\frac{3}{8} : \left(2\frac{3}{4}x + 5\frac{5}{6}\right) - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$;  2) $3\frac{1}{3} - \left(4\frac{1}{5}x + x\right) : 5\frac{4}{7} = \frac{8}{15}$.

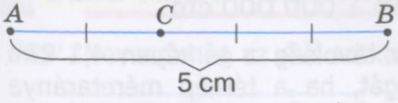
# 15. § EGY SZÁM ADOTT ARÁNYBAN VALÓ FELOSZTÁSA. MÉRETARÁNY

## 1. Arányos osztás

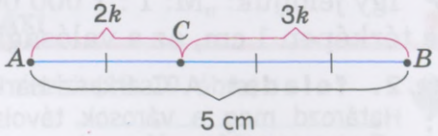
A gyakorlatban gyakran találjuk szembe magunkat olyan feladattal, amikor *adott mennyiséget kell arányosan elosztani*: a haszon elosztása; különböző elegyek és ételek készítése. Az ilyen feladatok *arányos osztással* oldhatók meg.

A 16. ábrán egy $AB$ szakasz látható, melyet a $C$ pont 2 : 3 arányban oszt. Leírhatjuk az: $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$ aránypárt. Ennek az aránypárnak származtatott aránypára az $\frac{AC}{2} = \frac{BC}{3}$.

Legyen ennek az aránypárnak az értéke $k$, ebben az esetben $\frac{AC}{2} = \frac{BC}{3} = k$. Vagyis $\frac{AC}{2} = k$ és $\frac{BC}{3} = k$. Ebből következik, hogy $AC = 2k$ és $BC = 3k$. Tehát az $AB$ szakaszt felosztottuk 2 : 3 arányban, kifejeztük az $AC$ és $BC$ szakaszok hosszát a $k$ számmal (17. ábra).



16. ábra



17. ábra

**Jegyezd meg!**

Az arány értékét az ***arány együtthatójának*** nevezzük.

Az arány együtthatóját általában $k$-val jelöljük.

Gyakran előfordul, hogy egy mennyiséget kettőnél több részre kell arányosan elosztani. Ebben az esetben is a $k$ együttható segít.

**1. feladat.** Osszuk fel 60-at 3 : 4 : 5 arányban.

**Megoldás.** Legyen $k$ az arány együtthatója. Akkor az adott szám első része $3k$, a második $4k$, a harmadik pedig $5k$ lesz. Mivel a 60-t kell adott arányban felosztani, így leírhatjuk a következő egyenletet: $3k + 4k + 5k = 60$. Ebből $k = 5$. Tehát az első rész $3 \cdot 5 = 15$, a második $4 \cdot 5 = 20$, a harmadik pedig $5 \cdot 5 = 25$.

## 2. Méretarány

Ahhoz, hogy a környezetünket papíron tudjuk ábrázolni, meg kell változtatni a valóságos méretüket: a nagy tárgyakat kicsinyíteni kell, míg a kicsiket nagyítani. De ahhoz, hogy a rajzunk vagy a tervünk valóságos képet adjon, a méreteket arányosan kell megváltoztatni. Ebben az esetben méretarányt alkalmaznak.

Leggyakrabban térképeken találkozunk méretaránnyal.

**Jegyezd meg!**

A térkép egy szakaszának és a valóságban neki megfelelő távolságnak az arányát ***méretaránynak*** nevezzük.

Így jelöljük: „M: 1 : 1 000 000". Ez azt jelenti, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban 1 000 000 cm.

**2. feladat** A Cserkaszi-Harkiv távolság a térképen 4,1 cm. Határozd meg a városok távolságát, ha a térkép méretaránya 1 : 10 000 000.

**Megoldás.**

| | | |
|---|---|---|
| A térképen: | 4,1 cm | — 1 cm |
| A valóságban: | $x$ | — 10 000 000 cm |

Tehát a térképen ábrázolt szakasz hosszának aránya a valóságos a távolsághoz $4{,}1 : x$. Ennek az aránynak az értéke a méretaránnyal egyenlő: 1 : 10 000 000.

Ebből következik, hogy $x = \frac{4{,}1 \cdot 10\,000\,000}{1} = 41\,000\,000$ (cm) =

= 410 (km).

Tehát a Cserkaszi és Harkov közötti távolság 410 km.

Hogyan kell az ábrázolás méretarányát megadni abban az esetben, ha a valóság méretét nagyítani kell, például 1000-szeresére. Ebben az esetben a méretarányt fordítva kell leírni: 1000 : 1. Ilyen méretarányra van szükség például az órák szerkezetének ábrázolásakor.



## További tudnivalók

1. Az együttható kifejezés helyett gyakran alkalmazzuk a koefficiens meghatározást, a szó a latin *Coefficiens*-ből ered, ami tulajdonképpen egy szóösszetétel: Co – jelentése „együtt" és *efficiens* – jelentése „hatékony". Ez általában egy szorzó, amit számjeggyel adunk meg. A meghatározást először François Viète francia matematikus alkalmazta.
2. A szláv nyelvekben a méretarányra a „масштаб» kifejezést használják, ami a német *Maßstab* szóból ered, jelentése „skála", ez is egy szóösszetétel: *Maß* – „mérték" és *Stab* – „mérföldkő".

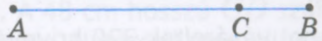
## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Milyen feladatok tartoznak az arányos osztáshoz? Hozz fel példákat!
2. Mi az arány együtthatója?
3. Hogyan kell megoldani az arányos osztást tartalmazó feladatokat?
4. Mi a méretarány?
5. Hogyan kell méretarányról szóló feladatokat megoldani?

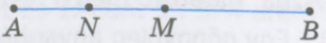


## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**629'.** Nevezd meg az $AB$ szakasz részeit (18. 19. ábra).




18. ábra



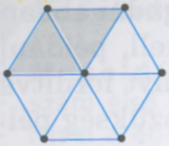

19. ábra

**630'.** Igaz-e, hogy az arányossági együttható:
1) aránypár; 2) arány; 3) az arány értéke;
4) az aránypár arányainak az értéke?

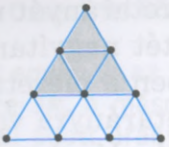
**631'.** Igaz-e, hogy a méretarány:
1) szám; 2) mennyiség; 3) kifejezés?

**632'.** Mit mutatnak az alábbi méretarányok:
1) 1 : 100 000; 2) 1 : 5 000 000; 3) 1 : 500; 4) 1 : 2000?

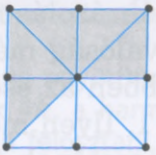
**633'.** Mit mutatnak az alábbi méretarányok:
1) 4 : 1; 2) 10 : 1; 3) 50 : 1; 4) 400 : 1?



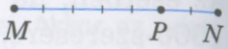
20. ábra



21. ábra



22. ábra




23. ábra

**634°.** Mekkora az ábrán látható 1) hatszög (20. ábra); 2) háromszög (21. ábra) kifestett és festetlen részének az aránya?

**635°.** Mekkora az ábrán látható 1) négyzet (22. ábra) kifestett és festetlen részének az aránya; 2) az $MN$ szakasz két részének (23. ábra) az aránya?

**636°.** Ahhoz, hogy 21-et 3 : 4 arányban ossza fel, Szabolcs az alábbi egyenleteket írta le:
1) $3x + 4x = 7$; 2) $3 + 4 = 21x$; 3) $3x + 4x = 21$.
Helyesen oldotta-e meg a feladatot?

**637°.** Oszd fel 24-et olyan részekre, melyek aránya:
1) 1 : 3; 2) 3 : 5; 3) 1 : 2 : 5; 4) 2 : 2 : 4.

**638°.** Oszd fel 30-at olyan részekre, melyek aránya:
1) 1 : 2; 2) 3 : 4 : 8.

**639°.** Két szám aránya 5 : 3. Határozd meg ezeket a számokat, ha:
1) összegük 40; 2) különbségük 16.

**640°.** Két szám aránya 4 : 1. Határozd meg ezeket a számokat, ha:
1) összegük 25; 2) különbségük 21.

**641°.** A 18 cm hosszú $AB$ szakaszt a $C$ pont 2 : 7 arányú részekre osztja. Határozd meg a részek hosszát.

**642°.** A 24 cm hosszú $AC$ szakaszt egy $B$ pont 3 : 5 arányú részekre osztja. Határozd meg a részek hosszát.

**643°.** Egy göngyöleg anyagból két darabot vásároltak 320 hrivnyáért. Az egyik darab 5 m hosszú, a másik 3m. Mennyibe kerül külön-külön a két türet anyag?

**644°.** Két iskola 12 200 hrivnyáért vásárolt színházi jegyeket. Mennyit fizettek külön-külön az iskolák, ha az egyik esetben 286 diák ment színházba, a másikban pedig 324?

**645°.** A bronz a réz és az ón ötvözete. Mennyi réz és ón van 270 g bronzban, ha ez az ötvözet egy rész ónt és két rész rezet tartalmaz?

**646°.** Az egyik ötvözethez egy rész ólomra és három rész ónra van szükség. Mennyi ólom és mennyi ón van 600 g ilyen ötvözetben?

**647°.** Mekkora annak a térképnek a méretaránya, melyen az $AB$ szakasz hossza:
1) a térképen 20 000-szer rövidebb, mint a valóságban;
2) a valóságban 400-szor nagyobb, mint a térképen?

**648°.** Mekkora annak a térképnek a méretaránya, melyen a $CD$ szakasz hossza:
1) a térképen 50 000-szer rövidebb, mint a valóságban;
2) a valóságban 1000-szer nagyobb, mint a térképen?

**649°.** Mekkora az $AB$ szakasz hossza a valóságban, ha egy 1 : 100 000 méretarányú térképen $AB$ = 1 cm?

**650°.** Mekkora a $CD$ szakasz hossza a valóságban, ha egy 1 : 10 000 méretarányú térképen $CD$ = 1 cm?

**651°.** Egy térkép méretaránya 1 : 500 000. Mekkora a távolság a valóságban, ha a térképen ábrázolt szakasz hossza:
1) 1 cm; 2) 3 cm; 3) 4,5 cm; 4) 6 cm 2 mm.

**652°.** Egy térkép méretaránya 1 : 4 000 000. Mekkora a távolság a valóságban, ha a térképen ábrázolt szakasz hossza: 1) 2 cm; 2) 5 cm 5 mm.

**653°.** Kijev és Vinnyica között a távolság 260 km. Mekkora a távolság a városok között egy olyan térképen, melynek a méretaránya:
1) 1 : 10 000 000; 2) 1 : 4 000 000?

**654°.** Donyeck és Zsitomir között a távolság 880 km. Mekkora a távolság a városok között egy 1 : 10 000 000 méretarányú térképen?

**655.** A $BC$ szakaszt az $A$ pont 3 : 8 arányban osztja. Az egyik rész 5 cm-rel hosszabb, mint a másik. Határozd meg a részek hosszát.

**656.** Az $AB$ szakaszt a $C$ pont 4 : 7 arányban osztja. Az egyik rész 9 cm-rel hosszabb a másiknál. Határozd meg a részek hosszát.

**657.** A 48 cm hosszú $CD$ szakaszt az $A$ és $B$ pont 5 : 3: 4 arányban osztja. Határozd meg minden rész hosszát.

**658.** A 36 cm hosszú $AB$ szakaszt a $C$ és $D$ pont 4 : 3: 2 arányban osztja. Határozd meg minden rész hosszát.

**659.** Az adott távolságot a személyvonat 10 óra 30 perc alatt teszi meg, míg a tehervonat 12 óra alatt. Mekkora távolságot tesznek meg a vonatok a találkozásukig, ha egyszerre indulnak el egymástól a 465 km-re lévő két városból?

**660.** Az egyik atléta 100 métert 12 másodperc alatt tesz meg, míg a másik 13 másodperc alatt. Mekkora távolságot tesznek meg ezek az atléták a találkozásukig, ha egyszerre indulnak el egymás felé, miután 200 méterre eltávolodtak egymástól?




24. ábra

**661.** Az egyik gépírónő 90 oldalt 8 óra alatt gépel le, míg a másik 7 óra alatt. Hogyan ossza el egymás között a két gépírónő a 90 oldalt, hogy minél gyorsabban befejezzék a munkát?

***662.*** Az egyik brigád 70 alkatrészt 4 óra alatt gyárt le, míg a másik 3 óra alatt. Hogyan ossza fel egymás között a két brigád a 70 alkatrészt ahhoz, hogy a lehető legrövidebb idő alatt fejezzék be a munkát?

**663.** A malterhoz 2 rész cementre, 2 rész homokra és 0,8 rész vízre van szükség. Mennyi maltert kapunk, ha a cement mennyisége 100 kg?

***664.*** Az üdítő elkészítéséhez 2 rész meggylé, 3 rész víz és 1 rész méz szükséges. Mennyi üdítőt kapunk, ha 400 g meggylét használunk fel hozzá?

**665.** Egy téglalap alakú veteményes kert hossza 360 m, szélessége pedig 240 m. Milyen méretei lesznek a kertnek egy 1 : 500 méretarányú tervrajzon?

***666.*** Egy szoba tervrajza olyan téglalap, melynek oldala 20 mm és 30 mm hosszúságúak. Mekkorák ennek a szobának a valós méretei, ha a terv 1 : 300 léptékű?

**667.** Határozd meg a térkép alapján (24. ábra) 1) Mikolajev és Rivne; 2) Kijev és Ungvár; 3) Csernyigov és Odessza; 4) Luhanszk és Csernovci távolságát.

**668.** Határozd meg a térkép alapján (24. ábra) 1) Cserkaszi és Lviv; 2) Harkiv és Ivano-Frankivszk távolságát.

**669*.** Négy szám összege 4,2. Három szám aránya 1,2 : 4 : 0,8, a negyedik szám a második szám 0,6-e. Határozd meg az első számot.

**670*.** A 144-et felosztották három, $x$, $y$ és $z$ részre úgy, hogy $x : y = 3 : 2$ és $y : z = 4 : 5$. Határozd meg ezeket a részeket.

**671*.** Három szám aránya $0{,}2 : \frac{2}{3} : 0{,}5$. Határozd meg ezeket a számokat, ha ismeretes, hogy az első szám 32-vel kisebb a második szám felénél.

**672*.** Határozd meg annak a tervrajznak a léptékét, melyen egy 4 ha-s erdőt 1 cm²-es négyzettel ábrázoltak.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**673.** Tímea egy divatújságban megjelent szabásminta alapján varrt magának szoknyát. Mekkora az újságban megjelent szabásminta méretaránya, ha azon a szoknya hossza 15 cm, a megvarrté pedig 75 cm.

**674.** Egy alkatrész 30 mm hosszú. Milyen léptékű a tervrajz, ha azon az alkatrész 60 mm hosszú?

**675.** Rajzold le 1 : 50 méretarányban:
1) a tantermedet; 2) a lakásotok egyik szobáját.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**676.** Számold ki, milyen szám kerül a láncpélda utolsó négyzetébe.




**677.** Határozd meg: 1) 30 hrn $\frac{2}{3}$-át; 2) 24 km $1\frac{1}{6}$-át; 3) 520 g $6\frac{1}{4}$-ét.

**678.** Az egyik faluból egyszerre idult el a vasútállomásra egy gyalogos és egy kerékpáros. A kerékpáros 18 km/h sebességgel haladt és félóra múlva 7 km-rel megelőzte a gyalogost. Mekkora sebességgel haladt a gyalogos?

## 16. § KÖRVONAL, KÖRLAP, KÖRCIKK

Az összes zárt görbe közül a síkon a legtökéletesebbnek a körvonalat tartják. Ha egy tetszőleges szakasz egyik végpontját rögzítjük és megforgatjuk a szakaszt e pont körül, akkor a szakasz másik végpontja egy körvonalat ír le. Ezért körvonal ábrázolására körzőt használunk (25. ábra).

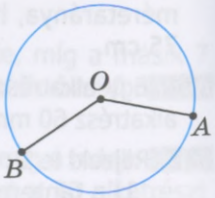


25. ábra

**Jegyezd meg!**

***Körvonal*** **- az a mértani alakzat, melynek minden pontja a síkban azonos távolságra van egy adott ponttól, amit a körvonal *középpontjának* nevezünk.**

A 26 ábrán egy $O$ középpontú körvonal látható. Ha a körvonal bármelyik pontját összekötjük egy szakasszal a körvonal középpontjával, akkor megkapjuk a *körvonal sugarát*. A 26 ábrán az $OA$ és $OB$ szakaszok az $O$ középpontú körvonal sugarai. Tehát $OA = OB$.




26. ábra

A sugarat általában $R$-rel jelöljük. Így írjuk: $OA = R$.

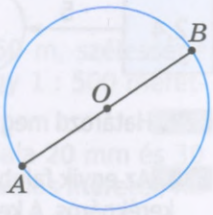
**Figyeld meg:**

a körvonal minden sugara egyenlő hosszúságú.

Húzzuk meg az $OA$ és $OB$ sugarat úgy, hogy azok egy egyenesre illeszkedjenek (27. ábra). A kapott $AB$ szakaszt a körvonal *átmérőjének* nevezzük.

Az $AB$ átmérő az $OA$ sugár kétszerese és az $OA$ sugár az $AB$ átmérő fele. Tehát:

$$AB = 2 \cdot OA.$$




27. ábra

Az átmérőt $D$-vel jelöljük: $AB = D$.

**Jegyezd meg!**

**Az átmérő képlete**

A körvonal átmérője a sugár kétszerese:

$$D = 2R.$$

**1. feladat** Határozd meg a 8 cm átmérőjű körvonal sugarát.

**Megoldás.** Határozd meg a 8 cm átmérőjű körvonal sugarát $R = D : 2 = 8 : 2 = 4$ (cm).

Meg lehet-e határozni egy körvonal hosszát? Igen, mivel a körvonal egy görbe. Viszont vonalzóval nem tudjuk megmérni. Végezzünk el egy kísérletet. Vegyünk egy üveget, tegyük rá egy papírlapra, és rajzoljuk körbe az üveget (28. ábra). Egy körvonalat kaptunk. Ha az üveget körbetekerjük cérnával, majd a cérnát kifeszítjük, akkor a cérna hossza a megrajzolt körvonal hosszával lesz egyenlő.



28. ábra

A körvonal hosszát $C$-vel jelöljük.

Néhány ilyen mérés után megállapíthatjuk az alábbi törvényszerűséget: minél nagyobb az átmérő, annál hosszabb a körvonal. Tehát a körvonal hossza egyenesen arányos az átmérővel.

A körvonal hosszának és átmérőjének az aránya minden körvonalra azonos. Ezt a számot a görög ábécé $\pi$ betűjével jelöljük.

A $\pi$ betűt „pí”-nek olvassuk.

A $\pi$ egy végtelen nem szakaszos tizedes tört. $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$ . Ezért számításokban a $\pi$ értékét századokra kerekítve használjuk: $\pi \approx 3{,}14$.

**Jegyezd meg!**

**A körvonal hosszának képlete**

A körvonal hossza a sugár kétszeresének és a $\pi$ szám szorzatával egyenlő:

$$C = 2\pi R.$$

**2. feladat.** Határozd meg a körvonal hosszát, ha átmérője 10 cm.

**Megoldás.**

**1. módszer.** A körvonal átmérője a sugár kétszerese. Ezért

$R = D : 2 = 10 : 2 = 5$ (cm).

$C = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ (cm).

**2. módszer.** Mivel $D = 2R$, ezért

$C = 2\pi R = \pi(2R) = \pi D$.

$C = 3{,}14 \cdot 10 = 31{,}4$ (cm).

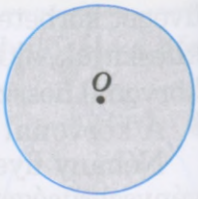
**Figyeld meg:**

mivel $D = 2R$, ezért $C = DR$.

A körvonal a síkot két részre osztja, külső és belső részre (29. ábra). A belső rész esetében úgy fogalmazunk, hogy a körvonal határolja. A körvonalat és az általa határolt síkrészt nevezzük a számotokra már ismert alakzatnak, *körlapnak* (30. ábra). A körvonal középpontját, sugarát és átmérőjét a körlap középpontjának, sugarának és átmérőjének is nevezzük. A körvonaltól eltérően a körlap középpontja a körlaphoz tartozik.




29. ábra




30. ábra

**Jegyezd meg!**

**A körlap területének képlete**

A körlap területe a $\pi$ szám és a sugár négyzetének a szorzata:

$$S = \pi R^2.$$

**3. feladat.** Határozd meg annak a körlapnak a területét, melynek az átmérője 8 cm.

**Megoldás.** A körvonal átmérője kétszerese a sugarának. Tehát $R = D : 2 = 8 : 2 = 4$ (cm). Vagyis:

$$S = \pi R^2 =$$

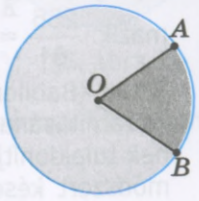
$$= 3{,}14 \cdot 4^2 = 3{,}14 \cdot 16 = 50{,}24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Tehát az adott körlap területe 50,24 cm$^2$.

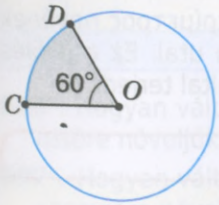
Ha egy körlapban meghúzunk egy $OA$ és $OB$ sugarat, akkor ezek a sugarak a körlapot két részre osztják (31. ábra), melyeket *körcikknek* nevezünk.

A 32. ábrán egy 60°-os $COD$ körcikk látható.

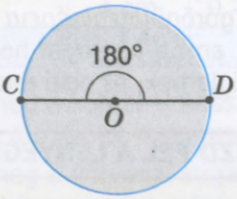
A $CD$ átmérő a körlapot két egybevágó körcikkre bontja (33. ábra). Ezek a körcikkek félkörlapok. Mindkettő 180°-os. Ha a két félkörlapot újra megfelezzük, akkor 4 egybevágó körcikket kapunk (34. ábra). Ebben az esetben a körcikkek fokmértéke 90°.



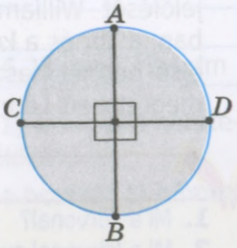
31. ábra



32. ábra



33. ábra



34. ábra

**Figyeld meg:**

— az egybevágó körcikkek azonos fokmértékűek;

— egy körlap összes körcikkének az összege 360°.

**4. feladat.** Egy körlapot három egyenlő körcikkre osztottunk. Hány fokos egy körcikk?

**Megoldás.** A körcikkek összege 360°. A körlapot három egyenlő körcikkre osztottuk, ezért 360° : 3 = 120°. Tehát egy körcikk 60°-os.

**5. feladat.** Egy körlapot három körcikkre osztottak, melyek fokmértéke 80°, 120° és 180°. A körlap hányadát teszik ki ezek a körcikkek?

**Megoldás.** A körlap és valamennyi körcikk aránya akkora, amekkora a körcikk nagyságának és 360°-nak az aránya. Így:

$$\frac{80°}{360°}=\frac{2}{9};\quad \frac{120°}{360°}=\frac{1}{3};\quad \frac{160°}{360°}=\frac{4}{9}.$$

## További tudnivalók



*William Jones*

1. A $\pi$ szám közelítő értékéről fennmaradt legrégebbi írott emlék kr. e. 1900-ból származik: $\frac{256}{81} \approx 3{,}160$ (Egyiptom) és $\frac{25}{8} = 3{,}125$ (Babilon). A $\pi$ szám matematikai kiszámításának módszerét Arkhimédésznek tulajdonítják (kr. e. 287 – 212). Ezt a módszert később a mértan órán fogjuk megismertetni.

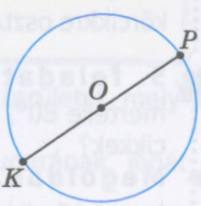
2. A $\pi$ mára általánosan elfogadottá vált jelölését William Jones ajánlotta 1706-ban, a kör és a kerület, görögül περιφέρεια és περίμετρος nevének első betűjét használva, ami a körvonal hosszára utal. Ez a jelölés megtetszett Leonhard Eulernek, és az ő munkái által terjedt el.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mi a körvonal?
2. Mi a körvonal sugara? Átmérője?
3. Mit jelöl a $\pi$ szám?
4. Hogyan kell meghatározni a körvonal hosszát?
5. Mi a körlap?
6. Hogyan kell meghatározni a körlap területét?
7. Magyarázd meg, mi a körcikk!
8. Mennyi azon körcikkek fokmértékének összege, melyekre egy körlapot osztottunk?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**679'.** A 35. ábra alapján nevezd meg:
1) a körvonal középpontját;
2) a körvonal sugarát;
3) a körvonal átmérőjét.

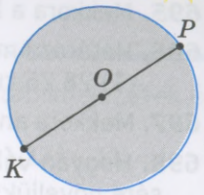



35. ábra

**680'.** Mennyi a körvonal hosszának és átmérőjének az aránya?

**681'.** Igaz-e, hogy minél nagyobb a körvonal átmérője, annál hosszabb a körvonal? Indokold meg a válaszodat.

**682′.** A 36. ábra alapján nevezd meg:
1) a körlap középpontját;
2) a körlap sugarát;
3) a körlap átmérőjét.



36. ábra

**683′.** Hány körcikkre osztható fel egy körlap?

**684′.** Igaz-e, hogy egy körlap összes körcikke fokmérőjének az összege:
1) 90°; 2) 180°; 3) 360°?

**685°.** Legyen egy körvonal sugara $R$, átmérője $D$, hossza $C$. Milyen adatokkal kell kitölteni az alábbi táblázatot?

***3.** táblázat*

| $R$ | 2 cm | 0,5 m | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | | | 4 cm | 0,2 dm | | |
| $C$ | | | | | 6,28 mm | 31,4 dm |

**686°.** Hogyan változik meg a körvonal hossza, ha 1) a sugarát kétszeresére növeljük; 2) az átmérőjét 4-szeresére csökkentjük?

**687°.** Hogyan változik meg a körvonal sugara, ha a hosszát 1) háromszorosára növeljük; 2) 2-szeresére csökkentjük?

**688°.** Legyen egy körlap sugara $R$, az átmérője $D$, a hossza $C$, a területe $S$. Milyen adatokkal kell kitölteni az alábbi táblázatot?

***4.** táblázat*

| $R$ | 4 cm | | | | | 0,06 m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | | 2 cm | | | 0,4 dm | |
| $C$ | | | 37,68 cm | 25,12 mm | | |
| $S$ | | | | | | |

**689°.** Hogyan változik meg a körlap területe, ha 1) a sugarát háromszorosára növeljük; 2) az átmérőjét 4-szeresére csökkentjük?

**690°.** Hogyan változik meg a körlap sugara, ha a területét:
1) 4-szeresére növeljük; 2) 9-szeresére csökkentjük?

**691°.** Hány körcikkre osztja a körlapot két átmérője?

**692°.** Hány fokosak azok a körcikkek, melyeket akkor kapunk, ha egy körlapot:
1) 5 egyenlő részre; 2) 6 egyenlő részre osztunk.

**693°.** Egy körlapot 10 egyenlő részre osztottunk. Hány fokos egy-egy ilyen körcikk.

**694.** Határozd meg a körlap területét, ha a kerülete:
1) 37,68 cm; 2) 31,4 dm.

**695.** Mekkora a körlap területe, ha a kerülete $8\pi$ cm?

**696.** Határozd meg annak a körvonalnak a hosszát, melynek területe: 1) 28,26 cm$^2$; 2) 78,5 dm$^2$.

**697.** Mekkora annak a körlapnak a hossza, melynek területe 50,24 cm$^2$?

**698.** Hogyan változik meg a körlap területe, ha a kerületét 1) 2-szeresére növeljük; 2) 3-szorosára csökkentjük?

**699.** Hogyan változik meg a körlap kerülete, ha a területét 1) 4-szeresére növeljük; 2) 9-szeresére csökkentjük?

**700.** Egy kör alakú lemez átmérője 12 cm. Mekkora a lemez kerülete, területe.

**701.** Egy kerék 400 fordulattal 240 métert tesz meg. Számítsd ki a kerék átmérőjét ($\pi \approx 3$).

**702.** Egy személygépkocsi kerekének átmérője 80 cm. Hány teljes fordulatot tesz meg ez a kerék, ha a gépkocsi 150 km-t halad ($\pi \approx 3$)?

**703.** Egy körvonalat körcikkekre osztottunk. Hány fokosak ezek a körcikkek, ha arányuk: 1) 2 : 3 : 4; 2) 2 : 4 : 5 : 7.

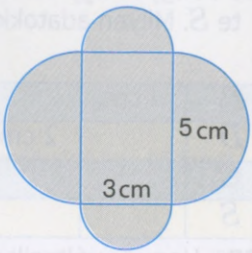
**704.** Határozd meg a 3 : 4 : 5 aranyú körcikkek fokmértékét.

**705.** Kijelenthetjük-e, hogy egyenlő szögű körcikkek területe egyenlő?

**706*.** Létezik-e olyan körlap, amely területének és kerületének azonos a mérőszáma (a mértékegységet nem vesszük figyelembe)?

**707*.** Kivághatunk-e egy 2 dm oldalhosszúságú négyzetből egy 9,42 dm kerületű körlapot?

**708*.** Számítsd ki a befestett alakzatok területét a 37. és 38. ábrán.

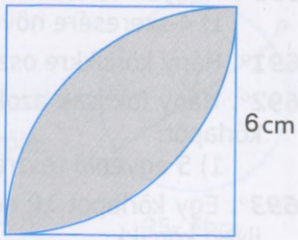


37. ábra

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**709.** Egy papírlapból kivágtunk egy körlapot. Hogyan lehet hajtogatással meghatározni a körlap középpontját?

**710.** Melyik virágágyás területe nagyobb: a négyzet alakúnak, melynek az oldala 4 méter hosszú, vagy a körlap alakúnak, melynek az átmérője 4 m?



38. ábra

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**711.** Számítsd ki a legcélszerűbb módon az alábbi számkifejezések értékét:

1) $(3{,}83 \cdot (38{,}75 - 33{,}55) + (47{,}79 - 42{,}59) \cdot 1{,}17) \cdot 11$;

2) $2{,}5 \cdot 1{,}725 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}8 \cdot 4 + 12{,}75$.

**712.** Három almaféle 100 kg almát szüreteltek le. Az első féle 56 kg-ot, a másodikról az első mennyiség $\frac{3}{8}$-át. Hány kilogrammot takarítottak be a harmadik féle?

# 17. § DIAGRAMOK

Az egész részeinek vagy különböző mennyiségek viszonyát *diagramon* szoktuk szemléltetni.

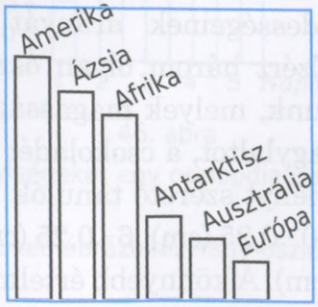
Egy diagram lehet *kördiagram* (39. ábra) vagy *oszlopdiagram* (40. ábra).

A kördiagramon az egészet szemlélteti a körlap, a részeket pedig körcikkek. Például a 39. ábrán látható diagram a világrészek területeinek arányát szemlélteti.




ábra 39

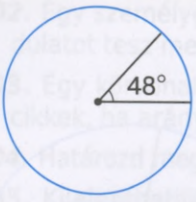
1. Hány világrész van?
2. Melyik a legnagyobb kontinens?
3. Melyik a legkisebb világrész?
4. Melyik földrész a nagyobb: Antarktisz vagy Ausztrália?



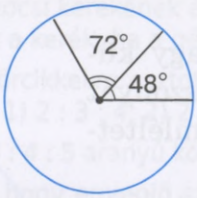

40. ábra

**1. feladat.** A 6. A osztályban végzett felmérésből kiderült, hogy a tanulók közül 20-an szeretik a fagylaltot, 6-an inkább a cukorkát, 4 gyerek kedvenc édessége pedig a sütemény. Készítsd el az osztály kedvenc édességeit szemléltető kördiagramot.

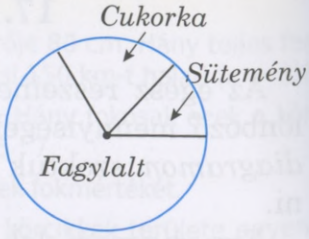
**Megoldás.** A diagramhoz egy körlapot kell felosztani az édességek arányában, vagyis a 20 : 6 : 4 arányos osztást kell elvégezni. Legyen ez az arány $k$. Akkor $20k + 6k + 4k = 360°$. Ebből $k = 12°$. Így $20k = 20 \cdot 12° = 240°$, $6k = 6 \cdot 12° = 72°$, $4k = 4 \cdot 12° = 48°$. Tehát, egy körlapot 240°-os, 72°-os és 48°-os körcikkekre kell osztani. Az adatok alapján szögmérővel rajzoljuk meg a diagramot (41-43. ábra).




41. ábra

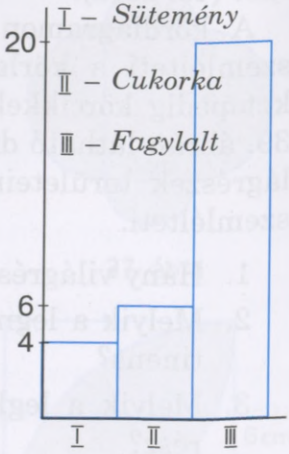



42. ábra




43. ábra

Az oszlopdiagramon az adatokat oszlopokkal szemléltetik, melyek magassága vagy megegyezik az adatok számértékével, vagy arányos velük. Például a 44. ábra oszlopdiagramja a 6. A osztály kedvenc édességeinek arányát szemlélteti. Ezért három olyan oszlopot rajzoltunk, melyek magassága arányos a fagylaltot, a csokoládét vagy a sütit szerető tanulók létszámával: $20 \cdot 0{,}25$ (cm), $6 \cdot 0{,}25$ (cm) és $4 \cdot 0{,}25$ (cm). A könnyebb értelmezéshez balról egy tengelyen jelöltük a tanulói létszámokat.




44. ábra

## További tudnivalók

A diagram a görög *diagramma* szóból ered, melynek jelentése ábra, alaprajz.

A szemléltető diagramokat gyakran alkalmazzák prezentációkon. Például a naplótokban vezetett időjárási adatok alapján a természetrajzórán elkészíthetitek a lehullott csapadék mennyiségét szemléltető diagramot és elemezhetitek azt.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

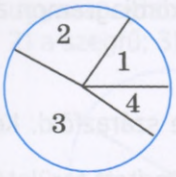
1. Hol alkalmazzák a diagramot?
2. Magyarázd el, hogyan kell kördiagramot rajzolni?
3. Magyarázd el, hogyan kell oszlopdiagramot rajzolni?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**713′.** Milyen alakzattal ábrázoljuk a kördiagramon:
1) az egészet; 2) az egész részét?

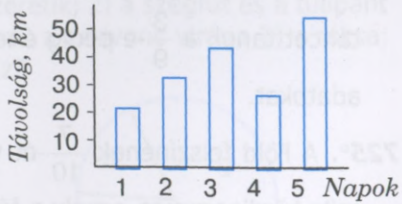
**714′.** Egy kördiagramon az egész 5 részét kell ábrázolni. Hány körcikkre kell felosztani az egészet?

**715′.** A kördiagram (45. ábra) a tejcsokoládéban lévő tápanyagok mennyiségét szemlélteti. Igaz-e, hogy a diagram alapján megállapítható, melyik tápanyag van:
1) túlsúlyban; 2) melyikből van a legkevesebb?




1 – *fehérje*
2 – *zsírok*
3 – *szénhidrát*
4 – *más anyagok*

45. ábra




46. ábra

**716′.** Milyen alakzattal ábrázoljuk a mennyiségeket egy oszlopdiagramon?

**717′.** Egy oszlopdiagramon 6 mennyiséget kell ábrázolni. Hány oszlopot kell ehhez rajzolni?

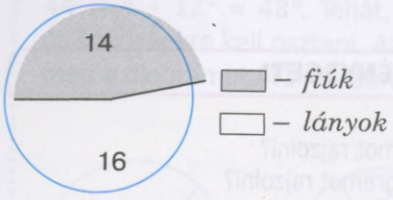
**718′.** Az oszlopdiagramon (46. ábra) azt ábrázoltuk, hogy egy turista mekkora távolságot tett meg naponként 5 nap alatt. Meg lehet-e

állapítani a diagram alapján, hogy melyik nap tette meg 1) a legnagyobb; 2) a legkisebb távolságot?

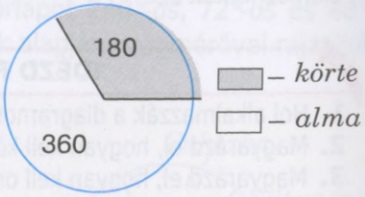
**719°.** Mekkora körcikkek ábrázolják egy kördiagramon az alábbi adatokat:

1) az osztályban 13 fiú és 17 lány tanul;
2) az üzletbe 20 láda almát és 16 láda körtét szállítottak?

**720°.** Határozd meg az alábbi kördiagram (47. ábra) alapján, hány 1) fiú; 2) lány; 3) tanuló jár a 6. A osztályba!




47. ábra




48. ábra

**721°.** Határozd meg a fenti kördiagram (48. ábra) alapján, mekkora mennyiséget hoztak a különböző gyümölcsökből.

**722°.** Egy kertben gyümölcsfákat nevelnek, melyek közül 50 almafa, 30 körtefa és 40 pedig szilvafa. Készíts kördiagramot az adatok alapján.

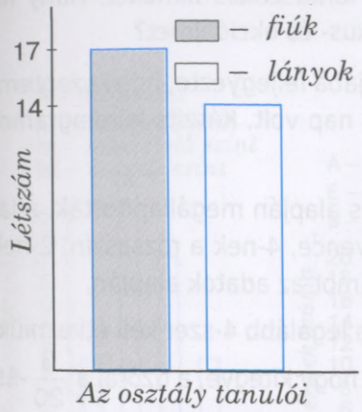
**723°.** Egy faluban 120 épület van, melyek közül 35 fémlemezzel, 50 cseréppel, a többi pedig palával van fedve. Készíts kördiagramot az adatok alapján.

**724°.** A hatodikosok $\frac{1}{9}$-e színjátszó szakkörben foglalkozik, $\frac{5}{9}$-e néptáncot tanul, a $\frac{3}{9}$-e pedig énekkarra jár. Ábrázold kördiagramon az adatokat.

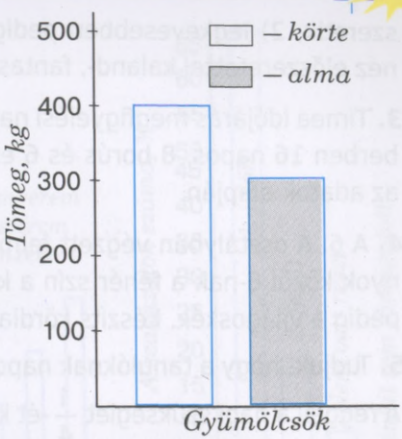
**725°.** A Föld felszínének $\frac{7}{10}$-ét víz borítja, csak $\frac{3}{10}$-e szárazföld. Készíts kördiagramot, amely a föld felszínének vízzel borított területét és a szárazföldet ábrázolja.

**726°.** Milyen magasságú oszlopokkal ábrázolhatók egy oszlopdiagramon az alábbi adatok: 1) az osztályban 15 fiú és 13 lány tanul; 2) az üzletbe 25 láda almát és 20 láda körtét szállítottak?

**727°.** Határozd meg az alábbi oszlopdiagram (49. ábra) alapján, hány 1) fiú; 2) lány; 3) tanuló jár 6. B osztályba.




49. ábra



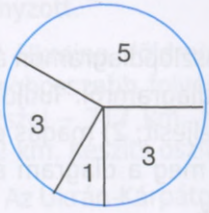

50. ábra

**728°.** Határozd meg a fenti kördiagram (48. ábra) alapján, milyen mennyiséget szállítottak a különböző gyümölcsökből az üzletbe.

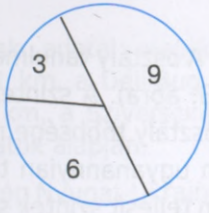
**729°.** A tanórák után a 6. B osztály tanulói közül 12-en sportfoglalkozásokra járnak, 6-an zeneiskolába, 5-en művészeti iskolába és 3-an otthon töltik el szabad idejüket. Készíts oszlopdiagramot az adatok alapján.

**730°.** Egy gyümölcsösben 150 gyümölcsfa van, melyek közül 60 almafa, 45 körtefa, 35 szilvafa, a többi pedig meggyfa. Készíts oszlopdiagramot az adatok alapján.

**731.** Az alábbi kördiagram (51. ábra) a 6. B osztályba járó leányok kedvenc virágait szemlélteti: rózsa, szegfű, tulipán és nárcisz. Ismeretes, hogy 1) a legtöbben a rózsát szeretik; 2) a szegfűt és a tulipánt ugyanannyian kedvelik. Hány lánynak a kedvenc virága 1) a rózsa; 2) a szegfű; 3) a tulipán; 4) a nárcisz?




51. ábra




52. ábra

**732.** A fenti kördiagram (52. ábra) a 6. B osztályba járó fiúk kedvenc filmjeinek a műfaji megoszlását szemlélteti: kalandfilmek, fantasztikus- és akciófilmek. Ismeretes, hogy 1) legtöbben a kalandfilmeket

szeretik; 2) legkevesebben pedig a fantasztikus filmeket. Hány fiú néz előszeretettel kaland-, fantasztikus- és akciófilmet?

**733.** Tímea időjárás megfigyelési naplójába feljegyezte, hogy szeptemberben 16 napos, 8 borús és 6 esős nap volt. Készíts kördiagramot az adatok alapján.

**734.** A 6. A osztályban végzett felmérés alapján megállapították, a lányok közül 6-nak a fehér szín a kedvence, 4-nek a rózsaszín, 2-nek pedig a világoskék. Készíts kördiagramot az adatok alapján.

**735.** Tudjuk, hogy a tanulóknak naponta legalább 4-szer kell étkezniük. A reggeli a napi szükséglet $\frac{1}{4}$-ét kell, hogy kitegye, a tízórai a $\frac{3}{20}$-át, az ebéd a $\frac{2}{5}$-ét, a vacsora pedig az $\frac{1}{5}$-ét. Készíts kördiagramot az adatok alapján.

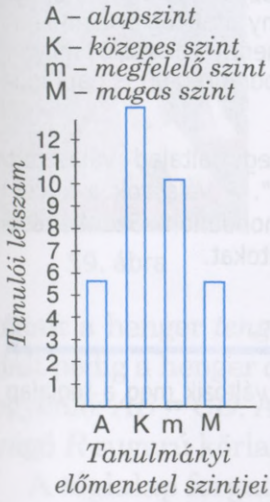
**736.** Az emberi szervezet $\frac{3}{5}$-e víz, $\frac{1}{5}$-e fehérje, $\frac{3}{20}$-a zsír, $\frac{1}{20}$-a pedig szénhidrát és más anyag. Készíts kördiagramot az adatok alapján.

**737.** Novemberben a napos, a borús és az esős napok aránya megfelelően 6 : 5 : 5 volt. Hány napos, borús és esős nap volt novemberben. Ábrázold a számadatokat oszlopdiagramon.

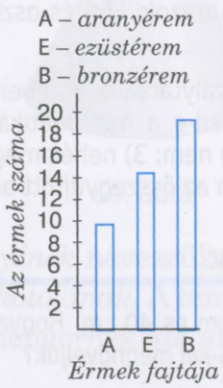
**738.** Egy üzletbe 30 láda cukorkát, kekszet és nápolyit szállítottak. Az édességek aránya 8 : 4 : 3. Hány láda cukorkát, kekszet és nápolyit kapott az üzlet? Ábrázold a számadatokat oszlopdiagramon.

**739.** A 6. A osztály tanulmányi előmenetelét oszlopdiagramon ábrázoltuk (53. ábra). A szintek neve hiányzik a diagramról. Tudjuk, hogy 1) az osztály többsége megfelelő szinten teljesít; 2) magas és alapszinten ugyanannyian tanulnak. Határozd meg a diagram alapján, hogyan teljesít szintek szerint a 6. A osztály.

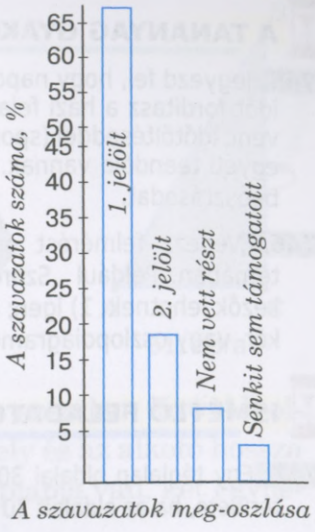
**740.** Határozd meg az alábbi oszlopdiagram alapján (54. ábra), hány érmet szerzett a csapat az olimpián, mindegyik fajtából külön-külön! Rajzolj kördiagramot a megszerzett érmek típusa alapján.




53. ábra




54. ábra




55. ábra

**741.** Határozd meg az 55. ábrán látható oszlopdiagram alapján, a szavazatok hány százalékát kapta meg a polgármester-választáson a két jelölt. Szemléltesd kördiagramon a választási eredményeket.

**742*.** Egy iskolában a 6.-os tanulók felmérőt írtak matematikából. Ábrázold kördiagramon az eredményeket, ha 1) az iskolába 120 hatodikos tanuló jár; 2) a tanulók több mint a fele megfelelő szinten írta meg a felmérőt; 3) a tanulók negyede magas szinten írta; 4) alapszintre 3-an teljesítettek; 4) 4 tanuló a dolgozatírás napján hiányzott.

**743*.** Ukrajna földrajzi enciklopédiájának adatai alapján Ukrajna 5 leghosszabb folyója a Dnyeper – 981 km, a Déli-Bug – 806 km, a Pszel – 717 km, a Dnyeszter – 705 km, a Sziverszkij Donyec – 672 km. Készíts oszlopdiagramot az adatok alapján.

**744*.** Az Ukrán-Kárpátok a Kárpátok hegység Nyugat-Ukrajnához tartozó része. Legmagasabb csúcsai: Hoverla – 2061 m (Ukrajna legmagasabb pontja), Brebeneszkul – 2032 m, Pip Iván – 2022 m, Pietrosz – 2020 m, Hutin-Tomnatik – 1016 m és a Rebra – 2001 m. Alkoss oszlopdiagramot az adatok alapján.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**745.** Jegyezd fel, hogy naponta 1) hány órát vagy az iskolában; 2) mennyi időt fordítasz a házi feladat elvégzésére; 3) hány órát foglalkozol kedvenc időtöltéseddel (sport, tánc, zene stb.); 4) mennyit alszol; 5) milyen egyéb teendőid vannak. Ábrázold kör- és oszlopdiagramon is napi időbeosztásodat.

**746.** Végezz felmérést osztálytársaid körében egy általad választott témában. Például „Szereted-e a matematikát?". A válaszok a következők lehetnek: 1) igen; 2) nem; 3) nehéz megmondanom. Szemléltesd kör- vagy oszlopdiagramon az összegyűjtött adatokat.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**747.** Egy téglalap oldalai 30 cm és 40 cm. Hogyan változik meg a téglalap területe, ha az oldalait 20 %-kal megnöveljük?

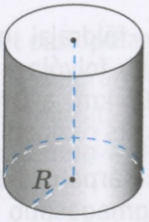
**748.** Számítsd ki a: $1\frac{1}{3}$, $\frac{5}{18}$, $1\frac{5}{6}$ és $\frac{5}{9}$ törtek átlagát.

# 18. § HENGER, KÚP ÉS GÖMB

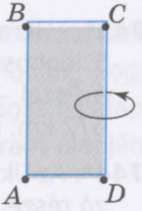
Az 5. osztályban már találkoztatok mértani testekkel: a téglatesttel (derékszögű paralelepipedon) és a kockával. Figyeljétek meg az 56. ábrát. Használati tárgyakat látsz. Mindkét tárgy ugyanolyan alakú, egy *henger* (57. ábra).



56. ábra




57. ábra

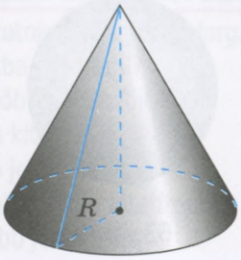



58. ábra

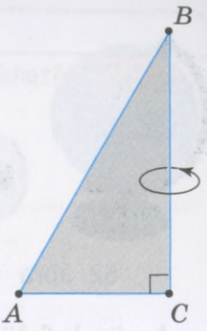
Hengert kapunk, ha egy *ABCD* téglalapot megforgatunk az egyik oldala körül, például a *CD* oldal körül (58. ábra). Ezt az



59. ábra




60. ábra




61. ábra

oldalt a henger *tengelyének* nevezzük, a szemben lévő *AB* oldalt pedig a henger *alkotójának*. A tengely és az alkotó hossza egyenlő: $AB = CD$. A hengernek két alaplapja van, két egybevágó $R$ sugarú körlap.

A téglalap forgatásakor az alkotó által határolt felület a henger *palástja*. A henger *felszínét* a palást és a két alaplap alkotja.

Az 59. ábrán egy indián lakhelyet, „vigvamot" láthattok, amely kúp alakú (60. ábra).

Kúpot kapunk, ha egy *ABC* derékszögű háromszöget a derékszöget bezáró egyik oldala körül forgatunk, például a *BC* oldal körül (61. ábra). Ez az oldal a kúp tengelye, a derékszöggel szembeni *AB* oldal pedig a *kúp alkotója*. A *kúp tengelye* mindig rövidebb az alkotójánál. A hengertől eltérően a kúpnak csak egy alaplapja van, egy $R$ sugarú körlap.

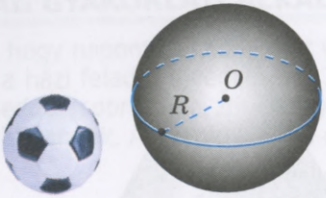
Az alkotó forgatásakor határolt felület a *kúp palástja*. A *kúp felszínét* a palást és az alaplap alkotja.

A 62. ábrán gömbölyű, gömb alakú (63. ábra) testek láthatók.

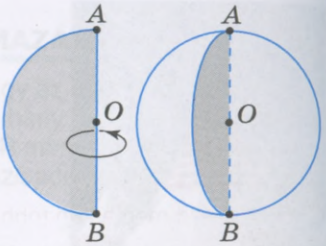
Gömböt kapunk, ha egy körlapot forgatunk meg egyik átmérője, mondjuk az *AB* átmérő körül. Ezt az átmérőt a *gömb tengelyének nevezzük*. A gömb sugara $R = OA$ az *AB* körlap átmérőjének a fele.



62. ábra




63. ábra




64. ábra

A gömb felületét *gömbfelületnek* nevezzük.

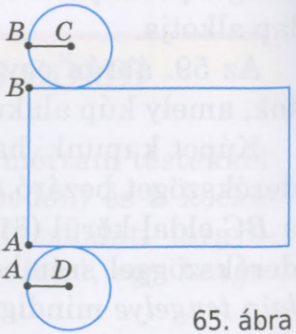
A hengert, a kúpot és a gömböt úgy kaptuk, hogy megfelelően egy téglalapot, egy derékszögű háromszöget, vagy egy körlapot forgattunk meg. Ezért ezeket a testeket *forgástesteknek* nevezzük. Bővebben ezekkel a testekkel a mértanórákon fogtok foglalkozni..



## További tudnivalók

A mértani testek megalkotásához el kell készítenünk a kiterített testhálót.

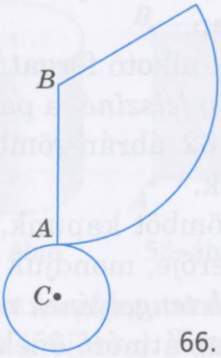
Ahhoz, hogy megkapjuk a henger kiterítését (65. ábra), külön vesszük a két alaplapot és a palástot, az alkotója mentén elvágjuk, majd kiterítjük egy adott síkra. A henger síkba kiterített palástja egy téglalap, melynek egyik oldala a henger alkotója, a másik oldala pedig az alaplap kerülete, vagyis a körvonal hossza. Így a henger kiterítése egy téglalap és két körlap.




65. ábra

A kúp kiterítését úgy kapjuk meg, hogy leválasztjuk az alaplapot, majd a palástot az $AB$ alkotója mentén felvágjuk (66. ábra), végül kiterítjük egy adott síkra. A kúp kiterített palástja egy körcikk. A kúp kiterítése pedig egy körcikk és egy körlap. A gömböt nem lehet síkba kiteríteni.

A gömböt síkba nem lehet kiteríteni.




66. ábra

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Milyen térmértani alakzatokat sorolunk a forgástestekhez?
2. Hogyan kell hengert síkba kiteríteni?
3. Nevezd meg a henger főbb jellemzőit!
4. Hogyan kell kúpot síkba kiteríteni?
5. Nevezd meg a kúp főbb jellemzőit!
6. Mi a gömb, lehet-e gömböt síkba kiteríteni?
7. Nevezd meg a gömb főbb jellemzőit.

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**749′.** Nevezd meg a 67. ábrán látható henger 1) tengelyét; 2) alkotóját; 3) magasságát; 4) alaplapja sugarát.

**750′.** Hengert kapunk-e, ha egy négyzetet forgatunk meg egyik oldala körül?

**751′.** Nevezd meg a 68. ábrán látható kúp 1) tengelyét; 2) alkotóját; 3) magasságát; 4) alaplapja sugarát.

**752′.** A 69. ábrán egy $MNP$ derékszögű háromszög látható. Melyik oldala körül kell forgatni az $MNP$ háromszöget ahhoz, hogy egy kúpot kapjunk?

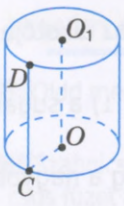
**753′.** A 70. ábra alapján nevezd meg a gömb 1) tengelyét; 2) sugarát.

**754′.** Igazat mond-e András, amikor azt állítja, hogy gömböt úgy is kaphatunk, ha egy körvonalat forgatunk egyik átmérője körül?

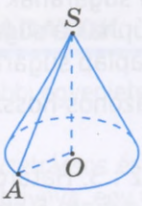
**755°.** Egy henger alkotója 10 cm. Mekkora a henger magassága?

**756°.** Egy henger magassága 8 cm. Mekkora a henger alkotója?

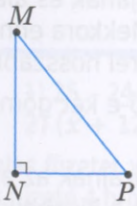
**757°.** Rajzold át a füzetedbe a 71. ábrát, és pótold a henger hiányzó részeit! Jelöld a rajzon a henger tengelyét, alkotóját és az alsó alaplap sugarát.



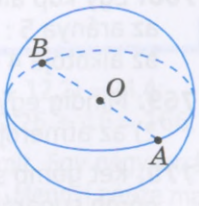
67. ábra



68. ábra



69. ábra



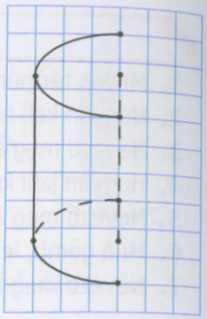
70. ábra

***758°.*** Vázlatosan rajzolj le egy hengert! Jelöld a rajzon a henger tengelyét, alkotóját és az alsó alaplap sugarát.

**759°.** Rajzold át a füzetedbe a 72. ábrát, és pótold a kúp hiányzó részeit! Jelöld a rajzon a kúp tengelyét, alkotóját és az alaplap sugarát.

***760°.*** Vázlatosan rajzolj le egy kúpot! Jelöld a rajzon a kúp tengelyét, alkotóját és az alaplap sugarát.

**761°.** Rajzold át a füzetedbe a 73. ábrát, és pótold a gömb hiányzó részeit! Jelöld a rajzon a gömb $OA$ sugarát.



71. ábra

***762°.*** Vázlatosan rajzolj le egy gömböt! Jelöld a rajzon a gömb $OB$ sugarát.

**763.** Mindig egyenlő-e két henger, ha azonos hosszúságú az 1) alaplapjaik sugara; 2) a magasságuk; 3) az alkotójuk?

**764.** Egy henger sugarának és magasságának az aránya 2 : 5. Határozd meg a henger sugarát és magasságát, ha a magassága 3 cm-rel hosszabb a sugaránál.

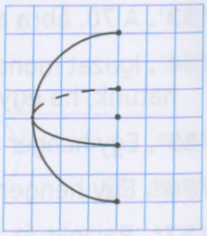


72. ábra

***765.*** Egy henger sugarának és alkotójának az aránya 4 : 6. Mekkora ennek a hengernek a sugara és a magassága, ha a magassága 8 cm-rel rövidebb az alkotójánál.

**766.** Mindig egyenlő-e két kúp, ha azonos hosszúságú az 1) alaplapjaik sugara; 2) a magasságuk; 3) az alkotójuk?

**767.** Egy kúp magasságának és alaplapja sugarának az aránya 7 : 3. Mekkora ennek a kúpnak a sugara és magassága, ha az alaplap sugara 4 cm-rel rövidebb a magasságánál.

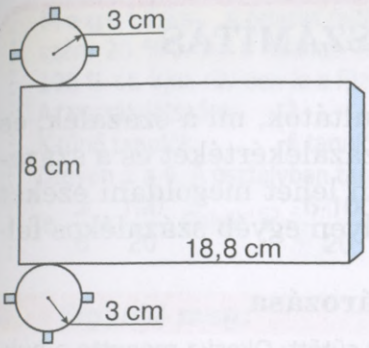


73. ábra

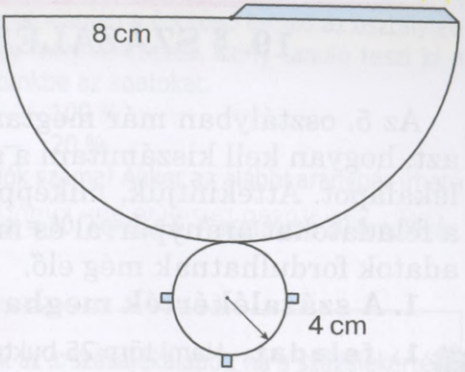
***768.*** Egy kúp alkotójának és alaplapja sugarának az aránya 5 : 2. Mekkora ennek a kúpnak a sugara és az alkotója, ha az alkotója 4 cm-rel hosszabb az alaplap sugaránál.

**769.** Mindig egyenlő-e két gömb, ha azonos hosszúságú 1) a sugaruk; 2) az átmérőjük?

**770.** Két gömb sugarainak az aránya 2 : 3. Határozd meg a nagyobbik gömb sugarát, ha a kisebbik gömb sugara 5 cm.




74. ábra




75. ábra

**771.** Adott két gömb, sugaraik aránya 8 : 5. Határozd meg a kisebbik gömb sugarát, ha a nagyobbik gömb sugara 12 cm.

**772*.** Egy henger alaplapjának területe 12,56 cm$^2$. Határozd meg a henger alkotóját, ha az 5 cm-rel hosszabb az alaplap sugaránál.

**773*.** Egy kúp alaplapjának kerülete (a körvonal hossza) 37,68 cm. Határozd meg a kúp magasságát és alkotóját, ha az alaplap sugarának, a magasságnak és az alkotónak az aránya 3 : 4 : 5.

**774*.** A földgolyó átmérője megközelítőleg 12,7 ezer km. Mekkora a Föld sugara? Milyen hosszú az egyenlítő.

**775*.** A Földre az egyenlítő mentén egy gyűrűt húztak. Majd a gyűrű hosszát 1 m-rel megnövelték. Átfér-e egy macska a keletkezett résen?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**776.** Nevezz meg a környezetedben olyan tárgyat, amely:
1) henger alakú; 2) kúp alakú; 3) gömb alakú.

**777.** Készíts hengert és kúpot a 74. és 75. ábrán látható sablonminták alapján.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**778.** Oldd meg az alábbi egyenleteket: 1) $25 - 24 : (x + 12{,}2) = 24{,}4$;
2) $(x + 12) : 0{,}25 + 16 = 166$.

**779.** Szabolcs 6 négyzetrácsos és 8 vonalas füzetet vásárolt. Egy négyzetrácsos füzet ára 4,5 hrivnya, egy vonalas füzeté 4 hrivnya. Mennyi pénze maradt Szabolcsnak, ha 80 hrivnyát kapott a vásárlásra az édesanyjától?

# 19. § SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS

Az 5. osztályban már megtanultátok, mi a százalék, és azt, hogyan kell kiszámítani a százalékértéket és a százalékalapot. Áttekintjük, miképpen lehet megoldani ezeket a feladatokat aránypárral és milyen egyéb százalékos feladatok fordulhatnak még elő.

## 1. A százalékérték meghatározása

**1. feladat.** Hami törp 25 buktát sütött. Okoska megette a bukták 40 %-át. Hány buktát evett Okoska?

**Megoldás.**

*Volt: 25 b – 100%*

*Megevett: ? – 40%*

*Legyen x az Okoska által megevett bukták száma, akkor:*

$25 : x = 100 : 40,\ x = (25 \cdot 40) : 100,$

$x = 1000 : 100,\quad x = 10.$

*Felelet: Okoska 10 buktát evett meg.*

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk az $x$ százalékértéket, ha a százalékalap $a$, a százalékláb pedig $d$, az alábbi aránypárt kell leírni:

ha $\begin{matrix} a - 100\ \% \\ x - d\ \%, \end{matrix}$ akkor $a : x = 100 : d.$

## 2. A százalékalap meghatározása

**2. feladat.** A 6. A osztályban 6 diák tanulmányi eredménye kitűnő, ami az osztálylétszám 20 %-át képezi. Hány tanuló jár a 6. A osztályba?

**Megoldás.** A feladat feltételei alapján a 6 kitűnő tanuló az osztálylétszám 20 %-a. Az a feladat, hogy meghatározzuk, hány tanuló teszi ki a 100 %-ot. Írjuk röviden le a füzetünkbe az adatokat.

Az osztálylétszám: ? — 100 %
Kitűnő tanulók: 6 tanuló — 20 %.

Legyen $x$ a 6. A osztályban tanulók száma! Akkor az alábbi aránypár írható le: $\frac{x}{6}=\frac{100}{20}$. Ebből: $x=\frac{6\cdot 100}{20}$, $x = 30$. Tehát a 6. A osztályba 30 tanuló jár.

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk az $x$ százalékalapot, ha a százalékérték $b$ és a százalékláb $d$, az alábbi aránypárt kell leírni:

ha $\begin{matrix} x - 100\ \% \\ b - d\ \%, \end{matrix}$ akkor $x : b = 100 : d.$

### 3. A százalékláb meghatározása

**3. feladat.** A 6. B osztály 30 tanulója közül 18-an vettek részt az iskolai sportrendezvényen. Az osztály hány százaléka vett részt a versenyen?

**Megoldás.** A feladat feltételei alapján az osztálylétszám 30, ami 100 % . Az a feladat, hogy meghatározzuk, hány százalékot tesz ki 18 tanuló. Írjuk röviden le a füzetünkbe az adatokat.

Az osztálylétszám: 30 tanuló — 100 %
Résztvevők száma: 18 tanuló — ? %.

Legyen $x$ a versenyen résztvevők százalékos aránya! Akkor az alábbi aránypár írható le: $30 : 18 = 100 : x$. Ebből $x = (18 \cdot 100) : 30$, $x = 60$. Tehát a 6. B osztály 60 százaléka vett részt a sportrendezvényen.

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk két szám, $a$ és $b$ százalékos arányát, az alábbi aránypárt kell leírni:

ha $\begin{matrix} a - 100\ \% \\ b - x\ \%, \end{matrix}$ akkor $a : b = 100 : x.$

Igaz-e, hogy $a$ és $b$ szám százalékos aránynak meghatározásához elegendő a két szám fordított arányát megszorozni 100-zal? Igen. Ez az aránypárok tulajdonságából következik.

Nézzünk meg néhány összetettebb feladatot százalékszámításra, amelyek szintén megoldhatók aránypárral.

### 4. A százalékláb változásának meghatározása, ha változik a százalékalap

**4. feladat.** A méhek egy nap alatt 2 kg mézet gyűjtöttek a kaptárba. Másnap jobban dolgoztak, és 2,5 kg mézet gyűjtöttek. Hány százalékkal gyűjtöttek több mézet a méhek a második napon?

**Megoldás.** A feladat feltételei alapján az első nap a méhek 2 kg mézet gyűjtöttek a kaptárba, ami 100 %. Az a feladat, hogy meghatározzuk, hány százalékkal több 2,5 kg 2 kg-nál. Írjuk le röviden a füzetünkbe az adatokat.

I. nap: 2 kg — 100 %

II. nap: 2,5 kg — (100 +?) %.

Legyen $x$ az a százalék, amennyivel növekedett a méz tömege! Akkor az alábbi aránypár írható le: $\frac{2}{2,5} = \frac{100}{100+x}$. Ebből: $100+x = \frac{2,5 \cdot 100}{2}$, $x = 125 - 100$, $x = 25$. Tehát a második napon a méhek 25%-kal több mézet gyűjtöttek.

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk a százalékláb $x$ változását, ha az $a$ szám a $b$ számra növekszik, az alábbi aránypárt kell leírni:

ha $a$ – 100 %, $b$ – (100 + $x$) %, akkor $a : b =$ = 100 : (100 + $x$).

Vajon alkalmazható-e ez a módszer abban az esetben is, ha az $a$ szám a $b$ számra csökken? Igen. Ebben az esetben az $a : b = 100 : (100 - x)$ aránypárral kell számolni.

### 5. A százalékalap változásának meghatározása, ha változik a százalékláb

**5. feladat.** 10 évesen János 130 cm magas volt. Milyen magas volt János 9 évesen, ha egy év alatt 4 %-ot nőtt?

**Megoldás.** A feladat feltételei alapján 10 évesen János 130 cm magas, ami 4 %-kal több mint 9 évesen. Tehát, János magassága 9 évesen 100 %, 10 évesen pedig (100 + 4) %. Írjuk le röviden a füzetünkbe az adatokat.

János magassága 9 évesen: ? — 100 %

János magassága 10 évesen: 130 cm — (100 +4) %.

Legyen $x$ János magassága 9 évesen! Akkor az alábbi aránypárt írhatjuk le: $\frac{x}{130}=\frac{100}{104}$. Ebből: $x=\frac{130\cdot 100}{104}$, $x = 125$. Tehát, János 9 évesen 125 cm magas volt.

Elfogadhatjuk-e János testmagasságát 100 %-nak? Igen. Vajon ebben az esetben a (100 – 4) % megfelel János 9 éves korabeli testmagasságának? Nem, mivel 130 cm 4 %-a nem egyenlő 125 cm 4 %-ával.

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk azt az $x$ számot, ami $b$ számra változott egy $n$ százalékláb változáskor, az alábbi aránypárt kell leírni:

ha $\begin{matrix} x - 100\ \% \\ b - (100 + n)\ \%, \end{matrix}$ akkor $\begin{matrix} x : b = \\ = 100 : (100 + n). \end{matrix}$

## 6. A százalékláb meghatározása, ha változik a százalékalap

**6. feladat.** Az első nap Marika 20 oldalt olvasott el, a második nap 5-tel többet. Hány százalékkal olvasott el többet a kislány a második napon?

**Megoldás.** A feladat feltételei alapján Marika első nap 20 oldalt olvasott el, ami 100 %. A feladatban azt kell meghatározni, hány százalék (20 + 5) oldal. Írjuk le röviden a füzetünkbe az adatokat.

I. nap: 20 oldal — 100 %

II. nap: (20 + 5) oldal — ? %.

Legyen $x$ a második nap elolvasott oldalak százalékos aránya! Akkor az alábbi aránypárt írhatjuk le: 20 : (20 + 5) = $x$ : 100. Ebből: $x$ = (25 • 100) : 20 , $x$ = 125. Tehát, Marika az első nap elolvasott mennyiség 125 %-át olvasta el a második napon.

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk az $a$ szám és $a + n$ szám százalékos arányát, az alábbi aránypárt kell leírni:

ha $\begin{matrix} a - 100\ \% \\ a + n - x\ \%, \end{matrix}$ akkor $\begin{matrix} a : (a + n) = \\ = 100 : x. \end{matrix}$

Vajon alkalmazható-e ez a módszer abban az esetben is, ha az $a$ számot az $n$ számmal csökkentjük? Igen. Ebben az esetben az $a : (a - n) = 100 : x$. aránypár lesz a megoldás.



## További tudnivalók

A paragrafusban a százalékos feladatok algebrai megoldásával ismerkedtél meg. Viszont ezeket a feladatokat meg lehet oldani a százalék fogalma alapján is, méghozzá többféleképpen. Térjünk vissza a paragrafus első feladatához.

**feladat.** Hami törp 25 buktát sütött. Okoska megette a bukták 40 %-át. Hány buktát evett Okoska?

**Megoldás.**

**1. módszer**

1) Hány bukta 1 százalék?

$$25 : 100 = 0{,}25 \text{ (b.)}$$

2) Hány bukta a 40 %?

$$40 \cdot 0{,}25 = 10 \text{ (b.)}.$$

Tehát Okoska 10 buktát evett meg..

**2. módszer**

1) Írjuk le 40 % tizedes tört alakját:

$$40\ \% = 0{,}4.$$

2) Hány bukta 40 %?

$$25 \cdot 0{,}4 = 10 \text{ (b.)}$$

Tehát Okoska 10 buktát evett meg.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Milyen aránypárral lehet meghatározni a százalékértéket?
2. Milyen aránypárral lehet meghatározni a százalékalapot?
3. Milyen aránypárral lehet meghatározni a százaléklábat?
4. Milyen aránypárral lehet meghatározni a százalékláb változását, ha változik a százalékalap?
5. Milyen aránypárral lehet meghatározni a százalékalap változását, ha változik a százaléklább?
6. Milyen aránypárral lehet meghatározni a százaléklábat, ha változik a százalékalap?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**780′.** Hogyan kell meghatározni 1) az $a$ szám 1 %-át; 2) az $a$ szám 25 %-át; 3) az $a$ szám $n$ %-át?

**781′.** Péter azt állítja, ahhoz, hogy meghatározza az $a$ szám 10 %-át, az $a$ számot el kell osztania 10-zel. Igaza van-e Péternek? Válaszodat indokold meg.

**782′.** A feladat megoldásához az alábbi vázlatot írták le:

1) 120 — 100 %,
? — 30 %;

2) 70 — 100 %,
? — 50 %;

3) 20 — 100 %,
? — 150 %.

Milyen aránypárral oldható meg a feladat?

**783′.** Hogyan kell meghatározni a $b$ számot, ha ismeretes az 1 %-a?

**784′.** Katica azt állítja, ahhoz, hogy meghatározza a $b$ számot, melynek az 50 %-a 60, elegendő a 60-t megszorozni 2-vel. Igaza van-e Katicának? Válaszodat indokold meg.

**785′.** Hogyan kell meghatározni azt a számot, melynek ismeretes:
1) ) 10 %-a; 2) 25 %-a?

**786′.** A feladat megoldásához az alábbi vázlatot írták le:

1) ? — 100 %,
40 — 10 %;

2) ? — 100 %,
50 — 25 %;

3) ? — 100 %,
450 — 50 %.

Milyen aránypárral oldható meg a feladat?

**787′.** Melyik kifejezéssel határozható meg 5 és 30 százalékos aránya: $\frac{5}{30}\cdot 100$ vagy $\frac{30}{5}\cdot 100$? Válaszodat indokold meg.

**788′.** A feladat megoldásához az alábbi vázlatot írták le:

1) 160 — 100 %,
40 — ? %;

2) 250 — 100 %,
50 — ? %;

3) 600 — 100 %,
450 — ? %.

Milyen aránypárral oldható meg a feladat?

**789°.** Számítsd ki 450 1) 2 %-át; 2) 20 %-át; 3) 75 %-át; 4) 120 %-át.

**790°.** Számítsd ki 240 1) 30 %-át; 2) 150 %-át.

**791°.** Egy üzletbe 2000 kg almát szállítottak. Első nap eladták az alma 35 %-át. Hány kg almát adtak el az első napon?

**792°.** Az iskolába 800 tanuló jár. A gyerekek 54 %-a lány. Hány lány jár az iskolába?

**793°.** Melyik az a szám, amelynek 45 %-a:
1) 90; 2) 180; 3) 36; 4) 4,5.

**794°.** Határozd meg azt a számot, amelynek 30 %-a: 1) 15; 2) 60.

**795°.** A turisták első nap 30 km-t tettek meg, ami az általuk tervezett út 15 %-a. Hány kilométer a turisták kijelölt útvonal hossza?



***796°.*** Marika pénzének 20 %-át, 25 hrivnyát költött füzetek vásárlására. Mennyi pénze volt Marikának a vásárlás előtt?

**797°.** Hány százaléka az alábbi számoknak 5?
1) 20; 2) 25; 3) 50; 4) 150.



***798°.*** Hány százaléka a következő számoknak 7? 1) 14; 2) 56.

**799°.** Egy család 10 zsák burgonyát készletezett télre. A három őszi hónapban 2,5 zsák burgonyát fogyasztottak el. A készlet hány százalékát használták el ősszel?

**800°.** Sanyikának 24 díszhala van, ebből 6 vitorlahal. Az akvárium halállományának hány százaléka vitorlahal?

**801°.** A 6. B osztály 32 tanulója közül 10-en sportszakkörökbe járnak. Az osztály hány százaléka sportol?

**802°.** Egy virágüzletbe 80 szál rózsát szállítottak, melyek közül 30 fehér színű. A rózsák hány százaléka fehér?

**803°.** Milyen számot kapunk, ha 30-t 40 %-kal növeljük?

**804°.** Milyen számot kapunk, ha 50-t 20 %-kal növeljük?

**805°.** Csökkentsd 32-őt 1) 20 %-kal; 2) 25 %-kal; 3) 50 %-kal; 4) 75 %-kal.



***806°.*** Csökkentsd 60-t 1) 30 %-kal; 2) 75 %-kal.

**807°.** Növeld 60-t 1) 10 %-kal; 2) 25 %-kal; 3) 50 %-kal; 4) 120 %-kal.



***808°.*** Növeld 125-öt 1) 40 %-kal; 2) 150 %-kal.

**809°.** Az egyik méhcsalád 2 kg mézet gyűjtött a kaptárba, egy másik 15 %-kal többet. Mennyi mézet gyűjtött a második méhcsalád?



***810°.*** Szabolcs mobiltelefonja 500 hrivnyába került, Mihályé 20 %-kal drágább. Mennyibe kerül Mihály telefonja?

**811°.** Az egyik hónapban egy üzlet forgalma 10 000 hrivnya volt. A következőben a bevételük 8 %-kal kevesebb lett. Mekkora volt az üzlet forgalma a második hónapban?



***812°.*** A cirkuszi belépőjegyek ára 25 hrivnya volt. Egy hónap múlva a jegyek 20 %-kal megdrágultak. Mennyibe kerül most egy cirkuszi belépőjegy?

**813°.** Melyik az a szám, amelyet 20 %-kal megnövelve 1) 84-et; 2) 240-et kapunk.



**814°.** Melyik az a szám, amelyet 60 %-kal megnövelve 640-et kapunk.

**815°.** Melyik az a szám, amelyet 80 %-kal csökkentve 1) 60-t; 2) 140-et kapunk.

**816°.** Melyik az a szám, amelyet 30 %-kal csökkentve 28-at kapunk.

**817°.** Mennyibe került eredetileg az áru, ha az értéke 15 %-os áremelés után 345 hrivnya lett?

**818°.** Egy bank 7 %-os éves kamatot fizet a betéteseinek. Mekkora alaptőkéje volt a betétesnek, ha év végére 5350 hrivnya lett a számláján?

**819°.** A szőlő aszaláskor elveszíti tömegének 70 %-át. Mennyi mazsolát kapunk 10 kg szőlőből? Mennyi szőlő szükséges 10 kg mazsolához?

**820°.** Az elvetett napraforgómag 90 %-a kelt ki, ami 180 tő. Hány magot vetettek el? Hány napraforgó fog kikelni 350 vetőmagból?

**821°.** 50-et 20-szal növeltük. Hány százalékkal nőtt az eredeti szám?

**822°.** 45-öt 15-tel növeltük. Hány százalékkal nőtt az eredeti szám?

**823°.** 40-et 10-zel csökkentettük. Hány százalékkal csökkent az eredeti szám?

**824°.** 80-at 20-szal csökkentettük. Hány százalékkal csökkent az eredeti szám?

**825°.** 50-et $a$-val növeltük. Hány százaléka 50 a kapott számnak, ha 1) $a = 10$; 2) $a = 5$.

**826°.** 25-öt $a$-val növeltük. Hány százaléka 25 a kapott számnak, ha $a = 15$.

**827°.** 24-et $b$-vel csökkentettük. Hány százaléka 24 a kapott számnak, ha 1) $b = 12$; 2) $b = 16$.

**828°.** 36-ot $b$-vel csökkentettük. Hány százaléka 36 a kapott számnak, ha $b = 9$.

**829°.** Micimackó 15 üveg sűrített tejet vásárolt. Egy nap alatt megevett 3 üveggel. Fejezd ki százalékban, hány üveg sűrített teje maradt Micimackónak?

**830°.** Édesanya 25 kg lisztet vásárolt. Egy hét alatt elhasznált 3 kg-ot. A liszt hány százaléka maradt meg?

**831°.** Egy üzlet az egyik napon 150 kg dinnyét adott el, másnap 90 kg-mal többet. Hány százaléka az első napon eladott mennyiségnek a második nap értékesített mennyiség?

***832°.*** Orsolya a múlt héten 8 darab „10”-es érdemjegyet kapott. Ezen a héten 2-vel többet. Hány százaléka az ezen a héten kapott jegyek száma a múlt héten kapott jegyekének?

**833.** Mi több: 1) 50-nek a 20 %-a vagy 20-nak az 50 %-a; 2) 120-nak a 10 %-a vagy 24-nek az 50 %-a?

***834.*** Mi kevesebb: 25-nek a 10 %-a vagy 10-nek a 25 %-a?

**835.** A városi parkban 50 fát ültettek el, melyek 20 %-a vörösfenyő, a többi pedig lucfenyő. Hány vörösfenyőt és lucfenyőt ültettek el a parkban?

***836.*** Egy gyárrészlegen 400-an dolgoznak. A munkások 75 %-a férfi. Hány nő dolgozik a részlegen?

**837.** Melyik szám kisebb az alábbi számok közül:
1) amelyiknek 15 %-a 30, vagy amelyiknek 30 %-a 15;
2) amelyiknek 25 %-a 100, vagy amelyiknek 10 %-a 40?

***838.*** Melyik szám nagyobb: amelyiknek 50 %-a 10, vagy amelyiknek 10 %-a 50?

**839.** Egy üzletbe gyümölcsöt szállítottak. Ebből 400 kg alma, ami az egész mennyiségének a 20 %-a. Körtéből 100 kg-mal kevesebbet hoztak, mint almából. A többi szilva volt. Mennyi gyümölcsöt szállítottak az üzletbe? Hány kg szilvát kapott az üzlet?

***840.*** Az első részlegen 180-an dolgoznak, ami a gyár munkásainak a 45 %-a. A második részlegen 50-nel kevesebben vannak, mint az elsőn. A többiek a harmadik részleg munkásai. Hány munkást foglalkoztat összesen a gyár? Hányan dolgoznak a harmadik részlegen?

**841.** Tímea 80 oldalt olvasott el és még 120 oldala maradt. A könyv hány százalékát olvasta el Tímea?

***842.*** Egy esztergályos ebédig 13 alkatrészt munkált meg, ebéd után a maradék 12-őt. Az alkatrészek hány százalékát készítette el az esztergályos ebéd után?

**843.** Hasonlítsd össze az alábbi számpárok százalékos arányát:
1) 12 és 4, valamint 15 és 3; 2) 8 és 40, valamint 5 és 25.

***844.*** Hasonlítsd össze 15 és 10, valamint 9 és 6 százalékos arányát.

**845.** Egy téglalap oldalai 8 cm, illetve 10 cm hosszúak. Mindegyik oldalát 50 %-kal megnöveltük. Hogyan változott meg a téglalap kerülete? A feleletet deciméterben add meg.

***846.*** Egy téglalap oldalai 16 dm és 24 dm hosszúak. Mindegyik oldalát 40 %-kal megnöveltük. Hogyan változott meg a téglalap kerülete? A feleletet méterben add meg.

**847.** Egy háromszög oldalai 14 cm, 18 cm, illetve 20 cm hosszúak. Mindegyik oldalt 20 %-kal csökkentettük. Hogyan változott a háromszög kerülete?

**848.** Egy téglatest élei 3 cm, 12 cm, illetve 8 cm hosszúak. Mindegyik élet 50 %-kal csökkentettük. Hogyan változott a téglatest éleinek összege?

***849.*** Kijelenthető-e, hogy ha egy négyzet minden oldalát $n$ %-kal megváltoztatunk, akkor a kerülete is $n$ %-kal változik meg?

**850.** 60-at először megnöveltük 25 %-kal, majd ismét 15 %-kal. Mi lett az eredmény?

***851.*** 64-et először csökkentettük 25 %-kal, majd ismét 35 %-kal. Mi lett az eredmény?

**852.** 48-at először megnöveltük 55 %-kal, majd csökkentettük 15 %-kal. Mi lett az eredmény?

***853.*** 150-et először csökkentettük 75 %-kal, majd megnöveltük 40 %-kal. Mi lett az eredmény?

**854.** Az $a$ számot 20 %-kal csökkentettük. Hány százalékkal kell növelni a kapott számot, hogy megkapjuk az $a$ számot?

***855.*** A $b$ számot először 30 %-kal csökkentettük, majd a kapott értéket 30 %-kal növeltük. Hogyan változott meg a $b$ szám?

**856.** Egy téglalap oldalai 4 cm és 12 cm hosszúak. Hány százalékkal változik meg a téglalap kerülete, ha mindegyik oldalát 1) kétszeresére növeljük; 2) négyszeresére növeljük; 3) négyszeresére csökkentjük?

**857.** Egy téglatest élei 5 cm, 8 cm, illetve 7 cm hosszúak. Hány százalékkal változik meg a téglatest éleinek összege, ha mindegyik élet 1) 1 cm-rel növelünk; 2) 1 cm-rel csökkentünk; 3) 2 cm-rel növelünk?

***858.*** Egy 5 cm, 5 cm és 8 cm oldalhosszúságú háromszög mindegyik oldalát 3 cm-rel megnöveltük. Hány százalékkal növekedett a háromszög kerülete?

**859.** Miklós bácsi 5 000 hrivnyát helyezett el a bankban 3 éves lekötésre. A bank évente 5 %-os kamatot fizet. Mennyi pénze lesz három év múlva a betétesnek?

***860.*** Egy bank 30 000 hrivnya hitelt kínál 10 %-os évi kamatra. Mekkora összeget kell visszafizetni a banknak két év múlva?

**861.** Egy autóbuszos kirándulás alkalmával a turisták az első nap megtették az út 30 %-át, a második napon a 20 %-át, a harmadikon pedig a maradék 90 km-t. Mekkora utat kellett megtenniük a turistáknak három nap alatt.



***862.*** Az első történet a könyv 35 %-át teszi ki, a második a 25 %-át, a harmadik pedig 80 oldalt. Hány oldalas a könyv?

**863.** Édesapa fizetése 4000 hrivnya volt. Majd fizetésemelést kapott, így a mostani bére 4 800 hrivnya. Hány százalékos volt az édesapa fizetésemelése?



***864.*** Egy atléta az edzés alatt 12 km-t fut naponta. Az edző azt tanácsolta, hogy növeljék a távot napi 15 km-re. Hány százalékkal emelte az edző a sportoló teljesítményét?

**865.** Édesanya 2 kg cukorkát, 3 kg almát, 2,5 kg szőlőt, 1,5 őszibarackot és 1 kg kekszet vásárolt a születésnapra. A termékek hány százalékát tették ki a gyümölcsök?



***866.*** Tímea 1,5 óra alatt készült el a házi feladattal. Az ukrán nyelvvel 18 percet foglalkozott, történelemmel 27 perc alatt készült el, a többi időt a rajzra fordította. Az egész idő hány százalékát fordította a kislány a tantárgyakra külön-külön?

**867*.** Szárítás előtt a gabona nedvességtartalma 23 % volt, szárítás után 12 %. Hány százalékkal csökkent a gabona tömege a szárítás után?

**868*.** Hány százalékkal csökkent az áru értéke 20 %-os, majd 10 %-os árleszállítás után?

**869*.** Egy számot 25 %-kal növeltünk, majd a kapott értéket 25 %-kal csökkentettük. Az eredmény kisebb vagy nagyobb az eredeti számnál? Hány százalékkal?

**870*.** Hány százalékos lesz a sóoldat, ha 1 kg vízben feloldunk:
1) 200 g sót;
2) 500 g sót?

**871*.** Mennyi vizet kell hozzáönteni 7,5 kg 12 %-os sóoldathoz, hogy a kapott oldat 10 %-os legyen?

**872*.** Hány százalékkal nő meg annak a téglalapnak a területe, melynek a hosszúságát 40 %-kal, a szélességét pedig 30 %-kal növeljük meg?

**873*.** Hogyan változik meg annak a törtnek az értéke, melynek a számlálóját 100 %-kal növeljük, a nevezőjét pedig 50 %-kal csökkentjük?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**874.** Irénke hétfőn az iskolai étkezdében 7 hrivnyáért ebédelt meg. A zsebpénzének hány százalékát költötte el Irénke hétfőn, ha édesanyja 50 hrivnyát ad neki egy hétre?

**875.** Orsolya 20 perc alatt ér az iskolába. Egyszer késve indult el, így a szokásosnál gyorsabban haladt, és 15 %-kal rövidebb idő alatt jutott el az iskolába. Hány perc alatt tette meg Orsolya az utat?

**876.** Marika egy év alatt 5 cm-t nőtt. Hány százalékkal lett magasabb, ha az előző évben 125 cm magas volt?

**877.** Számítsd ki, hány százalékos a reggeli teád cukortartalma, ha a pohárban lévő tea tömege 200 g, egy kiskanál cukoré pedig 10 g.

**878.** Segíts kiszámítani nagyapának, mi kifizetődőbb: 2000 hrivnyát tenni be a bankba három éves lekötéssel 5%-os kamatra, vagy 1000 hrivnyát 2 éves lekötéssel 10 %-os kamatra.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**879.** Tegyél ki a $35 : 5 + 2 \cdot 16 - 4$ kifejezésben zárójeleket úgy, hogy a kifejezés értéke 60 legyen.

**880.** Oldd meg a következő egyenleteket: 1) $121 : (x - 19) = 11$;
2) $x \cdot 14 + 25 = 109$.

**881.** Egy téglalap kerülete 80 cm. Határozd meg a területét, ha a szélessége 16 cm.

**882.** Egy turista 3 órát $4\frac{2}{5}$ km/h sebességgel haladt, majd 2 órát $4\frac{3}{4}$ km/h sebességgel tett meg. Határozd meg, hogy mekkora utat tett meg a turista.

# 20. § VALÓSZÍNŰSÉG. VÉLETLEN ESEMÉNYEK

A mindennapi életben sokszor tervezünk különböző eseményeket, melyekről meg lehet állapítani, hogy bekövetkeznek-e avagy sem. Ilyen esemény lehet a születésnapi buli, az iskolába járás, a jó jegy kiérdemlése vagy kirándulás a szülőkkel a természetbe.

**Jegyezd meg!**

Azokat a jelenségeket, melyekről eldönthető, hogy bizonyos körülmények között bekövetkeznek-e avagy sem, véletlen eseményeknek, vagy (röviden) eseményeknek nevezzük.

Az eseményeket betűkkel jelöljük: $A$, $B$, $C$. Így olvassuk: $A$ esemény, $B$ esemény, $C$ esemény.

A matematikusok szerint egy véletlen esemény bizonyos kísérletek következtében történik meg (vagy nem történik meg). Az ilyen kísérletet *véletlen* vagy *sztochasztikus* kísérletnek nevezzük. Ezek sajátos *próbatételek*. A kísérletek körülményei nem változnak. A kísérletnek több kimenetele is ismert lehet, viszont nem tudjuk, hogy melyik fog bekövetkezni. Például, ha egy pénzérmét dobunk fel, akkor kétféle eredmény lehetséges: vagy „fej", vagy „írás" (76. ábra), de előre nem tudjuk megmondani, hogy melyik. Ezért a pénzérme feldobása kísérlet, a „fej" vagy az „írás" kimenetel pedig az $A$ és a $B$ esemény.



76. ábra

Hányféle következménye lehet, ha egy dobókockával dobunk (77. ábra)? A dobókockának hat lapja van, tehát hat esemény következhet be: egy, kettő, három, négy, öt vagy hat pontot dobhatunk.



77. ábra

**Figyeld meg:**

egy kísérlet összes lehetséges kimenetele eseményrendszert alkot, melyek közül csak az egyik következhet be.

Például, ha egy dobókockával dobunk, akkor a hat lehetőség közül csak az egyik jön be: vagy az egy, vagy a kettő, vagy a három, vagy a négy, vagy az öt, vagy a hat pont kerül felülre. Másképpen úgy is fogalmazhatunk, hogy ha egyet dobunk, az csak az egyik kimenetel és így tovább.

Azt az eseményt, amely bármilyen körülmény között bekövetkezik, *biztos eseménynek* nevezzük. Például, az $A$ esemény, hogy a dobókockával 1-től 6-ig dobunk, az biztos.

Az az esemény, amely nem következhet be, *lehetetlen* esemény. Például, a $B$ esemény, hogy egy dobókockával hetest dobjunk, lehetetlen.

*Egymást kizáró események* közül csak az egyik következhet be. Vagyis, az ilyen események egyszerre nem következhetnek be. Például a $C$ esemény, hogy hármat dobunk és a $D$ esemény, hogy 5-öt, kizáróak, ha egy dobókockával dobunk.

*Egyenlő esélyűek* azok az események, melyek bekövetkezésének lehetősége azonos. Például az 1, a 2, a 3, a 4 , az 5 és a 6 pont dobása egy dobókockával, egyenlő eséllyel következhet be.

Az *esemény valószínűsége* számszerűsített jellemzője az esemény bekövetkezésének.

Jelölése: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$. Így olvassuk: az $A$ esemény valószínűsége, a $B$ esemény valószínűsége, a $C$ esemény valószínűsége.

Ha egy kísérletben minden lehetséges esemény egymást kölcsönösen kizáró és egyenlő eséllyel következhet be, akkor az esemény valószínűségét egy képlettel lehet maghatározni.

**Jegyezd meg!**

**Az $A$ esemény valószínűségének nevezzük az $A$ esemény $m$ kedvező eseteinek és az adott kísérlet $n$ összes egyenlő eséllyel bekövetkezhető kimenetelének az arányát:**

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Igaz-e, hogy az $m$ kedvező esetek száma mindig kevesebb az $n$ összes lehetséges eset számától. Nem. $m$ és $n$

egyenlő is lehet. Például, annak a biztos eseménynek a valószínűsége, hogy dobókockával egytől hatig dobunk, mivel $\frac{m}{n}=\frac{6}{6}=1$.

**Figyeld meg:**

egy esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik. A biztos esemény valószínűsége 1, a lehetetlen eseményé 0.

**1. feladat.** Egy urnából, melyben 3 fekete és 5 fehér golyó van, véletlenszerűen kivettek egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyó: 1) fekete; 2) fehér?

**Megoldás.**

1. Legyen az $A$ esemény az, hogy fekete golyót húztunk ki az urnából! Összesen 8 golyó van, ezért $n = 8$. Feketéből 3, ezért $m = 3$. Az $A$ esemény valószínűsége a kedvező $m$ esetek és az összes $n$ eset aránya, ezért: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$. Tehát, a fekete golyó kihúzásának a valószínűsége $\frac{3}{8}$.

2.

*B esemény – „fehér golyót húztunk ki”.*

$m = 5, n = 3 + 5 = 8.$

$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{5}{8}.$

*Felelet: Annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk ki,* $\frac{5}{8}$.

Az előző feladatban két lehetséges eseményről volt szó: $A$ esemény – „fekete golyót húzunk”, $B$ esemény – „fehér go-

lyót húzunk". Az $A$ esemény valószínűsége $\frac{3}{8}$, a $B$ esemény valószínűsége $\frac{5}{8}$. Ezen valószínűségek összege $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$.

**Jegyezd meg!**

Egy kísérlet összes eseménye valószínűségének az összege 1.

Meg lehet-e határozni az eseménytér két valószínűsége közül az egyik valószínűségét, ha ismerjük a másik esemény valószínűségét? Igen. A fehér golyó kihúzásának a valószínűségét másképpen is meghatározhatjuk: $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.

**2. feladat.** Két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege 6 lesz?

**Megoldás.** $C$ esemény – „a dobott pontok összege 6". A $C$ esemény akkor teljesül, ha az alábbi számpárokat dobjuk: 1 és 5, 2 és 4, 3 és 3, 4 és 2, 5 és 1. Tehát $m = 5$. Az összes lehetőség az, hogy az első kockával 1-től 6-ig dobunk, és mindegyik számhoz a második kockával is a hat szám valamelyikét dobhatjuk, vagyis ez a szám 36. Ezért $n = 36$. A $C$ esemény valószínűsége az $m$ és $n$ aránya : $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{5}{36}$.

**További tudnivalók**

1. A sztochasztikus (véletlenszerű) szó a görög στόχος-ból ered, jelentése cél, feltevés.
2. A valószínűség-számítás a matematika egyik ága, amely a véletlen eseményekkel foglalkozik. Önálló tudományágként a XVII. század közepén alakult ki. Ebben a korban terjedtek el a hazárd játékok, amelyek eredménye a szerencsétől függött (kockázás, „fej vagy írás", néhány kártyajáték).



*Jakob Bernulli*

Ezek a játékok vezettek a véletlen események vizsgálatához.

Úgy tartják, hogy a valószínűség-számítás elmélete Jakob Bernulli (1654 - 1705) „Ars Conjectandi" („A feltevések művészete") című munkájának megjelenésével kezdődött 1713-ban.

3. A $P(A)$ jelölés a francia *probabilite* - valószínű szó első betűjéből ered.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mit nevezünk véletlen eseménynek, vagy rövidebben eseménynek?
2. Melyik esemény biztos? lehetetlen?
3. Milyen események zárják ki egymást? fordulnak elő egyenlő eséllyel?
4. Mit nevezünk egy esemény valószínűségének? Hogyan lehet meghatározni?
5. Milyen értéket vehet fel egy esemény valószínűsége?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**883′.** Milyen események lehetnek a következő kísérletek következményei: 1) egy érmét egyszer feldobunk; 2) egy dobókockával egyszer dobunk; 3) egy céltáblába egyszer lövünk; 4) egy urnából, melyben fehér és fekete golyók vannak, egy golyót kiveszünk?

**884′.** Egy urnában 4 golyó van: egy fehér, egy fekete, egy zöld és egy kék. Kihúzunk egyet. Nevezd meg 1) az egyenlő eséllyel bekövetkezhető eseményeket; 2) a lehetetlen eseményt; 3) az egymást kizáró eseményeket.

**885′.** Helyesen oldotta-e meg Natika a feladatot, ha az esemény valószínűsége szerinte 1. Meg lehet-e mondani, hogy Natika milyen esemény valószínűségét számolta?

**886°.** Egy kosárban látszatra egyforma piros almák vannak. Kiveszünk egy almát. Milyen eseménynek számít, ha 1) „a kosárból kivettünk egy piros almát"; 2) „a kosárból kivettünk egy zöld almát"?

**887°.** Egy urnában kék golyók vannak. Kihúzunk egyet. Milyen eseménynek számít, ha 1) „az urnából kék golyót húzunk"; 2) „az urnából piros golyót húzunk"?

**888°.** Egy érmét egyszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az érme „írásra" esik?

**889°.** Egy érmét egyszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az érme „fejre" esik?

**890°.** Tamás gondolt egy kétjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a szám 1) 13; 2) több mint 20?

***891°.*** Katica gondolt egy egyjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a szám a 1) 8; 2) páros szám?

**892°.** Egy dobókockával egyszer dobtunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1) „a dobott szám a 2"; 2) „a dobott szám az 5"; 3) „a dobott szám páros"; 4) „a dobott szám 3 többszöröse"?

***893°.*** Egy dobókockával egyszer dobtunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1) „a dobott szám a 3"; 2) „a dobott szám páratlan"?

**894°.** Egy osztályba 14 fiú és 16 lány jár. Az influenza járvány miatt az osztály egyik tanulója megbetegedett. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1) fiú; 2) lány betegedett meg?

***895°.*** Egy versenyen 17 fiú és 15 lány indult egyenlő eséllyel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a versenyt 1) fiú; 2) lány fogja megnyerni?

**896°.** Egy urnában 6 piros és 4 fehér golyó van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen kihúzott golyó: 1) piros; 2) fehér?

***897°.*** Egy urnából, melyben 4 kék és 5 zöld golyó van, véletlenszerűen kivettünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyó: 1) kék; 2) zöld?

**898.** Egy családban két gyerek nevelkedik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a két gyerek fiú, ha egyenlő valószínűséggel születhet fiú és leány is?

***899.*** Egy családban két gyerek nevelkedik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik gyerek fiú, a másik pedig lány, ha egyenlő valószínűséggel születhet fiú és leány is?

**900.** Egy érmét kétszer dobtunk fel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1) „mind a kétszer írásra esik"; 2) „mind a kétszer fejre esik"?

***901.*** Két érmét dobtunk fel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a két érme azonos oldalára esik?

**902.** Egy súlylökő versenyen 9 dán, 3 svéd, 8 norvég és 5 finn sportoló áll rajthoz. Az indulás sorrendjét sorsolással döntik el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a finn versenyző lesz az utolsó súlylökő.

***903.*** Egy úszóversenyen 4 lengyel, 8 bolgár, 7 román és 5 szlovák sportoló indult el. Az indulás sorrendjét sorsolással döntötték el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első rajthoz álló versenyző Lengyelországból érkezett?

**904.** Egy üzembe 1000 csapágyat szállítottak le, melyek közül 30 nem felelt meg a szabványoknak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen kivett csapágy szabványos?



***905.*** Egy gyárban 170 táskát készítettek naponta, melyek közül 5 selejtesnek bizonyult. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ebből a szállítmányból minőségi táskát sikerül vásárolnunk?

**906.** A meteorológusok a következő hétre 3 napos és 4 borús napot jeleztek elő. Melyik esemény valószínűbb, hogy hétfőn napos vagy, hogy hétfőn borús lesz az idő?

**907*.** Egy kísérletben két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege 8 lesz.

**908*.** Egy kísérletben két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két kockán azonosak lesznek a dobott pontok?

**909*.** Egy kísérletben három dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege 14 lesz?

**910*.** Egy kísérletben háromszor dobjuk fel az érmét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a háromszor írásra esik?

**911*.** A 6. osztályba 30 tanuló jár. A névsorból véletlenszerűen kiválasztunk egy tanulót. Annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott tanuló 12 évestől fiatalabb, $\frac{1}{5}$. Hány 12 évesnél fiatalabb tanuló jár az osztályba?



## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**912.** Péter és Szabolcs kitalált egy játékot. Két dobókockával dobnak, ha a dobott pontok összege 11, akkor Péter nyer, ha 12, akkor Szabolcs. Melyik fiúnak van nagyobb esélye nyerni?

**913.** Dobj fel kísérletszerűen három érmét! Melyik lehetséges az alábbi események közül és melyik nem:

1) $A$ esemény – „azonos számú esetben volt fej és írás”;
2) $B$ esemény – „több esetben volt fej”;
3) $C$ esemény – „több esetben esett írásra”?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**914.** Határozd meg az alábbi kifejezések értékét a legcélszerűbb módon:
1) $(8{,}73 \cdot (4{,}85 + 5{,}15) - 3{,}53 \cdot (3{,}15 + 6{,}85)) : 26$;
2) $430 - 2{,}55 \cdot 8 \cdot 20 \cdot 0{,}05 \cdot 12{,}5$.

**915.** Az órán 30 tanuló volt jelen. Az osztály $\frac{1}{16}$-a hiányzik. Hány tanuló jár az osztályba?

**916.** Egy 20 méteres gombolyagot két részre vágtunk. Az egyik 12 m hosszú. Hányszor hosszabb az egyik rész a másiknál? Hányad része az egész huzalnak az első rész, és hányad része a második?

**917.** Egy autóbusz 500 km-t tett meg egy nap alatt. Délelőtt 240 km tett meg 4 óra alatt. Délután további 4 órát volt úton. Mikor volt nagyobb az autóbusz sebessége, délelőtt vagy délután?

**918.** Mennyibe kerül 6 kg keksz, ha 3 kg keksz ára 48 hrivnya?

**919.** Egy turista 15 km-t 5 óra alatt tett meg. Mennyi idő alatt tesz meg 12 km-t ugyanilyen sebességgel?



# 4. FEJEZET

# RACIONÁLIS SZÁMOK. RACIONÁLIS SZÁMOKKAL VÉGZETT MŰVELETEK

## Ebben a fejezetben megtudod:

- melyek a pozitív és a negatív számok;
- mi a számegyenes;
- mi a szám abszolút értéke;
- melyek az egész számok;
- mit nevezünk racionális számoknak;
- hogyan kell összehasonlítani két racionális számot;
- hogyan kell számtani műveleteket végezni racionális számokkal;
- hogyan alkalmazható a megtanult tananyag a gyakorlatban



# 21. § POZITÍV ÉS NEGATÍV SZÁMOK. A NULLA

Figyeld meg a 78. ábrát. Egy utcarészletet láthatsz egy iskolával. Sanyi azt mondta, hogy az iskolából kijövet 3 háztömbnyit sétált ezen az utcán.

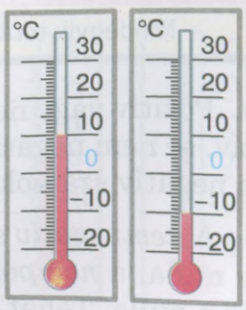



78. ábra

Meg lehet-e határozni, meddig jutott el Sanyi? Nem. Pontos választ nem tudunk adni, mert nem tudjuk, hogy melyik irányba indult el a kisfiú. Mivel, ha balra indult el, akkor az uszodához ért, ha jobbra, akkor a könyvtárhoz.

Tehát, ahhoz, hogy meghatározzunk egy helyet egy egyenes vonal mentén, nem csak a távolságot kell megadni a kiinduló ponttól, hanem az irányt is.

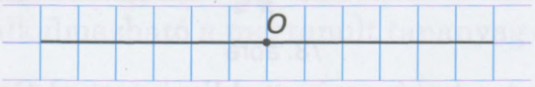
Nézzünk meg még egy példát! Ahhoz, hogy leolvassuk a hőmérőről a levegő hőmérsékletét, nem csak azt a számadatot jegyezzük meg, ahol a hőmérő higanyszála megállt, hanem azt is, ahol ez az érték van: a nulla felett vagy alatta (79. ábra). Például, ha a hőmérséklet a nulla felett van és 10° -t mutat, úgy fogalmazunk, hogy a levegő hőmérséklete plusz 10 fok. Ha a hőmérséklet a nulla alatt van ugyanennyivel, akkor meg azt mondjuk, hogy a levegő hőmérséklete mínusz 10 fok. Így jelöljük: $+10°$, $-10°$.



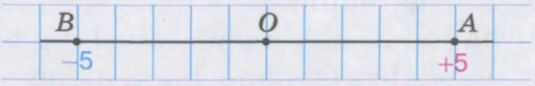

79. ábra

A hőmérő „+” jele a skálán az egyik irányt jelöli (ami a nulla felett van), a „–” jel az ellenkező irányt (a nulla alattit).

Húzzunk egy egyenest és jelöljünk rajta egy $O$ pontot (80. ábra)! Az $O$ ponttól 5 egységnyire különböző irányba jelöljünk egy $A$ és egy $B$ pontot! Ahhoz, hogy megkülönböztessük a pontok helyét az $O$ ponthoz viszonyítva, a „jobbra” szó helyett a „+” jelet, a vele ellentétes irányt jelző „balra” szó helyett pedig a „–” jelet használjuk. Tehát, az $A$ pont helyét az $O$ ponthoz viszonyítva a **+5**-ös szám jelöli, a $B$ pont helyét pedig a $-5$ (81. ábra). Általánosan elfogadottá vált, hogy az $O$ ponttól jobbra lévő pontoknak a „+” előjelű számok felelnek meg, balra pedig a „–” előjelűek.




80. ábra




81. ábra

A „+” előjelű számokat pozitív számoknak nevezzük. Például **+5** pozitív szám.

A +5 pozitív számot röviden így írjuk: 5.

A „–” előjelű számokat negatív számoknak nevezzük. Például $-5$ negatív szám (így olvassuk: mínusz 5).

**Jegyezd meg!**

Mindegyik természetes szám pozitív.

Pozitív vagy negatív szám a nulla? A nulla se nem pozitív, se nem negatív. A nulla elválasztja a pozitív számokat a negatív számoktól.

A *nemnegatív számokhoz* tartoznak a pozitív számok és a nulla, a *nempozitív számokhoz* pedig a negatív számok és a nulla. Tehát a 0 nem negatív és nem pozitív szám.

## További tudnivalók

Az ókorban pálcikákat használtak a számoláshoz. Piros színű pálcikákkal ábrázolták a pozitív számokat, feketékkel pedig a negatívokat. Indiában a negatív számokkal az adósságot jelölték, a pozitív számokkal pedig a jövedelmet.

Sok matematikus a negatív számokat hibás számoknak tartotta, mivel nem tudta elfogadni, hogy lehetséges a „semminél" (a nullánál) kisebb szám. Csak a XVIII. században kezdték el a pozitív számokkal egyenrangú számoknak elfogadni a negatív számokat.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Milyen jellemzőkkel kell meghatározni egy pont helyét az egyenesen egy adott ponthoz viszonyítva?
2. Hogyan jelöljük a pozitív számokat? a negatív számokat?
3. Pozitív vagy negatív számok a természetes számok?
4. Nevezd meg azt a számot, amely se nem pozitív, se nem negatív!
5. Mely számok a negatív számok? a pozitív számok?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!



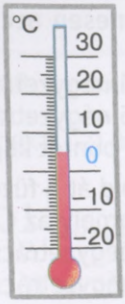
állatkert iskola múzeum

82. ábra

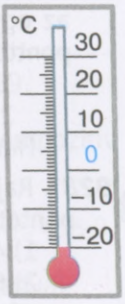
**920'.** A 82. ábrán egy utcarészlet látható. Igaz-e az állítás, ahhoz, hogy a múzeumba menjünk:

1) jobbra kell elindulni;
2) balra kell elindulni;
3) három épület mellett kell elhaladni?

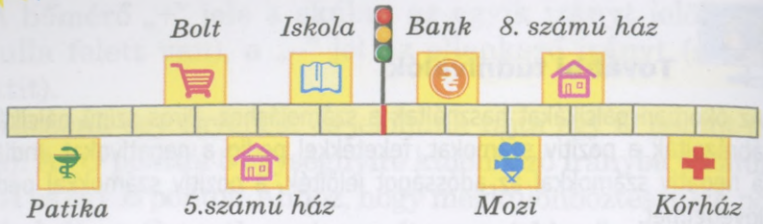
**921'.** Milyen hőmérsékletet mutat a hőmérő (83-84. ábra)?




83. ábra




84. ábra




85. ábra

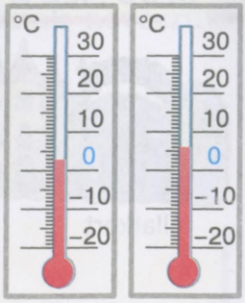
**922'.** Igaz-e az alábbi állítás:

1) $\frac{1}{21}$ pozitív szám;
2) –5 nempozitív szám;
3) –11 negatív szám;
4) a 0 negatív szám;
5) $\frac{5}{17}$ pozitív szám;
6) –0,9 nemnegatív szám?

**923°.** A 85. ábrán egy utcarészlet vázlata látható. Egy beosztásnak 100 m felel meg. Mi található a közlekedési lámpától balra 1) 300 m-rel; 2) 500 m-rel? Lehet-e egyértelmű választ adni a kérdésre?

**924°.** A 85. ábrán egy utcarészlet vázlata látható. Egy beosztásnak 100 m felel meg. Mi található a közlekedési lámpától 1) 100 m-re; 2) 200 m-re? Lehet-e egyértelmű választ adni a kérdésre?

**925°.** A levegő hőmérsékletét reggel 8 órakor (86., *a* ábra) és 10 órakor is (86., *b* ábra) lejegyezték. Állapítsd meg, 1) melyik irányba mozdult el a hőmérő higanyszála a jelzett időben; 2) menynyivel változott a hőmérséklet!




*a* *b*

86. ábra

**926°.** Rajzolj egy hőmérőt! Jelöld a hőmérőn a –20°; –10°; +5°; +10° hőmérsékletet!

**927°.** Rajzold át a füzetedbe a 87. ábrát! Jelöld az egyenesen azt a $B$ pontot, amely az $O$ ponttól:

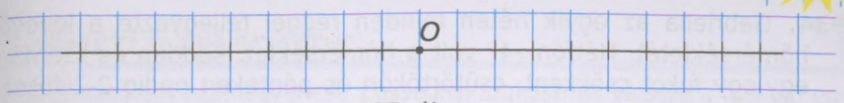
1) 4 négyzetrácsnyira;
2) 6 négyzetrácsnyira van.

Hány pontot kaptál?

**928°.** Rajzold át a füzetedbe a 87. ábrát! Jelöld az egyenesen azt az $A$ pontot, amely az $O$ ponttól:

1) 4 négyzetrácsnyira balra van;
2) 6 négyzetrácsnyira jobbra van.

Hány pontot kaptál?




87. ábra

**929°.** Jegyzeteld le a füzetedbe pozitív és negatív számokkal az alábbi állításokat:

1) a levegő hőmérséklete – 12 fok a nulla alatt;
2) a levegő hőmérséklete – 10 fok a nulla felett;
3) a tenger mélysége – egy kilométer a tengerszint alatt;
4) a hegy magassága – egy kilométer háromszáz méter a tengerszint felett;
5) a májusi jövedelem 4 500 hrivnya;
6) az áprilisi adósság 670 hrivnya;
7) 560 évvel Krisztus születése előtt;
8) 2013 évvel Krisztus születése után!

**930°.** Jegyzeteld le a füzetedbe pozitív és negatív számokkal az alábbi állításokat:

1) a levegő hőmérséklete – 3 fok a nulla alatt;
2) a levegő hőmérséklete – 11 fok a nulla felett;
3) a tenger mélysége – három kilométer a tengerszint alatt;
4) a hegy magassága – két kilométer háromszáz méter a tengerszint felett;
5) egy heti jövedelem 7 000 hrivnya;
6) a múlt évi adósság 854 000 hrivnya;
7) 45 évvel Krisztus születése előtt;
8) 65 évvel Krisztus születése után!

**931°.** Az alábbi állítások közül melyik igaz:

1) mindegyik természetes szám pozitív;
2) mindegyik természetes szám nemnegatív;
3) mindegyik törtszám negatív;
4) a nulla pozitív szám?

**932°.** Olvasd fel az alábbi számokat:

$9;\ -8;\ 0;\ -4{,}6;\ 7{,}8;\ 475;\ 114;\ -1\frac{3}{5};\ -5{,}45;\ 18{,}7;\ -96;\ 489.$

Határozd meg: 1) a nem tört negatív számokat; 2) a nempozitív törtszámokat.

**933°.** Olvasd fel az alábbi számokat: $0{,}99;\ -11;\ -\frac{1}{2};\ 102;\ 0;\ \frac{1}{5};\ -35{,}9.$

A fenti számok közül melyek: 1) negatívak; 3) nemnegatívak; 2) pozitívak; 4) nempozitívak?

**934.** Gabriella az egyik héten minden reggel feljegyezte a levegő hőmérsékletét. Hétfőn –4° volt a hőmérséklet. Kedden és szerdán egy-egy fokot csökkent, csütörtökön és pénteken pedig 2-2 fokot. Szombaton kimelegedett az idő és 4°-t emelkedett a hőmérséklet. Vasárnap a hőmérséklet nem változott. Milyen adatokat jegyzett le Gabriella?

**935.** Egy egyenesen feltüntették az $O$, $A$ és $B$ pontot. Az $A$ pont az $O$ ponttól jobbra van 7 egységgel, az $O$ pont a $B$ ponttól viszont 10 egységnyivel jobbra. Hány egység hosszú az $AB$ szakasz? Hol van az $O$ pont az 1) $A$ ponthoz viszonyítva; 2) a $B$ ponthoz viszonyítva?

**936.** Egy egyenesen feltüntették az $O$, $A$ és $B$ pontot. Az $A$ pont balra van az $O$ ponttól 15 egységgel, a $B$ pont viszont jobbra esik az $O$ ponttól 5 egységgel. Hány egység hosszú az $AB$ szakasz? Hol van az $O$ pont az 1) $A$ ponthoz viszonyítva; 2) a $B$ ponthoz viszonyítva?

**937*.** Egy egyenesen feltüntették az $O$, $A$, B és $C$ pontokat. Az $A$ pont az $O$ ponttól jobbra van ugyanakkora távolságra, mint amekkora távolságra van az $O$ pont is a $B$ ponttól jobb irányba. A $C$ pont a $B$ ponttól jobbra található 8 egységgel, az $O$ pont viszont balra helyezkedik el a $C$ ponttól 3 egységnyire. Hány egység hosszú az $AB$ szakasz? Hol van az $O$ pont az 1) $A$ ponthoz viszonyítva; 2) a $B$ ponthoz viszonyítva? Készíts rajzot!

**938*.** Egy egyenesen feltüntették az $O$, $A$, $B$ és $C$ pontokat. Az $A$ pont az $O$ ponttól jobbra van ugyanakkora távolságra, mint amekkora távolságra található az $B$ pont a $C$ ponttól balra. A $C$ pont az $O$ ponttól 12 egységgel jobbra van, és 23 egységnyire balra az $A$ ponttól. Hány egység hosszú az $AB$ szakasz? Hol van az $O$ pont az 1) $A$ ponthoz viszonyítva; 2) a $B$ ponthoz viszonyítva? Készíts rajzot!

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**939.** Rajzolj le a füzetedbe egy olyan mérőeszközt, amelyet pozitív és negatív értékeket is felvehető mennyiségek mérésére használunk.

**940.** A Föld felszíne 24 időzónára van felosztva (ezeket –12-től 12-ig számoztak meg). A szomszédos időzónák 1 órás eltérést mutatnak. Rajzold be a füzetedbe az 5. táblázatot és töltsd is ki!

*5. táblázat*

| Város | Chicago | Dakar | Párizs | Kijev | Asztana | Tokió |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Időzóna | –6 | –1 | 0 | 2 | 6 | 9 |
| Idő (órákban) | | | | 14 | | |

## ISMÉTLŐ FELADATOK

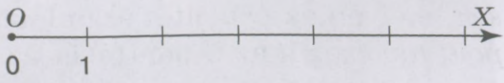
**941.** Rajzolj egy számegyenest! Egységnyi szakasznak válaszd a füzeted egy négyzetének oldalhosszát! Jelöld ezen a számegyenesen az $A(0)$, $B(3)$, $C(5)$, $D(6)$ és $K(7)$ pontokat!

**942.** Hány természetes számot lehet feltüntetni egy számegyenesen az 1) $A(1)$ és $B(8)$; 2) $M(5)$ és $N(10)$ pontok között?

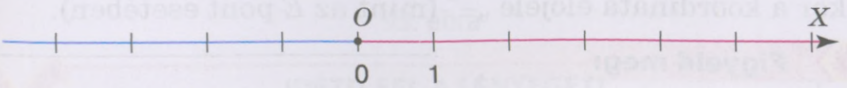
**943.** Határozd meg az alábbi pontok közötti távolságot:
1) $A$ (23) és $B$ (28); 2) $C$ (31) és $D$ (41).

# 22. § A SZÁMEGYENES

Az 5. osztályban a pozitív számokat és a 0-t számsugáron ábrázoltátok (88. ábra). Hosszabbítsuk meg az $OX$ félegyenest a kezdőponttól balra! Tüntessük fel a meghosszabbított részen is ugyanazokat a beosztásokat, mint amilyenek az $OX$ félegyenesen vannak (89. ábra). Egy *számegyenest* kaptunk. A számegyenes $O$ pontját a *számlálás kezdőpontjának* nevezzük.




88. ábra



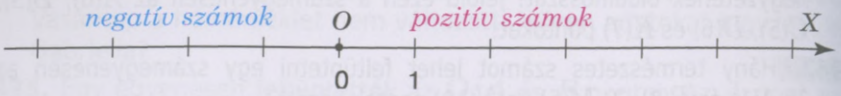

89. ábra

**Jegyezd meg!**

Azt az egyenest, amelyen fel van tüntetve a számlálás kezdőpontja, az egységnyi szakasz és iránya van, ***számegyenesnek*** nevezzük.

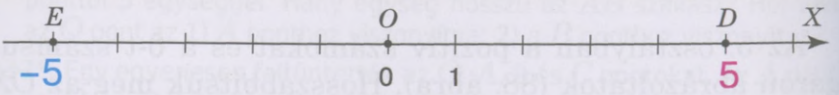
A nyíl a pozitív irányt mutatja. A nyíl irányába, azaz az $OX$ félegyenesen a pozitív számokat jelöljük, a vele ellenkező félegyenesen pedig a negatív számokat

(90. ábra). Általában egy számegyenest vízszintesen rajzolunk, de szükség szerint lehet függőlegesen és fordén is.




90. ábra

Figyeld meg a 91. ábrát! Láthatjátok, hogy a $D$ pont az 5-ös számot jelöli, az $E$ pont a $-5$-öt. A számlálás $O$ kezdőpontja a nulla.




91. ábra

Figyeld meg a 91. ábrát! Láthatjátok, hogy a $D$ pont az 5-ös számot jelöli, az $E$ pont a $-5$-öt. A számlálás $O$ kezdőpontja a nulla.

Mit mutat a *pont koordinátája egy olyan számegyenesen*, melyen az $O$ pont a számlálás kezdőpontja? Az adott *pont távolságát* az $O$ ponttól és az *irányt*, hogy hol kell keresni ezt a pontot: ha a koordináta „+" előjelű, akkor a nyíl irányában (a $D$ pont esetében); ha ellentétes irányban, akkor a koordináta előjele „–" (mint az $E$ pont esetében).

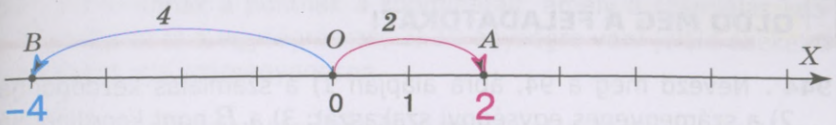
**Figyeld meg:**

minden pont a számegyenesen csak egy számot jelöl, vagyis csak egy koordinátája van.

**1. feladat.** Jelöld a számegyenesen az 1) $A(2)$; 2) $B(-4)$ pontot.

**Megoldás.** 1. Az $A$ pont koordinátája 2, ami pozitív szám, ezért az $A$ pont a számegyenesen a számlálás kezdőpontjától, az $O$ ponttól jobbra van (92. ábra) és $OA = 2$ egységgel.

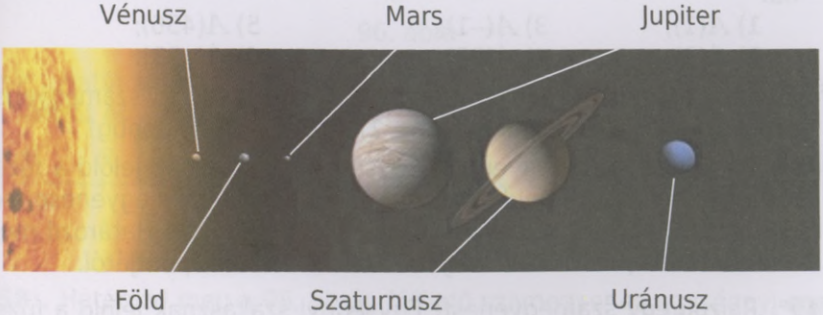
2. A $B$ pont koordinátája $-4$, ami negatív szám, ezért a $B$ pont a számegyenesen a számlálás $O$ kezdőpontjától balra van (92. ábra) és $OB = 4$ egységgel.




92. ábra

## További tudnivalók

A bolygók együttállása olyan asztrológiai jelenség, amikor a bolygók a nap egyik oldalán helyezkednek el majdnem egy egyenes mentén (93. ábra). Azt is szokták mondani, hogy „a bolygók felsorakoztak". A nagy együttálláskor 6 bolygó sorakozik fel: a Vénusz, a Föld, a Mars, a Jupiter, a Szaturnusz és az Uránusz. Tekintsük minden bolygót a számegyenes egy-egy pontjának, a Földet pedig a számlálás kezdőpontjának! Milyen előjelű lesz ezeknek a bolygóknak a koordinátája? Gondold át önállóan!.



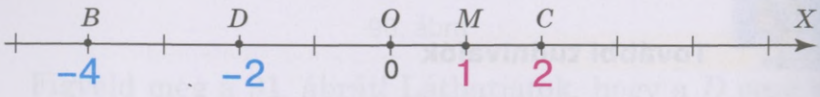

93. ábra

### IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mi a számegyenes?
2. Hogyan kell számegyenest rajzolni?
3. Mit mutat a pont koordinátája?
4. Hol helyezkednek el a számegyenesen azok a pontok, melyek koordinátái negatív számok? pozitív számok?
5. Hogyan kell meghatározni a pont helyét a számegyenesen a koordinátája alapján?
6. Hogyan kell meghatározni a számegyenesen feltüntetett pont koordinátáját?
7. Mi a számlálás kezdőpontjának a koordinátája?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**944′.** Nevezd meg a 94. ábra alapján 1) a számlálás kezdőpontját; 2) a számegyenes egységnyi szakaszát; 3) a $B$ pont koordinátáját; 4) a $C$ pont koordinátáját; 5) a $D$ pont koordinátáját.




94. ábra

**945′.** A 10; $\frac{12}{5}$; –145; $-\frac{2}{3}$; 0,54; –12,1; $-4\frac{2}{7}$; 1205; –125 és 0,128 számok közül melyek helyezkednek el a számegyenesen a számlálás kezdőpontjától jobbra és melyek balra?

**946′.** Határozd meg az $A$ pont távolságát a számlálás kezdőpontjától, ha:

1) $A(1)$; 3) $A(-1)$; 5) $A(456)$;
2) $A(3)$; 4) $A(23)$; 6) $A(-23)$.

**947′.** Hány egységet és melyik irányba kell elmozdulni egy számegyenesen a számlálás kezdőpontjától az: 1) $A(8)$; 2) $B(-5)$ pontig?

**948°.** Rajzolj egy számegyenest! Egységnyi szakasznak jelöld a füzeted egy négyzetének oldalhosszát! Jelöld ezen a számegyenesen az $A(-3)$, $B(2)$, $C(-5)$, $D(8)$, $K(-9)$ és $E(-2)$ pontokat! Határozd meg a feltüntetett pontok távolságát a számlálás kezdőpontjától.

**949°.** Rajzolj egy számegyenest! Egységnyi szakasznak jelöld a füzeted két négyzetének oldalhosszát! Jelöld ezen a számegyenesen az $M(-1)$, $N(4)$, $F(-3)$, $K(2{,}5)$, $L(-4)$ és $P(5)$ pontokat! Határozd meg a feltüntetett pontok távolságát a számlálás kezdőpontjától.

**950°.** Jelöld egy számegyenesen azt a pontot:
1) amely 2 egységre balra van a számlálás kezdőpontjától;
2) amely a számlálás kezdőpontjától jobbra van 2 egységgel.
Határozd meg a feltüntetett pontok koordinátáit!

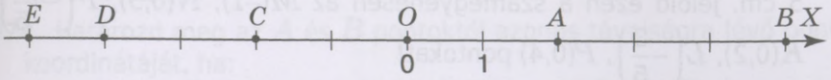
**951°.** Jelöld egy számegyenesen azt a pontot:
1) amely 4 egységre balra van a számlálás kezdőpontjától;
2) amely a számlálás kezdőpontjától jobbra van 6 egységgel.
Határozd meg a feltüntetett pontok koordinátáit!

**952°.** Írd le annak a pontnak a koordinátáit, amely a számlálás kezdőpontjától 1) 2,5 egységre van; 2) 7 egységre van; 3) 8 egységre van! Jelöld ezeket a pontokat egy számegyenesen.

**953°.** Írd le annak a pontnak a koordinátáit, amely a számlálás kezdőpontjától 1) 5 egységre van; 2) 10 egységre van! Jelöld ezeket a pontokat egy számegyenesen.

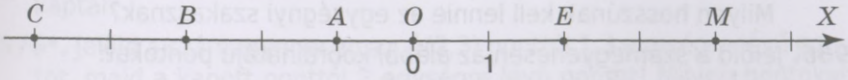
**954°.** Jelölj a számegyenesen három olyan pontot, melyek koordinátái pozitív számok és az alábbi pontok között helyezkednek el: 1) $A(1)$ és $B(8)$; 2) $C(-5)$ és $D(10)$!

**955°.** Határozd meg a 95. ábrán látható pontok koordinátáit.



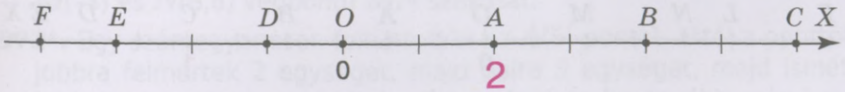

95. ábra

**956°.** Határozd meg a 96. ábrán látható pontok koordinátáit.



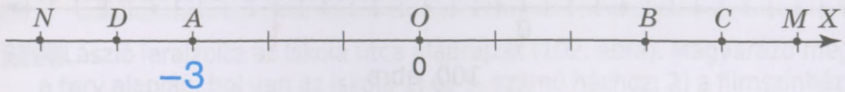

96. ábra

**957°.** Határozd meg a 97. ábrán látható számegyenes egységnyi szakaszát és a pontok koordinátáit.




97. ábra

**958°.** Határozd meg a 98. ábrán látható számegyenes egységnyi szakaszát és a pontok koordinátáit.




98. ábra

**959°.** Jelölj egy számegyenesen négy olyan pontot, melyek koordinátái negatív számok és az alábbi pontok között találhatók:
1) $C(-5)$ és $D(-10)$; 2) $M(-5)$ és $N(10)$.

**960°.** Jelölj egy számegyenesen négy olyan pontot, melyek koordinátái negatív tört számok és az alábbi pontok között helyezkednek el:
1) $C(-5)$ és $D(12{,}9)$; 2) $M(-3{,}2)$ és $N(10)$.

**961°.** Az alábbi pontok közül melyik van balra a másiktól:
1) $A(-6)$ *vagy* $B(-4)$; 2) $C(-2)$ vagy $D(1)$;
3) $M(-3)$ vagy $N(-5)$?

**962°.** Az alábbi pontok közül melyik van jobbra a másiktól:
1) $A(6)$ *vagy* $N(10)$; 2) $B(-4)$ vagy $M(-8)$; 3) $C(-4)$ vagy $K(3)$?

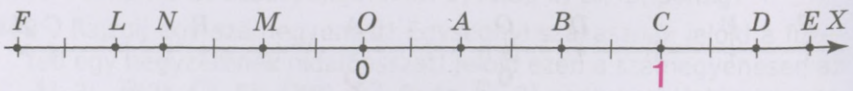
**963.** Rajzolj egy számegyenest! Az egységnyi szakasz hossza legyen 3 cm. Jelöld a számegyenesen az $A(-0{,}5)$, $B(2)$, $C\left(-\frac{1}{6}\right)$, $D\left(\frac{5}{6}\right)$, $K\left(-1\frac{1}{3}\right)$, $E(1{,}5)$ pontokat!

**964.** Rajzolj egy számegyenest! Az egységnyi szakasz hossza legyen 5 cm. Jelöld ezen a számegyenesen az $M(-1)$, $N(0{,}5)$, $F\left(-1\frac{1}{5}\right)$, $K(0{,}2)$, $L\left(-\frac{3}{5}\right)$, $P(0{,}4)$ pontokat!

**965.** Jelöld a számegyenesen az alábbi koordinátájú pontokat:
1) 0,2; 2) $-\frac{3}{5}$; 3) $\frac{9}{10}$; 4) $-\frac{8}{5}$.
Milyen hosszúnak kell lennie az egységnyi szakasznak?

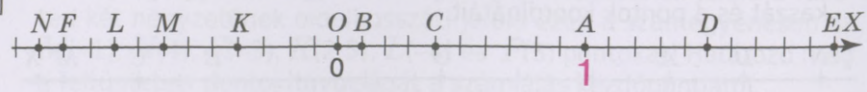
**966.** Jelöld a számegyenesen az alábbi koordinátájú pontokat:
1) $\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-1{,}5$.
Milyen hosszúnak kell lennie az egységnyi szakasznak?

**967.** Határozd meg a 99. ábrán látható pontok koordinátáit.



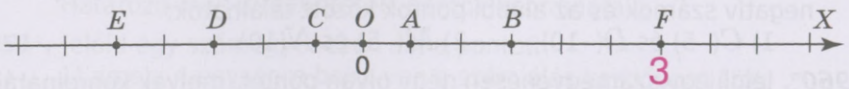

99. ábra

**968.** Határozd meg a 100. ábrán látható pontok koordinátáit.




100. ábra

**969.** Határozd meg a 101. ábrán látható számegyenes egységnyi szakaszát és a pontok koordinátáit.




101. ábra

**970.** Írd le azon pontok koordinátáit, amelyek:
1) 2 egységre vannak az $A(6)$ ponttól; 2) 4 egységre vannak a $B(-9)$ ponttól; 3) 3 egységre vannak az $C(-2{,}5)$ ponttól.

**971.** Írd le azon pontok koordinátáit, amelyek:
1) 1,5 egységre vannak az $M(-7)$ ponttól;
2) 5 egységre vannak az $N(1,2)$ ponttól.

**972.** Határozd meg annak a pontnak a koordinátáját, amely 5,5 egységre van az $A(-3,5)$ ponttól és 3 egységre a $B(-12)$ ponttól.

**973.** Határozd meg az $A$ és $B$ pontoktól azonos távolságra lévő pont koordinátáját, ha:
1) $A(12)$, $B(18)$; 2) $A(1)$, $B(8)$; 3) $A(-2)$, $B(9)$; 4) $A(-10)$, $B(6)$; 5) $A(-7)$, $B(4)$.

**974.** Határozd meg az $A$ és $B$ pontoktól azonos távolságra lévő pont koordinátáját, ha:
1) $A(26)$, $B(32)$; 2) $A(-5)$, $B(5)$; 3) $A(-6)$, $B(-9)$.

**975*.** Jelöld a számegyenesen az $A(-3)$ ponttól 2 egységre lévő pontot, majd a kapott ponttól 6 egységre lévő pontot! Milyen pontokat kaptál?

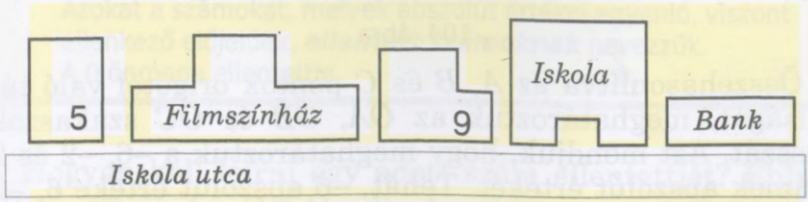
**976*.** Jelöld a számegyenesen az $A(2,3)$ ponttól 1,3 egységre lévő pontot, majd a kapott ponttól 2 egységre lévő pontot! Milyen pontokat kaptál?

**977*.** Határozd meg az $A$ és $B$ pontoktól azonos távolságra lévő pont koordinátáját, ha tudjuk, hogy az $A$ és $B$ pontok harmadolják az $M(-3)$ és $N(6,6)$ végpontú $MN$ szakaszt.

**978*.** Egy számegyenesen feltüntettük az $A(5)$ pontot. Ettől a ponttól jobbra felmértek 2 egységet, majd balra 3 egységet, majd ismét jobbra 4 egységet, aztán balra 5 egységet és így tovább még hatszor. Milyen pontot kaptunk?

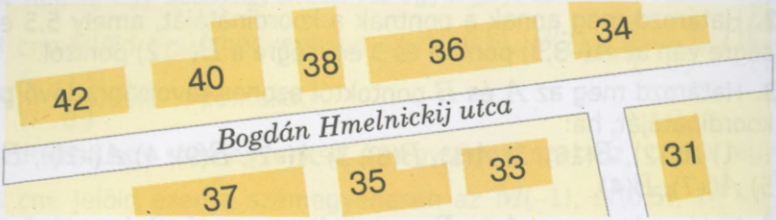
## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**979.** László lerajzolta az Iskola utca alaprajzát (102. ábra). Magyarázd meg a terv alapján, hol van az iskola 1) az 5. számú házhoz; 2) a filmszínházhoz; 3) a bankhoz viszonyítva.




102. ábra

**980.** Az alábbi tervrajz a Bogdán Hmelnickij utcát ábrázolja (103. ábra). Magyarázd meg a terv alapján, hol helyezkedik el a 38. számú ház 1) a 40-es számú házhoz; 2) 34-es számú házhoz viszonyítva.




103. ábra

## ISMÉTLŐ FELADATOK

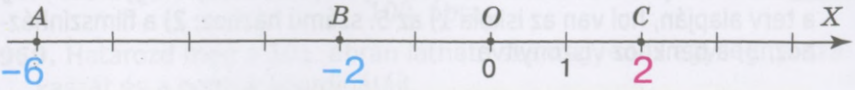
**981.** Számítsd ki:

1) $(424 - 25 \cdot 12) - 156 : 4$; 2) $360 : 15 + 5 \cdot (500 - 34 \cdot 12)$.

**982.** Egy boltba öt-öt láda mandarint, narancsot és banánt szállítottak. Egy ládában vagy 12,4 kg mandarin, vagy 14,6 kg banán, vagy 17,3 kg narancs van. Egy nap alatt 3,5 - 3,5 láda mandarint és narancsot, illetve 3 láda banánt adtak el. Hány kilogramm gyümölcsöt vételezett a bolt? Mennyit adtak el? Mennyi gyümölcs maradt?

# 23. § A SZÁM ABSZOLÚT ÉRTÉKE

Jelöljük a számegyenesen az $A(-6)$, $B(-2)$ és $C(2)$ pontokat (104. ábra)! Melyik pont van legtávolabb a számlálás kezdőpontjától, az $O$ ponttól? Az $A$ pont, mivel $OA = 6$ egység, az $OB = OC = 2$ egység.




104. ábra

Összehasonlítva az $A$, $B$ és $C$ pontok origótól való távolságát, meghatároztuk az $OA$, $OB$ és $OC$ szakaszok hosszát. Azt mondjuk, hogy meghatároztuk a $-6$, $-2$ és $2$ számok abszolút értékét. Tehát, $-6$ abszolút értéke 6, $-2$ abszolút értéke pedig ugyanúgy, mint 2 abszolút értéke 2-vel egyenlő.

A szám abszolút értékét két függőleges vonallal jelöljük: | |. Az $|a|$ jelölést így olvassuk: „az $a$ szám abszolút értéke".

A –6, –2 és 2 számok esetében leírhatjuk:

$$|-6| = 6, \qquad |-2| = 2, \qquad |2| = 2.$$

**Figyeld meg:**

a szám abszolút értéke azt mutatja, milyen távolságra van a szám a számlálás kezdőpontjától, az origótól.

Ebben rejlik a szám abszolút értékének mértani értelmezése. Ebből következik, hogy egy szám abszolút értéke nem lehet negatív. Az az állítás, hogy „egy szám abszolút értéke – 24" értelmezhetetlen.

Mennyi 0 abszolút értéke? 0 abszolút értéke 0:

$$|0| = 0.$$

A $B(-2)$ és $C(2)$ pont elhelyezkedése különleges (104. ábra). Ez a két pont ugyanolyan távolságra van a számlálás $O$ kezdőpontjától, csak különböző oldalain. Azt is mondhatjuk, ahhoz, hogy ezekbe a pontokba érjünk, ellenkező irányokba kell haladni, mégpedig ugyanakkora távolságot, 2 egységet megtéve. Az ilyen számokat, mint –2 és +2, *ellentett számoknak* nevezzük. Ezen számok ellenkező előjelűek, viszont abszolút értékük egyenlő:

$$|-2| = |2| = 2.$$

**Jegyezd meg!**

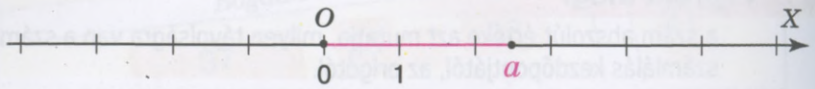
Azokat a számokat, melyek abszolút értékei egyenlő, viszont ellenkező előjelűek, ***ellentett számoknak*** nevezzük.
A 0 önmaga ellentettje.

Hogyan kell leírni egy adott szám ellentettjét? Ehhez elegendő a szám előjelét ellenkezőjére cserélni. Például +5 ellentettje –5, a –5 ellentettje viszont +5 = 5.

**1. feladat.** Mivel egyenlő 1) a pozitív szám; 2) a negatív szám abszolút értéke?

**Megoldás.** 1. Legyen $a$ pozitív szám! A számegyenesen ez a szám a számlálás $O$ kezdőpontjától, az origótól jobbra van (105. ábra). A pont origótól való távolsága megegyezik magával a szám-mal. Tehát a pozitív $a$ szám abszolút értéke egyenlő az adott számmal:

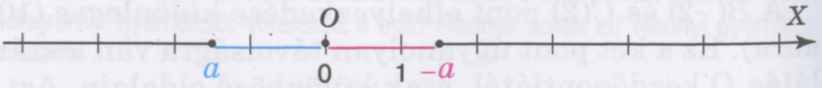
$|a| = a$, ha $a$ pozitív szám.




105. ábra

2. Legyen $a$ negatív szám! A számegyenesen ez a szám a számlálás $O$ kezdőpontjától, az origótól balra helyezkedik el (106. ábra). A pont origótól való távolsága megegyezik az adott szám ellentett számának origóhoz való távolságával: $-a$. Tehát, a negatív $a$ szám abszolút értéke az adott szám ellentettjével egyenlő:

$|a| = -a$, ha $a$ negatív szám.




106. ábra

**Jegyezd meg!**

**Az abszolút érték tulajdonságai**

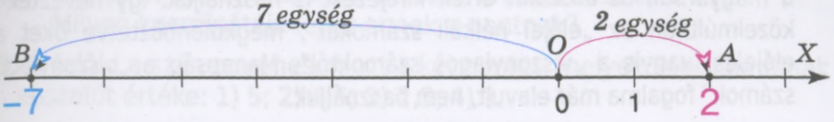
1. A pozitív szám abszolút értéke maga a szám.
2. A negatív szám abszolút értéke önmaga ellentettjével egyenlő.
3. A nulla abszolút értéke 0.

Röviden így írjuk:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a \text{ pozitiv szám,} \\ -a, \text{ ha } a \text{ negatív szám,} \\ 0, \text{ ha } a = 0. \end{cases}$$

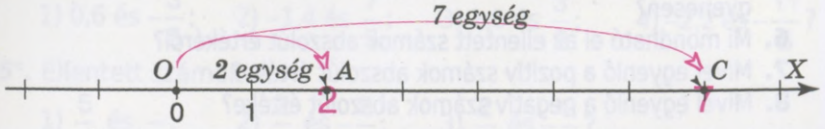
**2. feladat.** Határozzuk meg az alábbi pontok távolságát: 1) $A$ (2) és $B$ (–7); 2) $A$ (2) és $C$ (7); 3) $D$ (–2) és $B$ (–7).

**Megoldás.** 1. Jelöljük az $A(2)$ és $B(-7)$ pontot egy számegyenesen (107. ábra)! Az adatokból következik, hogy $OA = 2$ egységgel, $OB = 7$ egységgel. Mivel az $A(2)$ és $B(-7)$ pont az $O$ origótól különböző oldalakra fekszik, ezért $AB = OB + OA = 7 + 2 = 9$ (egység). Tehát, a keresett távolság a pontok abszolút értékeinek összegével egyenlő.



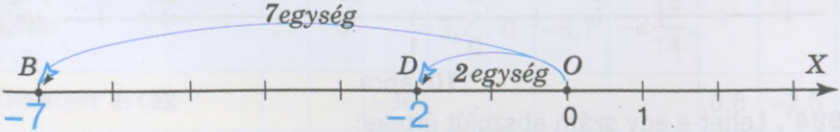

107. ábra

2. Jelöljük az $A(2)$ és $C(7)$ pontot egy számegyenesen (108. ábra)! Az adatokból következik, hogy $OA = 2$ egységgel, $OC = 7$ egységgel. Mivel az $A(2)$ és $C(7)$ pont az $O$ origótól jobbra esnek, ezért $AC = OC - OA = 7 - 2 = 5$ (egység). Tehát, a keresett távolság a nagyobb abszolút érték és a kisebbik abszolút érték különbségével egyenlő.




108. ábra

3. Jelöljük a $D(-2)$ és $B(-7)$ pontot egy számegyenesen (109. ábra)! Az adatokból következik, hogy $OD = 2$ egységgel, $OB = 7$ egységgel. Mivel a $D(-2)$ és $B(-7)$ pont az $O$ origótól balra esik, ezért $DB = OB - OD = 7 - 2 = 5$ (egység). Tehát, a keresett távolság a nagyobb abszolút érték és a kisebbik abszolút érték különbségével. egyenlő.




109. ábra

**Figyeld meg:**

ahhoz, hogy meghatározzuk két pont távolságát koordinátáik alapján:

- össze kell adni a koordináták abszolút értékeit, ha azok különböző előjelűek;
- a nagyobbik abszolút értékből ki kell vonni a kisebbik abszolút értéket, ha a koordináták előjelei azonosak.

## További tudnivalók

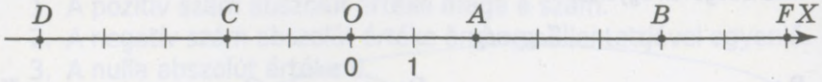
A modulus szó latin eredetű: *modulus* – mérték. A „modulus" szó mellett a magyarban az *abszolút érték* kifejezést is használjuk. Így nevezték a közelmúltban az „előjel nélküli számokat", megkülönböztetve őket az előjeles, vagyis a „viszonylagos számoktól". Manapság a „viszonylagos számok" fogalma már elavult, nem használjuk.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mi a szám abszolút értéke?
2. Milyen értéket vehet fel az abszolút érték?
3. Mennyi a 0 abszolút értéke?
4. Milyen számokat nevezünk ellentett számoknak?
5. Miben rejlik az ellentett számok helyének jellegzetessége a számegyenesen?
6. Mi mondható el az ellentett számok abszolút értékéről?
7. Mivel egyenlő a pozitív számok abszolút értéke?
8. Mivel egyenlő a negatív számok abszolút értéke?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**983'.** Mekkora távolságra vannak a feltüntetett pontok a számlálás kezdőpontjától (110. ábra)? Mennyi a pontok koordinátáinak abszolút értéke?




110. ábra

**984'.** Lehet-e egy szám abszolút érteke:

1) 0; 2) –2; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 157,2; 5) –30; 6) $-\frac{4}{9}$; 7) $\frac{18}{3}$; 8) –101,1?

**985'.** Ellentett számok-e az alábbi számok:

1) 6 és –6; 2) 15 és 0; 3) 28 és 82; 4) –56 és 56; 5) 119 és –191?

**986'.** Igaz-e, hogy –10 és az alábbi szám ellentett szám:

1) 0; 2) –10; 3) 10?

**987°.** Jelöld a számegyenesen az alábbi számoknak megfelelő pontokat:

1) 3,5; 2) –7; 3) 3; 4) –6.

Határozd meg a koordináták abszolút értékét!

**988°.** Jelöld a számegyenesen az alábbi számoknak megfelelő pontokat: 1) 0; 2) –5; 3) 8. Határozd meg a koordináták abszolút értékét.

**989°.** Egy pont koordinátájának abszolút értéke: 1) 2; 2) 4; 3) 3. Milyen koordinátája lehet ennek a pontnak?

**990°.** Egy pont koordinátájának abszolút értéke: 1) 5; 2) 8. Milyen koordinátája lehet ennek a pontnak?

**991°.** Jelöld a számegyenesen azt a két pontot, melyek koordinátáinak abszolút értéke: 1) 5; 2) 4,5; 3) 2,5; 4) 1.

**992°.** Jelöld a számegyenesen azt a két pontot, melyek koordinátáinak abszolút értéke: 1) 4; 2) 3,5; 3) 3; 4) 1,5.

**993°.** Mekkora az $A(a)$ pont és a számlálás kezdőpontja közötti távolság, ha:

1) $|a| = 1$; 2) $|a| = 12$; 3) $|a| = \frac{4}{9}$; 4) $|a| = 3{,}8$?

**994°.** Ellentett számok-e:

1) 0,6 és $-\frac{3}{5}$; 2) –1,4 és $\frac{7}{5}$; 3) 1,5 és $\frac{3}{2}$; 4) –2,2 és $-\frac{11}{5}$?

**995°.** Ellentett számok-e:

1) $\frac{5}{2}$ és $-$; 2) $\frac{2}{5}$ és $-\frac{5}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$ és $-\frac{2}{5}$?

**996°.** Válogasd ki a 32; $3\frac{1}{4}$; $-\frac{4}{5}$; –0,4; –32; $\frac{5}{4}$; $-3\frac{3}{4}$; 3,6; $\frac{4}{5}$; 0,4 számok közül az ellentett számpárokat.

**997°.** Milyen adatokkal kell kitölteni a 6. táblázatot?

*6. táblázat*

| **Szám** | 13 | –6 | | 5,7 | 0 | –8,7 | $-2\frac{13}{14}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ellentett érték** | | | –30 | | | | | 0,8 | –2,6 |

**998°.** Írd le azt a számot, amely ellentettje:

1) 5,6; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 0; 4) –5.

**999°.** Írd le az alábbi számok ellentettjét:

1) 41; 2) –7,2; 3) $2\frac{1}{3}$; 4) –8,09.

**1000°.** Határozd meg a $p$ értékét, ha:

1) $-p = 9$; 2) $-p = -20$; 3) $-p = 0{,}4$; 4) $-p = 0$.

***1001***°. Határozd meg $-x$ értékét, ha:
1) $x = 9{,}5$; 2) $x = -6$; 3) $x = -30$; 4) $x = 38$.

**1002**°. Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $-x = 34$; 2) $-x = 5$; 3) $-x = -65$; 4) $-x = -8$.

***1003***°. Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $-x = 28$; 2) $-x = 2$; 3) $-x = -86$; 4) $-x = -5$.

**1004**°. Milyen adatokkal kell kitölteni a 7. táblázatot?

*7. táblázat*

| **Szám** | 13 | –6 | 5,7 | 0 | –8,7 | $4\frac{8}{9}$ | $-2\frac{13}{14}$ | –0,8 | –2,6 | 700 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A szám abszolút értéke** | | | | | | | | | | |

***1005***°. Határozd meg az alábbi számok abszolút értékét:
1) 7; 4) 0; 7) 100; 10) 0,01;
2) –8; 5) –1; 8) –250; 11) 2,8;
3) –42; 6) $-$; 9) $-\frac{8}{17}$; 12) $-1\frac{2}{3}$.

**1006**°. Számítsd ki:
1) $|-3| \cdot |-4|$; 3) $|0| \cdot |-5|$; 5) $|-\frac{8}{9}| \cdot |-9|$;
2) $|28| : |7|$; 4) $|-\frac{1}{2}| + |2|$; 6) $|144| : |-12|$.

**1007**°. Határozd meg az alábbi számok abszolút értékeinek összegét és szorzatát:
1) –0,6 és 3; 3) 44 és –12; 5) –22 és 5;
2) –24 és 12; 4) –15 és –5; 6) –6 és 16.

***1008***°. Határozd meg az alábbi számok abszolút értékeinek összegét és szorzatát:
1) 6 és –3; 2) 24 és –12; 3) –44 és 12; 4) –3 és –25.

**1009**°. Nevezd meg azokat a számokat, melyek abszolút értéke az alábbi számmal egyenlő:
1) 18; 2) 5,4; 3) 12,1; 4) 254; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $7\frac{1}{7}$.

***1010***°. Nevezd meg azt a negatív számot, melynek abszolút értéke az alábbi számmal egyenlő:
1) 24; 2) 0,4; 3) 14,25; 4) 311.

**1011**°. Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $|x| = 15$; 3) $|x| = 4{,}5$; 5) $|x| = \frac{2}{3}$;
2) $|x| = 100$; 4) $|x| = 7{,}2$; 6) $|x| = 0$.

**1012°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $|x| = 1$; 2) $|x| = 125$; 3) $|x| = 7{,}8$; 4) $|x| = \frac{6}{7}$.

**1013°.** Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $5 + 8 \cdot |x|$, ha: a) $x = 0{,}4$; б) $x = -0{,}4$;

2) $17 - 16 \cdot |x|$, ha: a) $x = \frac{3}{4}$; б) $x = -\frac{3}{4}$.

**1014°.** Határozd meg az alábbi összegek ellentettjét:

1) $|15| + |38|$; 3) $|43| + |-28|$;
2) $|-16| + |11|$; 4) $|-101| + |-6|$.

**1015°.** Határozd meg az alábbi különbségek ellentettjét:

1) $|14| - |12|$; 3) $|61| - |-31|$;
2) $|-21| - |21|$; 4) $|-11| - |-11|$.

**1016°.** Töltsd ki a 8. táblázatot?

*8. táblázat*

| $a$ | 15 | 7,8 | 90 | 0 | −23,4 | $\frac{1}{9}$ | $-2\frac{3}{7}$ | −0,01 | −200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-a$ | | | | | | | | | |
| $\|a\|$ | | | | | | | | | |
| $\|-a\|$ | | | | | | | | | |
| $-\|a\|$ | | | | | | | | | |
| $-\|-a\|$ | | | | | | | | | |

Milyen törvényszerűséget figyeltél meg?

**1017°.** Hasonlítsd össze az alábbi számok abszolút értékeit:

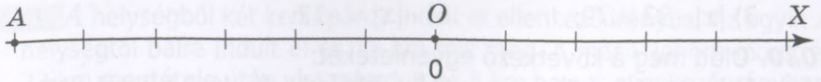
1) −41 és 41; 2) −2,5 és 2,5; 3) 0,2 és $-\frac{1}{5}$; 4) −1,5 és 1,5.

**1018°.** Igazold számegyenes segítségével, hogy: $|a| = |-a|$.

**1019°.** Számítsd ki az alábbi pontok távolságát:

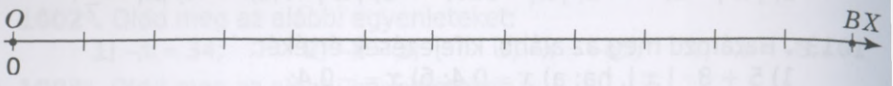
1) $A(25)$ és $B(23)$; 2) $C(-2)$ és $D(8)$;
3) $M(-14)$ és $N(-4)$.

**1020.** Határozd meg a 111. ábrán látható számegyenes egységnyi szakaszát, ha az $A$ pont koordinátájának abszolút értéke: 1) 3; 2) 2.




111. ábra

**1021.** Határozd meg a 112. ábrán látható számegyenes egységnyi szakaszát, ha a $B$ pont koordinátájának abszolút értéke: 1) 4; 2) 6.




112. ábra

**1022.** Magyarázd meg számegyenes segítségével az alábbi állításokat:
1) a pozitív szám ellentettje negatív szám;
2) a negatív szám ellentettje pozitív szám.

**1023.** Határozd meg az alábbi számok ellentettjének ellentettjét:
1) 36; 2) 217; 3) – 96; 4) –127.

**1024.** Mennyi az $|a|+a$, kifejezés értéke, ha $-a = -5{,}002$?

**1025.** Rajzold át a füzetedbe a 9. táblázatot és töltsd ki.

*9. táblázat*

| $x$ | 13 | 0 | –8,7 | 23 | –0,5 | –8 | –2,6 | –7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 0 | 0 | –23 | 2 | 3 | –7,4 | –23 |
| $\|x\| + \|y\|$ | | | | | | | | |

Milyen törvényszerűséget figyeltél meg?

**1026.** Számítsd ki:

1) $(|-11|-|-12|: 3) : |(21 : |-7| + \left|\frac{5}{2}\right| \cdot 1{,}6)|$;

2) $|-25| : |-5| + \left|-\frac{7}{3}\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\right| + |-0{,}5|$.

**1027.** Igaz-e, hogy:
1) $|-3|$ szám ellentettje –3;
2) 4 ellentettje $-|-4|$?

**1028.** Létezik-e olyan szám, amelyre teljesül, hogy: 1) $|a| = -|a|$; 2) $|-a| = -|a|$? Ha igen, akkor hozz fel rá példát!

**1029.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $|x| - 70 = 30$; 4) $|-x| = 54{,}9$;
2) $|x| + 55 = 68$; 5) $|-x| = -4$;
3) $|x| - 32 = 79$; 6) $-|x| = -12$.

**1030.** Oldd meg a következő egyenleteket:
1) $|-x| = 4{,}2$; 2) $|-x| = -115$; 3) $|-x| = 0$; 4) $11 + |x| = 43$.

**1031.** Határozd meg: 1) $|-100|$ 20 %-át; 2) $|-250| + |1250|$ összeg 75%-át.

**1032.** Határozd meg a következő pontok távolságát:

1) $A$ (4,5) és $B\left(9\frac{1}{2}\right)$; 2) $C$ (–2,7) és $D$ (0,2); 3) $M\left(-2\frac{1}{2}\right)$ és $N$ (–4,5).

**1033.** Hányszor nagyobb az $A(-62)$ és $M(-7)$ pont távolsága a $B(1,4)$ és $C\left(6\frac{2}{5}\right)$ pont közötti távolságnál?

**1034*.** Az $a$ mely értéke mellett lesz a $2a - 8$ kifejezés értéke önmaga ellentettje?

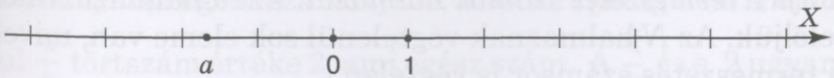
**1035*.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $||x|+ 2| = 0$;
2) $||x|- 5| = 0$;
3) $| 4 - x | + 128 = 0$;
4) $|-x| + 3 = 125$.

**1036*.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $3 \cdot |x| = |x|+ 8$; 2) $2 \cdot |x|- 6 =|-x|$; 3) $4 \cdot |x - 2|= |2 - x|$.

**1037*.** Az alábbi számegyenesen (113. ábra) az 1 és $a$ számokat jelölő pontokat tüntettük fel. Rajzold át ezt a számegyenest a füzetedbe, és jelöld rajta az $|a|$, $2|a|$ számokat jelölő pontokat.




113. ábra

**1038*.** Határozd meg az alábbi pontok közötti távolságot:

1) $A$ ($|a - 1| + 4$) és $B$ ($|-a + 1|$);
2) $A$ ($-|a|$) és $B$ ($|2a|$), ha az $M(a)$ és $N(-5a)$ pontok távolsága 6 és az $a$ szám pozitív.

**1039*.** Egyszerűsítsd a:

$|a| + |a + 2| - 2$ kifejezést, ha $a$ pozitív szám.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1040.** $A$ helységből két gépkocsi indult el ellenkező irányba. Az egyik $A$ helységtől jobbra indult és 60 km/h sebességgel haladt. A másik balra indult el, és 2 óra alatt 100 km tett meg. Mekkora lesz a két jármű között a távolság 2 órával az indulás után?

**1041.** $A$ helységből két kerékpáros indult el ellenkező irányba. Az egyik $A$ helységtől balra indult el és 15 km tett meg. A másik jobbra indult és 23 km megtétele után visszafordult és 5 km haladt ellenkező irányban. Melyik kerékpáros távolodott el kevésbé az $A$ helységtől?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1042.** Nevezd meg a 15-nél nagyobb, de 23-nál kisebb természetes számokat.

**1043.** Nevezd meg a $\frac{67}{4}$-nél kisebb legnagyobb természetes számot.

**1044.** Végezd el az alábbi műveleteket:

1) 217 m 7 dm 6 cm + 95 m 34 cm;
2) 734 kg 886 g – 115 kg 978 g;
3) 1 nap 23 óra 56 perc + 4 nap 1 óra 24 perc;
4) 4 nap 6 óra 15 perc 45 másodperc – 2 nap 23 óra 54 perc 20 másodperc.

# 24. § EGÉSZ SZÁMOK. RACIONÁLIS SZÁMOK

Az ötödik osztályban a természetes számokkal foglalkoztatok. Ezek azok a számok, melyeket számláláskor használunk: 1; 2; 3; 4; ... . Az összes természetes szám alkotja a *természetes számok halmazát*. Ezt a halmazt $N$-nel jelöljük. Az $N$ halmaznak végtelenül sok eleme van, mivel a természetes számsor is végtelen.

Röviden így írjuk: $N = \{1; 2; 3; 4; ...\}$.

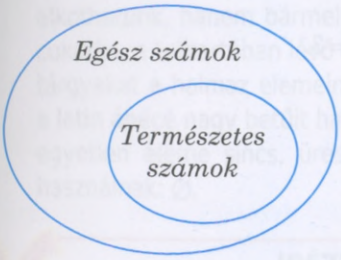
*OA* természetes számokon kívül más számhalmazok is léteznek.

A természetes számok, azok ellentettjei és a nulla alkotják *az egész számok halmazát*. Ezt a halmazt Z-vel jelöljük. Az egész számok halmaza ugyanúgy, mint a természetes számoké, végtelen.

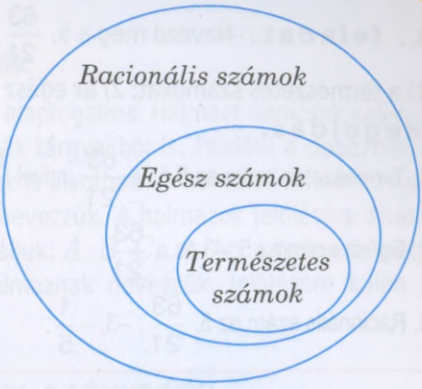
Röviden így írjuk:

$$Z = \{... - 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; ...\}.$$

Bármelyik természetes szám eleme az egész számok halmazának. Viszont nem mindegyik egész szám eleme a természetes számok halmazának. Valójában mindegyik negatív szám, ami egy természetes szám ellentettje, eleme az egész számok halmazának. De ez már nem természetes szám. Az egész számok és a természetes számok közötti összefüggést a 114. ábra szemlélteti.




114. ábra




115. ábra

Igaz-e, hogy a pozitív egész számok természetes számok? Igen.

Az egész számokon kívül a törtszámokat is ismeritek. Néhány tört egész számot jelöl, más tört pedig nem. Például $\frac{4}{2}$ törtszám értéke 2, ami egész szám. A $\frac{4}{2}$ és a 2 ugyanannak a számnak két különböző alakja $\frac{4}{2}$ a 2 törtalakja. Viszont a $\frac{2}{4}$ tört még az egyszerűsítés után is törtszám marad.

**Figyeld meg:**

nem mindegyik törtalakú szám törtszám.

Az egész számok és a törtszámok alkotják a *racionális számok halmazát*. Ezeket a számokat $Q$-val jelöljük. A racionális számok halmaza ugyanúgy, mint az egész számok halmaza, végtelen. A természetes számok, az egész számok és a racionális számok közötti összefüggést a 115. ábra szemlélteti.

**1. feladat.** Nevezd meg a 5, $\frac{63}{21}$, $-3$, $-\frac{1}{5}$ számok közül:

1) a természetes számokat; 2) az egész számokat; 3) a racionális számokat.

**Megoldás.**

1. Természetes szám az 5 és a $\frac{63}{21}$, mivel $\frac{63}{21} = 3$.

2. Egész szám az 5; $-3$ és a $\frac{63}{21}$.

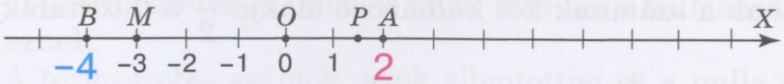
3. Racionális szám az 5, $\frac{63}{21}$, $-3$, $-\frac{1}{5}$.

**Figyeld meg:**

- mindegyik természetes szám egyben egész szám és racionális szám is;
- mindegyik egész szám racionális szám is;
- nem mindegyik racionális szám egész szám;
- nem mindegyik racionális szám természetes szám.

**2. feladat** Jelölj a számegyenesen az $A(2)$ és $B(-4)$ pont között olyan pontot, amely 1) negatív egész számot; 2) pozitív racionális számot jelöl.

**Megoldás.** Rajzoljunk egy számegyenest, és tüntessük fel rajta az $A$ és $B$ pontot (116. ábra)!




116. ábra

1. Az $A(2)$ és $B(-4)$ pontok között öt olyan pont van, melynek koordinátája egész szám: $-3$; $-2$; $-1$; 0; 1. A keresett M pontnak, ami negatív egész szám, a $B$ és $O$ pont között kell lennie. Ez lehet például az $M(-3)$.

2. Valójában az $A(2)$ és $B(-4)$ pont között végtelen sok olyan pont van, melynek koordinátája racionális szám. A keresett $P$ pont, melynek a koordinátája pozitív racionális szám, az $O$ és az $A$ pont között kell, hogy legyen. Ez lehet például a $P(1{,}5)$.

**Figyeld meg:**

két egész szám között végtelen sok racionális szám van.



## További tudnivalók

A „halmaz" a matematika egyik alapfogalma. Halmazt nemcsak számokból alkothatunk, hanem bármely más tárgyakból is. Például a dobozban lévő cukorka, a tolltartóban lévő tollak is alkothatnak halmazt. A halmazt alkotó tárgyakat a halmaz elemeinek nevezzük. A halmazok jelölésére általában a latin ábécé nagy betűit használjuk: $A$, $B$, $C$, ... . Azt a halmazt, melynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük. Jelölésére külön jelet használnak: $\varnothing$.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Melyek a természetes számok?
2. Hogyan jelöljük a természetes számok halmazát?
3. Melyek az egész számok?
4. Hogyan jelöljük az egész számok halmazát?
5. Mely számok alkotják a racionális számok halmazát?
6. Hogyan jelöljük a racionális számok halmazát?
7. Melyik egész szám nem negatív és nem természetes?
8. Mi az összefüggés a természetes, az egész és a racionális számok között?



## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1045'.** Nevezz meg négy:
1) természetes számot; 3) racionális számot;
2) egész számot; 4) törtszámot.

**1046'.** Igaz-e az alábbi állítás:
1) –11 egész szám;
2) 5 racionális szám;
3) –11 természetes szám;
4) 5 természetes szám;
5) –11 racionális szám;
7) –9,4 egész szám;
8) 0 racionális szám;
9) –9,4 racionális szám;
10) 0 egész szám;
11) –9, 4 természetes szám?

**1047'.** Igaza van-e Irénkének, amikor azt állítja, hogy:
1) $-\frac{1}{21}$ — racionális szám;
2) $-\frac{45}{2}$ — egész szám;
3) $3\frac{5}{17}$ — racionális szám;
4) $\frac{6}{3}$ — természetes szám?

**1048°.** Az alábbi állítások közül melyik igaz:
1) mindegyik természetes szám egész szám is;
2) mindegyik természetes szám racionális szám is;
3) mindegyik egész szám racionális szám is?

**1049°.** A 9; –8; 0; –4,6; 7,8; –475; 1143; $-2\frac{3}{5}$; –5,45; –96 számok közül írd ki:
1) a természetes számokat;
2) az egész számokat;
3) a pozitív számokat;
4) a negatív egész számokat;
5) a nempozitív racionális számokat.

***1050°.*** Az 1; $\frac{4}{3}$; $-4\frac{1}{2}$; –96,3; 0; –25; 283; 4,78; 11; $-\frac{11}{6}$; 56; –85; $7\frac{11}{12}$; 2577 számok közül írd ki:
1) az egész számokat;
2) az egész pozitív számokat;
3) az egész negatív számokat;
4) a törtszámokat;
5) a racionális számokat;
6) a negatív törtszámokat.

**1051°.** Az 534; –2,02; 0; $-\frac{3}{4}$; 33,01 számok közül írd ki:
1) a természetes számokat; 2) az egész számokat; 3) a racionális számokat.

**1052°.** Hozz fel példát olyan számra:
1) amely egész szám, de nem természetes;
2) racionális, de nem természetes és nem egész szám.

**1053°.** Hány egész és hány természetes szám van a számegyenesen az alábbi számok között:
1) –12 és 12; 2) –62 és 62?

**1054°.** Hány természetes és hány egész számot lehet feltüntetni egy számegyenesen az alábbi pontok között:
1) $A(12)$ és $B(28)$; 2) $C(-3,5)$ és $D(-12,9)$; 3) $M(-3,2)$ és $N(10)$? Nevezd meg ezeket a számokat.

***1055°.*** Hány egész számot lehet feltüntetni egy számegyenesen az alábbi pontok között:
1) $A(2)$ és $B(2,5)$; 2) $C(-5)$ és $D(-12,9)$?

**1056°.** Jelöld egy számegyenesen a $7\frac{2}{5}$-től balra lévő összes pozitív egész számot.

***1057°.*** Jelöld egy számegyenesen a 5-től balra lévő összes pozitív egész számot és ezek ellentettjeit.

**1058°.** Írd le az összes olyan egész számot, melynek az abszolút értéke kisebb az alábbi számnál:

1) 3; 2) 4,5; 3) 1,25.

**1059.** A 6; –11; $\frac{12}{6}$; 0,8; –1004; $-1\frac{2}{9}$; $3\frac{1}{2}$; $\frac{9}{3}$; $-\frac{6}{2}$; $\frac{23}{8}$; $-\frac{15}{5}$ számok közül, melyik: 1) egész szám; 2) törtszám; 3) természetes szám; 4) racionális szám?

**1060.** Írd ki a 15; –71; 0; – 1,1; 4,05; $\frac{1}{7}$ számok ellentettjei közül:

1) a természetes számokat;
2) az egész számokat;
3) a nempozitív egészeket;
4) a racionális számokat.

***1061.*** A –3; 1230; $-\frac{35}{7}$; $\frac{7}{35}$; $\frac{35}{7}$; $-\frac{7}{35}$; –2,8 számok közül melyik:

1) egész, de nem természetes szám;
2) törtszám, de nem pozitív;
3) racionális, de nem egész szám?

**1062.** Határozd meg azokat a számokat, melyek abszolút értéke az alábbi számok közé esik:

1) 12 és 15; 3) –10 és 1; 5) 58,6 és 59,1;
2) –2 és 2; 4) 19 és 22; 6) $\frac{131}{17}$ és $\frac{137}{17}$.

**1063.** Igaz-e a következő egyenlőség:

1) $|a| = -a$, ha $a$ racionális szám;
2) $|a| = a$, ha $a$ természetes szám;
3) $|x| = -x$, ha $x$ egész szám;
4) $|x| = -x$, ha $x$ természetes szám?

***1064.*** Igaz-e a következő egyenlőség:

1) $|a| = a$, ha $a$ racionális szám;
2) $|x| = x$, ha $x$ egész szám?

**1065.** Add meg az $a$ szám azon értékét, melyre teljesül, hogy $-a$ és $a$ között a számegyenesen csak egy egész szám van.

**1066*.** Létezik-e olyan értéke az $a$ számnak, melyre a $-2a$ és $a$ számok között a számegyenesen 1) pontosan száz egész szám van; 2) egyetlen szám sincs? Hozz fel rá példát.

**1067*.** Mely természetes $x$ és $y$ számokra teljesül az:

$|x| + |y| = 6$ egyenlőség?

**1068*.** Mely egész $x$ és $y$ számokra teljesül az:

$|x|+|y|= 8$ egyenlőség?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1069.** Létezhet-e olyan osztály, amelyben a tanulók fele csak a spanyol nyelvet tanulja, a negyede csak a németet, a hetede csak a franciát és még három tanuló van, aki viszont csak a kínai nyelvet tanulja?

**1070.** Létezhet-e olyan osztály, amelyben az osztály harmada csak focizik, negyede kosarazik, nyolcada teniszezik, és még van öt olyan tanuló, aki semmilyen sportot sem űz?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1071.** Hasonlítsd össze a következő kifejezések értékeit:
1) 400 094 – 20 900 + 6 és 401 543 – 11 267 + 190;
2) 300 005 – 23 000 + 5 és 3 230 005 : 5 + 2.

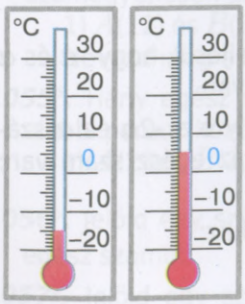
**1072.** Hasonlítsd össze az alábbi számokat:

1) 1,713 és 1,709; 2) 0,25 és $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{5}{6}$ és $\frac{6}{7}$.

**1073.** Szabolcs gondolt három számot. A három szám összege 61,5. Az első és a második szám összege 40,2, az első és a harmadik összege pedig 29,8. Melyik három számra gondolt Szabolcs?

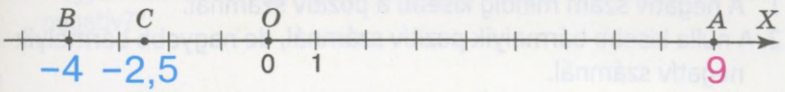
# 25. § RACIONÁLIS SZÁMOK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Szinte naponta találkozhatsz a racionális számok összehasonlításával. Télen például, amikor a kinti hőmérséklet –15°, úgy fogalmazunk, hogy a levegő hőmérséklete a nulla fok alatt van: $-15° < 0°$. Olvadáskor, amikor a hőmérséklet már +5°-ra melegszik, azt mondjuk, hogy a hőmérséklet a nulla fok felett van: $+5° > 0°$. Könnyen belátható, hogy –15° alacsonyabb (kisebb) +5°-nál (117. ábra). Valójában bármelyik negatív szám mindig kisebb bármelyik pozitív számnál.




117. ábra

Hasonlítsuk össze számegyenes segítségével a 9; –4 és 2,5 számokat! Jelöljük megfelelően $A$, $B$ és $C$ pontokkal az adott számokat (118. ábra)! Látható, hogy az $A(9)$ pont a másik két ponttól jobbra van a számegyenesen. Tehát, a 9 a legnagyobb szám. A másik két ponttól balra a $B(-4)$ pont helyezkedik el, ezért a –4 a legkisebb szám. Az adott számokat leírhatjuk növekvő sorrendben: –4; –2,5; 9.




118. ábra

**Jegyezd meg!**

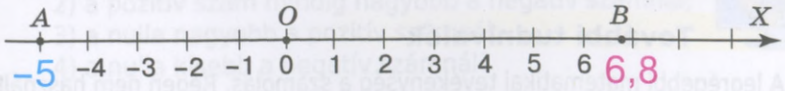
1. Két racionális szám összehasonlítása annyit jelent, hogy megállapítsuk, melyik szám a nagyobb, és melyik a kisebb.
2. Két racionális szám közül az a nagyobb, amelyik a másik számtól jobbra van a számegyenesen.

A racionális számok összehasonlításának eredményét számegyenlőtlenséggel írjuk le. Például,

$$-4 < 9; \quad 9 > -2{,}5; \quad -4 < -2{,}5 < 9.$$

**1. feladat.** Melyek azok az egész számok, amelyek nagyobbak -5-nél, de kisebbek 6,8-nél?

**Megoldás.** Jelöljük az $A(-5)$ és $B(6{,}8)$ pontokat a számegyenesen (119. ábra)! A keresett számok a feltüntetett $A$ és $B$ pont koordinátái között vannak. Ezek a számok: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.




119. ábra

Milyen törvényszerűséget figyelhetünk meg, ha összehasonlítjuk a –4; –3; –2; –1 számokat –5-tel? Ezek a számok –5-től –1-ig növekednek, viszont az abszolút értékeik pedig csökkennek. Pozitív számok esetében (1, 2, 3, 4, 5, 6) másmilyen szabály figyelhető meg: a számok is és az abszolút értékeik is növekednek. A nulla minden esetben nagyobb bárme-

lyik negatív számnál, és kisebb bármelyik pozitív számnál.

Megfogalmazhatjuk a racionális számok összehasonlítására vonatkozó szabályt. A szabály alkalmazásával nem szükséges számegyenest rajzolni ahhoz, hogy összehasonlítsunk két vagy több számot.

**Jegyezd meg!**

**Racionális számok összehasonlításának szabálya**

1. A negatív szám mindig kisebb a pozitív számnál.
2. A nulla kisebb bármelyik pozitív számnál, de nagyobb bármelyik negatív számnál.
3. Két pozitív szám közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolút értéke is nagyobb.
4. Két negatív szám közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolút értéke kisebb.

Azt, hogy az $a$ szám pozitív, így írjuk: $a > 0$.
Azt, hogy az $a$ szám negatív, így írjuk: $a < 0$.
Azt, hogy az $a$ szám nempozitív, így írjuk: $a \leq 0$.
Azt, hogy az $a$ szám nemnegatív, így írjuk: $a \geq 0$.

Igaz-e, hogy bármelyik racionális szám mindig nagyobb ellentettjénél? Nem. Például $-5$ ellentettje 5. Viszont $-5 < 5$.

**Figyeld meg:**

egy állítás cáfolásához elegendő egy példa.

**További tudnivalók**

A legrégebbi matematikai tevékenység a számolás. Régen nem használták a nullát. Az ókori görögök és rómaiak semmit sem tudtak a nulláról. Kínában a nulla helyét üresen hagyták. Először a maja indiánok használtak külön jelet a nullára. A maják a kezdetet jelölték nullával.

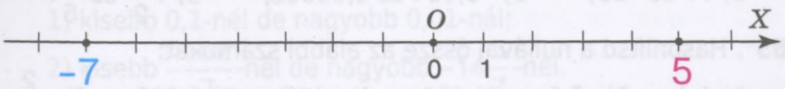
A nulla számjegy, ahogyan ma is használjuk, Indiából terjedt el. A nullát egy kis körrel jelölték. Az indiai matematikusok tették azt a forradalmi felfedezést, hogy a nullát nem úgy értelmezték, mint a szám hiányát, hanem, mint egy számot. Az első olyan feljegyzés, amiben már szerepel a nulla, a 876. évből származik.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mit értünk két természetes szám összehasonlításán?
2. Hogyan lehet két számot összehasonlítani a számegyenesen?
3. Hogyan kell összehasonlítani a pozitív és a negatív számokat?
4. Mely számok nagyobbak a nullánál? kisebbek a nullánál?
5. Két pozitív szám közül melyik a nagyobb? melyik a kisebb?
6. Két negatív szám közül melyik a kisebb? melyik a nagyobb?
7. Hogyan kell leírni, hogy egy szám pozitív? negatív? nempozitív? nemnegatív??

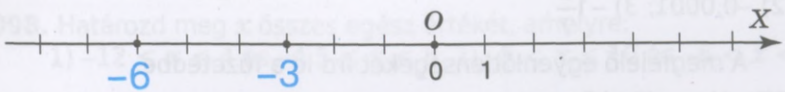
## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1074′.** Tüntesd fel a számegyenesen az 5 és –7 számot (120. ábra)! Melyik szám van a másiktól jobbra? Melyik egyenlőtlenség igaz 1) $5 > -7$; 2) $5 < -7$?




120. ábra

**1075′.** Tüntesd fel a számegyenesen a –3 és –6 számot (121. ábra)! Melyik szám van a másiktól balra? Melyik egyenlőtlenség igaz 1) $-3 > -6$; 2) $-3 < -6$?




121. ábra

**1076′.** Igaz-e az alábbi állítás:

1) a negatív szám mindig nagyobb a pozitív számnál;
2) a pozitív szám mindig nagyobb a negatív számnál;
3) a nulla nagyobb a pozitív számnál;
4) a nulla kisebb a negatív számnál?

**1077°.** Az 1; $\frac{12}{5}$; –89; $-\frac{2}{3}$; 0,54; –52,8; $-4\frac{2}{7}$; 245; –95; 0,128 számok közül melyek helyezkednek el a számegyenesen a nullától jobbra és melyek balra?

**1078°.** Rajzolj egy számegyenest! Tüntess fel ezen a számegyenesen három olyan racionális számot, melyek a –2-es számtól 1) jobbra; 2) balra vannak. Írd le a megfelelő egyenlőtlenségeket a füzetedbe.

**1079°.** Rajzolj egy számegyenest! Tüntess fel ezen a számegyenesen három olyan természetes számot, melyek 5,2-től 1) jobbra; 2) balra vannak. Írd le a megfelelő egyenlőtlenségeket a füzetedbe.

**1080°.** Hasonlítsd össze a számegyenes segítségével az alábbi számokat:

1) –2 és 0; 2) 2,5 és 0; 3) –8 és 6; 4) 2 és –9; 5) 1 és 0; 6) –5 és 0,5.

**1081°.** Mondj olyan egész számot, amely 1) kisebb –9-nél; 2) kisebb 23-nál; 3) kisebb –5-nél, de nagyobb –9-nél.

**1082°.** Mondj olyan egész számot, amely 1) nagyobb 79-nél; 2) kisebb 58-nál; 3) kisebb 4-nél, de nagyobb –1-nél.

**1083°.** Alkoss igaz egyenlőtlenséget az alábbi számpárokból:

1) 2 és –4; 2) –45 és 6; 3) –3,45 és 3,4; 4) 2,3 és –3,2; 5) $\frac{1}{2}$ és –0,2.

**1084°.** Alkoss igaz egyenlőtlenséget az alábbi számpárokból:

1) 77 és –99; 2) –0,004 és 0,00003; 3) $-\frac{5}{2}$ és $\frac{2}{5}$.

**1085°.** Hasonlítsd a nullával össze az alábbi számokat:

1) 4,4; 2) –3,1; 3) 438; 4) –438; 5) 0,005; 6) $-\frac{2}{3}$.

A megfelelő egyenlőtlenségeket írd le a füzetedbe.

**1086°.** Hasonlítsd össze a nullával a következő számokat: 1) 6,04; 2) –0,0001; 3) $-1\frac{5}{7}$.

A megfelelő egyenlőtlenségeket írd le a füzetedbe.

**1087°.** Hasonlítsd össze:

1) –72 és –32;

2) –4,2 és –4,201;

3) –1,2 és $-\frac{6}{5}$;

4) –0,25 és $-\frac{1}{4}$;

5) –0,25 és $-\frac{1}{3}$;

6) –5,6 és $-\frac{32}{6}$;

7) –6,4 és $-\frac{32}{5}$;

8) –0,6 és $-\frac{2}{5}$;

9) $-\frac{7}{3}$ és $-\frac{3}{7}$.

**1088°.** Hasonlítsd össze az alábbi számokat:

1) –34,2 és –9,99; 2) –3,5 és $-\frac{7}{2}$; 3) $-\frac{1}{5}$ és $-\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{9}{2}$ és $-\frac{2}{9}$.

**1089°.** Hasonlítsd össze az alábbi számokat:

1) 5,6 és 5,01; 2) –5,6 és 5,01; 3) 5,6 és –5,01; 4) –5,6 és –5,01.

**1090°.** Rendezd a –10; 9; 45; –6,7; –31,4; 0,08; 0; –12,5 számokat 1) abszolút értékeik növekvő sorrendjébe; 2) növekvő sorrendbe.

***1091°.*** Rendezd a $-72$; $13$; $0{,}79$; $-\frac{1}{10}$; $-14$; $0$; $-1{,}07$ számokat 1) abszolút értékeik csökkenő sorrendjébe; 2) csökkenő sorrendbe.

**1092.** Sorold fel $x$ összes azon természetes értékét, melyre:
1) $2 \geq x$; 2) $2 > x$; 3) $-5 < x \leq 10$; 4) $x > 6$ és $x \leq 7$.

***1093.*** Sorold fel $x$ összes olyan egész értékét, melyre:
1) $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}6$; 2) $-56 < x \leq -41$; 3) $x > -1\frac{1}{3}$ és $x \leq \frac{3}{2}$.

**1094.** Írd le azokat a természetes számokat, melyek abszolút értéke nem nagyobb: 1) 8-nál; 2) 4,3-nél; 3) $2\frac{3}{5}$-nél.

***1095.*** Írd le azokat a egész számokat, melyek abszolút értéke nem nagyobb:
1) 4,9-nél; 2) 10-nél.

**1096.** Hozz fel példát olyan racionális számra, amely:
1) kisebb 0,1-nél de nagyobb 0,01-nál;
2) kisebb $-\frac{102}{7}$-nél de nagyobb $-14\frac{5}{7}$-nél.

***1097.*** Sorold fel azokat az egész számokat, melyek:
1) nagyobbak $-28{,}9$ és kisebbek $-21$;
2) kisebbek $1\frac{1}{5}$-nél és nagyobbak $-0{,}6$-nél.

**1098.** Határozd meg $x$ összes egész értékét, amelyre:
1) $-12 \leq x \leq 4$ és $-4{,}5 \leq x \leq 8$; 2) $-5 < x \leq 10$ és $-6 < x < 0$.

**1099.** Jelöld egy számegyenesen $x$ azon egész értékeit, amelyre teljesül a következő egyenlőtlenség: 1) $|x| < 7$; 2) $|x| \leq 7$; 3) $|x| < 7{,}2$.

**1100.** Határozd meg $x$ azon természetes értékeit, amelyre teljesül az $|x| < 10$ egyenlőtlenség.

***1101.*** Jelöld egy számegyenesen $x$ azon egész értékeit, melyre teljesül a következő egyenlőtlenség: 1) $1\frac{1}{5} \leq x < 5{,}8$; 2) $1\frac{1}{5} \leq |x| < 5{,}8$.

**1102.** Rendezd csökkenő sorrendbe a következő számokat: $-2{,}6$; $-|0{,}72|$; $-62$; $|-4{,}2|$; $4{,}3$; $\frac{6}{5}$; $-0{,}2$; $\left|-2\frac{1}{5}\right|$; $-1{,}25$; $-\left|\frac{1}{3}\right|$; $|4{,}29|$.

***1103.*** Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat: $0{,}75$; $-|-0{,}2|$; $-4{,}3$; $|-4{,}2|$; $4{,}3$; $\frac{1}{5}$; $-0{,}21$; $\left|-\frac{1}{4}\right|$; $-1{,}25$; $-|1{,}1|$; $|0|$.

**1104.** Rendezd növekvő sorrendbe a következő egyenletek megoldásait:

1) $-x = 4{,}2$; 3) $-x = -35$; 5) $-x = -\frac{1}{9}$;

2) $-x = -18{,}4$; 4) $-x = -10$; 6) $-x = 4\frac{2}{9}$.

***1105.*** Rendezd csökkenő sorrendbe a következő egyenletek megoldásait:

1) $-x = 2{,}7$; 3) $-x = -3{,}01$;

2) $-x = -2{,}4$; 4) $-x = 0$.

**1106.** Igaz-e, hogy bármely racionális szám mindig nagyobb reciprokánál?

**1107*.** Határozd meg $x$ azon legkisebb egész értékét, melyre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

1) $-1{,}3 \leq |x| < 73{,}8$; 2) $0{,}5 < |x| \leq 22{,}2$.

**1108*.** Melyik nagyobb:

1) a szám vagy az abszolút értéke;

2) a szám vagy az ellentettje?

**1109*.** Jelölj a számegyenesen hat olyan számot, amelyre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

1) $|x + 2| > 4$; 2) $|x + 5| > 10$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1110.** Jegyezd fel a kültéri hőmérő adatait egy héten keresztül! A kapott adatokat rendezd növekvő sorrendbe.

**1111.** Orsolyának 15 hrivnya 85 kopijkája van. Az üzletbe érve Orsolya teljesen elbizonytalanodott, mit is vásároljon. Segíts a kislánynak, elegendő pénze van-e az alábbi tételekre:

1) 4 darab jégkrémre, melyek darabonkénti ára 3,85 hrn.;

2) 300g cukorkára, melyből 1 kg 54 hrn. 70 kop.-ba kerül.

Melyik tételért kell többet fizetni?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1112.** Melyik összeg kisebb: 48 577 + 5877 + 3 vagy 9653 + 4988 + 5207?

**1113.** Számítsd ki: 1) $\left(\frac{16}{21}+\frac{2}{3}\right):1\frac{3}{7}$; 2) $\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{24}{30}$.

**1114.** Számítsd ki: 1) 6,8 + 7,4 + 0,78 + 13 + 0,62;

2) 3,4 + 0,876 + 4,6 + 0,824 + 36.

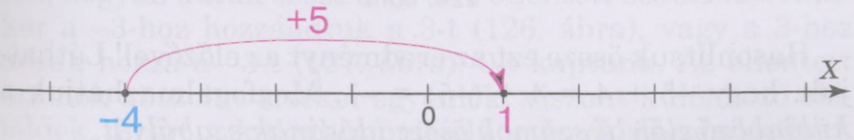
# 26. § RACIONÁLIS SZÁMOK ÖSSZEADÁSA

Mindegyik racionális számot meghatározza az előjele és abszolút értéke. Ezért két racionális szám összeadásakor fontos tisztázni az összeg előjelét és abszolút értékét az összeadandók előjelétől és abszolút értéküktől függően. Két pozitív szám esetében nyilvánvaló, mivel **két pozitív szám összege pozitív szám.**

De hogyan kell negatív számhoz hozzáadni egy pozitív számot? Gondolkodjunk a számegyenes segítségével!

Adjuk össze –4-et és 5-öt! Jelöljük meg a számegyenesen a –4-et jelölő pontot, majd lépjünk a számegyenesen jobbra 5 egységet (122. ábra)! Láthatjuk, hogy az 1-es koordinátájú pontba érkeztünk. Tehát:

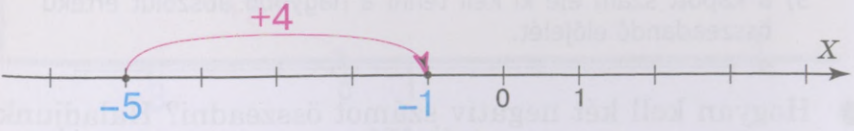
$$-4 + 5 = 1.$$




122. ábra

Adjuk össze –5-öt és 4-et! Jelöljük meg a számegyenesen a –5-öt jelölő pontot, majd lépjünk a számegyenesen jobbra 4 egységet (123. ábra)! Láthatjuk, hogy a –1-es koordinátájú pontba érkeztünk. Tehát:

$$-5 + 4 = -1.$$



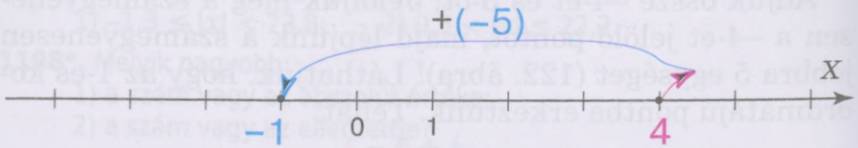

123. ábra

Láthatjuk, hogy –4 és 5, valamint –5 és 4 összeadásakor az abszolút értékeket nem összeadtuk, hanem kivontuk, méghozzá a nagyobb abszolút értékből a kisebbet. Az összeg előjele pedig megegyezik a nagyobb abszolút értékű összeadandó előjelével.

Megváltozik-e két különböző előjelű szám összege, ha felcseréljük az összeadandókat: a pozitív számhoz adjuk hozzá a negatív számot? Nem, az összeg nem változik. Viszont a magyarázat a számegyenesre támaszkodva megváltozik.

Adjunk 4-hez –5-öt! Jelöljük a számegyenesen a 4-es számot! A –5 az 5 ellentettje, ezért a számegyenesen a jelölt ponttól nem jobbra, hanem ellenkezőleg, balra kell 5 egységet lépni. Lépjünk a 4-től balra 5 egységet! A –1 koordinátájú pontba érünk (124. ábra). Tehát:

$$4 + (-5) = -1.$$




124. ábra

Hasonlítsuk össze ezt az eredményt az előzővel! Láthatjuk, hogy $-5 + 4 = 4 + (-5) = -1$. Megfogalmazhatjuk a *különböző előjelű számok összeadásának szabályát.*

**Jegyezd meg!**

**Különböző előjelű számok összeadásának szabálya**

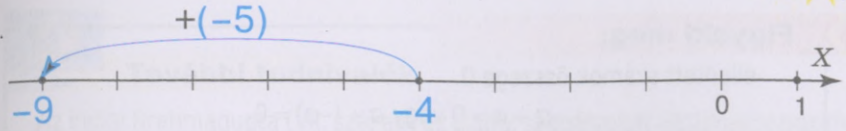
Ahhoz, hogy két különböző előjelű számot összeadjunk:

1) meg kell határozni az összeadandók abszolút értékét;
2) a nagyobb abszolút értékből ki kell vonni a kisebbet;
3) a kapott szám elé ki kell tenni a nagyobb abszolút értékű összeadandó előjelét.

Hogyan kell két negatív számot összeadni? Haladjunk úgy, mint az előző!

Adjunk –4-hez –5-öt! Jelöljük a számegyenesen a –4-es számot! Lépjünk tőle a nyíllal ellentétes irányban, azaz balra 5 egységet! A –9 koordinátájú pontba érünk (125. ábra). Tehát:

$$-4 + (-5) = -9.$$




125. ábra

Megfogalmazhatjuk az *azonos előjelű számok összeadásának szabályát.*

**Jegyezd meg!**

**Azonos előjelű számok összeadásának szabálya**

Ahhoz, hogy két azonos előjelű számot összeadjunk:

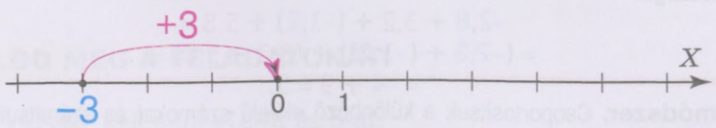
1) meg kell határozni az összeadandók abszolút értékét;
2) össze kell adni az abszolút értékeket;
3) a kapott szám elé ki kell tenni az összeadandók előjelét.

Mi a különlegessége az ellentett számok összeadásának? Nézzük! Figyeld meg a 126. és a 127. ábrát! Láthatod, hogyan adtuk össze a –3 és 3 ellentett számokat. Amikor a –3-hoz hozzáadtuk a 3-t (126. ábra), vagy a 3-hoz adtuk hozzá a –3-t (127. ábra), 0-t kaptunk. Az ellentett számok abszolút értékei egyenlők, viszont különböző előjelűek. Ezért a különböző előjelű számok összeadásának szabálya szerint, a –3 és 3 ellentett számok összegének abszolút értéke egyenlő az abszolút értékek különbségével, ez a különbség viszont nulla. Leírhatjuk, hogy:

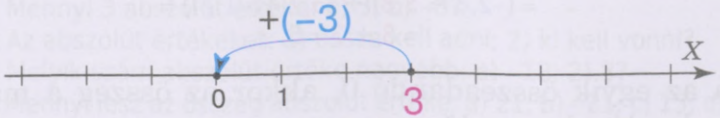
$$-3 + 3 = |-3| - |3| = 3 - 3 = 0$$

vagy

$$3 + (-3) = |3| - |-3| = 3 - 3 = 0.$$




126. ábra




127. ábra

**Figyeld meg:**

ellentett számok összege 0.

$$-a + a = 0 \text{ vagy } a + (-a) = 0$$

**1. feladat** Számítsuk ki: 1) $-2,5 + 5,7$; 2) $-2,5 + (-5,7)$.

**Megoldás.**

1) $-2,5 + 5,7 = + (5,7 - 2,5) = 3,2$.

2) $-2,5 + (-5,7) = -(2,5 + 5,7) = -8,2$.

**Figyeld meg:**

a szám változása attól függ, hogy milyen számot adunk hozzá:

— ha pozitív számot, akkor növekszik;

— ha negatív számot, akkor csökken.

Teljesül-e az összeadás felcserélhetőségi és csoportosítási tulajdonsága a racionális számok esetében? Igen. Bármely racionális $a$, $b$ és $c$ számra vonatkozik:

$a + b = b + a$ – *az összeadás felcserélhetőségi tulajdonsága*;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – *az összeadás csoportosítási tulajdonsága.*

Ezek a szabályok lehetővé teszik három és több összeadandó összegének egyszerű kiszámítását.

**2. feladat** Határozzuk meg a $-2,8 + 3,2 + (-1,2) + (5,8)$ összeget!.

**Megoldás.** A feladat kétféleképpen is megoldható.

**1. módszer.** Csoportosítsuk az azonos előjelű összeadandókat és számítsuk ki az összeget:

$$-2,8 + 3,2 + (-1,2) + 5,8 =$$
$$= (-2,8 + (-1,2)) + (3,2 + 5,8) =$$
$$= -4 + 9 = 5.$$

**2. módszer.** Csoportosítsuk a különböző előjelű számokat és számítsuk ki az összegüket:

$$-2,8 + 3,2 + (-1,2) + 5,8 =$$
$$= (-2,8 + 5,8) + (3,2 + (-1,2)) =$$
$$= 3 + 2 = 5.$$

Ha az egyik összeadandó 0, akkor az összeg a másik összeadandóval egyenlő:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$



## További tudnivalók

Az indiai Brahmagupta (VII. század) az alábbi szabályokat alkalmazta pozitív és negatív számok összeadásakor.

| Okfejtés | Jelenkori szabály |
|---|---|
| Jövedelem és jövedelem összege az jövedelem | Két pozitív szám összege pozitív szám |
| Adósság és adósság összege az adósság | Két negatív szám összege negatív szám |
| A jövedelem és az adósság összege a különbségükkel egyenlő | Különböző előjelű számok összege egyenlő abszolút értékeik különbségével, és előjele megegyezik a nagyobb abszolút értékű összeadandó előjelével |
| A jövedelem és vele azonos nagyságú adósság összege 0 | Ellentett számok összege 0 |

### IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Hogyan kell összeadni két azonos előjelű számot?
2. Hogyan kell összeadni két különböző előjelű számot?
3. Milyen előjelű két negatív szám összege? két pozitív szám összege?
4. Írd le az összeadás felcserélhetőségi tulajdonságát! Hozz fel rá példát!
5. Írd le az összeadás csoportosítási tulajdonságát! Hozz fel rá példát!
6. Mivel egyenlő az ellentett számok összege?
7. Mivel egyenlő az az összeg, ahol az egyik összeadandó 0?

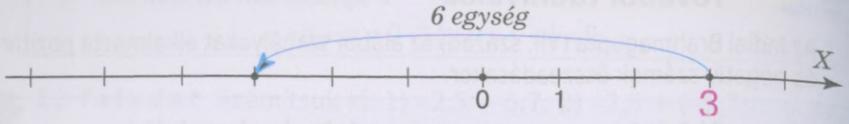


### OLDD MEG A FELADATOKAT!

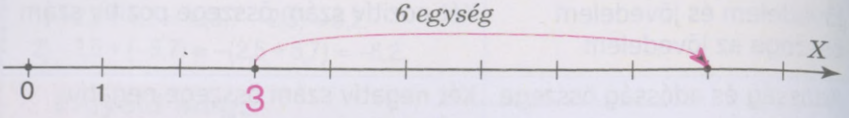
**1115'.** Össze kell adni –18-at és 3-at.

1) Mennyi –18 abszolút értéke: a) 18; b) –18?
2) Mennyi 3 abszolút értéke: a) 3; b) –3?
3) Az abszolút értékeket: 1) össze kell adni; 2) ki kell vonni?
4) Melyik szám abszolút értéke nagyobb: a) –18; 2) 3?
5) Mennyi lesz az összeg abszolút értéke: a) 21; b) –21; c) 15; d) –15?
6) Milyen előjelű lesz az összeg: a) „+"; b) „–"?
7) Nevezd meg azt a számot, ami az adott számok összegével egyenlő.

**1116′.** 3-hoz hozzáadtak –6-ot. Helyesen van-e ábrázolva ez az összeadás a számegyenesen: 1) 128. ábra; 2) 129. ábra?




128. ábra




129. ábra

**1117′.** Össze kell adni –5-öt és –25-öt.

1) Mennyi –5 abszolút értéke: a) 5; b) –5?
2) Mennyi –25 abszolút értéke: a) 25; b) –25?
3) Az abszolút értékeket: 1) össze kell adni; 2) ki kell vonni?
4) Meg kell-e határozni, melyik szám abszolút értéke nagyobb?
5) Mennyi lesz az összeg abszolút értéke: a) 30; b) –20; c) 20; d) –30?
6) Milyen előjelű lesz az összeg: a) „+"; b) „-"?
7) Nevezd meg azt a számot, ami az adott számok összegével egyenlő.

**1118′.** Szilárd szerint, mivel $|-10| = 10$, $|-12| = 12$, ezért $-10 + (-12)$ összege pozitív. Igaza van-e Szilárdnak?

**1119′.** Össze kell adni 21-et és –21-et.

1) Milyen előjelűek ezek a számok: a) azonosak; b) különbözőek?
2) Mennyi az adott számok összege: a) 42; b) –42; c) 0?

**1120′.** Igaz-e az alábbi állítás:

1) 56 nő, ha –45-öt adunk hozzá;
2) 71 nő, ha 45-öt adunk hozzá;
3) 4,1 csökken, ha 0,1-et adunk hozzá;
4) 23 csökken, ha –4,1-et adunk hozzá??

**1121′.** Igaz-e, hogy: 1) $-57 + 0 = 57$; 2) $0 + (-34) = -34$?

**1122°.** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg ezen a számegyenesen a –10-et! Mutasd meg a számegyenesen, hogyan kell növelni az adott számot: 1) 4-gyel; 2) 6-tal; 3) 10-zel? Milyen számot kaptál?

**1123°.** Határozd meg az összeget a 10. táblázat adatai alapján.

*10. táblázat*

| Első összeadandó | 10 | –20 | 11 | –9 | –20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Második összeadandó | –70 | 13 | –42 | 6 | 33 |
| Összeg | | | | | |

**1124°.** Határozd meg az összeget:

1) $-10 + 6$; 5) $-3 + 7{,}6$; 9) $6{,}89 + (-7{,}01)$;
2) $-99 + 1$; 6) $5{,}4 + (-8{,}9)$; 10) $13{,}2 + (-64)$;
3) $-23 + 7$; 7) $-0{,}5 + 7{,}09$; 11) $-2{,}6 + 9{,}35$;
4) $-84 + 4$; 8) $-6{,}02 + 4{,}08$; 12) $-5{,}18 + 8{,}4$.

***1125°.*** Határozd meg az összeget:

1) $10 + (-6)$; 3) $23 + (-7)$; 5) $84{,}09 + (-4)$;
2) $99 + (-1)$; 4) $-2{,}08 + 0{,}92$; 6) $5{,}6 + (-8{,}7)$.

**1126°.** A 11. táblázat adatai alapján határozd meg az összeget.

*11. táblázat*

| Első összeadandó | −10 | −20 | −11 | −9 | −20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Második összeadandó | −70 | −13 | −42 | −6 | −33 |
| Összeg | | | | | |

**1127°.** Határozd meg az összeget:

1) $-44 + (-6)$; 4) $-78 + (-13)$; 7) $-0{,}02 + (-0{,}2)$;
2) $-207 + (-97)$; 5) $-5 + (-8{,}15)$; 8) $-7{,}7 + (-8{,}7)$;
3) $-12 + (-11)$; 6) $-6{,}89 + (-68{,}9)$; 9) $-0{,}89 + (-0{,}01)$.

***1128°.*** Határozd meg az összeget:

1) $-634 + (-43)$; 3) $-9 + (-4{,}231)$; 5) $-7{,}9 + (-0{,}1)$;
2) $-100 + (-567)$; 4) $-2{,}39 + (-2{,}01)$; 6) $-53{,}07 + (-46{,}93)$.

**1129°.** Számítsd ki:

1) $-1 + (-5)$; 5) $8{,}05 + 2{,}95$;
2) $-1 + 5$; 6) $-8{,}05 + (-2{,}95)$;
3) $1 + (-5)$; 7) $-8{,}05 + 2{,}95$;
4) $1 + 5$; 8) $8{,}05 + (-2{,}95)$.

***1130°.*** Számítsd ki:

1) $45 + 5{,}2$; 3) $-45 + 5{,}2$;
2) $-45 + (-5{,}2)$; 4) $45 + (-5{,}2)$.

**1131°.** Számítsd ki $a + c$ összegét, ha:

1) $a = 10$, $c = -28$; 2) $a = -0{,}25$, $c = -0{,}75$.

Mennyi lesz $c + a$ összege?

**1132°.** Számítsd ki az $a + (b + c)$ összeget, ha:

1) $a = -22$, $b = 2$, $c = -6$; 2) $a = 6$, $b = -6$, $c = -4$.

Mennyi lesz az $(a + b) + c$ összeg?

***1133°.*** Számítsd ki a legcélszerűbben alkalmazva az összeadás felcserélhetőségi és csoportosítási szabályát:

1) $-2 + (-3) + (-8) + (-7)$; 3) $-119 + 19{,}7 + (-91)$;
2) $13 + 26 + (-3) + (-16)$; 4) $78{,}2 + (-105) + 11{,}8$.

**1134°.** Végezd el az alábbi összeadásokat a legcélszerűbb módon:
1) $-13,6 + (-15,333) + (-6,4) + (-4,667)$;
2) $-71,4 + 31,8 + 25,2 + (-38,6)$;
3) $25,3 + (-45,13) + (-20,3) + (-60,87)$.
Az összeadás melyik szabályát alkalmaztad?



***1135°.*** Számítsd ki:
1) $27,56 + 36 + (-28,56) + (-12)$;
2) $-39,126 + 12,1 + 18 + 21,026$;
3) $46 + (-13,03) + 111 + (-32,97)$;
4) $-103,77 + 24,609 + (-6,33) + 85,391$.

**1136°.** Határozd meg az összeget:

1) $-11 + 11$;
2) $-1452 + 1452$;
3) $-1,5 + \frac{3}{2}$;
4) $-2,75 + 46 + (-46) + 2,75$.



***1137°.*** Határozd meg az összeget: 1) $6,72 + (-6,72)$; 2) $\frac{1}{4} + (-0,25)$.

**1138°.** Számítsd ki: 1) $-3,8 + 0 + 9$; 2) $0 + \left(-\frac{1}{3}\right) + 3$.



***1139°.*** Számítsd ki:
1) $-5,6 + 0 + 9$; 2) $-13,75 + 0 + 28,25$; 3) $-27,07 + 0 + 46,4$.

**1140°.** Határozd meg az alábbi számok összegének előjelét:

1) 25 és –97;
2) –49 és 22;
3) $23\frac{1}{4}$ és $-\frac{1}{3}$;
4) –58 és 101;
5) 3,5 és (–3,6);
6) $-\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{5}$.



***1141°.*** Határozd meg az alábbi számok összegének előjelét:

1) 23 437 és 0,97;
2) –89 és –87;
3) $-\frac{1}{4}$ és $-\frac{1}{3}$.

**1142°.** Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékeit:
1) $-153\,000 + (-345)$ és $22 + 15\,000$;
2) $-12\,056 + 6078$ és $6078 + (-1256)$;
3) $-1,86 + (-0,385)$ és $0,5642 + 0,4231$.

**1143°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $x - 3,9 = -8$;
2) $5x - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$;
3) $x - 0,89 = 6,9$.



***1144°.*** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x - 5,6 = -2$;
2) $x - 1,51 = 0,89$;
3) $x - \frac{1}{5} = 0,2$.

**1145°.** Határozd meg az összeget:
1) $a + (-a) + a$; 2) $b + (-b) + b + (-b) + (-b)$.

**1146°.** Növekszik-e 6,7, ha hozzáadunk:
1) –67-t; 2) –6,7-t; 3) 0,01-t; 4) $\frac{1}{2}$-t?

***1147°.*** Csökken-e –5, ha hozzáadunk:
1) –51-t; 2) 51-t; 3) –100-t; 4) 0,2-t?

**1148°.** Írd le a számkifejezést és határozd meg az értékét:
1) 5,6 és $\frac{2}{5}$ összegéhez adj hozzá –6,89-et;
2) 1,2 és $6\frac{1}{5}$ összegéhez add hozzá –6,4 és $-1\frac{8}{9}$ összegét.

***1149°.*** Írd le a számkifejezést és határozd meg az értékét:
1) 1 és $\frac{2}{3}$ összegéhez adj hozzá $\frac{1}{3}$-ot;
2) 7,4 és $-2\frac{1}{5}$ összegéhez add hozzá 3,2 és $-\frac{1}{2}$ összegét.

**1150°.** A 6. osztály tanulói létszáma az év folyamán többször is változott: ősszel +4-gyel, télen –5-tel, tavasszal pedig +6-tal. Hogyan változott meg év végére az osztálylétszám?

***1151°.*** Úgy tartják, hogy Rómát Krisztus születése előtt 753-ban alapították. Hány éves most Róma?

**1152°.** Hány év telt el a kr. e. 3. évtől a kr. u. 3. esztendőig.

**1153.** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg rajta az $A(5)$ és $B(-6)$ koordinátájú pontot! Jelöld azt a $C$ pontot, amelynek a koordinátája az adott pontok koordinátáinak összegével egyenlő.

**1154.** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg rajta az $A(5,2)$ koordinátájú pontot! Jelöld meg azt a pontot, melynek a koordinátája 4,5-del nagyobb az $A$ pont koordinátájánál.

***1155.*** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg rajta az $A(-1,5)$ és $B(-6)$ koordinátájú pontot! Jelöld azt a $C$ pontot, amelynek a koordinátája az adott pontok koordinátáinak összegével egyenlő.

**1156.** Számítsd ki:
1) $-1\frac{1}{2} + (-2,5) + (-3,7)$; 2) $\frac{5}{11} + \left(-\frac{21}{33}\right) + \left(-\frac{10}{11}\right)$;
3) $-\frac{4}{5} + \frac{12}{17} + (-0,2)$; 5) $-0,109 + 86\frac{4}{9} + \left(-80\frac{891}{1000}\right)$;

4) $-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}+2$;

6) $-\frac{10}{145}+\frac{63}{261}+\left(-\frac{4}{29}\right)$;

7) $15\frac{13}{15}+(-21{,}34)+14\frac{2}{15}+\left(-6\frac{33}{50}\right)$;

8) $10\frac{15}{19}+\left(-43\frac{8}{13}\right)+12\frac{4}{19}+\left(-56\frac{5}{13}\right)$.

***1157.*** Számítsd ki:

1) $3\frac{1}{2}+\frac{13}{39}+(-3{,}5)$;

2) $\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{5}\right)+(-0{,}35)$;

3) $3{,}71+(-13{,}6)+\left(-\frac{71}{100}\right)$;

4) $-8+5\frac{3}{25}+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

**1158.** Számítsd ki:

1) $|-2{,}5|+(-3{,}7)+(-|-7{,}5|)$;

2) $-7\frac{3}{5}+|-5{,}1|+|-|-2{,}9||$;

3) $-0{,}35+\left|-1\frac{7}{50}\right|+\left|-\left|-2\frac{71}{100}\right|\right|$;

4) $-2{,}5+(-3{,}7)+|-7{,}5|$;

5) $-7\frac{3}{5}+(-5{,}1)+|-2{,}9|$.

***1159.*** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $|x-2|=12$;

2) $|x-5|=18$.

**1160.** Milyen számokat kell beírni az üres négyzetekbe (130. ábra) úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és az átlók mentén is a számok összege azonos legyen?

**1161.** Határozd meg a legnagyobb négyjegyű egész szám és a legkisebb kétjegyű egész szám összegét.

| | | |
|---|---|---|
| | −2 | |
| | 0 | |
| −7 | 2 | |

130. ábra

***1162.*** Határozd meg a legnagyobb negatív háromjegyű egész szám és a legkisebb pozitív kétjegyű egész szám összegét.

**1163.** Határozd meg az összeget:

1) $6a+(-5n)+(-5)+(-4a)+14\,m+9m+(-28)$;

2) $-c+(-5d)+2c+7d$.

***1164.*** Add meg -18-t két olyan különböző előjelű szám összegeként,

1) melyek közül mind a két szám egész szám;

2) melyek közül az egyik összeadandó 1-nél kisebb tizedes tört

**1165.** Hasonlítsd össze az $|x+y|$ és $|x|+|y|$, kifejezések értékét, ha:
1) $x=-2, y=3$; 2) $x=-2, y=-3$; 3) $x=2, y=3$; 4) $x=-2, y=0$.

**1166.** Határozd meg az összes olyan egész szám összegét, amelyek:
1) 3-nál kisebbek és $-3\frac{1}{3}$-nál nagyobbak;
2) $5\frac{1}{5}$-nél kisebbek és $-8\frac{1}{4}$-nél nagyobbak.

**1167*.** Adva van 25 szám. Ezek közül bármelyik négy szám összege pozitív. Igazold, hogy az összes szám összege is pozitív.

**1168*.** Határozd meg az összes háromjegyű egész szám összegét.

**1169*.** Egy táblázatban 3 sor és 4 oszlop van. Ki lehet-e úgy tölteni ezt a táblázatot –1 és 1 számokkal, hogy minden sorban és minden oszlopban különböző legyen az összeg?

**1170*.** Oldd meg a következő egyenleteket: 1) $||x|-4|=1$;
2) $||x|-2|=3$.

**1171*.** Tüntess fel a számegyenesen az $A(-6)$ és $B(3)$ pont között olyan páros számú pontot, melyek koordinátái egész számok és összegük nulla! Hány megoldása van a feladatnak?

**1172*.** Milyen előjelű szám az $x$ és az $y$, ha: $|x+y|=|x|+|y|$?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1173.** Reggel a levegő hőmérséklete +8° volt. Délelőtt a hőmérséklet +1,5°-t változott, délután –3,5°-t. Mekkora volt a levegő hőmérséklete este?

**1174.** Első nap a folyó vízállása –6 cm-t változott, másnap +8 cm-t, harmadnap +5 cm-t. Hány cm-t és hogyan változott a folyó vízállása a három nap alatt?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1175.** Végezd el a következő kivonásokat:
1) 134 km 87 m – 67 km 83 m; 3) 73 t 806 g – 115 kg 994 g;
2) 64kg 344 g – 7 kg 786 g; 4) 15 óra 40 perc 50 másodperc – 6 óra 19 perc.

**1176.** Számítsd ki:
1) 12,9 – 5,7 – 1,5; 3) 256,7 – 70,08 – 0,48;
2) $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}+2\frac{1}{12}$; 4) $4\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$.

**1177.** Hány gramm sót kell hozzáadni 90 gramm vízhez, hogy 10 %-os sóoldatot kapjunk?

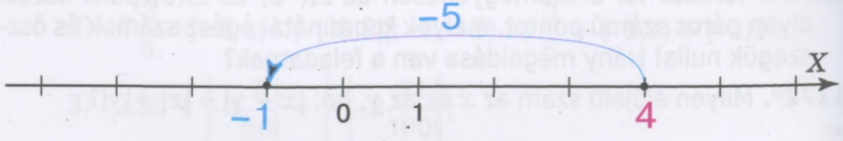
## 27. § RACIONÁLIS SZÁMOK KIVONÁSA

Már tudjátok, hogyan kell kivonni a pozitív számokat, és meg tudjátok határozni két szám különbségét, ha a kisebbítendő nagyobb a kivonandónál.

Ki lehet-e vonni egy kisebb számból egy nagyobbat? Igen, a racionális számkörben. Vizsgáljuk meg a műveletet a számegyenesen!

Számoljuk ki 4 és 5 különbségét! Jelöljük a számegyenesen a 4-et jelölő pontot, majd lépjünk tőle 5 egységnyit balra (131. ábra)! A –1-es koordinátájú pontba érünk. Tehát:

$$4 - 5 = -1.$$




131. ábra

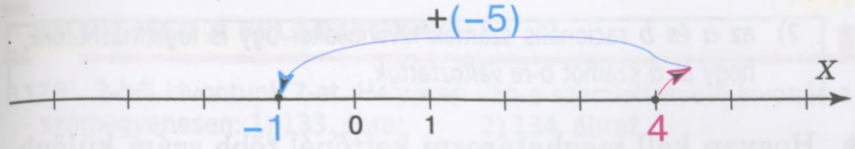
**Figyeld meg:**

racionális számok kivonásakor a kisebbítendő lehet kisebb a kivonandónál.

Meg lehet-e határozni két racionális szám különbségét számegyenes nélkül is? Igen. Ehhez ismerni kell a racionális számok kivonásának szabályát.

Az előző paragrafusban megtanultuk, hogyan kell kivonni különböző előjelű számokat. Az $a$ és $b$ szám kivonása visszavezethető az $a$ és a $b$ szám ellentettjének, azaz $-b$-nek az összeadására. Hogy erről meggyőződhessünk, hasonlítsuk össze a 131. és a 132. ábrát! Az első ábra 4 és 5 kivonását szemlélteti, a második pedig 4 és –5 összegét. Mind a két esetben az eredmény –1. Tehát:

$$4 - 5 = 4 + (-5).$$




132. ábra

**Jegyezd meg!**

**A kivonás összeadással való helyettesítésének szabálya**
Ahhoz, hogy az egyik számból kivonjuk a másik számot, a kisebbítendőhöz hozzá lehet adni a kivonandó ellentett számát:

$$a - b = a + (-b).$$

**1. feladat.** Számítsuk ki: 1) 6,5 – 1,4; 2) 6,5 – (–1,4); 3) –6,5 – 1,4; 4) –6,5 – (–1,4); 5) –6,5 – 0.

**Megoldás.**

1) $6{,}5 - 1{,}4 = 6{,}5 + (-1{,}4) = 5{,}1.$

2) $6{,}5 - (-1{,}4) = 6{,}5 + 1{,}4 = 7{,}9.$

3) $-6{,}5 - 1{,}4 = -6{,}5 + (-1{,}4) = -7{,}9.$

4) $-6{,}5 - (-1{,}4) = -6{,}5 + 1{,}4 = -5{,}1.$

5) $-6{,}5 + 0 = -6{,}5 + 0 = -6{,}5.$

Igaz-e, hogy a racionális számok kivonásakor a kisebbítendő mindig csökken. Nem. Az 1. feladat 1-es és 3-as példájában a kisebbítendő csökkent, mivel a kivonandó pozitív szám. A 2. és 4. példában pont ellenkezőleg, a kisebbítendő nőtt, mivel a kivonandó negatív szám. Az 5. példában a kisebbítendő nem változott, mivel a kisebbítendő 0.

**Figyeld meg:**

1) racionális számok kivonásakor a kisebbítendő:
— csökken, ha a kivonandó pozitív;
— növekszik, ha a kivonandó negatív;
— nem változik, ha a kivonandó 0;

2) az $a$ és $b$ racionális számok kivonásakor úgy is fogalmazhatunk, hogy az $a$ számot $b$-re *változtattuk*.

Hogyan kell meghatározni kettőnél több szám különbségét? Nézzünk meg egy példát.

**2. feladat.** Számítsuk ki a következő különbséget $-2,8 - (-3,2) - 1,2 - (-5,8)$.

**Megoldás.** Helyettesítsük a kivonást összeadással:

$$-2,8 - (-3,2) - 1,2 - (-5,8) =$$
$$= -2,8 + 3,2 + (-1,2) + 5,8.$$

A kapott összegben úgy csoportosíthatjuk az összeadandókat, ahogyan azt a 26. paragrafus 2. feladatában mutattuk meg. Alkalmazzuk az első módszert. Azt kapjuk, hogy:

$$-2,8 + 3,2 + (-1,2) + 5,8 =$$
$$= (-2,8 + (-1,2)) + (3,2 + 5,8) =$$
$$= -4 + 9 = 5.$$

Tehát, $-2,8 - (-3,2) - 1,2 - (-5,8) = 5$.



## További tudnivalók

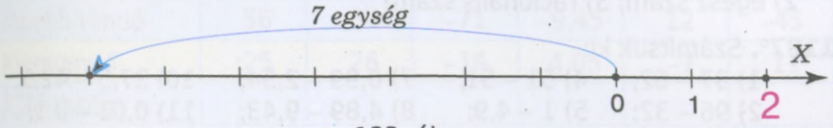
A természetes számok és a pozitív törtek az ókorban keletkeztek gyakorlati feladatok megoldásakor. A negatív számok bevezetését a matematika fejlődése tette elkerülhetetlenné, mégpedig az egyenletek megoldása. Mivel egy kivonást csak akkor lehetett elvégezni, ha a kisebbítendő nagyobb volt a kivonandónál, szükségessé vált a természetes számok bővítése. Ezt a bővítést jelentik az egész számok. Az egész számok körében mindig elvégezhető a kivonás. A negatív számok elméletét legrészletesebben Michael Stifel (1487—1567) német matematikus dolgozta ki. Elméletét a „Teljes aritmetika" című művében fejtette ki, ami 1544-ben látott napvilágot.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

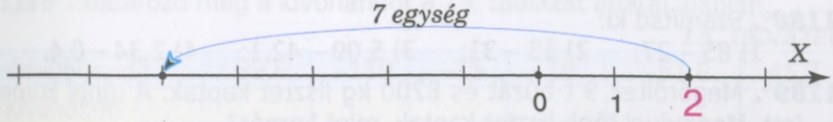
1. Mit jelent egyik számból kivonni egy másik számot?
2. Lehet-e a kisebbítendő kisebb a kivonandónál?
3. Hogyan kell számegyenes segítségével az egyik számból kivonni egy másikat?
4. Fogalmazd meg, hogyan helyettesíthető a kivonás összeadással? Hozz fel példát.

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1178′.** 2-ből kivontunk 7-et. Helyesen van-e szemléltetve a kivonás a számegyenesen: 1) 133. ábra; 2) 134. ábra?



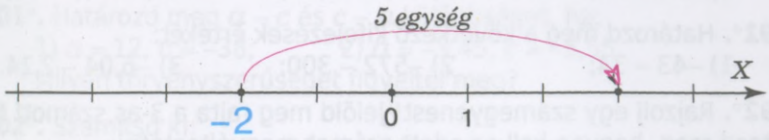

133. ábra



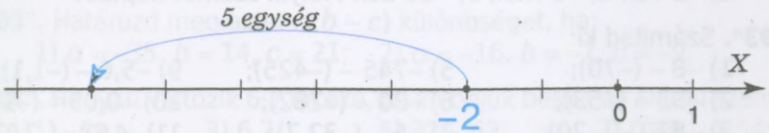

134. ábra

**1179′.** Igaza van-e Gyurinak, amikor azt állítja, hogy egy kisebb racionális számból nem lehet kivonni egy nagyobb racionális számot?

**1180′.** –2-ből kivontunk –5-öt. Helyesen van-e szemléltetve a kivonás a számegyenesen: 1) 135. ábra; 2) 136. ábra?




135. ábra




136. ábra

**1181′.** Helyesen alkalmazta-e Kati azt a szabályt, hogy kivonás helyettesíthető összeadással:

1) $-12 - 34 = -12 + 34$; 2) $-12 - 34 = -12 + (-34)$?

**1182′.** Igazak-e az alábbi állítások:

1) 38 csökken, ha kivonunk belőle 22;

2) –74 nő, ha kivonunk belőle 65-öt?

**1183′.** Igaz-e, hogy: 1) $-6{,}9 - 0 = 6{,}9$; 2) $0 - (-25) = -25$?

**1184°.** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg rajta a 7-es számot! Mutasd meg, hogyan kell ezt a számot csökkenteni:

1) 2-vel; 2) 7-tel; 3) 13-mal. Melyik számot kaptad?

**1185°.** Csökkentsd 25-öt 1) 5-tel; 2) 55-tel; 3) 7,5-del; 4) 3,8-del! Melyik számot kaptad eredményül?

**1186°.** Igaza van-e Vilmosnak, amikor azt állítja, hogy egy kisebb és egy nagyobb természetes szám különbsége: 1) természetes szám; 2) egész szám; 3) racionális szám?

**1187°.** Számítsuk ki:

1) 37 – 62; 4) 51 – 51; 7) 0,99 – 2,54; 10) 37,5 – 42,5;
2) 96 – 32; 5) 1 – 4,9; 8) 4,89 – 9,43; 11) 0,01 – 0,1;
3) 87 – 62; 6) 0,1 – 5; 9) 4,9 – 5,4; 12) 1,89 – 0,39.

***1188°.*** Számítsd ki:

1) 85 – 27; 2) 13 – 31; 3) 5,09 – 42,1; 4) 2,34 – 0,4.

**1189°.** Megőröltek 9 t búzát és 8200 kg lisztet kaptak. A többi korpa lett. Mennyivel több lisztet kaptak, mint korpát?

**1190°.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) –12 – 64; 5) –1 – 6,23; 9) –5,04 – 0,04;
2) –46 – 33; 6) –0,04 – 8; 10) –93,7 – 4,7;
3) –12 – 23; 7) –0,09 – 0,9; 11) –0,02 – 0,1;
4) –91 – 91; 8) –0,9 – 0,09; 12) –54,5 – 65,5.

***1191°.*** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) –43 – 34; 2) –572 – 300; 3) –6,04 – 2,14.

**1192°.** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg rajta a 3-as számot! Mutasd meg, hogyan kell az adott számot megváltoztatni:
1) –2-vel; 2) –3-mal; 3) –10-zel! Melyik számot kaptad?

**1193°.** Számítsd ki:

1) –8 – (–70); 5) –745 – (–425); 9) –5,6 – (–1,1);
2) –53 – (–53); 6) –30 – (–282); 10) –0,05 – (–1);
3) –820 – (–20); 7) –5 – (–32,7); 11) –4,67 – (–2,07);
4) –419 – (–519); 8) –1,4 – (–22,9); 12) –348 – (–56).

***1194°.*** Számítsd ki:

1) –56 – (–27); 3) –2,3 – (–23);
2) –103 – (–513); 4) –4,09 – (–3,003).

**1195°.** Rajzolj egy számegyenest! Jelöld meg rajta a 6-os számot! Mutasd meg, hogyan kell az adott számot megváltoztatni:
1) –4-gyel; 2) 6-tal; 3) –6-tal! Melyik számot kaptad?

**1196°.** Számítsd ki:

1) –34 – (–51); 4) 34 – 51; 7) –2,3 – 2,9;
2) –34 – 51; 5) 2,3 – 2,9; 8) 2,3 – (–2,9);
3) 34 – (–51); 6) –2,3 – (–2,9); 9) 3,5 – (–3,2).

**1197°.** Számítsd ki:
1) $6 - 3{,}8$; 2) $-6 - (-3{,}8)$; 3) $-6 - 3{,}8$; 4) $6 - (-3{,}8)$.

**1198°.** Határozd meg a különbséget a 12. táblázat adatai alapján.

*12. táblázat*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kisebbítendő | 56 | –34 | –71 | –9,45 | 12 | –45 |
| Kivonandó | 25 | 26 | –14 | 4,05 | –7 | 11 |
| Különbség | | | | | | |

**1199°.** Határozd meg a kivonandót a 13. táblázat adatai alapján.

*13. táblázat*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kisebbítendő | 39,6 | –179 | –15 | 19 | –51,8 | 45,7 |
| Kivonandó | | | | | | |
| Különbség | –13,2 | 54 | –6,5 | –6 | 21,5 | –4,3 |

**1200°.** Határozd meg az alábbi szám és ellentettje különbségét:
1) 21; 2) –345; 3) –2500; 4) $\frac{4}{7}$.

**1201°.** Határozd meg $a - c$ és $c - a$ különbséget, ha:
1) $a = 12$, $c = -38$; 2) $a = -3{,}45$, $c = -5{,}55$.
Milyen törvényszerűséget figyeltél meg?

**1202°.** Számítsd ki:
1) $0 - 37$; 2) $12 - 12$; 3) $0 - (-12)$; 4) $-11 - 0$.

**1203°.** Határozd meg az $a - (b - c)$ különbséget, ha:
1) $a = -35$, $b = 14$, $c = 21$; 2) $a = -16$, $b = -7$, $c = -9$.

**1204°.** Hogyan változik 6,7 értéke, ha kivonjuk belőle az alábbi számot:
1) –6; 3) 6,7; 5) $37 - 62$; 7) $0{,}99 - 2{,}54$;
2) –6,7; 4) $-\frac{1}{5}$; 6) $51 - 51$; 8) $37{,}5 - 42{,}5$?

**1205°.** Oldd meg a következő egyenletet:
1) $4{,}2 - x = -2$; 2) $3\frac{1}{3} - x = -\frac{1}{3}$; 3) $34{,}31 - x = 11{,}86$.

**1206°.** Oldd meg a következő egyenletet:
1) $0{,}09 - x = -1{,}2$; 2) $\frac{1}{6} - x = -\frac{1}{12}$; 3) $1\frac{1}{4} - x = 0{,}25$.

**1207°.** A Mount Everest 8848 m magas. A csendes óceáni Mariana-árok legmélyebb pontja 19 842 m-rel van az Everest csúcsa alatt. Milyen mély a Mariana-árok?

**1208.** Számítsd ki:

1) $1000 - 5627 - 23\,112 - 0$;
2) $-4040 - 762 - 3030$;
3) $-25{,}1 - 7{,}2 - 4{,}9$;
4) $234 - 24{,}8 - 675{,}2$.

**1209.** Számítsd ki:

1) $\frac{3}{8} - \frac{1}{16} - 3\frac{1}{2}$;
2) $-2\frac{1}{6} - \frac{7}{12} - 3\frac{1}{2}$;
3) $2 - \frac{7}{10} - 1{,}3$;
4) $1{,}4 - \frac{1}{10} - \frac{2}{5}$.

***1210.*** Számítsd ki:

1) $4{,}25 - 9{,}05 - \frac{1}{5}$;
2) $\frac{5}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$.

**1211.** Számítsd ki:

1) $2503 - (-831) - (-1169)$;
2) $-743 - (-395) - (-1043)$;
3) $-72{,}62 - (-51{,}15) - (-56{,}47)$;
4) $405{,}2 - (-2{,}91) - (-6{,}7)$.

**1212.** Végezd el a kivonást a legcélszerűbb módon:

1) $-19 - 11 - (-32{,}5)$;
2) $8{,}2 - (-12{,}8) - 5$;
3) $-23{,}5 - 36{,}5 - 24{,}2 - (-39{,}8)$;
4) $2{,}348 - (-5{,}652) - (-10{,}3) - (-35{,}7)$;
5) $-3{,}8 - (-5{,}3) - (-1{,}8) - (-4{,}7)$;
6) $\frac{5}{10} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$;
7) $\left(2 - \left(-\frac{6}{100}\right)\right) - (-2{,}44)$;
8) $7{,}52 - \frac{3}{5} - (-2{,}08)$.

***1213.*** Számítsd ki:

1) $-5 - 15 - (-28) - 14$;
2) $2 - 29 - (-8) - 11$;
3) $27{,}56 - 36 - 27{,}56 - (-12)$;
4) $39{,}126 - 12{,}1 + 18 - 21{,}026$;
5) $-3 - (-2{,}2) - \left(-\frac{2}{15}\right)$;
6) $10\frac{2}{9} - \left(-4\frac{1}{9}\right) - 37 - \left(-5\frac{2}{3}\right)$.

**1214.** Szemléltesd számegyenesen, hogy az $A(a)$ és $B(b)$ pont távolsága $|a - b|$.

**1215.** Határozd meg az $A$ és $B$ pont távolságát, ha:

1) $A$ (20) és $B$ (12);
2) $A$ (–2) és $B$ (15);
3) $A$ (–18,5) és $B$ (–4);
4) $A$ (4,9) és $B$ (0,5);
5) $A$ (–24) és $B$ (6);
6) $A$ (–2,5) és $B$ (–6).

**1216.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $|x + 5| = 1$; 2) $|x + 4| = 3$; 3) $|x| + 6 = 1$; 4) $|x| + 12 = 8$.

**1217.** Írd le a számkifejezést és határozd meg az értékét:
1) vonj ki 4,09 és $-\frac{1}{50}$ különbségéből 4,1-et;
2) 0,0072 és -6,9928 különbségéből vond ki 7,4 és $\frac{2}{5}$ összegét.

**1218.** Írd le a számkifejezést és határozd meg az értékét:
1) vonj ki 6,7 és $\frac{7}{10}$ különbségéből 8,8-et;
2) 27,3 és –12 különbségéből vond ki 18,7 ellentettjét.

**1219.** Számítsd ki:
1) $3\frac{1}{2} + (-8,5) - (-4,42)$;
2) $-6,02 + 23,6 - \left(-1\frac{31}{50}\right)$;
3) $-\frac{1}{5} - \frac{3}{10} + (-0,25) - \frac{1}{2}$;
4) $4 - \frac{4}{15} - \left(-1\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)$;
5) $0,25 - |-3,6| + (-5) - \left|-\frac{1}{4}\right|$;
6) $12,4 - |-63,4| - |-6,01|$.

**1220.** Határozd meg a legnagyobb kétjegyű egész szám és a legkisebb négyjegyű egész szám különbségét.

**1221.** Határozd meg a legkisebb kétjegyű egész szám és a legnagyobb háromjegyű egész szám különbségét.

**1222.** Olga gondolt egy számot, melyet előbb –35-tel, majd 90-nel módosított, eredményül –140-et kapott. Melyik számra gondolt Olga?

**1223.** János gondolt egy számot, melyet előbb –25,3-del, majd $145\frac{1}{2}$-del módosított. Az eredmény $-4\frac{1}{5}$ lett. Melyik számra gondolt János?

**1224*.** Egy banki folyószámlán 3500 hrivnya van. Az első hónapban 200 hrivnyát vettek le a számláról, a másodikban 2,5-szer többet, a harmadikban pedig a maradék 20 %-át. Mennyi pénz maradt a számlán.

**1225*.** Számítsd ki: $\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{99}\right)$.

**1226*.** Helyettesítsd mindegyik csillagot „+” vagy „–” jellel úgy, hogy teljesüljön az 1*2*3*4*5*6*7*8*9 = -21 egyenlőség.

**1227*.** Helyettesítsd mindegyik csillagot „+" vagy „–" jellel úgy, hogy teljesüljön a 2*4*6*8*10*12 = 2 egyenlőség.

**1228*.** Viktor az 1*2*3*4*5*6*7*8*9 = 21 egyenlőségben mindegyik csillagot „+" vagy „–" jellel helyettesített. Viktória néhány jelet kicserélt az ellenkezőjére és 21 helyett 20-at kapott eredményül. Bizonyítsd be, hogy a két gyerek közül valaki tévedett.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1229.** Hétfőn a levegő hőmérséklete 15,5 °C volt. Minden következő napon a hőmérséklet 15,5 °C-t csökkent. Határozd meg, hány fokot mértek pénteken este.

**1230.** A szárazság miatt a tó vízszintje 15,5 cm-t apadt. Egy zápor után a vízszint 34,7 cm-t emelkedett, így a tó mélysége 697 cm lett. Határozd meg a tó szárazság előtti vízszintjét.

**1231.** A belőtt gólokat „+" jellel jegyezték le, a kapottakat pedig „–" jellel. Hány gólt kapott a csapat, ha a lőtt gólok száma 12, és a belőtt és kapott gólok összege pedig –3?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1232.** Számítsd ki: 1) $63 \cdot 78 + 78 \cdot 37$; 2) $136 \cdot 23 - 136 \cdot 13$.

**1233.** Számítsd ki:
1) $1{,}2 \cdot 3{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}02$; 2) $1{,}01 \cdot 6{,}2 \cdot 100$; 3) $0{,}4 \cdot 1{,}8 \cdot 6{,}25$.

**1234.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:
1) $\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{3}{7}$; 2) $1\frac{3}{8} \cdot 2\frac{2}{19} \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\frac{8}{15}$; 3) $3\frac{4}{5} \cdot 345 \cdot 0 \cdot 7{,}89$.

**1235.** Két szám szorzata 5,13. Az egyik tényező 0,3. Határozd meg a másik tényezőt.

# 28. § RACIONÁLIS SZÁMOK SZORZÁSA

Már tudjátok, hogy azonos pozitív számok összege helyettesíthető szorzással. Például $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot 5 = 10$. Hasonlóképpen határozzuk meg a $-2 \cdot 5$ szorzatot:

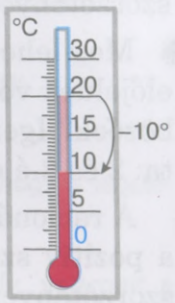
$$-2 \cdot 5 = -2 + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10.$$

A kapott szám –10, a $10 = 2 \cdot 5$ eredményének ellentettje. Viszont $2 = |-2|$, $5 = |5|$. Tehát, –2 és 5 szorzata egyenlő a tényezők abszolút értékeinek mínusz előjellel vett szorzatával:

$$-2 \cdot 5 = -(|-2| \cdot |5|) = -(2 \cdot 5) = -10.$$

Hogyan kell 5-öt megszorozni –2-vel? Vizsgáljuk meg!

Legyen például a hőmérséklet óránkénti változása –2 fok, az 5 pedig az az idő (óra), amíg tartott a megfigyelés. Akkor a $-2 \cdot 5$ szorzat ugyanúgy, mint az $5 \cdot (-2)$ szorzat azt mutatja, hány fokkal változott meg 5 óra alatt a hőmérséklet és melyik irányba, nőtt vagy csökkent. Világos, hogy a hőmérséklet 10 fokot csökkent, tehát a hőmérséklet –10°C-t változott (137. ábra).



137. ábra

Azt kaptuk, hogy $5 \cdot (-2) = -2 \cdot 5$. Ezért $5 \cdot (-2) = -10$. Tehát, 5 és –2 szorzatát ugyanúgy kell maghatározni, mint –2 és 5 szorzatát:

$$5 \cdot (-2) = -(|5| \cdot |-2|) = -(5 \cdot 2) = -10.$$

**Jegyezd meg!**

**Különböző előjelű számok szorzásának szabálya**

Két különböző előjelű szám szorzata mindig negatív.
Ahhoz, hogy kiszámítsuk két különböző előjelű szám szorzatát, meg kell szorozni a tényezők abszolút értékeit, és ki kell tenni a „–"jelet.

Hogyan kell összeszorozni két negatív számot? Vegyünk egy példát.

**1. feladat.** A levegő napi hőmérséklete óránként –2°C-t változott. Mennyi volt a hőmérséklet 5 órával ezelőtt?

**Megoldás.** Ha az 5-ös szám annak az időnek a mérőszáma, amely alatt a megfigyelést végezték, akkor –5-tel jelölhető az „5 órával korábbi idő". Tehát, a feladatban meg kell határozni a $(-2) \cdot (-5)$ szorzatot. Könnyen belátható, hogy 5 órával ezelőtt 10 fokkal melegebb volt. Vagyis $(-2) \cdot (-5) = 10$.

Tehát, két negatív szám szorzata olyan pozitív szám, amely a tényezők abszolút értékeinek szorzatával egyenlő. Például:

$$-2 \cdot (-5) = |-2| \cdot |-5| = 2 \cdot 5 = 10.$$

**Jegyezd meg!**

**Két negatív szám szorzásának szabálya**
Két negatív szám szorzata pozitív.
Ahhoz, hogy összeszorozzunk két negatív számot, elegendő összeszorozni az abszolút értékeiket.

Valójában két racionális szám szorzatának az előjelét a szorzótényezők előjele határozza meg.

Meg lehet-e határozni a szorzat előjeléből, hogy milyen előjelűek voltak a szorzótényezők, azonosak-e vagy különbözőek? Igen. Például a 6 két azonos előjelű szám szorzata: 2 és 3-é vagy –2 és –3-é.

A racionális számok nullával való szorzása megegyezik a pozitív számok nullával való szorzásával. Ha az egyik szorzótényező 0, akkor a szorzat is 0:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

A továbbiakban a nullától különböző racionális számokra vonatkozó eseteket fogjuk vizsgálni, a nullához köthetőeket pedig külön.

**Figyeld meg:**

- ha az $ab$ szorzat pozitív, akkor $a$ és $b$ azonos előjelű és fordítva;
- ha az $ab$ szorzat negatív, akkor $a$ és $b$ különböző előjelű és fordítva;
- ha az $ab$ szorzat nulla, akkor $a$ és $b$ közül legalább az egyik szám nulla.

Ha az egyik tényező 1, akkor a szorzat a másik tényezővel egyenlő:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

A –1-gyel való szorzás különleges. Ha egy számot megszorzunk –1-gyel, akkor az adott szám ellentettjét kapjuk. Például $5 \cdot (-1) = -5$. Ez azt is jelenti, hogy bármelyik szám felírható –1 és ellentettjének a szorzatával. Például, $-2 = -1 \cdot 2$, $2 = -1 \cdot (-2)$ vagy $2 = -(-2)$. Ebben az esetben úgy fogalmazunk, hogy *kivittünk egy mínuszt a zárójel elé.*

Tehát,

$$a \cdot (-1) = -1 \cdot a = -a.$$

Már tudjátok, hogy a pozitív számok esetében érvényesül a szorzás felcserélhetőségi és csoportosítási tulajdonsága, valamint a szorzás összeadásra is vonatkoztatható széttagolási törvénye. Ezek a törvények leegyszerűsítik három vagy annál is több tényező szorzatának a meghatározását, megkönnyítik egy adott szám szorzását több szám összegével.

**2. feladat.** Határozd meg a következő szorzatokat:

1) $-0{,}2 \cdot (-564) \cdot 5$;

2) $-2 \cdot (-1{,}5 + 5)$.

**Megoldás.** 1. Cseréljük meg a tényezőket úgy, hogy a legcélszerűbb legyen:

$-0{,}2 \cdot (-564) \cdot 5 = -0{,}2 \cdot 5 \cdot (-564) = -1 \cdot (-564) = 564.$

2. Alkalmazzuk a széttagolási törvényt és a negatív, valamint a különböző előjelű számok szorzatának tulajdonságát:

$-2 \cdot (-1{,}5 + 5) = -2 \cdot (-1{,}5) + (-2) \cdot 5 = 3 - 10 = -7.$

Meg lehet-e határozni egy több tényezős szorzat előjelét anélkül, hogy pontosan meghatároznánk a kifejezés értékét? Igen. Ebben az esetben elfogadjuk, hogy a pozitív számok nem hatnak ki a szorzat előjelére.

**3. feladat.** Pozitív vagy negatív előjelű az alábbi szorzat:

1) $-2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot 5 \cdot 10$;

2) $-6 \cdot (-5) \cdot (-0{,}2) \cdot (-1) \cdot 7 \cdot 10 \cdot (-3)$?

**Megoldás.** 1. Ebben a szorzatban négy negatív tényező van: $-2$, $-1$, $-5$ és $-4$. Az első két számpár szorzata pozitív és a második két számé is, ezért mind a négy szám szorzata pozitív. Tehát ez a szorzat pozitív:

$$-2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot 5 \cdot 10 > 0.$$

2. Ebben a szorzatban öt negatív tényező van, ezért:

$$-6 \cdot (-5) \cdot (-0{,}2) \cdot (-1) \cdot 7 \cdot 10 \cdot (-3) < 0.$$

**Figyeld meg:**

— ha egy szorzatban páros számú szorzótényező van, akkor a szorzat pozitív;

— ha egy szorzatban páratlan számú szorzótényező van, akkor a szorzat negatív.



## További tudnivalók

Az indiai matematikusok megfogalmazták a racionális számok szorzásának, osztásának, összeadásának és kivonásának a szabályát. A 14. táblázatban azt láthatjátok, hogyan fogalmazták meg a racionális számok szorzását.

*14. táblázat*

| | |
|---|---|
| A barátom barátja az én barátom is | $(+1) \cdot (+1) = +1$ |
| A barátom ellensége az én ellenségem is | $(-1) \cdot (+1) = (-1)$ |
| Az ellenségem ellensége az én barátom | $(-1) \cdot (-1) = +1$ |
| Az ellenségem barátja az ellenségem | $(+1) \cdot (-1) = (-1)$ |

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Nevezd meg a szorzásban szereplő számokat!
2. Hogyan kell megszorozni két pozitív számot?
3. Fogalmazd meg, hogyan kell megszorozni különböző előjelű számokat!
4. Fogalmazd meg, hogyan kell negatív számokat szorozni!
5. Hogyan kell meghatározni egy szorzat előjelét a tényezők előjelei alapján?
6. Mennyi egy tetszőleges szám és a nulla; egy tetszőleges szám és az 1; egy tetszőleges szám és a –1 szorzata?
7. Mit lehet elmondani a tényezőkről, ha a szorzatuk nulla?
8. Fogalmazd meg és írd le a szorzás felcserélhetőségi törvényét!
9. Fogalmazd meg és írd le a szorzás csoportosítási törvényét!
10. Fogalmazd meg és írd le a széttagolási törvényt.



## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1236′.** Adott két különböző előjelű szám. Igazak-e az alábbi állítások:
1) az adott számok szorzata pozitív;
2) az adott számok szorzata negatív?

**1237′.** Adott két negatív szám. Igazak-e az alábbi állítások:
1) az adott számok szorzata negatív;
2) az adott számok szorzata pozitív?

**1238′.** Szabolcs azt állítja, hogy ha az $a \cdot b$ szorzat pozitív, akkor $a$ és $b$ is pozitív. Igaza van-e Szabolcsnak?

**1239'.** Vilmos azt állítja, hogy ha $a \cdot b$ szorzat negatív és az $a$ szám pozitív, akkor $b$ csak negatív lehet. Igaza van-e Vilmosnak?

**1240'.** Igaz-e, hogy ha az $a \cdot b$ szorzat 0, akkor:
1) vagy az $a$, vagy a $b$ nulla;
2) egyszerre az $a$ és a $b$ is nulla;
3) sem $a$, sem $b$ nem nulla?

**1241'.** Igaz-e, hogy: 1) $-5 \cdot 0 = 5$; 2) $0 \cdot (-3) = 0$?

**1242°.** Helyettesítsd az alábbi összeget szorzattal és számítsd ki:
1) $15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15$;
2) $-7 + (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$.

**1243°.** Helyettesítsd az alábbi összeget szorzattal és számítsd ki:
1) $1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2$;
2) $-5 + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5)$.

**1244°.** Határozd meg annak a tizennyolc számnak összegét, melyek mindegyike: 1) 1; 2) $-2$; 3) $-\frac{5}{36}$.

**1245°.** Végezd el az alábbi szorzásokat:

1) $10 \cdot (-4)$; 3) $-7 \cdot 0{,}3$; 5) $-\frac{3}{5} \cdot 5$; 7) $2{,}3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$;

2) $-25 \cdot 6$; 4) $-2{,}8 \cdot 0{,}6$; 6) $\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right)$; 8) $-1\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8}$.

**1246°.** Végezd el az alábbi szorzásokat:

1) $-4 \cdot 0{,}25$; 2) $5{,}6 \cdot (-0{,}5)$; 3) $-7{,}3 \cdot 20$; 4) $-5 \cdot 4\frac{3}{5}$.

**1247°.** Határozd meg a kifejezés értékét a 15. táblázat adatai alapján.

*15. táblázat*

| $x$ | $-25$ | $-12$ | $-4$ | $-2$ | $-4{,}5$ | $-1{,}1$ | $-0{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | | | | | | |

**1248°.** Számítsd ki:

1) $-4 \cdot (-25)$; 3) $-0{,}04 \cdot (-2{,}5)$; 5) $-0{,}6 \cdot (-5)$;
2) $-12 \cdot (-100)$; 4) $-1{,}3 \cdot (-0{,}01)$; 6) $-0{,}01 \cdot (-130)$.

**1249°.** Számítsd ki:

1) $-2 \cdot (-44)$; 3) $-0{,}21 \cdot (-3)$;
2) $-0{,}8 \cdot (-5)$; 4) $-\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{7}{18}\right)$.

**1250°.** Határozd meg a kifejezés értékét a 16. táblázat adatai alapján.

*16. táblázat*

| $x$ | –25 | –12 | –4 | –2 | –4,5 | –1,1 | –0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | | | | | | |

**1251°.** Végezd el a szorzást:

1) $10 \cdot (-4)$; 2) $-10 \cdot 4$; 3) $-10 \cdot (-4)$; 4) $10 \cdot 4$.

**1252°.** Számítsd ki:

1) $-3{,}65 \cdot 0$; 2) $-\frac{5}{9} \cdot 0$; 3) $0 \cdot \left(-4\frac{5}{7}\right)$; 4) $-0{,}6 \cdot 0$.

**1253°.** Határozd meg a $b$ szám előjelét a 17. táblázat adatai alapján.

*17. táblázat*

| Az $a$ szám előjele | + | – | – | + |
|---|---|---|---|---|
| A $b$ szám előjele | | | | |
| Az $ab$ szorzat előjele | – | + | – | + |

**1254°.** Határozd meg a $b$ szám előjelét a 18. táblázat adatai alapján.

*18. táblázat*

| Az $a$ szám előjele | –3 | –0,8 | 9 | –6 | 17 | –2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A $b$ szám előjele | | | | | | |
| Az $ab$ szorzat előjele | – | + | – | + | – | – |

**1255°.** Határozd meg az $x$ értékét, ha:

1) $2 \cdot x = 0$; 2) $-7 \cdot x = 0$; 3) $0{,}84 \cdot x = 0$; 4) $-\frac{3}{8} \cdot x = 0$.

**1256°.** Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $-5 \cdot x = 0$; 2) $0{,}47 \cdot x = 0$; 3) $-\frac{3}{7} \cdot x = 0$.

**1257°.** Számítsd ki:

1) $-56 \cdot (-1)$; 3) $-1 \cdot 56$; 5) $0{,}92 \cdot 1$; 7) $-1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$;

2) $1 \cdot 56$; 4) $0{,}92 \cdot (-1)$; 6) $-1 \cdot (-53{,}9)$; 8) $-1 \cdot (-1045) \cdot (-1)$.

**1258°.** Rajzold át a füzetedbe a 19. táblázatot és töltsd is ki.

*19. táblázat*

| $a$ | $-32$ | $-8$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $5$ | $24$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a \cdot 1$ | | | | | | | |
| $a \cdot (-1)$ | | | | | | | |
| $-1 \cdot a$ | | | | | | | |
| $a \cdot 0$ | | | | | | | |

**1259°.** Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékét:

1) $-8 \cdot 2$ és $2 \cdot (-8)$; 2) $3 \cdot (-16)$ és $-16 \cdot 3$.

**1260°.** Hasonlítsd össze a kifejezések értéket:

1) $-4 \cdot 9$ és $9 \cdot (-4)$; 2) $11 \cdot (-22)$ és $-22 \cdot 11$.

**1261°.** Számítsd ki a legcélszerűbb módon:

1) $-0{,}5 \cdot (-31) \cdot (-2)$;

2) $\frac{1}{5} \cdot (-0{,}12) \cdot (-10)$;

3) $2{,}5 \cdot (-32) \cdot (-0{,}4)$;

4) $-\frac{2}{7} \cdot (-3) \cdot 14$;

5) $11{,}8 \cdot (-3{,}324) \cdot 0$;

6) $-\frac{5}{13} \cdot (-27) \cdot \frac{13}{15}$;

7) $-25 \cdot 0{,}3 \cdot 4$;

8) $11 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{6}{55}\right)$.

**1262°.** Számítsd ki:

1) $-0{,}2 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot (-5) \cdot 7$;

2) $\frac{1}{3} \cdot 0{,}1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-12)$.

**1263°.** Ellenőrizd, igaz-e az $(a + b) \cdot c = ac + bc$ egyenlőség, ha:

1) $a = -3$, $b = -5$, $c = 8$; 2) $a = 4{,}5$, $b = -1{,}6$, $c = 2$.

**1264°.** Számítsd ki a széttagolási törvény segítségével:

1) $\left(\frac{5}{7} + 2\right) \cdot (-7)$;

2) $\left(-4{,}9 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2$;

3) $15 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)$;

4) $100 \cdot (-0{,}1 + 0{,}01 - 0{,}001)$;

5) $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot (-18)$;

6) $-24 \cdot \left(\frac{5}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right)$.

**1265°.** Számítsd ki a széttagolási törvény segítségével:

1) $(6{,}3 - 7) \cdot \frac{1}{7}$; 2) $\left(\frac{7}{15} + \frac{5}{9}\right) \cdot 45$; 3) $-1000 \cdot (0{,}3 - 0{,}031)$.

**1266°.** Állapítsd meg a következő szorzat előjelét:

1) $-4 \cdot 1 \cdot (-11) \cdot (-34780)$;

2) $5 \cdot (-17) \cdot (-2) \cdot (-578) \cdot 121 \cdot (-15) \cdot (-7) \cdot (-2)$;

3) $-3{,}98 \cdot (-13) \cdot 3 \cdot (-0{,}4) \cdot (-94) \cdot 45{,}6$;

4) $7 \cdot \frac{4}{7} \cdot \left(-67\frac{1}{23}\right) \cdot (-0{,}34) \cdot 28$.



***1267°.*** Pozitív vagy negatív szám az alábbi szorzat:

1) $14 \cdot (-124) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-9) \cdot 25 \cdot 48 \cdot (-888) \cdot (-43) \cdot 68$;

2) $-12{,}76 \cdot (-35) \cdot 19 \cdot (-0{,}0054) \cdot 7 \cdot 61 \cdot 358$?



***1268°.*** Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékeit:

1) $-8 \cdot (-2)$ és $8 \cdot 2$; 2) $30 \cdot (-10)$ és $-10 \cdot 30$; 3) $-15 \cdot (-6)$ és $-15 \cdot 6$.

**1269°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x : (-8) = 0{,}6$; 2) $x : 12 = -2$; 3) $x : (-0{,}5) = -6$.



***1270°.*** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x : (-10) = 3{,}4$; 2) $x : 3 = -9$; 3) $x : (-0{,}1) = -2$.

**1271.** Határozd meg azt az összeget, melynek tizennyolc összeadandója van és mindegyik összeadandó:

1) $-5 \cdot 4$; 2) $-1 + \frac{5}{6}$; 3) $-2{,}6 - 2\frac{1}{5}$.

**1272.** Számítsd ki:

1) $-12 \cdot 35 - 34 \cdot (-2)$; 3) $-\frac{1}{2} + 7 \cdot \left(-2\frac{9}{14}\right)$;

2) $-3{,}4 + 7 \cdot (-0{,}5)$; 4) $\frac{4}{3} \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right) - \frac{21}{7}$.



***1273.*** Számítsd ki:

1) $9 \cdot 32 - 32$; 2) $-13 \cdot 14 + 5 \cdot (-10)$; 3) $-6 \cdot 15 - 4$.

**1274.** Adottak a 0; 1; -2; 3; 4; 5; -6; 7; 8 és -9 számok. Mi több, ezeknek a számoknak a szorzata vagy az összege?



***1275.*** Adottak a 1; -2; 3; 4; 5; -6; 7; 8 és -9. Mi több, ezeknek a számoknak a szorzata vagy az összege?

**1276.** Számítsd ki:

1) $-\frac{5}{7} \cdot (-1{,}4) \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}$;

2) $-\frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) \cdot 7\frac{1}{3} \cdot (-6) \cdot 40$;

3) $-5 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right)$;

4) $\left(9{,}3 - 0{,}28 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right) \cdot (-72{,}59)$;

5) $4{,}2\cdot\left(-\frac{1}{35}\right)+\frac{121}{169}\cdot\left(-1\frac{2}{11}\right)-(-3)\cdot\frac{1}{25}$;

6) $(-5)^2-2^2+(-0{,}28)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$;

7) $(5\cdot(-7)+4)\cdot|-0{,}9+5\cdot0{,}15|$.

**1277.** Hasonlítsd össze számítások elvégzése nélkül az alábbi kifejezések értékét:

1) $-2{,}5\cdot(-3{,}2)\cdot4$ és $1{,}9\cdot(-9{,}5)\cdot2$;

2) $5\frac{4}{7}\cdot\left(-2\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot5\frac{7}{4}$ és $3\frac{4}{5}\cdot\left(-4\frac{5}{7}\right)\cdot0\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$;

3) $-7{,}5\cdot(-4)\cdot(-2)\cdot(-18)\cdot5$ és $-6\cdot(-15)\cdot(-1376)$;

4) $-49\cdot(-45)\cdot0\cdot318$ és $-1\cdot23\cdot(-5)\cdot629$.

**1278.** Határozd meg a –9-nél nagyobb és 9-nél kisebb természetes számok szorzatát.

**1279.** Határozd meg a –4-nél nagyobb és a 11-nél kisebb egész számok szorzatát.

**1280.** Mennyivel kisebb 3,7 és –5,6 szorzata:

1) a kisebbik számnál; 2) a nagyobbik számnál; 3) a számok összegénél?

**1281.** Mennyivel nagyobb –3 és –4 szorzata:

1) a nagyobbik számnál; 2) a kisebbik számnál; 3) a számok összegénél?

**1282.** Számítsd ki a legcélszerűbb módon:

1) $-24\cdot\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{10}-\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot210$;

3) $153\cdot\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{17}-\frac{2}{51}\right)-18\cdot\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{6}\right)$.

**1283.** Írd le a –3; –1,7; 8; –0,64; 0,3 számokat olyan kéttényezős szorzatként, ahol az egyik tényező 1) –1; 2) 1.

**1284.** Írd le az 1) 1; 2) 25; 3) 64; 4) 121 számokat két azonos tényező szorzataként! Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

**1285.** Írd le a 1) –9; 2) –36; 3) –81; 4) –100 számokat két ellentett szám szorzataként.

**1286.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $-2\cdot(x-4)=0$;
2) $12\cdot(7{,}8+x)=0$;
3) $23{,}4\cdot|x|=0$;
4) $|x-5|\cdot(-6)=0$;
5) $(8-x)\cdot|-0{,}72|=0$;
6) $(x-234)\cdot(-234)=0$.

**1287.** Oldd meg a következő egyenleteket:
1) $41 \cdot (x - 41) = 0$; 2) $-77 \cdot (0{,}25 + x) = 0$; 3) $|-57| \cdot |x| = 0$.

**1288.** Pozitív vagy negatív a $d$ szám, ha:
1) $-3d < 0$; 3) $4{,}3 \cdot (-d) > 0$;
2) $\frac{1}{4}d < 0$; 4) $-3 \cdot (-d) > 0$?

**1289.** Pozitív vagy negatív a -100-nál nagyobb és 50-nél kisebb nullától különböző egész számok szorzata?

**1290.** A $k$, $l$, $m$ és $n$ számokról tudjuk, hogy $kl < 0$, $lm < 0$, $mn < 0$. Határozd meg a $kn$ szorzat előjelét.

**1291.** Pozitív vagy negatív az alábbi kifejezés értéke:
1) $ab - 7c$, ha $a$, $b$ és $c$ is negatív szám;
2) $5l - mn$, ha $l$, $m$ és $n$ is negatív szám?

**1292*.** Határozd meg az $x$ szám 20%-át, ha:

1) $x = 96{,}4 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{1}{91}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)$;

2) $x = -10{,}5 \cdot 2\frac{2}{15} + (-5{,}4) \cdot 3\frac{7}{9} - \frac{108}{285} \cdot \left(-\frac{19}{144}\right)$;

3) $x = 1{,}8 \cdot \left(-4\frac{2}{3}\right) + 6\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{6}{41}\right)$.

**1293*.** Mit kell behelyettesíteni a csillagok helyére ahhoz, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:
1) $(* - *) \cdot 11 = -88 - 66m$; 2) $(-15 + *) \cdot 4 = * - 4a$?

**1294*.** Oldd meg a következő egyenleteket:
1) $x(x - 3{,}7)(x + 9{,}2) = 0$; 3) $(|x| - 0{,}3)(5 - x)(x - 16{,}5) = 0$;
2) $|x - 23| \cdot (x + 12{,}7) = 0$; 4) $(|x| + 4)\, x\, (6{,}7 - x) = 0$.

**1295*.** Három egymástól különböző $a$, $b$ és $c$ szám közül az $a$ a legkisebb, a $c$ legnagyobb. Határozd meg a $b$ szám előjelét, ha:
1) $abc < 0$ és $c > 0$; 2) $abc < 0$ és $ab < 0$; 3) $abc > 0$ és $a + c = 0$.

**1296*.** Számítsd ki:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{7}-1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}-1\right).$$

**1297*.** Oldd meg a következő egyenleteket:
1) $|x - 4| = 1$; 2) $3 \cdot |x + 1| = 6$; 3) $|x - 2| = 3$.
Ábrázold egy számegyenesen az egyenletek gyökeit jelölő pontokat! Számítsd ki az egyenletek gyökeinek szorzatát! Határozd meg a bejelölt pontok távolságát, és jelöld meg a pontokat összekötő szakaszok felezőpontjait! Milyen törvényszerűséget vettél észre?

**1298*.** A táblára tíz plusz jelet és tizenhét mínusz jelet írtak. Le lehet törölni bármelyik két jelet azzal a feltétellel, ha azonos jeleket töröltek le, akkor egy plusz jelet kell visszaírni, ha különböző jeleket töröltek le, akkor egy mínusz jelet. Milyen jel marad a táblán huszonhat ilyen művelet után?

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1299.** Egy baráti társaság kerékpártúrára indult. 2,5 km-t tettek meg 10km/h sebességgel, majd $1\frac{1}{3}$ órát haladtak úgy, hogy sebességüket 2km/h-val növelték. Mekkora utat tett meg a társaság a túrán?

**1300.** Egy szoba szélessége 3,75 m, hossza 5,2 m. Elhatározták, hogy a szoba padlóját linóleummal fedik le. 1 négyzetméter linóleum ára 104 hrivnya. Mennyi linóleumot kell vásárolni és mennyibe fog kerülni?

**1301.** Édesanya megkérte Ottót, hogy vásároljon 2 l tejet, egy kenyeret és 1,5 kg kekszet. Az üzletben egy liter tej 8,45 hrivnyába, a kenyér 4,3 hrivnyába, a keksz pedig 25, 8 hrivnyába került. Mennyi pénze maradt Ottónak a vásárlás után, ha az édesanyja 90 hrivnyát adott neki?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1302.** Számítsd ki: 1) $(72 : 9 + (680 - 34) : 17) : 23$;
2) $(11 + 64) : 25 \cdot 11 - 225 : 15$.

**1303.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $12 : 3\frac{3}{8} - 1\frac{1}{4} : \frac{9}{16}$; 2) $\frac{6}{7} : \left(\frac{1}{14} - \frac{5}{6}\right)$.

**1304.** Végezd el a maradékos osztást: 1) 3784 : 63; 2) 6731 : 62.

**1305.** 116-ot elosztottuk egy számmal. Melyik ez a szám, ha a nem teljes hányados is és a maradék is 2 lett.

# 29. § RACIONÁLIS SZÁMOK OSZTÁSA

Már tudjátok, hogy a pozitív számok osztása visszavezethető az osztó reciprokával való szorzásra. Osszuk el például 20-t $-\frac{5}{6}$-dal! Ez azt jelenti, hogy a 20-at meg kell

szorozni $-\frac{5}{6}$ reciprokával, azaz $-\frac{6}{5}$-del:

$$20:\left(-\frac{5}{6}\right)=20\cdot\left(-\frac{6}{5}\right).$$

Ebben az esetben a különböző előjelű számok szorzása alapján kapjuk, hogy:

$$20\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\left(|20|\cdot\left|-\frac{6}{5}\right|\right)=-\left(20\cdot\frac{6}{5}\right)=-24.$$

Tehát, $20:\left(-\frac{5}{6}\right)=-24.$

Észrevehető, hogy 20 és $-\frac{5}{6}$ hányadosa abszolút értékeik hányadosával egyenlő, csak mínusz előjellel:

$$20:\left(-\frac{5}{6}\right)=-\left(|20|:\left|-\frac{5}{6}\right|\right)=-\left(20:\frac{5}{6}\right)=-24.$$

Észrevehető, hogy –20 és $\frac{5}{6}$ hányadosa abszolút értékeik hányadosával egyenlő, csak mínusz előjellel:

$$-20:\frac{5}{6}=-\left(|-20|:\left|\frac{5}{6}\right|\right)=-\left(20:\frac{5}{6}\right)=-24.$$

**Jegyezd meg!**

**Különböző előjelű számok osztásának szabálya**

Két különböző előjelű szám hányadosa mindig negatív. Ahhoz, hogy kiszámítsuk két különböző előjelű szám hányadosát, el kell osztani az osztandó abszolút értékét az osztó abszolút értékével, és a kapott hányados elé ki kell tenni a „-"jelet.

Hogyan kell elosztani egy negatív számot egy másik negatív számmal? Az előző példához hasonlóan –20 és $-\frac{5}{6}$ esetében azt kapjuk, hogy: $-20:\left(-\frac{5}{6}\right)=+\left(|-20|:\left|-\frac{5}{6}\right|\right)=20:\frac{5}{6}=24.$

**Jegyezd meg!**

**Két negatív szám osztásának szabálya**
Két negatív szám hányadosa pozitív.
Ahhoz, hogy elosszunk két negatív számot, elegendő az osztandó abszolút értékét elosztani az osztó abszolút értékével.

Valójában a racionális számok hányadosának előjelét az osztandó és az osztó előjele határozza meg. Például:

$4 = 8 : 2$ vagy $4 = -8 : (-2)$;
$-4 = -8 : 2$ vagy $-4 = 8 : (-2)$.

Ha 0-t osztunk bármilyen nullától különböző racionális számmal, akkor hányadosként is 0-t kapunk:

$$0 : a = 0, \text{ ha } a \neq 0.$$

A racionális számok körében sincs értelme a nullával való osztásnak. Ezért:

**nullával osztani nem lehet!**

**Figyeld meg:**

- az $a : b$ hányadosban $b$ nem egyenlő nullával;
- ha az $a : b$ hányados pozitív, akkor $a$ és $b$ azonos előjelű és fordítva;
- ha az $a : b$ hányados negatív, akkor $a$ és $b$ különböző előjelű és fordítva;
- ha az $a : b$ hányados nulla, akkor az $a$ egyenlő nullával és fordítva.

Mivel $a \cdot 1 = a$, ezért $a : 1 = a$ bármely $a$-ra nézve, és $a : a = 1$, ha $a \neq 0$.

Ha egy nullától különböző számot elosztunk $-1$-gyel, akkor az adott szám ellentettjét kapjuk. Például, $5 : (-1) = -5$.

Két ellentett szám hányadosa $-1$:

$$-a : a = a : (-a) = -1, \text{ ha } a \neq 0.$$



## További tudnivalók

A racionális szó a latin *„ratio"* szóból származik, jelentése arány, mivelhogy ezeket a számokat a megjelenésük óta egy egész és egy természetes szám arányaként írják fel. Ha egy racionális számot elosztunk egy nullától különböző racionális számmal, akkor a hányados is racionális szám lesz. Ugyanakkor, ha egy egész számot osztunk el egy nullától különböző egész számmal, akkor a hányados nem minden esetben lesz egész szám. Például 2 és 3 hányadosa nem egész szám.

Érdekes, hogy a történelemben az osztás problémáját sokkal korábban megoldották, mint a kivonását.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Hogyan kell elosztani két pozitív számot egymással? két negatív számot egymással? két különböző előjelű számot?
2. Milyen előjelűek azok a számok, melyek hányadosa pozitív? negatív?
3. Mennyi a hányados, ha az osztandó nulla?
4. Mi lesz az eredmény, ha az osztandó azonos az osztóval?
5. Mi lesz az osztás eredménye, ha az osztó 1? –1?



## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1306'.** Adott két különböző előjelű szám. Igaz-e az alábbi állítás:

1) az adott számok hányadosa pozitív;

2) az adott számok hányadosa negatív?

**1307'.** –24-t el kell osztani 8-cal.

1) Mennyi –24 abszolút értéke: a) 24; b) –24?

2) Mennyi 8 abszolút értéke: a) 8; b) –8?

3) Mennyi lesz az abszolút értékek hányadosa: a) 3; b) $\frac{1}{3}$?

4) Milyen előjelű lesz a hányados: a) „+"; b) „–"?

5)Nevezd meg az adott számok hányadosát.

**1308′.** Adott két negatív szám. Igaz-e az alábbi állítás:
1) az adott számok hányadosa pozitív;
2) az adott számok hányadosa negatív?

**1309′.** –40-t el kell osztani –5-tel!
1) Mennyi –40 abszolút értéke: a) 40; b) –40?
2) Mennyi –5 abszolút értéke: a) 5; b) –5?
3) Mennyi lesz az abszolút értékek hányadosa: a) 8; b) $\frac{1}{8}$?
4) Milyen előjelű lesz a hányados: a) „+"; b) „–"?
5) Nevezd meg az adott számok hányadosát.

**1310′.** Igaz-e, hogy: 1) $5 : 5 = 0$; 2) $0 : (-3) = -3$; 3) $0 : 4 = 0$?

**1311′.** Igaz-e a következő állítás: ha az $a : b$ hányados nullával egyenlő, akkor 1) vagy $a$ vagy $b$ egyenlő nullával; 2) egyszerre mindkét $a$ szám nullával egyenlő; 3) csak az $a$ szám egyenlő nullával?

**1312′.** Igaz-e, hogy:
1) $8 : 1 = 8$;
2) $-8 : 1 = 8$;
3) $-7 : 7 = -1$;
4) $12 : 12 = 1$;
5) $6 : (-6) = 1$;
6) $-14 : 14 = -1$?

**1313°.** Igazat állít-e Vilmos, amikor azt mondja, hogy két természetes szám hányadosa mindig 1) természetes szám; 2) egész szám; 3) racionális szám?

**1314°.** Milyen előjelű lesz az alábbi hányados:
1) $5 : (-2)$; 2) $-4 : 2$; 3) $14 : (-7)$; 4) $1{,}344 : (-0{,}5)$?

**1315°.** Számítsd ki:
1) $63 : (-9)$;
2) $-44 : 4$;
3) $-3 : 12$;
4) $-10 : 25$;
5) $544 : (-16)$;
6) $56 : (-8)$;
7) $-96 : 4$;
8) $45 : (-15)$;
9) $6 : (-12)$;
10) $0{,}1 : (-2{,}5)$;
11) $0{,}84 : (-1{,}2)$;
12) $-313{,}1 : 1{,}01$;
13) $0{,}82 : (-2)$;
14) $-16{,}9 : 13$;
15) $-2 : 0{,}002$.

***1316°.*** Számítsd ki:
1) $196 : (-4)$;
2) $-42 : 6$;
3) $-0{,}6 : 2$;
4) $-12 : 6$;
5) $22{,}5 : (-0{,}25)$;
6) $-14{,}4 : 0{,}32$.

**1317°.** Igaz-e a következő egyenlőtlenség:
1) $-2{,}3 : (-7) < 0$; 2) $-42 : (-5{,}4) > 0$; 3) $-2 : (-8) < 0$?

**1318°.** Számítsd ki:
1) $-48 : (-12)$;
2) $-42 : (-6)$;
3) $-65 : (-5)$;
4) $-8 : (-56)$;
5) $-459 : (-9)$;
6) $-1{,}25 : (-0{,}5)$;
7) $-8{,}1 : (-0{,}9)$;
8) $-4{,}41 : (-2{,}1)$;
9) $-0{,}404 : (-0{,}04)$.

**1319°.** Számítsd ki:
1) $-124 : (-4)$; 2) $-80 : (-160)$; 3) $-84{,}25 : (-2{,}5)$.

**1320°.** Határozd meg a $b$ szám előjelét a 20. táblázat adatai alapján.

*20. táblázat*

| Az $a$ szám előjele | + | – | – | + |
|---|---|---|---|---|
| A $b$ szám előjele | | | | |
| Az $a : b$ hányados előjele | – | + | – | + |

***1321°.*** Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékét nullával:

1) $-3 : (-32) \cdot 65$;
2) $42 : (-4{,}4) \cdot (-2{,}9) : (-7{,}08)$;
3) $-36 : (-6)$;
4) $64 : (-0{,}8) \cdot (-9) : (-3{,}3)$.

**1322°.** Határozd meg a kifejezés előjelét a 21. táblázat adatai alapján.

*21. táblázat*

| Az $a$ szám | 90 | –42 | –6,8 | –1 |
|---|---|---|---|---|
| A $b$ szám | –10 | 2,1 | 1 | –1,2 |
| Az $a : b$ hányados előjele | | | | |
| Az $ab$ szorzat előjele | | | | |
| Az $a + b$ | | | | |

**1323°.** Számítsd ki:

1) $-6 : 1$;
2) $-3{,}67 : 1$;
3) $0 : 6$;
4) $0 : (-5{,}98)$;
5) $51 : (-1)$;
6) $1 : \left(-4\frac{5}{7}\right) \cdot (-0{,}33) : (-1)$.

***1324°.*** Számítsd ki:

1) $-13 : 1$;
2) $-56 : (-1)$;
3) $187 : (-1)$;
4) $0 : 6$;
5) $8{,}92 : 1 : (-0{,}2) : (-1)$;
6) $1 : \frac{1}{2} : (-1) \cdot (-2{,}5)$.

**1325°.** Határozd meg az $x$ értékét, ha:

1) $x : 2 = 0$;
2) $x : (-34) = 0$;
3) $x : 0{,}09 = 0$;
4) $x : (-34) = 0$.

***1326°.*** Határozd meg az $x$ értékét, ha:

1) $x : 4 = 0$;
2) $x : (-0{,}4) = 0$;
3) $x : (-4) = 4$.

**1327°.** Számítsd ki:

1) $15 : (-15)$;
2) $-0{,}9 : 0{,}9$;
3) $1 : (-1)$;
4) $\frac{1}{8} : \left(-\frac{1}{8}\right)$.

**1328°.** Rajzold át a füzetedbe a 22. táblázatot és töltsd ki.

*22. táblázat*

| $a$ | –32 | –8 | –1 | 1 | 5 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 : a$ | | | | | | |
| $a : 1$ | | | | | | |
| $a : (-1)$ | | | | | | |
| $-1 : a$ | | | | | | |
| $0 : a$ | | | | | | |
| $a : (-a)$ | | | | | | |

**1329°.** Számítsd ki:

1) $-5{,}05 : (-5)$; 2) $5{,}05 : 5$; 3) $-5{,}05 : 5$; 4) $5{,}05 : (-5)$.

***1330°.*** Számítsd ki:

1) $-84 : (-2)$; 2) $84 : 2$; 3) $84 : (-2)$; 4) $-84 : 2$.

**1331°.** Számítsd ki:

1) $-0{,}6 : (-2) - 2 \cdot (-3) : (-2{,}4) + (-2{,}3)$;

2) $6{,}4 - 2 \cdot (-16) : (-0{,}1) : 400$;

3) $-7{,}7 : 11 + (-5{,}8) : (26 : (-13))$;

4) $56 : (-0{,}08) : \left(-\frac{7}{9}\right) : 3$.

***1332°.*** Számítsd ki:

1) $-1{,}2 : \frac{1}{3} \cdot (-2) : 4{,}5$;

2) $0{,}1 : (-10) + 81 : (-0{,}9) : (-3) \cdot (-0{,}01)$;

3) $4{,}4 - 2{,}4 : (-0{,}24) + (-1212) : (-12)$.

**1333°.** Helyesen van-e kitéve a relációs jel:

1) $-5{,}6 : (-2{,}8) > 4\frac{1}{2}$; 2) $0{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) < (-6{,}6) : \frac{5}{7}$?

**1334°.** Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékeit:

1) $-8 : (-2)$ és $8 : 2$; 3) $-15 : (-6)$ és $-15 : 6$;

2) $30 : \left(-\frac{1}{2}\right)$ és $-15 : 30$; 4) $128 : (-2)$ és $-8 : \frac{1}{8}$.

***1335°.*** Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékeit:

1) $-100 : (-2)$ és $100 : 2$; 3) $-6 \cdot (-3)$ és $-6 : (-3)$;

2) $-7{,}2 : (-10)$ és $7{,}2 : 10$; 4) $45 : (-9)$ és $-9 : 45$.

**1336°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x : 3 = 0$; 2) $-1{,}2 : x = 4$; 3) $0{,}3 : x = 0{,}6$; 4) $-\frac{3}{8}x = 15$.

**1337°.** Oldd meg a következő egyenleteket:
1) $x : (-7{,}1) = 0$; 2) $-5 : x = 6$; 3) $0{,}42 : x = -0{,}01$.

**1338.** Számítsd ki:
1) $\frac{1}{2} : (-6)$; 3) $-2\frac{1}{5} : \frac{1}{5}$; 5) $8 : \left(-\frac{1}{8}\right)$;
2) $\frac{3}{4} : \left(-\frac{8}{13}\right)$; 4) $\frac{12}{77} : \left(-\frac{15}{33}\right)$; 6) $-\frac{2}{3} : 0{,}4$.

**1339.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:
1) $-16 \cdot (14 + (-240) : 120) - 960 : (-24)$;
2) $-2450 : 35 - (-49) - 50702 : (-101)$.

**1340.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:
1) $-67928 : 1213 - 625 : (-25)$;
2) $-512 : 256 + (-201) : 67 - 968 : (-22)$.

**1341.** Egész szám-e az alábbi kifejezés értéke:
1) $1{,}2 : (-2{,}8) : 2\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3} : \frac{4}{3} : 4$; 3) $-\frac{1}{2} : 3{,}2 : 24$?

**1342.** Milyen relációs jelet kell tenni az alábbi kifejezések értékei közé:
1) $-8 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 : \left(-\frac{1}{2}\right)$ és $4{,}2 : (-2{,}1) + 1$;
2) $1 - 0{,}3 : (-1{,}2)$ és $1\frac{1}{2} : (-2{,}5)$?

Írd le a füzetedbe a kapott egyenlőtlenségeket.

**1343.** Számítsd ki:
1) $-\frac{2}{9} : (-18)$; 3) $\frac{1}{24} : \left(-\frac{7}{12}\right)$; 5) $-\frac{1}{12} : \left(-\frac{2}{15}\right)$;
2) $-\frac{1}{25} : (-0{,}2)$; 4) $-\frac{18}{25} : (-0{,}36)$; 6) $-7 : \left(-\frac{1}{14}\right)$.

**1344.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:
1) $15 \cdot (-6) : (-120) - (-80) : (-1600)$;
2) $-175 : (-35) - 0 : 348 - 78309 : (-78309)$.

**1345.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:
1) $-8679 : (-789) + (-2025) : (-45)$;
2) $-3564 : (-9) : (-11 \cdot 2 - 0 : (-34))$.

**1346.** Negatív egész szám-e a következő kifejezés értéke:
1) $-0{,}05 : (-0{,}002)$; 2) $-\frac{5}{7} : \left(-\frac{7}{5}\right) : (-8)$?

**1347.** Milyen relációs jelet kell tenni az alábbi kifejezések értékei közzé:

1) $-8{,}5 : \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-2\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{11}{20}\right)$ és $-5{,}2 : \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 0{,}02$;

2) $0 : \left(-9\frac{4}{7}\right)$ és $-6\frac{1}{4} : (-2{,}5) + (-5{,}5) : (-1{,}1)$?

Írd le a füzetedbe a kapott egyenlőtlenségeket.

**1348.** Számítsd ki:

1) $-5{,}805 : \left(-\frac{5}{8}\right) + 9{,}016 : (-7)$;

2) $-6{,}4 : \left(-2\frac{2}{15}\right) - (-5{,}2) : (-3\frac{7}{15}) + (-5{,}4) : \left(-\frac{3}{5}\right)$;

3) $-18{,}2 : \left(-8\frac{2}{3}\right) + \left(-8\frac{1}{2}\right) : (-1{,}7) + 3\frac{5}{9} : (-0{,}16) \cdot 4{,}14 : 23$.

**1349.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $(x - 4) : 7 = 0$;
2) $(-1{,}1 + x) : 8{,}8 = 0$;
3) $(-1{,}8 + x) : |-0{,}24| = 0$;
4) $|x| : (-5) = 0$;
5) $|x - 5| : 0{,}3 = 0$;
6) $||x| - 111| : (-111) = 0$.

***1350.*** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $(x - 36) : 54 = 0$; 2) $(0{,}2 + x) : (-14) = 0$; 3) $|x| : |-10| = 0$.

**1351.** Pozitív vagy negatív az $a$ szám, ha:

1) $-5 : a < 0$; 2) $\frac{1}{12} : a < 0$; 3) $-0{,}3 : (-a) > 0$?

***1352.*** Számítsd ki:

1) $(-7{,}7 - 7{,}3) \cdot \left(-\frac{7}{25} : (-6{,}3) + (-2{,}6) : 1\frac{4}{5}\right)$;

2) $\left(\frac{3}{5} + 5{,}6 : 1{,}4\right) : \left(-\frac{1}{7} \cdot (-2{,}1) + (-1{,}5) : (-0{,}75)\right)$;

3) $-3{,}2 : (-0{,}8) + (-1{,}4) : \frac{1}{2} : \left(1 - \frac{3}{10} : (-1{,}8)\right)$.

**1353.** Végezd el a $-0{,}7$; $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{10}$; $-2\frac{1}{3}$ számokkal az alábbi műveleteket:

1) oszd el a legnagyobb és a legkisebb számok szorzatát $-2$-vel;

2) a pozitív szám és a legnagyobb negatív szám szorzatát oszd el $-4$ ellentettjével.

**1354.** Írd le a -4; -1,5; 0,6; 8,2 számot olyan hányadosként, melyben az osztó 1) -1; 2) 1; 3) 2; 4) 0,1; 5) -4.

**1355.** 4,6 elosztottuk $-\frac{3}{4}$-del, majd a kapott eredményhez hozzáadtuk az eredeti szám felét és így $\frac{x}{3}$-at kaptunk. Határozd meg az $x$ értékét.

***1356.*** -3-at elosztottuk $-\frac{1}{16}$-dal, majd a kapott eredményhez hozzáadtuk 98 negyedét és így $\frac{x}{5}$-öt kaptak. Határozd meg az $x$ értékét.

**1357.** Két szám hányadosa -25. Határozd meg az osztót, ha az osztandó a legnagyobb negatív kétjegyű szám.

**1358.** $5\frac{3}{4}$-et egymás után kétszer elosztottuk -2,5-del, majd szintén kétszer a 2,04 és $-\frac{1}{25}$ összegének ellentett értékével. Melyik számot kaptuk?

***1359.*** -4,5-et egymás után háromszor elosztottuk -3-mal, majd a kapott eredmény négyzetét megszoroztuk 10,8 és $-1\frac{2}{3}$ szorzatával. Melyik számot kaptuk?

**1360.** Határozd meg az összes 84,78-nál kisebb és -96-nál nagyobb 5-tel osztható egész szám összegét.

**1361*.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $6\frac{13}{22}+5\frac{5}{11}:(-4)-\frac{5}{132}:\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)^2:1\frac{7}{18}$;

2) $\left(-4\frac{10}{11}\cdot 2\frac{1}{5}\right)\cdot\left(2\frac{17}{25}:\left(-1\frac{19}{48}\right)\right):\left(-6:2\frac{5}{8}\right):\left(-7+5\frac{4}{29}\right):\left(\frac{4}{15}+\frac{9}{75}\right)$;

3) $\left(40:\left(-2\frac{2}{15}\right)-25\frac{5}{7}:\left(-1\frac{1}{35}\right)\right):\left(-21\frac{7}{9}:4\frac{2}{3}+1\right)\cdot\left(-3\frac{2}{3}\right)$;

4) $\left(\frac{11}{-9+2\frac{1}{3}}-\frac{1}{6}\cdot 12{,}5+1\frac{13}{30}\right):(-0{,}23)-0{,}005\cdot 1050$.

**1362*.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-7\cdot8\cdot9}{7\cdot8\cdot9-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$;

2) $\frac{51\cdot52\cdot53\cdot54-50\cdot51\cdot52\cdot53}{52\cdot53\cdot54\cdot55-51\cdot52\cdot53\cdot54}$.

**1363*.** Ilonka gondolt egy egész számot. Ha a szám feléhez hozzáadjuk a negyedét, akkor az eredmény –18 lesz. Melyik számra gondolt Ilonka?

**1364*.** Határozd meg azt a hányadost, amelyben az osztandó az összes –12 és 45 közé eső egész szám szorzata, az osztó pedig az összes kétjegyű páros szám szorzata.

**1365*.** Határozd meg azt a hányadost, amelyben az osztandó az összes 5 és 55 közé eső egész szám szorzata, az osztó pedig ezen számok ellentettjeinek a szorzata.

**1366*.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x : (x - 2{,}6) = 0$;
2) $|x - 23| \cdot (x + 12{,}7) : x = 0$;
3) $(x - 3)(4 - x) : (x - 5) = 0$;
4) $(x + 0{,}4) \cdot x : (0{,}1 - x) = 0$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1367.** Egy személygépkocsi 80 km/h sebességgel 4,5 óra alatt teszi meg az egész távot. Mekkora sebességgel kell haladnia a gépkocsinak ahhoz, hogy 4 óra alatt tegye meg az utat?

**1368.** 2 kg földieperben 1200 mg C-vitamin van. Négy gyerek napi C-vitamin szükséglete 240 mg. Hány gramm epret kell elfogyasztania három gyereknek ahhoz, hogy fedezzék napi C-vitamin szükségletüket?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1369.** Határozd meg:

1) |–120| 20 %-át;
2) 0,35 10 %-át.

**1370.** Hány különböző számot lehet leírni az 1, 2 és 0 számjegyekkel?

**1371.** Határozd meg a következő számok lnko-ját és lkkt-jét:

1) 120 és 48;
2) 35 és 105.

**1372.** Hány kétjegyű szám osztható maradék nélkül 6-tal?

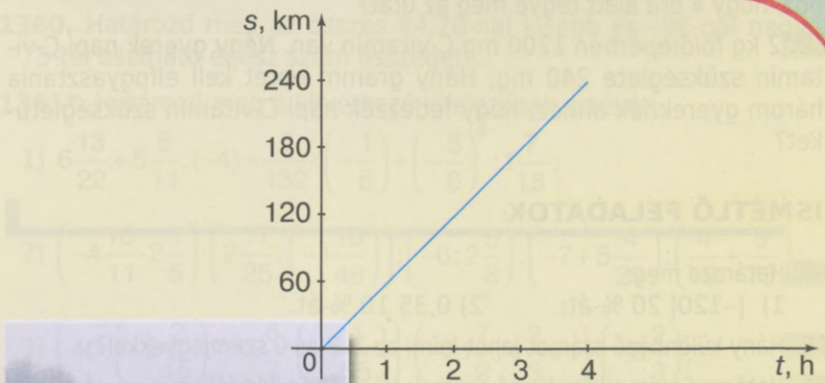
**1373.** Melyik a kifejezés értékének utolsó száma:

1) $(2^2)^2$;
2) $(3^3)^3$;
3) $(2^3)^2$;
4) $(3^2)^3$?

# 5. FEJEZET
# KIFEJEZÉSEK ÉS EGYENLETEK

## Ebben a fejezetben megtudod:

- mik a kifejezések és mi az egyszerűsítésük;
- mi a mérlegelv;
- hogyan kell egyenletet megoldani a mérlegelv alkalmazásával;
- milyen feladatokat lehet egyenlettel megoldani;
- milyen egyenes a merőleges és hogyan kell merőlegest rajzolni;
- milyen egyenesek a párhuzamosok és hogyan kell őket rajzolni;
- mi a koordinátasík;
- hogyan kell meghatározni egy pont koordinátáját a síkon;
- mi a mennyiségek közötti összefüggést ábrázoló grafikon és hogyan kell azt megrajzolni;
- hogyan alkalmazható a megtanult tananyag a gyakorlatban







$2 \cdot x = 120$

# 30. § KIFEJEZÉSEK ÉS AZOK EGYSZERŰSÍTÉSE

Már tudjátok, hogy milyen kifejezéseket nevezünk betűkifejezéseknek és hogyan lehet őket egyszerűsíteni, alkalmazva az összeadás és a szorzás tulajdonságait. Például $2a \cdot (-4b) = -8ab$. A kapott kifejezésben a $-8$-t *együtthatónak* nevezzük.

Van-e a $cd$ kifejezésnek együtthatója? Igen, ami 1-gyel egyenlő, mivel $cd = 1 \cdot cd$.

Emlékezzetek vissza, ha egy zárójelet tartalmazó kifejezést úgy alakítunk át, hogy már ne legyen benne zárójel, akkor azt mondjuk, hogy *felbontottuk a zárójelet*. Például: $5(2x + 4) = 10x + 20$.

Ebben az esetben a fordított művelet azt jelenti, hogy *közös tényezőt emelünk ki* a zárójel elé.

Az azonos betűtényezőket tartalmazó kifejezéseket *egynemű* tagoknak nevezzük. Ha közös tényezőt emelünk ki, akkor *az egynemű tagok összevonhatók*:

$$5x + y + 4 - 2x + 6y - 9 =$$
$$= (5x - 2x) + (y + 6y) + (4 - 9) =$$
$$= (5 - 2) \cdot x + (1 + 6) \cdot y - 5 =$$
$$= 3x + 7y - 5.$$

**Jegyezd meg!**

**A zárójel felbontásának szabálya**

1. Ha a zárójel előtt „+" jel áll, akkor a zárójel felbontásakor a zárójelben lévő összes összeadandó megtartja előjelét;
2. Ha a zárójel előtt „--" jel áll, akkor a zárójel felbontásakor a zárójelben lévő összes összeadandó előjele ellentettjére változik.

**1. feladat.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

1) $4x + (-7x + 5)$; 2) $15y - (-8 + 7y)$.

**Megoldás.** 1. A zárójel előtt „+" jel van, ezért a zárójel felbontásakor mindegyik összeadandó előjele változatlan marad:

$$4x + (-7x + 5) = 4x - 7x + 5 = -3x + 5.$$

2. A zárójel előtt „–" jel van, ezért a zárójel felbontásakor mindegyik összeadandó előjele ellentettjére változik:

$$15y \quad ( \quad 8 + 7y) \quad 15y + 8 \quad 7y \quad 8y + 8.$$

A zárójelek felbontásakor a széttagolási törvényt alkalmazzuk: $a(b + c) = ab + ac$. Ha $a > 0$, akkor a $b$ és $a$ c összeadandó előjele nem változik. Ha $a < 0$, akkor a $b$ és $a$ c összeadandó előjele ellentettjére változik.

**2. feladat.** Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

1) $2(6y - 8) + 7y$; 2) $-5(2 - 5x) + 12$.

**Megoldás.** 1. A zárójel előtt a 2-es tényező áll, ami pozitív, ezért a zárójel felbontásakor mindegyik összeadandó előjele változatlan marad:

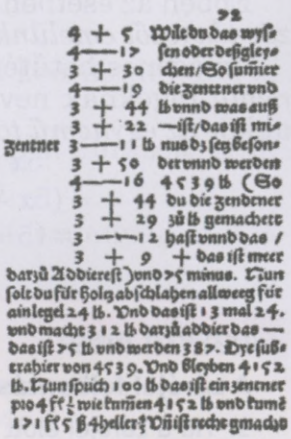
$$2(6y - 8) + 7y = 12y - 16 + 7y = 19y - 16.$$

2. A zárójel előtt a –5-ös tényező áll, ami negatív, ezért a zárójel felbontásakor mindegyik összeadandó előjele ellentettjére változik:

$$-5(2 - 5x) + 12 = -10 + 25x + 12 = 2 + 25x.$$

## További tudnivalók

1. A szláv „сума” szó a latin summa szóból ered, aminek a jelentése összegzés, végösszeg.
2. A „plusz” is latin eredetű. A plus szó „többet” jelent, a „mínusz” is a latin minus-ból származik, aminek jelentése „kevesebb”. A „+” és „–” jelet az összeadás és a kivonás jelölésére használjuk. Ezeket a jeleket a cseh Johannes Widmann vezette be 1489-ben a „Gyors és szép számolás minden kereskedő számára” című munkájában (138. ábra).




138. ábra

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mely tagokat nevezzük egyneműeknek? Hogyan kell az egynemű tagokat összevonni?
2. Hogyan kell felbontani a zárójelet, ha előtte „+” jel áll?
3. Hogyan kell felbontani a zárójelet, ha előtte „–” jel áll?
4. Hogyan kell felbontani a zárójelet, ha előtte pozitív szám áll?
5. Hogyan kell felbontani a zárójelet, ha előtte negatív szám áll?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1374′.** Nevezd meg az alábbi kifejezések együtthatóját:
1) $12a$; 3) $-5{,}6xy$;
2) $4b$; 4) $-c$.

**1375′.** Nevezd meg azokat a tagokat, melyek csak együtthatójukban különböznek:
1) $10a + 7b - 2b + a$; 3) $5n + 5m - 4n + 4$;
2) $5c - 4d - 5c + 4d$; 4) $5x + 4y - x + y$.
Hogyan hívjuk ezeket a tagokat?

**1376′.** Egyneműek-e a tagok az alábbi kifejezésekben:
1) $11a + 10a$; 3) $6n + 15n$; 5) $25p - 10p + 15p$;
2) $14c - 12$; 4) $12m + m$; 6) $8k + 10k - n$?

**1377′.** Meg kell-e változtatni a tagok előjelét az alábbi kifejezésekben, ha felbontjuk a zárójelet:
1) $4 + (a + 3b)$; 2) $-c + (5 - d)$; 3) $16 - (5m - 8n)$?

**1378°.** Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket és húzd alá az együtthatókat:
1) $-4a \cdot 6b$; 4) $x \cdot (-y) \cdot (-z)$;
2) $1{,}5c \cdot (-4d)$; 5) $-\frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} \cdot 12b$;
3) $-3n \cdot 5m \cdot (-2)$; 6) $-\frac{1}{2}x \cdot (-4y) \cdot (-z)$.

***1379°.*** Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket és húzd alá az együtthatókat:
1) $5a \cdot (-6b)$; 3) $-0{,}2n \cdot 10m$;
2) $-4c \cdot 5d \cdot (-4)$; 4) $15x \cdot \left(-\frac{1}{30}y\right)$.

**1380°.** Vond össze az egynemű tagokat:
1) $4a - 3a + 6a - 2a$; 4) $10 - 4d - 12 + 4d$;
2) $4b - 5b + 4 + 5b$; 5) $5a - 12b - 7a + 5b$;
3) $-7c + 5 - 3c + 2$; 6) $14n - 12m - 4n - 3m$.

***1381°.*** Vond össze az egynemű tagokat:
1) $6a - 5a + 8a - 7a$; 3) $5c + 4 - 2c - 3c$;
2) $9b + 12 - 8 - 4b$; 4) $-7n + 8m - 13n - 3m$.

**1382°.** Emeld ki a közös tényezőt:
1) $1{,}2a + 1{,}2b$; 3) $-3n - 1{,}8m$; 5) $-5p + 2{,}5k - 0{,}5t$;
2) $0{,}5c + 5d$; 4) $1{,}2n - 1{,}8m$; 6) $-8p - 10k - 6t$.

***1383°.*** Emeld ki a közös tényezőt:
1) $6a - 12b$; 3) $-1{,}8n - 3{,}6m$;
2) $-0{,}2c + 1{,}4d$; 4) $3p - 0{,}9k + 2{,}7t$.

**1384°.** Bontsd fel a zárójelet és vond össze az egynemű tagokat:

1) $5 + (4a - 4)$;
2) $17x - (4x - 5)$;
3) $(7b - 4) - (4b + 2)$;
4) $-(5c - d) + (4d + 5c)$;
5) $(n - m) - (-2m - 3n)$;
6) $(-5x + y) - (-2y + 4x) + (7x - 3y)$.



***1385°.*** Bontsd fel a zárójelet és vond össze az egynemű tagokat:

1) $10a + (4 - 4a)$;
2) $-(4b - 10) + (4 - 5b)$;
3) $(c - 5d) - (-d + 5c)$;
4) $-(5n + m) + (-4n + 8m) - (2m - 5n)$.

**1386°.** Bontsd fel a zárójelet és határozd meg a kifejezés értékét:

1) $15 + (-12 + 4{,}5)$;
2) $23 - (5{,}3 - 4{,}7)$;
3) $(14{,}2 - 5) - (12{,}2 - 5)$;
4) $(-2{,}8 + 13) - (-5{,}6 + 2{,}8) + (2{,}8 - 13)$.



***1387°.*** Bontsd fel a zárójelet és határozd meg a kifejezés értékét:

1) $(14 - 15{,}8) - (5{,}8 + 4)$;
2) $-(18 + 22{,}2) + (-12 + 22{,}2) - (5 - 12)$.

**1388°.** Bontsd fel a zárójelet:

1) $0{,}5 \cdot (a + 4)$;
2) $-c \cdot (2{,}7 - 1{,}2d)$;
3) $1{,}6 \cdot (2n + m)$;
4) $(n - m) \cdot (-2{,}4p)$;
5) $3 \cdot (-1{,}5p + k - 0{,}2t)$;
6) $(4{,}2p - 3{,}5k - 6t) \cdot (-2a)$.



***1389°.*** Bontsd fel a zárójelet:

1) $2{,}2 \cdot (x - 4)$;
2) $-2 \cdot (1{,}2n - m)$;
3) $(4c - d) \cdot (-0{,}5y)$;
4) $6 \cdot (-p + 0{,}3k - 1{,}2t)$.

**1390.** Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $1{,}5a \cdot 4b$;
2) $0{,}5c \cdot (-2d)$;
3) $-3n \cdot 0{,}8m \cdot 2$;
4) $2x \cdot (-y) \cdot (-0{,}25)$;
5) $\frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}b \cdot (-9)$;
6) $-\frac{1}{8}x \cdot (-5y) \cdot 2{,}4z$.



***1391.*** Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $4{,}5a \cdot (-2b)$;
2) $-2c \cdot (-0{,}1d) \cdot 5$;
3) $-0{,}5n \cdot 6 \cdot (-5m) \cdot 1\frac{1}{3}$;
4) $-3x \cdot (-5{,}2y) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{13}z$.

**1392.** Vond össze az egynemű tagokat a következő kifejezésekben:

1) $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{5}{6}a - 1\frac{1}{3}b$;
2) $\frac{2}{3}c + 0{,}5d + \frac{2}{6}c - 2\frac{1}{4}d$;
3) $-2{,}5m + 4n - \frac{1}{2}m - 1{,}4n$;
4) $-12p + \frac{1}{7}k - 5\frac{3}{14}k - 3\frac{1}{5}p$;
5) $\frac{4}{5}x - 1{,}8 + 5x - 2{,}8x$;
6) $5{,}6y + 10{,}4 - 2\frac{3}{5}y + 6{,}3 - 3y + 4{,}1$.

**1393.** Vond össze az egynemű tagokat a következő kifejezésekben:

1) $0{,}5a+\frac{2}{5}b-2\frac{1}{2}a-1{,}4b$;

2) $0{,}24c-0{,}25d+1{,}16c-2\frac{1}{4}d$;

3) $-4{,}5m+4m-2\frac{1}{2}m-1{,}4n$;

4) $-3\frac{4}{5}p+\frac{1}{5}-5\frac{2}{15}-3{,}2p$.

**1394.** Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $2{,}8\cdot(0{,}5a+4)-2{,}5\cdot(2a-6)$;

2) $-12\cdot(8-2{,}5y)+4{,}5\cdot(-6y-3{,}2)$;

3) $(2{,}7c+1{,}8d)\cdot\frac{1}{9}+(2{,}8c-4{,}9d)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$;

4) $(-12{,}8m+24{,}8n)\cdot(-0{,}5)-(3{,}5n-4{,}05m)\cdot 2$.

**1395.** Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $0{,}4\cdot(2+a)-1{,}5\cdot(a-6)$;

2) $15\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y\right)-6\cdot\left(0{,}5y-\frac{1}{3}x\right)$.

**1396.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $4\cdot(0{,}2a-3)-(5{,}8a-16)$, ha $a=-5$;

2) $2\cdot(7-5b)+15b-3\cdot(2b+5)$, ha $b=-0{,}8$;

3) $-3\cdot\left(\frac{2}{3}c-1\frac{1}{6}d\right)+8\cdot\left(2{,}5d-5\frac{1}{4}c\right)$, ha $c=0{,}5$, $d=-2$;

4) $1{,}6\cdot\left(\frac{1}{8}m+2{,}5n\right)-\left(4{,}5n-1\frac{1}{2}m\right)\cdot(-2)-(-12m+14n)$, ha $m=0{,}25$, $n=5{,}7$.

**1397.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $-4\cdot(x-2)+2\cdot(6x-1)$, ha $x=-0{,}25$;

2) $15\cdot\left(\frac{2}{5}a-\frac{1}{3}b\right)-18\cdot\left(-\frac{2}{9}b-\frac{1}{18}a\right)$, ha $a=-12$, $b=0{,}5$.

**1398*.** Keresd meg a hibát az alábbi számításban:

1) $5\cdot(a-2{,}4)-7\cdot(-a+1{,}2)=5a-12-7a+8{,}4=-2a-3{,}6$;

2) $-4\cdot(2{,}3a-b)+4{,}2\cdot(-b-3{,}5a)=-9{,}2a+4b+4{,}2b-$
$-14{,}7a=-5{,}5a+8{,}2b$.

**1399*.** Bontsd fel a zárójelet és egyszerűsítsd a kifejezést:

1) $2ab-3(b(4a-1)-b(6-10a))+7b$;

2) $20-5c(2d-(4-\frac{8}{c})+2(3d-4))$.

**1400*.** Zárójelek segítségével tedd igazzá az alábbi állításokat:
1) $a - b - a + b = 2a$; 2) $a - 2b - 2a + b = 3a - 3b$.

**1401*.** Bizonyítsd be, hogy bármely $a > b$ számra teljesül a következő egyenlőség:
1) $(a + b) + (a - b) = 2a$; 2) $(a + b) - (a - b) = 2b$.
Igaz lesz-e az egyenlőség, ha: a) $a < b$; b) $a = b$?

**1402*.** Bizonyítsd be, hogy bármely természetes $a$ szám az őt megelőző és az őt követő szám átlagával egyenlő.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1403.** Gyümölcssaláta elkészítéséhez három személy számára 2 almára, 1 narancsra, 2 banánra és 1 kivire van szükség. Hogyan írhatjuk le azt a betűkifejezést, amivel meghatározható, hogy mennyi gyümölcsre van szükség $n$ vendég számára? Segíts Marikának meghatározni, mennyi gyümölcsre van szüksége, ha 1) 5 barátját; 2) 8 barátját hívja meg vendégségbe.

**1404.** Írd le azt a kifejezést, amivel meghatározható, hogy mennyi időre van szükség a matematika házi feladat elkészítéséhez, ha 1) a feladat megoldására $a$ perc kell; 2) a kifejezés egyszerűsítésére pedig 2-szer több időre, mint a feladat megoldására! Milyen idő alatt végezte el a házi feladatot Laci, ha a feladat megoldására 15 percet fordított?

**1405.** Az iskolai étkezde ebédre salátát, borscsot, töltött káposztát és kompótot készített. A saláta ára az ebéd árának a 20 %-át teszi ki, a borscs a 30 %-át, a töltött káposzta a 45 %-át, a kompót pedig az 5 %-át. Írj kifejezést az iskolai ebéd árának a meghatározására! Mennyibe kerül az ebéd, ha a saláta ára 2 hrivnya?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1406.** Oldd meg az alábbi egyenleteket: 1) $\frac{1}{5} = \frac{-3}{9-2x}$; 2) $\frac{4}{1-2y} = \frac{5}{8}$.

**1407.** Tímea fagylaltra költötte pénze $\frac{1}{7}$-ét, cukorkára a maradék $\frac{1}{3}$-át. Mennyi pénze maradt Tímeának, ha a cukorka 12 hrivnyába került?

# 31. § EGYENLETEK. A MÉRLEGELV

Már tudjátok, mi az *egyenlet*, mi az *egyenlet gyöke*. Ismételjük meg a főbb meghatározásokat.

**Jegyezd meg!**

Az ***egyenlet*** olyan egyenlőség, amely ismeretlent tartalmaz, melynek meg kell határozni az értékét.

Az ismeretlent $x$-szel, $y$-nal vagy $z$-vel szokták jelölni. Például $4x + 7 = 15$ egy egyenlet, ahol $x$ az ismeretlen, amit meg kell határozni.

**Jegyezd meg!**

Az ismeretlen azon értékét, amely igaz számegyenlőséggé alakítja az egyenletet, az ***egyenlet gyökének*** nevezzük.

Így a $4x + 7 = 15$ egyenlet gyöke 2, mivel $4 \cdot 2 + 7 = 15$.

Az egyenletnek egynél több gyöke is lehet. Például a $0 \cdot x = 0$ egyenletnek végtelen sok gyöke van, mivel bármelyik szám igaz egyenlőséggé alakítja az egyenletet. Olyan egyenletekkel, melyeknek két, három vagy több gyöke van, később fogtok találkozni.

Előfordulhat, hogy az egyenletnek nincs gyöke. Például a $0 \cdot x = -12$ egyenletnek nincs gyöke, mivel nem létezik olyan szám, amelyet ha megszorzunk nullával, –12-t kapunk.

**Jegyezd meg!**

***Megoldani az egyenletet*** **annyit jelent, mint meghatározni az egyenlet gyökeit, vagy igazolni, hogy nincsenek gyökei.**

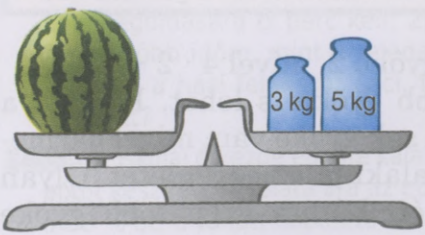
Az 5. osztályban a legegyszerűbb egyenletekkel ismerkedtetek meg. Az egyenletek megoldásakor a művelet isme-

retlen tagját, tényezőjét kerestük. Összetettebb egyenletek megoldásakor a mérlegelvet alkalmazzuk. Nézzük meg a főbb tulajdonságokat.

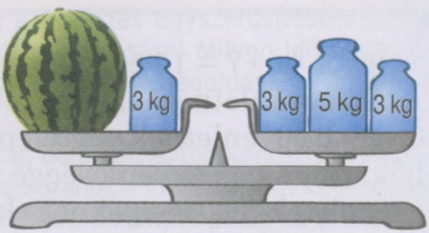
Figyeld meg a 139. ábrát! Láthatjuk, hogy a karos mérleg jobb tányérján egy ismeretlen tömegű dinnye, míg a bal tányérján egy 5 kg-os és egy 3 kg-os súly van. Ha mindkét tányérba felteszünk egy 3 kg-os súlyt, a mérleg egyensúlyban marad (140. ábra). Könnyen belátható, hogyha ezeket a súlyokat levesszük, vagy másmilyen más, azonos súlyt teszünk fel mindkét tányérba, a mérleg egyensúlyban marad. Ez a példa szemlélteti az *egyenletek egyik tulajdonságát.*

**Jegyezd meg!**

Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, az egyenlőség nem változik.




139. ábra




140. ábra

**1. feladat.** Oldjuk meg az $x - 12 = 20$ egyenletet.

**Megoldás.** Adjunk hozzá 12-őt az egyenlet jobb és bal oldalához, majd egyszerűsítsük le a kapott egyenletet:

$$x - 12 = 20,$$
$$x - 12 + 12 = 20 + 12,$$
$$x = 20 + 12,$$
$$x = 32.$$

Az egyenlet megoldásakor a bal oldalon „eltüntettük az ismeretlent". Ugyanezt az eredményt kapjuk, hogyha a 12-t átvisszük balról jobbra, miközben megváltoztatjuk az előjelét.

**Jegyezd meg!**

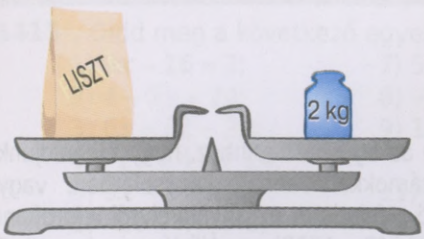
Az összeadandó átvihető az egyenlet egyik oldaláról a másikra, ha közben megváltoztatjuk az előjelét.

Át lehet-e vinni a másik oldalra az ismeretlent tartalmazó tagot? Igen.

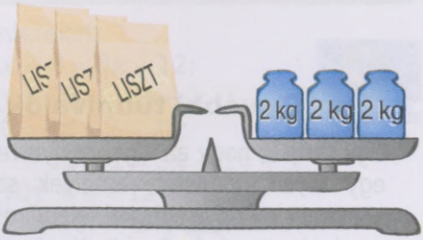
Figyeljétek meg a 141. ábrát! Láthatjátok, hogy egy csomag liszt tömege 2 kg. Érthető, hogy 3 ilyen csomag liszt háromszor nehezebb (142. ábra). Ez a példa szemlélteti a következő tulajdonságot.

**Jegyezd meg!**

Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal, akkor az egyenlet gyöke nem változik.




141. ábra




142. ábra

Ezt a tulajdonságot alkalmazzuk egyenletek megoldásakor. Nézzünk meg egy példát.

**2. feladat.** Oldjuk meg az $\frac{1}{3}x+10=x$ egyenletet.

**Megoldás.** Hogy megszabaduljunk a tört együtthatójától, szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 3-mal:

$\frac{1}{3}x + 10 = x, \quad \cdot 3$

$x + 30 = 3x,$

$x - 3x = -30,$

$-2x = -30, \quad :(-2)$

$x = 15.$

*Felelet:* 15.

**Jegyezd meg!**

**Mérlegelv**

1. Az egyenlet gyöke nem változik, ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot.
2. Az egyenlet gyöke nem változik, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (vagy mindkét oldalát elosztjuk) ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal.



**További tudnivalók**

Úgy tartják, hogy az algebra nyelve az egyenlet. „Ahhoz, hogy megoldjunk egy olyan feladatot, amelyek számokkal vannak kapcsolatban, vagy absztrakt mennyiségekkel, elegendő a feladatot az anyanyelvről lefordítani az algebra nyelvére" – írta Newton (1643 – 1727) az „Általános aritmetika" című könyvében.

**IDÉZD FEL A LÉNYEGET!**

1. Mi az egyenlet? mi a gyöke?
2. Mit jelent megoldani egy egyenletet?
3. Hány gyöke lehet egy egyenletnek.



**OLDD MEG A FELADATOKAT!**

**1408'.** Az alábbi felírások közül melyik egyenlet:
1) $14 \cdot 4 = 56$; 2) $5x - 10 = 0$; 3) $y + 7 > 21$; 4) $15 = 4z + 1$?
Indokold meg a válaszodat.

**1409'.** Péter azt állítja, hogy az egyenlet gyöke olyan szám, amit ha visszahelyettesítünk, igazzá teszi az egyenletet. Igaza van-e Péternek?

**1410'.** Hány gyöke lehet egy egyenletnek? Hozz fel példát olyan egyenletre, melynek 1) nincs gyöke; 2) végtelen sok gyöke van.

**1411'.** Bármelyik számmal meg lehet-e szorozni az egyenlet mindkét oldalát az egyenlet megoldásakor? El lehet-e osztani? Indokold meg a válaszodat.

**1412°.** Gyöke-e a 3-as szám az alábbi egyenleteknek:

1) $2x - 6 = 0$;
2) $5y + 15 = 0$;
3) $3x - 1 = 5$;
4) $4x = 9 + x$?

**1413°.** Igaz-e, hogy a 0 gyöke az alábbi egyenleteknek:

1) $-6x = 0$;
2) $0 : y = -25$;
3) $5x = 0$;
4) $1{,}2 : y = 0$?

**1414°.** Nevezd meg az egyenlet megoldásának lépéseit:

1) $2x + 10 = -3x$;
2) $-4y - 5 = 3$;
3) $5x + 4 = -2x - 10$;
4) $12 - 3y = 8 + y$.

Melyik tulajdonságokat használtad?

**1415°.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $9x - 16 = 2$;
2) $4 - 2y = 24$;
3) $6x = 32 - 2x$;
4) $-2y = 4y + 24$;
5) $3x - 8 = x$;
6) $-20 = 4y + 8$;
7) $5x + 4 = 3x - 12$;
8) $-y + 25 = 12y - 1$;
9) $10 = 4z - 2 - 2z$;
10) $-2 = 3x + 14 + x$;
11) $10y + 6 = 12y - 8$;
12) $11z - 3 = -3 - 12z$.

***1416°.*** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $5x - 16 = 14$;
2) $8y = 10 + 3y$;
3) $24x - 16 = 8 + 12x$;
4) $12 - y = 2y + 6$;
5) $3x + 3 = 27 - 5x$;
6) $-3y - 8 = 2y + 7$.

**1417°.** Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $0{,}8x + 1 = 1{,}7x + 0{,}1$;
2) $0{,}2y - 4 = 20 - 0{,}2y$;
3) $0{,}2 - z = 0{,}1 + 0{,}5z$;
4) $\frac{2}{3}x + 5 = 3 + \frac{7}{9}x$;
5) $\frac{1}{14}y - 1 = \frac{1}{4}y - \frac{1}{7}y$;
6) $4z - 4\frac{1}{6} = -3\frac{5}{18} - 1\frac{1}{3}z$;
7) $-2x + 4 = -\frac{1}{3}x - 21$;
8) $\frac{2}{3}y + 2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y - 3$.

**1418°.** Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $1{,}1 - 0{,}1z = -1{,}9 - 0{,}7z$;

2) $-0{,}2x + 4 = -2 + 0{,}1x$;

3) $\frac{1}{2}z - 7 = 1 - \frac{1}{6}z$;

4) $\frac{1}{5}y + 2{,}3 = \frac{7}{10}y - 3{,}2$.

**1419°.** Írj le olyan egyenletet, amelynek mindkét oldala tartalmazza az ismeretlent és gyöke 1) 8; 2) a 14.

**1420°.** Írj le olyan egyenletet, amelynek mindkét oldala tartalmazza az ismeretlent és gyöke 1) 5; 2) 9.

**1421.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $5(x - 4) = 3x - 10$;
2) $4y + 2 = 3(10 - y)$;
3) $7(x - 4) = 5(x + 4)$;
4) $3(y + 1) = 6(1 - y) + 6$;
5) $2(x - 3) - 3(4 - x) = 5$;
6) $7 + 4(3 - y) = 5(y + 2)$;
7) $12 - 5(x + 1) = 7 + 3x - 2x$;
8) $-0{,}2(3 - y) + 1{,}2 = -0{,}2(y - 1)$;
9) $1 - 4z - 3(1 - z) = -5(z + 2)$;
10) $(18 - x) - 7(2x - 4) = 5x + 20$;
11) $3(0{,}4y + 3) - 0{,}6y = 8$;
12) $2(2 + x) + (4x - 1) \cdot 3 = 10x - 7$.

**1422.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $7(x + 2) = -14$;
2) $8y = 2(5 - y)$;
3) $2(3x - 4) = 4(x - 3)$;
4) $7(x + 3) - 2(x - 5) = 8$;
5) $5 + 3(2y - 1) = 2(y - 3)$;
6) $-x - 5{,}2 = 12 - 2(x + 0{,}6) - 10$.

**1423.** Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $0{,}6\left(0{,}5x + \frac{2}{3}\right) = 2{,}25 + 5{,}3x$;

2) $5 - y = 8 - \frac{1}{3}(4{,}5y - 5)$;

3) $\frac{1}{2}(x - 4) + 6x = 5 - 1\frac{1}{2}x$;

4) $3{,}2(1 - 2y) = 0{,}7(3y - 1{,}5)$;

5) $\frac{5}{12}(z - 3) = \frac{1}{6}(2z - 7) + 2$;

6) $\frac{5}{8}(x - 2) = \frac{2}{3}(x + 2) - (3 - x)$;

7) $\frac{1}{6}y - \left(0{,}5 + \frac{8}{9}y\right) = \frac{1}{9}y - \left(\frac{1}{3} + y\right)$;

8) $\frac{3}{5} \cdot (3 - 2z) = \frac{2}{5} \cdot (9 - z) - 0{,}3(z - 9)$.

**1424.** Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $1 - \frac{1}{2}(1 - y) = -0{,}2(y + 1)$;

2) $0{,}5\left(0{,}5x - \frac{5}{7}\right) = 3{,}5x + 1{,}5$;

3) $4 - 4{,}5y = 2y - \frac{2}{3}(8y - 10)$;

4) $3 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}y + 1{,}5$.

**1425.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{2}{3}$; 2) $\frac{y}{4} = \frac{2y}{5} - 2\frac{1}{10}$; 3) $\frac{5x}{6} + \frac{x}{3} = 14$; 4) $21 - \frac{2y}{5} = y$.

**1426.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=\frac{1}{12}$; 2) $\frac{4y}{3}=8+2y$.

**1427.** Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $\frac{x+8}{3}=\frac{2-x}{2}$; 3) $\frac{2{,}5+y}{0{,}5}=\frac{6+2y}{0{,}4}$;

2) $\frac{3{,}75-x}{\frac{1}{2}}=\frac{x-2{,}5}{\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{4-6y}{3}=\frac{\frac{1}{3}y-2}{\frac{1}{2}}$.

**1428.** Határozd meg a következő egyenletek gyökeit:

1) $\frac{7+x}{2}=\frac{5+x}{4}$; 2) $\frac{1{,}5-4y}{\frac{1}{4}}=\frac{-8+8y}{2}$.

**1429*.** Milyen értéket vehet fel $x$ és $y$, ha:

1) $x + 3y = 11$ és $2x + 3y = 13$; 2) $x + y = 18$ és $x - y = 6$?

**1430*.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $\frac{x+1}{4}-2x=\frac{5-3x}{2}-\left(x+\frac{x-3}{8}\right)$;

2) $\frac{3x+1}{2}+4=\frac{x+4}{3}-\left(3x-\frac{5x-1}{6}\right)$;

3) $4{,}5:\left(8\frac{1}{3}z+4\frac{1}{6}\right)=0{,}6:\left(1\frac{1}{3}z-2\right)$;

4) $66\frac{3}{5}:\left(5+3\frac{1}{5}:\frac{\frac{4}{5}-0{,}8x}{0{,}5}\right)-7\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$.

**1431*.** Adottak a következő egyenletek:

1) $x + 2 = a$; 4) $3(x - 2) = 2x - a$;
2) $5x - a = 10$; 5) $12 - 5x = 8(a + 4x)$;
3) $4(x + 2) = a + 8$; 6) $7x - 2(a - 6) = 5x - 2$.

Határozd meg a) az $x$-et, ha $a = 3$; b) az $a$-t, ha $x = 1$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1432.** Tamás egy matematikai fejtörővel szórakoztatja barátait, ki tudja meghatározni a születésnapja dátumát. Azt ajánlja, végezzék el az általa megnevezett műveleteket: 1) a születésed napját szorozd meg 2-vel; 2) az eredményhez adj hozzá 5-öt; 3) az eredményt szorozd meg 50-nel; 4) add hozzá annak a hónapnak a számát, amelyben születtél! Majd meg-

kér, hogy mondd meg az általad kapott számot. Ebből az eredményből Tamás kivon 250-et. A végeredmény egy négyjegyű vagy egy háromjegyű szám, amelynek az első két számjegye, vagy csak az első a születés napja, a másik két számjegy pedig a hónapé. Mi a titok nyitja?

**1433.** Találj ki te is egy matematikai fejtörőt.

### ISMÉTLŐ FELADATOK

**1434.** Számítsd ki fejben a $12b - 7b - 4b - 9b$ kifejezés értékét, ha 1) $b = 0{,}8$; 2) $b = -20$.

**1435.** Egy téglalap alakú kert hossza 75 m, a szélessége pedig a hosszának 0,3-e. Határozd meg a kertet körülvevő kerítés hosszát.

## 32. § SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETTEL

Az 5. osztályban olyan szöveges feladatok megoldásakor alkalmaztatok egyenletet, amikor *két mennyiség összegét* vagy különbségét kellett meghatározni.

A 6. osztályban egy újabb feladattípust tekintünk át, két *mennyiség egyenlőségét*. Ezekben a feladatokban is két mennyiséget hasonlítunk össze, például az első és a második polcon lévő könyvek számát. Ebben az esetben a két mennyiséget *egyenlővé kell tenni*.

**feladat.** Az első polcon 3-szor több könyv van, mint a másodikon. Ha az első polcról 12 könyvet átteszünk a másikra, akkor a két polcon azonos mennyiségű könyv lesz. Hány könyv van a polcokon?

**Megoldás.** A feladat adatait a 23. táblázatba foglaltuk.

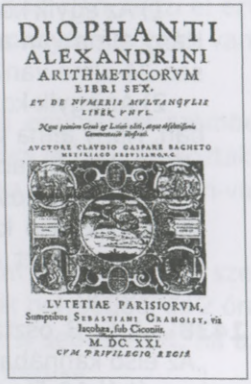
*23. táblázat*

| Polc | A könyvek száma | | Egyenlővé tettük |
|---|---|---|---|
| | Volt | Lett | |
| I | $3x$ | $3x - 12$ | $=$ |
| II | $x$ | $x + 12$ | |

Legyen x a második polcon lévő könyvek száma, akkor 3x könyv lesz az elsőn. Ha az első polcról 12 könyvet átrakunk a második polcra, akkor az első polcon $3x - 12$ könyv lesz, míg a másodikon $x + 12$. A feladat feltételei szerint a két polcon azonos a könyvek száma. Az következő egyenletet írhatjuk le: $3x - 12 = x + 12$. Oldjuk meg a kapott egyenletet: $3x - x = 12 + 12$; $2x = 24$; $x = 12$! Vagyis $3x = 3 \cdot 12 = 36$. Tehát az első polcon 36 könyv volt, míg a másodikon 12.

## További tudnivalók

Az első olyan műnek, amiben algebrai kérdéseket vizsgál a szerző, az alexandriai Diophantos „Aritmetika" (a IV. század közepe) című könyvét tekintjük. Diophantos hagyatéka 13 könyvből állt, ebből csak 6 kötet maradt az utókorra. Ezekben a kötetekben összetett algebrai feladatok megoldásai is megtalálhatók. A teljes mű nagyobb részét a feladatgyűjtemény teszi ki (az első hat kötetben 189 ilyen feladat van) megoldásokkal együtt, és a megoldásokat ügyesen szemléltető rajzokkal.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
LVTETIAE PARISIORVM,
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Milyen feladatokat sorolunk két mennyiség összegének? két mennyiség különbségének meghatározásához? Hozz fel példákat!
2. Milyen feladatokat sorolunk két mennyiség egyenlőségéhez? Hozz fel példákat!
3. Hogyan kell megoldani a feladatokat egyenlettel?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1436'.** A feladatok adatait táblázatba foglaltuk:

1)

| Kosár | Almák száma | Összehasonlítás |
|---|---|---|
| I. kosár | $x$ | 12 almával kevesebb |
| II. kosár | $4x$ | |

2)

| Kosár | Almák száma | Összehasonlítás |
|---|---|---|
| I. kosár | $x + 9$ | = |
| II. kosár | $4x$ | |

3)

| Кошик | Almák száma | Végösszeg |
|---|---|---|
| I. kosár | $x$ | } 30 alma. |
| II. kosár | $4x$ | |

Melyik típusú feladathoz tartoznak a fentiek: a) összeg meghatározása; b) különbség meghatározása; c) két mennyiség kiegyenlítéséhez? Milyen egyenlettel oldhatók meg ezek a faladatok?

**1437′.** Írj egyenletet a feladat megoldására.

1) Az egyik kosárban háromszor több alma van, mint a másikban. Hány alma van a kosarakban külön-külön, ha a két kosárban összesen 24 alma van?

2) Az egyik kosárban négyszer kevesebb alma van, mint a másikban. Hány alma van a kosarakban külön-külön, ha a másodikban 12 almával több van?

3) Az első kosárban kétszer több alma van, mint a másodikban. Miután az első kosárból 8 almát áttettek a másikba, a két kosárban azonos lett az almák száma. Mennyi alma volt a kosarakban eredetileg?

**1438′.** A 6. B osztály algebrai módszerrel oldotta meg a feladatot: „Az első kannában 5-ször több tej van, mint a másikban. Ha az első kannából 10 liter tejet átöntünk a másikba, akkor a két kannában azonos mennyiségű tej lesz. Mennyi tej van most a két kannában külön-külön?" Nati az $5x - 10 = x + 10$, Zsófi az $5x - x = 10 \cdot 2$ egyenletet írta le. Melyik kislány írta le helyesen az egyenletet? A feleletet indokold meg.

**1439°.** Az egyik szám a másik szám háromszorosa. Határozd meg ezeket a számokat, ha 1) a második szám 24-gyel kisebb az első számnál; 2) az első szám és 18 különbsége a második számmal egyenlő; 3) az első szám és 10 különbsége egyenlő a második szám és 6 összegével.

***1440°.*** Az egyik szám a másik négyszerese. Határozd meg ezeket a számokat, ha 1) a második szám és 12 összege egyenlő az első számmal; 2) az első szám és 11 különbsége egyenlő a második szám és 10 összegével.

**1441°.** Két szám különbsége 2,2. Határozd meg ezeket a számokat, ha összegük 22,2.

***1442°.*** Két szám összege 33,5. Határozd meg ezeket a számokat, ha különbségük 3,5.

**1443°.** Hat füzetért és 4 tollért 27 hrivnyát fizettek. Mennyibe kerül egy füzet és egy toll, ha a füzet 50 kopijkával olcsóbb?

***1444°.*** 2 kg kekszért és 3 kg cukorkáért 128 hrivnyát fizettek. Mennyibe kerül 1 kg keksz és 1 kg cukorka, ha a cukorka ára 11 hrivnyával drágább?

**1445°.** Egy gyümölcsösben 18 fát kell elültetni. Az egyik kertész ezt a munkát 6 óra alatt végzi el. Hány óra alatt ültetné el a fákat az a munkás, aki óránként 1 fával kevesebbet ültet.

***1446°.*** Egy üzemben 60 darab szoknyát kell megvarrni. Az egyik varrónő ezt a munkát 30 nap alatt végzi el. Hány nap alatt végzi el ezt a munkát a másik varrónő, aki naponta egy szoknyával többet varr meg, mint az első?

**1447°.** Két személygépkocsi egyidőben indult el egymással szembe két egymástól 325 km-re lévő városból és 2,5 óra múlva találkoztak. Határozd meg a két gépkocsi sebességét, ha az egyiké 10 km/h-val több, mint a másodiké.

***1448°.*** $A$ és $B$ helységek közötti távolság 290 km. Egyszerre két személygépkocsi indult el egymással szembe a két helységből és 2 óra múlva találkoztak. Határozd meg a két gépkocsi sebességét, ha az egyik sebessége 5 km/h-val kevesebb, mint a másiké.

**1449°.** $A$ helységből két személygépkocsi indult el egyszerre ellenkező irányba. Az egyik gépkocsi sebessége 10 km/h-val nagyobb, mint a másiké. Határozd meg a két gépkocsi sebességét, ha 2 óra múlva 300 km lett közöttük a távolság! Mekkora lesz a két gépkocsi között a távolság az indulás után 4,5 órával?

***1450°.*** Két faluból, melyek között a távolság 30 km, egyszerre elindult ellenkező irányba két autóbusz. Az egyik autóbusz sebessége 10 km/h-val kisebb, mint a másiké. Határozd meg a két autóbusz sebességét, ha 2 óra múlva 250 km lesz közöttük a távolság.

**1451.** Édesanya két fajta cukorkát vásárolt, összesen 6 kg-t. A cukorka ára 20 hrivnya és 24 hrivnya. Hány kilogramm cukorkát vett az édesanya mindkét fajtából, ha összesen 136 hrivnyát fizetett érte?

***1452.*** 15 füzetet vásároltak. A vonalas füzetek ára 2 hrivnya, a kockásoké 3 hrivnya. Hány vonalas és hány kockás füzetet vettek, ha összesen 38 hrivnyát fizettek értük?

**1453.** Egy motoros 4 óra alatt tesz meg akkora távolságot, amennyit egy személygépkocsi 2 óra alatt. Határozd meg a motorkerékpár és

a személygépkocsi sebességét, ha a személygépkocsi sebessége 40 km/h-val nagyobb a motorkerékpárénál.

***1454.*** Egy kerékpáros 2 óra alatt akkora távolságot tesz meg, mint egy turista 6 óra alatt. Határozd meg a kerékpáros és a turista sebességét, ha a kerékpáros sebessége 8 km/h-val nagyobb a turista sebességénél.

**1455.** Két polcon 39 könyv van. Ha az első polcról 4 könyvet átteszünk a másodikra, akkor az első polcon 2-szer több könyv lesz, mint a másodikon. Hány könyv van mindegyik polcon?

***1456.*** Két polcon 30 könyv van. Ha az első polcról 2 könyvet átteszünk a másodikra, akkor az első polcon 2-szer kevesebb könyv lesz, mint a másodikon. Hány könyv van mindegyik polcon?

**1457.** A 6. A osztályban a tanulók 15 %-a nem oldotta meg az önálló munkát matematikából, 25 %-a hibázott a megoldás közben, a többiek, 18-an hibátlanul oldották meg a feladatokat. Hány tanuló írt önálló dolgozatot a 6. A osztályban?

***1458.*** Egy matematikai versenyen a résztvevők 17 %-a csak 3 feladatot oldott meg helyesen, 35 %-a 4 feladatot, a többi 12 tanuló pedig mindet. Hányan vettek részt a matematikaversenyen?

**1459.** A turisták 3 napos kiránduláson vettek részt. Első napon az út $\frac{7}{20}$-át tették meg, második nap a maradék $\frac{1}{2}$-ét, harmadik nap az út hátralévő részét, 32,5 km-t. Mekkora utat tettek meg a turisták három nap alatt?

***1460.*** Egy autóbusz $A$ helységből a $B$ helységbe tartott. Az első órában az út $\frac{1}{3}$-át tette meg, második órában a maradék $\frac{3}{8}$-át, a harmadik órában az út hátralévő részét, 100 km-t. Határozd meg az $A$ és $B$ helységek közötti távolságot.

**1461.** Egy iskolában három hatodik osztály van. A 6. A osztályban a hatodikosok 30 %-a tanul, a 6. B-ben 6-tal többen, mint a 6. A-ban, a 6. C osztály létszáma pedig a 6. A és a 6. B osztályokénak az $\frac{1}{2}$-e. Hány hatodikos tanuló jár az iskolába?

***1462.*** Egy iskola három 6. osztályába 81 tanuló jár. A 6. B osztály tanulói létszáma a 6. A osztály 80 %-a, a 6. C osztály létszáma pedig a 6. A és a 6. B osztályokénak az 50 %-a. Hány tanuló jár külön-külön ezekbe az osztályokba?

**1463.** Tamás három nap alatt olvasott el egy könyvet. Első nap a könyv 0,2-ét és még 6 oldalt olvasott el, másnap a könyv 0,3-ét és

még 8 oldalt, harmadik nap a maradék 16 oldalt. Hány oldalas volt a könyv?

**1464.** Orsolya három nap alatt elolvasott egy könyvet. Első nap a könyv $\frac{1}{3}$-át és még 4 oldalt olvasott el, másnap a könyv $\frac{4}{9}$-ét és még 2 oldalt, harmadik nap a maradék 8 oldalt. Hány oldalas volt a könyv?

**1465.** Sándor négy nap alatt olvasott el egy könyvet. Első nap elolvasta a könyv 0,2-ét és még 8 oldalt, másnap a hátralevő rész 0,3-ét és még 6 oldalt, harmadik nap a hátralevő rész 0,5-ét és még 1 oldalt, a negyedik nap az utolsó 10 oldalt. Hány oldalas volt a könyv?

**1466.** Péter megette a cukorka $\frac{1}{3}$-át és még 2 cukorkát, Sanyi az $\frac{1}{4}$-ét és még 1 -et, Miklós a maradék felét. Ezek után az eredeti mennyiség $\frac{1}{6}$-a maradt meg. Hány cukorka volt eredetileg?

**1467.** Határozd meg azt a törtet, melynek értéke $\frac{4}{7}$, a nevező és a számláló különbsége pedig 21.

**1468.** Határozd meg azt a törtet, melynek értéke $\frac{5}{8}$, a számláló és a nevező összege pedig 39.

**1469.** Egy turista 2 óra 30 perccel rövidebb idő alatt tesz meg $A$ és $B$ helységek közötti távolságot kerékpáron, mint gyalogosan. Mekkora az $A$ és $B$ helységek közötti távolság, ha a turista sebessége kerékpárral 12 km/h, gyalogosan pedig 4 km/h?

**1470.** Egy személygépkocsi $A$ városból $B$ városba tart. Ha 60 km/h-ás sebességgel halad, akkor egy órát késik, ha 80 km/h sebességgel megy, akkor pedig 1 órával hamarabb érkezik a tervezettnél. Határozd meg az $A$ és $B$ helységek távolságát.

**1471.** Két turista azonos sebességgel haladt. Az egyik 8 km-t tett meg, a másik 12 km-t. Az első turista 40 perccel kevesebb időt volt úton. Hány órát volt úton az első turista?

**1472.** Az egyik polcon lévő könyvek száma kétszer kevesebb, mint ahány könyv van a másik polcon. Ha az első polcról leveszünk 9 könyvet, a második polcra pedig felteszünk 12, akkor az első polcon 7-szer kevesebb könyv lesz, mint a másodikon. Hány könyv van mindkét polcon?

**1473.** Négy polcon 180 könyv van. Az első polcon kétszer több könyv van, mint a másodikon, a harmadik polcon lévő könyvek száma pedig 60%-a a második polcénak és $\frac{2}{3}$-a a negyedik polcénak. Hány könyv van mindegyik polcon?

**1474.** Az első polcon lévő könyvek száma háromszorosa a második polcon lévő könyvek számának. Ha az első polcról leveszünk 8 könyvet és a másodikra felteszünk 2-t, akkor az első polcon kétszer több könyv lesz, mint a másodikon. Hány könyv van mindegyik polcon?

**1475*.** Két barát könyvet vásárolt magának. Az egyik elköltötte pénzének $\frac{5}{9}$-ét, a másik $\frac{2}{3}$-át. A vásárlás előtt az egyiknek 12 hrivnyával több pénze volt, mint barátjának. A vásárlás után ugyanannyi pénzük lett. Mennyi pénzük volt a fiúknak a vásárlás előtt?

**1476*.** Gyuri három napra kölcsönzött ki egy könyvet. Első nap elolvasta a könyv felét, második nap a maradék harmadát, a harmadik napon pedig az addig elolvasott oldalak számának felét. Érkezett-e elolvasni a könyvet Gyuri 3 nap alatt?

**1477*.** *Régi feladat.* Egy embernek kétféle teája van: a ceyloni 1 fontnyi ára 5 érme, az indiai ára pedig fontonként 8 érme. Milyen arányban kell összekeverni ezeket a teákat, hogy az ára 6 érme legyen fontonként?

**1478*.** Tímea először 4 cukorkát vett ki a dobozból, majd a maradék negyedét. Ezek után a dobozban az eredeti mennyiség $\frac{2}{3}$-a maradt. Mennyi cukorka volt eredetileg a dobozban?

**1479*.** Egy 4,9 m hosszú zsinórt három részre vágtak úgy, hogy a második rész az első rész 75 %-a, a harmadik rész pedig az első két rész 75 %-a lett. Határozd meg a három zsinórdarab hosszát.

**1480*.** Két szám összege $7\frac{1}{2}$, az első szám duplája a második szám háromszorosával egyenlő. Határozd meg ezeket a számokat.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1481.** Alkoss feladatot a saját és családtagjaid életkorával és oldd is meg.

**1482.** Alkoss feladatot az osztályodban tanuló lányok és fiúk számából és oldd is meg.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1483.** Melyik számot kell beírni az alábbi lánc utolsó négyzetébe?




**1484.** Határozd meg az $y$ értékét, ha $x - y = 5$ és $\frac{x}{2} = 3$.

# 33. § MERŐLEGES ÉS PÁRHUZAMOS EGYENESEK

Már tudjátok, hogy az egyenes mértani alakzat. Két egyenes különböző módon helyezkedhet el a síkon. A 6. osztályban a párhuzamos és a merőleges egyenesekkel fogtok megismerkedni.

### 1. Merőleges egyenesek



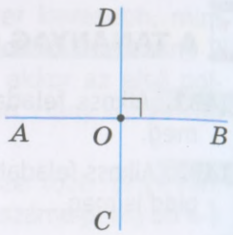

Figyeljétek meg a 143. ábrán látható útkereszteződést! Láthatjátok, hogy az utak az egymást metsző egyenesekre emlékeztetnek, melyek négy derékszöget alkotnak. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az egyenesek *derékszögben metszik egymást*. A matematikafüzetben a rácsvonalak is merőlegesek.

**Jegyezd meg!**

Két egyenest a síkon ***merőlegesnek*** nevezünk, ha derékszögben metszik egymást.

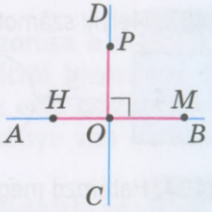
A 144.ábrán az $AB$ és $CD$ egyenesek derékszögben metszik egymást, vagyis merőlegesek. Metszéspontjuk az $O$ pont.

Így írjuk: $AB \perp CD$, a rajzon pedig a ⌝ jelet használjuk a derékszög jelölésére (144. ábra). Azt mondjuk, hogy „az $AB$ egyenes merőleges a $CD$ egyenesre”.



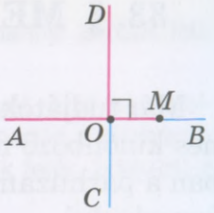
144. ábra

Ha az $AB$ egyenes merőleges a $CD$ egyenesre, akkor a $CD$ egyenes is merőleges az $AB$ egyenesre. Másképpen úgy is fogalmazhatunk, hogy az $AB$ és a $CD$ egyenesek *kölcsönösen merőlegesek egymásra.*



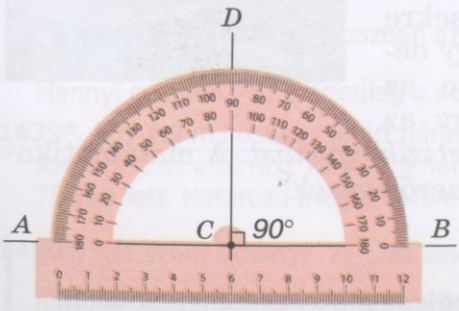
145. ábra

Lehet-e két szakasz merőleges? És két félegyenes? Igen, ha megfelelően merőleges egyenesek részei (145. – 146. ábra).

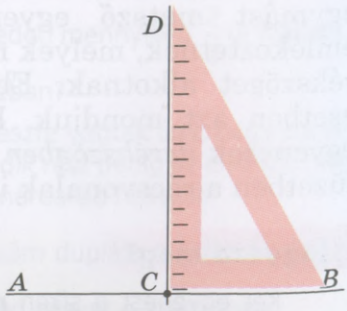


146. ábra

Merőleges egyeneseket szögmérővel, vagy derékszögű háromszöggel lehet rajzolni. A 147. ábrán látható, hogyan kell az $AB$ egyenesre merőleges $CD$ egyenest rajzolni szögmérővel, a 148. ábrán pedig az látható, hogyan lehet ugyanezt elvégezni derékszögű vonalzóval.



147. ábra



148. ábra

## 2. Párhuzamos egyenesek



149. ábra

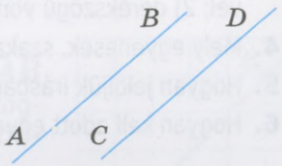
Figyeld meg a 149. ábrát! Villamos síneket láthattok, olyan egyenesek juthatnak az eszünkbe, melyek egy síkban vannak, és *nem metszik egymást*. Ezek a *párhuzamos* egyenesek. Környezetünkből több példát is fel lehet hozni párhuzamos egyenesekre. A matematikafüzetben a vízszintes rácsvonalak párhuzamosak. Ugyanez elmondható a függőleges vonalakról is. A pad szemben lévő oldalai, az ablakkeret szemben lévő oldalai, a trolibusz vezetékei szintén párhuzamosak.

**Jegyezd meg!**

Két egyenes a síkon ***párhuzamos***, ha nem metszi egymást.

A 150. ábrán látható $AB$ és $CD$ egyenesek párhuzamosak.

Így írjuk: $AB \parallel CD$. Így olvassuk: „az $AB$ és $CD$ egyenes párhuzamos”.

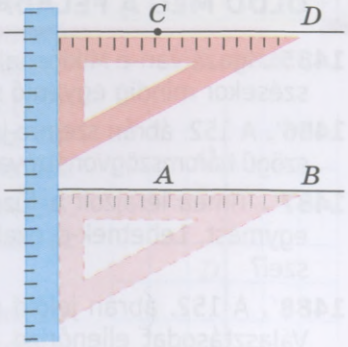



150. ábra

Ha az $AB$ egyenes párhuzamos a $CD$ egyenessel, akkor a $CD$ egyenes is párhuzamos az $AB$ egyenessel. Viszont a párhuzamos egyenesek esetében nem használjuk a kölcsönösen párhuzamos kifejezést.

Lehet-e két szakasz merőleges? És két félegyenes? Igen, ha megfelelően párhuzamos egyenesek részei.

A 151. ábra mutatja, hogyan kell vonalzóval és derékszögű




151. ábra

vonalzóval az $AB$ egyenessel párhuzamos egyenest rajzolni a $C$ ponton keresztül.



### További tudnivalók

1. A „perpendikuláris" szó latin eredetű (*perpendicularis*), jelentése „függőleges". A $\perp$ jel használatát Pierre Hérigonius (1580 – 1643) francia matematikus és csillagász vetette fel.

2. A párhuzamos szó a görög „paralelos" szóból ered, melynek jelentése „egymás mellett halad". A $\|$ jel használata az ókorba nyúlik vissza. Már Heron és Alexandriai Papposz is használta. Eredetileg a jel hasonlított az egyenlőség jelére, csak a félreértések elkerülése végett William Oughtred 1677-ben függőlegesre ajánlotta fordítani.

### IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Mely egyenesek, szakaszok, félegyenesek merőlegesek?
2. Hogyan jelöljük írásban a merőleges egyeneseket? és a rajzokon?
3. Hogyan kell adott egyenesre merőleges egyenest húzni 1) szögmérővel; 2) derékszögű vonalzóval?
4. Mely egyenesek, szakaszok, félegyenesek párhuzamosak?
5. Hogyan jelöljük írásban a párhuzamos egyeneseket?
6. Hogyan kell adott egyenessel párhuzamos egyenest húzni?



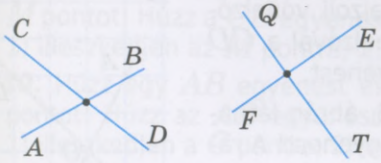
### OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1485′.** Igaza van-e Miklósnak, amikor azt állítja, hogy két egyenes metszésekor mindig egyenlő szögek keletkeznek?

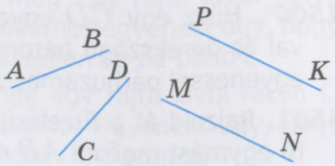
**1486′.** A 152. ábrán szemre jelöld meg a merőleges egyeneseket! Derékszögű háromszögvonalzóval ellenőrizd le a választásodat.

**1487′.** Tímea lerajzolt a füzetébe két szakaszt, amelyek nem metszik egymást. Lehetnek-e ezek a szakaszok párhuzamos egyenesek részei?

**1488′.** A 152. ábrán jelöld meg szemre a párhuzamos egyeneseket! Választásodat ellenőrizd le vonalzóval és derékszögű háromszögvonalzóval.

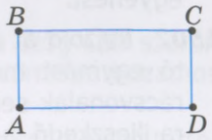



152. ábra




153. ábra

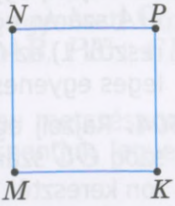
**1489°.** A 154. ábrán egy $ABCD$ téglalap látható. Írd le az összes kölcsönösen merőleges szakaszpárokat.




154. ábra

**1490°.** A 155. ábrán egy $MNPK$ négyzet látható. Írd le az összes kölcsönösen merőleges szakaszpárokat.

**1491°.** Húzz a füzetedbe egy $AB$ egyenest (156. ábra)! A rácsvonalak segítségével húzz három, az $AB$ egyenesre merőleges egyenest.

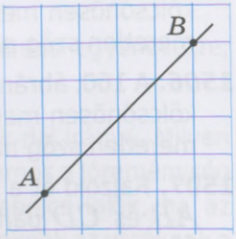



155. ábra

**1492°.** Húzz a füzetedbe egy $CD$ egyenest (157. ábra)! A rácsvonalak segítségével húzz két, a $CD$ egyenesre merőleges egyenest.

**1493°.** Rajzolj egy $CD$ egyenest! Húzz a $CD$ egyenesre merőleges $MN$ egyenest 1) szögmérővel; 2) derékszögű háromszögvonalzóval.

**1494°.** Rajzolj egy $AB$ egyenest! Húzz az $AB$ egyenesre merőleges $KP$ egyenest 1) szögmérővel; 2) derékszögű háromszögvonalzóval.

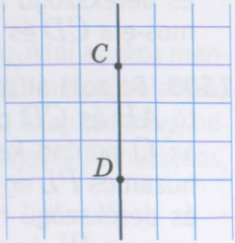



156. ábra

**1495°.** A 155. ábrán az $MNPK$ négyzet látható. Írd le az összes párhuzamos szakaszpárokat.

**1496°.** A 154. ábrán az $ABCD$ téglalap látható. Írd le az összes párhuzamos szakaszpárokat.

**1497°.** Húzz a füzetedbe egy $CD$ egyenest (157. ábra)! A rácsvonalak segítségével húzz három, a $CD$ egyenessel párhuzamos egyenest.



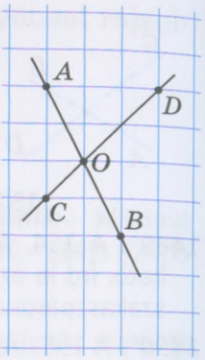

157. ábra

**1498°.** Húzz a füzetedbe egy $AB$ egyenest (156. ábra)! A rácsvonalak segítségével húzz két, az $AB$ egyenessel párhuzamos egyenest.

**1499°.** Húzz egy $AB$ egyenest! Rajzolj vonalzóval és derékszögű háromszögvonalzóval az $AB$ egyenessel párhuzamos $KP$ egyenest.

**1500°.** Húzz egy $CD$ egyenest! Rajzolj vonalzóval és derékszögű háromszögvonalzóval a $CD$ egyenessel párhuzamos $MN$ egyenest.

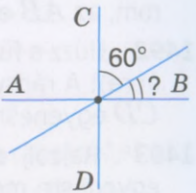
**1501.** Rajzold át a füzetedbe a 158. ábrán látható egymást metsző $AB$ és $CD$ egyenest! A rácsvonalak segítségével húzz a metszéspontra illeszkedő, az $AB$ egyenesre merőleges $MN$ egyenest.



158. ábra

**1502.** Rajzold át a füzetedbe a 158. ábrán látható egymást metsző $AB$ és $CD$ egyenest! A rácsvonalak segítségével húzz a metszéspontra illeszkedő, a $CD$ egyenesre merőleges $MN$ egyenest.

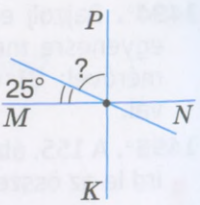
**1503.** Rajzolj egy 80°-os $AOB$ szöget! Jelölj a szög $OA$ szárán egy $C$ pontot! Húzz a $C$ ponton keresztül 1) az $OA$ szárra; 2) az $OB$ szárra merőleges egyenest.



159. ábra

**1504.** Rajzolj egy 120°-os $COD$ szöget! Jelölj a szög $OC$ szárán egy $A$ pontot! Húzz az $A$ ponton keresztül 1) az $OC$ szárra; 2) az $OD$ szárra merőleges egyenest.

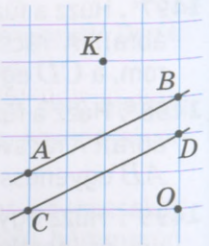
**1505.** A 159. ábrán látható $AB$ és $CD$ egyenesek kölcsönösen merőlegesek. Határozd meg az ismeretlen szög nagyságát.



160. ábra

**1506.** A 160. ábrán látható $MN$ és $PK$ egyenesek kölcsönösen merőlegesek. Határozd meg az ismeretlen szög nagyságát.

**1507.** Rajzold át a füzetedbe a 161. ábrán látható $AB$ és $CD$ párhuzamos egyeneseket! Húzz a $K$ ponton keresztül az $AB$ egyenessel párhuzamos $MN$ egyenest! Ellenőrizd le vonalzóval és derékszögű háromszögvonalzóval, párhuzamos-e a $CD$ és az $MN$ egyenes.



161. ábra

**1508.** Rajzold át a füzetedbe a 161. ábrán látható $AB$ és $CD$ párhuzamos egyeneseket! Húzz az $O$ ponton keresztül a $CD$ egyenessel párhuzamos $PL$ egyenest! Ellenőrizd le vonalzóval és derékszögű háromszögvonalzóval, párhuzamos-e a $PL$ és az $AB$ egyenes.

**1509.** Húzz egy $CD$ egyenest és jelölj meg egy rajta kívül fekvő $M$ pontot! Húzz a $CD$ egyenessel párhuzamos egyenest úgy, hogy 1) illeszkedjen az $M$ pontra; 2) ne illeszkedjen az $M$ pontra.

**1510.** Húzz egy $AB$ egyenest és jelölj meg egy rajta kívül fekvő $C$ pontot! Húzz az $AB$ egyenessel párhuzamos egyenest úgy, hogy 1) illeszkedjen a $C$ pontra; 2) ne illeszkedjen a $C$ pontra.

**1511.** Rajzolj egy 110°-os $COD$ szöget! Jelölj meg a szög $OC$ szárán egy $A$ pontot! Húzz az $A$ ponton keresztül az $OD$ szárral párhuzamos egyenest.

**1512.** Rajzolj egy 80°-os $AOB$ szöget! Jelölj meg a szög $OB$ szárán egy $C$ pontot! Húzz a $C$ ponton keresztül az $OA$ szárral párhuzamos egyenest.

**1513*.** Rajzolj egy 90°-os $AOB$ szöget! Jelölj meg a szög belső tartományában egy $C$ pontot! Húzz a $C$ ponton keresztül a szög száraira merőleges egyeneseket! Milyen mértani alakzatot kaptunk?

**1514*.** Rajzolj egy $AB$ és $CD$ egymásra merőleges egyenest! Húzz egy $MN$ és egy $KP$ egyenest úgy, hogy $MN \parallel AB$, $PK \parallel CD$. Milyen mértani alakzat keletkezett?

**1515*.** Rajzolj négy egyenest úgy, hogy 1) ne legyen metszéspontjuk; 2) két metszéspontjuk legyen; 3) 4 metszéspontjuk legyen; 4) 5 metszéspontjuk legyen.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1516.** Hozz fel példát a környezetedből 1) párhuzamos egyenesekre; 2) merőleges egyenesekre.

**1517.** Hanna a Jóreménység utcában lakik, ami észak-dél irányú. Milyen irányú a Virág utca, ahol Tímea lakik, ha az párhuzamos a Jóreménység utcával? Milyen irányú az Ifjúság utca, ahol Szabolcs lakik, ha az merőleges a Jóreménység utcára? Készíts rajzot ezeknek az utcáknak a kölcsönös elhelyezkedéséről, ha a füzet felső szélét fogadjuk el északnak.

**1518.** Tamás és Péter 200 métert tettek meg a saját házuktól az utca mentén, majd derékszögben balra fordultak, és újból 200 métert haladtak, majd jobbra fordultak és ismét 200 métert sétáltak. Állapítsd meg, milyen utcában vannak most a fiúk: a lakóhelyük utcájával párhuzamos, vagy az utcájukra merőleges utcában?

## ISMÉTLŐ FELADATOK

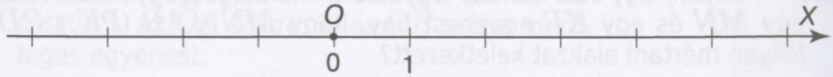
**1519.** Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $4{,}8 : 0{,}4 = 12 : (0{,}4 + 3x)$; 2) $-18 \cdot (x + 2{,}5) = 18{,}54$.

**1520.** Egy téglalap oldalainak az aránya 2 : 4. Határozd meg ennek a téglalapnak az oldalhosszait, ha a kerülete 60 cm.

# § 34. A KOORDINÁTA-SÍK

Már tudjátok, mi a *koordináta-egyenes* (162. ábra). Az egyenes $O$ pontja jelöli a számlálás kezdőpontját, az origót, a nyíl mutatja, merre növekednek a számok, a beosztás az egységet jelöli.

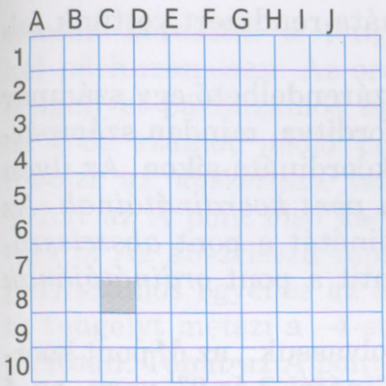



162. ábra

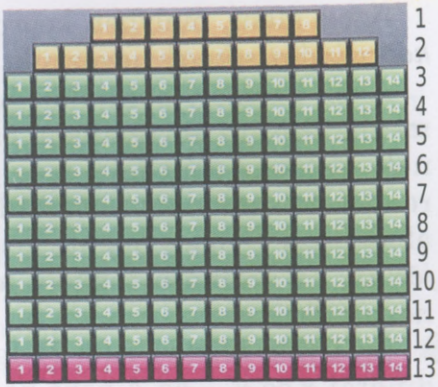
Viszont gyakorlatban nemcsak egy egyenes mentén szükséges tájékozódni, hanem a síkon is.

Tudjátok, hogy a „Torpedó" játékban a hajó helyzetét egy szám és egy betű „koordinátái" határozzák meg (163. ábra). A kiválasztott betű határozza meg, hogy hányat kell lépni jobbra vagy balra, a szám pedig azt, hogy mennyivel kell haladni le vagy fel. Tehát a hajó helyét a táblán két „koordináta" határozza meg.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a helyünket egy moziban, szintén két „koordinátára" van szükségünk: a széksor számára és a szék számára (164. ábra). Ezeknek a „koordinátáknak" a sorrendje szigorúan kötött. Valójában a 3 és 12 számpár vagy a 12 és 3 számpár teljesen más helyekre irányítanak: 3. sor 12-es szék vagy 12-es sor 3. szék. Az előző példától eltérően a mozikban a koordináták sorrendjén nem szoktak változtatni, mivel nem célszerű először megkeresni a helyet a sorban, majd magát a sort.

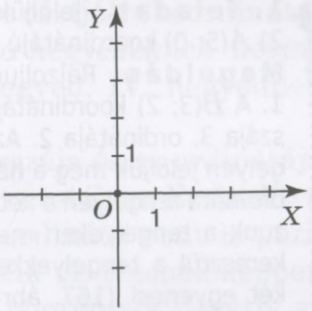



163. ábra

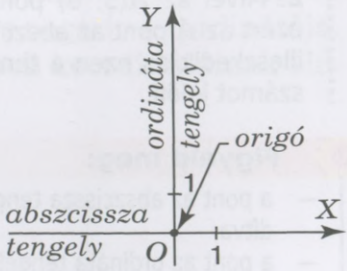


164. ábra

Tehát ahhoz, hogy meghatározzuk egy pont helyét a síkon, két azonos beosztású számegyenest kell figyelembe vennünk, az egyik a jobb-bal irányt, míg a másik a fel-le irányt határozza meg. Ezért a két számegyenest egymásra merőlegesen ábrázoljuk úgy, hogy a számlálás kezdőpontjai illeszkedjenek (165. ábra). Az egyik számegyenes (általában a vízszintes) az elsőnek számít, a másik pedig a második. Az ilyen két számegyenes alkotja a *derékszögű koordináta-rendszert.*




165. ábra




166. ábra

Az első, a vízszintes koordináta-egyenest *abszcissza tengelynek* nevezzük. Jelölése *OX* tengely. A második koordináta-egyenes, a függőleges az *ordináta tengely*. Jelölése *OY* tengely. A számegyenesek közös origóját a *koordináta-rendszer origójának nevezzük* (166. ábra).

Azt a síkot, melyben koordináta-rendszert vettünk fel, *koordináta-síknak* nevezzük.

A sík bármely pontjához hozzárendelhető egy számpár meghatározott sorrendben, és fordítva, minden számpárnak csak egy pont felel meg a koordináta-síkon. Az ilyen rendezett számpárt nevezzük a *pont koordinátáinak*. Az abszcissza tengely menti koordinátát a pont *abszcisszájának*, az ordináta tengely mentit a pont *ordinátájának* nevezzük.

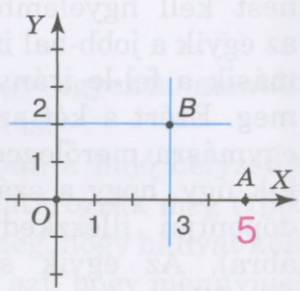
Így írjuk: $M(x; y)$, $A(3; 2)$. Így olvassuk: „az $M$ pont koordinátái $x$ és $y$", „az $A$ pont koordinátái 3 és 2", vagy „az $A$ pont abszcisszája 3, ordinátája 2".

**1. feladat.** Jelöljük a koordináta-rendszerben a 1) $B$ (3; 2); 2) $A$(5; 0) koordinátájú pontot.

**Megoldás.** Rajzoljunk egy koordináta-rendszert (167. ábra).

1. A $B$(3; 2) koordinátájú pont abszcisszája 3, ordinátája 2. Az abszcissza tengelyen jelöljük meg a hármas számot, az ordináta tengelyen a kettes számot! Húzzunk a tengelyeken megjelölt pontokon keresztül a tengelyekkel párhuzamosan két egyenest (167. ábra)! A megrajzolt egyenesek metszéspontja a keresett $B$(3;2) pont.

2. Mivel az $A$(5; 0) pont ordinátája 0, ezért az $A$ pont az abszcissza tengelyre illeszkedik és ezen a tengelyen az 5-ös számot jelöli.

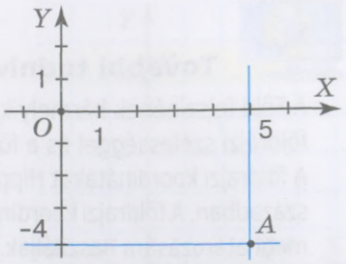


167. ábra

**Figyeld meg:**

- a pont az abszcissza tengelyre illeszkedik, ha az ordinátája 0 és fordítva;
- a pont az ordináta tengelyre illeszkedik, ha az abszcisszája 0 és fordítva;
- az origó, a számlálás kezdőpontjának koordinátái: (0; 0,).

Hogyan kell leolvasni egy koordináta-rendszerben feltüntetett pont koordinátáit, például a 168. ábrán látható $A$ pontét? Ebben az esetben egyeneseket húzunk az adott



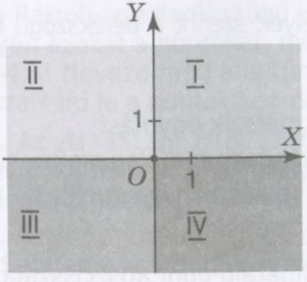
168. ábra

ponton keresztül a tengelyekkel párhuzamosan. Az ordináta tengellyel párhuzamos egyenes az 5-ös számot jelölő pontban metszi az abszcissza tengelyt. Tehát az $A$ pont első koordinátája 5. Az abszcissza tengellyel párhuzamos egyenes az ordináta tengelyt metszi a –4-et jelölő pontban. Tehát az $A$ pont második koordinátája –4. Így az A pont koordinátái az 5 és a –4, vagyis $A(5; -4)$.

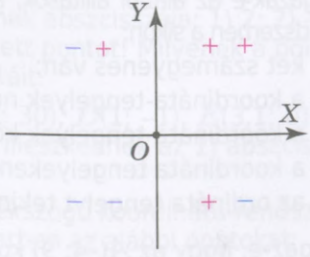
A koordináta-tengelyek négy részre osztják a koordinátasíkot. Ezeket a részeket *koordináta-negyedeknek* nevezzük és I. negyed; II. negyed; III. negyed, IV. negyednek jelöljük (169. ábra).

Az I. negyed pontjainak az abszcisszája és az ordinátája is pozitív, mint például az $A(3;2)$ pont esetében. Ez fordítva is érvényes: ha az abszcissza és az ordináta pont is pozitív, akkor az I. negyedben helyezkedik el. Hasonlóképpen megállapíthatjuk, hogy a II. negyed pontjainak negatív az abszcisszája és pozitív az ordinátája, a III. negyedben lévő pontok abszcisszája és ordinátája is negatív, a IV. negyed pontjainak pozitív az abszcisszája és negatív az ordinátája.

A 170. ábrán feltüntették a pontok koordinátáinak előjelét a megfelelő negyedekben.



169. ábra



170. ábra

## További tudnivalók

A Föld felszínének bármelyik pontját is két koordinátával határozzuk meg: a földrajzi szélességgel és a földrajzi hosszúsággal.

A földrajzi koordinátákat Hipparkhossz ókori görög tudós vezette be kr. e. a II. században. A földrajzi koordinátákat a föld felszínén lévő pontok helyzetének a meghatározására használják az egyenlítőhöz és a kezdő (nulla) hosszúsághoz (meridiánhoz) viszonyítva. Például Kijev földrajzi koordinátái keleti hosszúság 30°30′ és északi szélesség 50°27′.

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Magyarázd el, hogyan kell derékszögű koordináta-rendszert rajzolni!
2. Hogyan hívjuk a koordináta-tengelyeket? a metszéspontjukat?
3. 3. Mi a koordináta-sík?
4. Hogyan kell meghatározni a derékszögű koordináta-rendszerben egy pont koordinátáit?
5. Milyen koordinátái vannak a számlálás kezdőpontjának, az origónak?
6. Milyen jellegzetességei vannak a tengelyekre illeszkedő pontok koordinátáinak? Hozz fel példát!
7. Hány koordináta-negyedre osztják a síkot a koordináta-tengelyek? Milyen előjelűek a koordináta-negyedekben lévő pont koordinátái?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

**1521′.** Hány koordináta-tengely szükséges a síkon egy pont helyének meghatározásához:
1) egy; 2) kettő; 3) három?

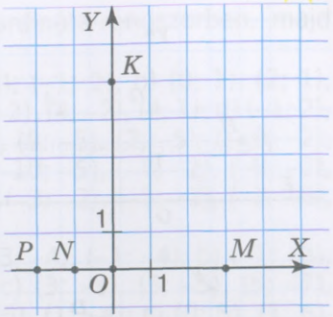
**1522′.** Igazak-e az alábbi állítások, amelyek szerint a derékszögű koordináta-rendszerben a síkon:
1) két számegyenes van;
2) a koordináta-tengelyek nem metszik egymást;
3) a koordináta-tengelyek kölcsönösen merőlegesek;
4) a koordináta tengelyeken egyenlők az egységek;
5) az ordináta tengelyt tekintik elsőnek?

**1523′.** Igaz-e, hogy az $A(-4; 9)$ koordinátájú pont abszcisszája:
1) 4; 2) 9; 3) −4; 4) −9?

**1524′.** Igaz-e, hogy az $A(-4; 9)$ koordinátájú pont ordinátája:
1) 4; 2) 9; 3) –4; 4) –9?

**1525′.** Melyik az a pont, amelyik egyszerre illeszkedik az abszcissza és az ordináta tengelyre is?

**1526′.** Helyesen jelölte-e meg Dénes az alábbi pontokat a koordináta-rendszerben (171. ábra):
1) $M(3; 0)$; 2) $N(0; -1)$;
3) $P(-2; 0)$; 4) $K(0; 4)$?



171. ábra

**1527°.** Rajzold át a füzetedbe a 24. táblázatot és írd be az $M$ pont koordinátáit.

*24. táblázat*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Az $M$ pont abszcisszája** | –2 | 12 | 69 |
| **Az $M$ pont ordinátája** | 5 | 4 | –51 |
| **Az $M$ pont koordinátája** | | | |

**1528°.** Rajzold át a füzetedbe a 25. táblázatot és írd be az $M$ pont abszcisszáját és ordinátáját.

*25. táblázat*

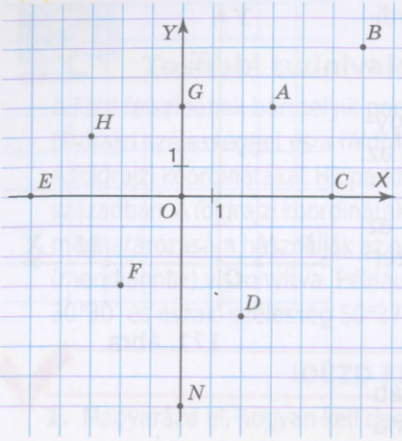
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Az $M$ pont koordinátája** | (4; 5) | (0,2; –8,9) | (–45; –12) |
| **Az $M$ pont abszcisszája** | | | |
| **Az $M$ pont ordinátája** | | | |

**1529°.** Rajzolj egy derékszögű koordináta-rendszert! Jelöld az $OX$ tengelyen azokat a pontokat, melyek abszcisszája: 1) 2; 2) –2; 3) 4,5; 4) –4,5! Nevezd meg a feltüntetett pontot! Milyenek a pontok ordinátái? Írd le a pontok koordinátáit.

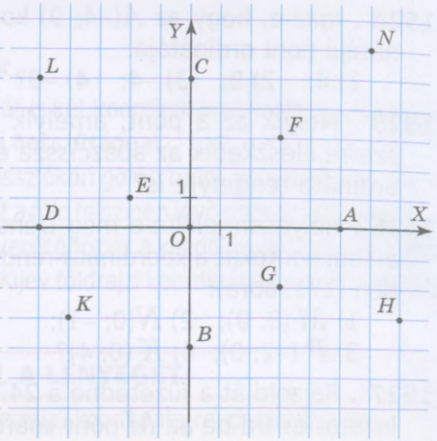
***1530°.*** Rajzolj egy derékszögű koordináta-rendszert! Jelöld az $OY$ tengelyen azokat a pontokat, melynek abszcisszája: 1) 2; 2) –2; 3) 4,5; 4) –4,5! Nevezd meg a feltüntetett pontot! Milyenek a pontok abszcisszái? Írd le a pontok koordinátáit.

**1531°.** Az $A(-45; 0)$, $B(8; 1)$, $C(0; 30)$, $D(1; -1)$, $E(3,1; 0)$, $F(0; -3)$ és $K(0; 0)$ pontok közül melyek illeszkednek az 1) abszcissza; 2) az ordináta tengelyre?

**1532°.** Rajzolj a füzetedbe egy derékszögű koordináta-rendszert! Ábrázold ebben a koordináta-rendszerben az alábbi pontokat:
1) $A$ (2; 4), $B$ (3; –2), $C$ (–2; 7), $D$ (2; 2); 2) $A$ (3; 5), $B$ (5; 3), $C$ (–3; –5), $D$ (–5; –3); 3) $A$ (–7; 7), $B$ (–4; 4), $C$ (–3; 3), $D$ (–5; 5).




172. ábra




173. ábra

**1533°.** Rajzolj a füzetedbe egy derékszögű koordináta-rendszert! Ábrázold ebben a koordináta-rendszerben az alábbi pontokat:
1) $A$ (1; 1), $B$ (1; –1), $C$ (–1; –1), $D$ (–1; 1);
2) $A$ (1; 2), $B$ (1; –2), $C$ (–2; –1), $D$ (–2; 1).

**1534°.** Rajzolj a füzetedbe egy derékszögű koordináta-rendszert! Egy beosztás hossza legyen három négyzet oldalhosszúsága! Ábrázold ebben a koordináta-rendszerben az alábbi pontokat: $A\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$.

**1535°.** Rajzolj a füzetedbe egy derékszögű koordináta-rendszert! Egy beosztás hossza legyen öt négyzet oldalhosszúsága! Ábrázold ebben a koordináta-rendszerben az alábbi pontokat: $A(-1;\ -0{,}2)$, $B\left(-\frac{2}{5};\ 0\right)$, $C\left(-1\frac{1}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$.

**1536°.** Olvasd le a 172. ábrán látható pontok koordinátáit.

**1537°.** Olvasd le a 173. ábrán látható pontok koordinátáit.

**1538°.** Rajz nélkül döntsd el, melyik koordináta-negyedben vannak a következő pontok: $A$ (–15; 20), $B$ (3,9; –4,2), $C$ (218; 30), $D$ (–19; –47), $E$ (–71; 8), $F$ (2; 23), $K$ (3; –12), $L$ (–401; –477).

**1539°.** Rajzold át a füzetedbe a 26. táblázatot és töltsd ki.

*26. táblázat*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A pont abszcisszájának előjele** | | | | |
| **A pont ordinátájának előjele** | | | | |
| **Melyik negyedben van az adott pont** | IV | II | III | I |

**1540°.** Jelöld az alábbi pontokat egy koordináta-rendszerben, majd kösd össze őket a leírás sorrendjében:

1) a) (–1; 2), (7; 2), (7; –5), (–1; –5), (–1; 2); b) (0; 1), (2; 1), (2; –2), (0; –2), (0;1); c) (4; 1), (6; 1), (6; –2), (4; –2), (4; 1); d) (–1; 2), (3; 5), (7; 2); e) (7; –2), (8; –1), (9; –2), (9; –5), (7; –5); f) (9; –2), (10; –1), (11; –2), (11; –5), (9; –5); g) (–10; –5), (–7; –2), (–9; –2), (–6; 1), (–8; 1), (–6; 3), (–4; 1), (–6; 1), (–3; –2), (–5; –2), (–2; –5), (–10; –5);

2) a) (–1; –4), (–1; 6), (1; 9), (3; 6), (3; –4), (–1; –4); b) (–1; –3), (– 3; –5), (–3; –7), (–2; –6), (–1; –4); c) (3; –3), (5; –5), (5; –7), (4; –6), (3; –4); d) (1; –4), (0; –6), (2; –6), (1; –4); r') (0; 5), (1; 6), (2; 5), (1; 4), (0; 5);

3) a) (4; 13), (8; 15), (9; 17), (10; 10), (16; 10), (18; 12), (16; 0), (14; 0), (15; 6), (11; 6), (12; 0), (10; 0), (8; 12), (5; 11), (4; 13); b) (8; 14); c) (4,5; 11,5), (7; 13).

**1541.** Írd le azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek illeszkednek a koordináta-tengelyekre és 1) 2 egységre; 2) 7 egységre; 3) 45 egységre vannak a számlálás kezdőpontjától.

***1542.*** Írd le azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyek illeszkednek a koordináta-tengelyekre és 1) 3 egységre; 2) 2,5 egységre vannak a számlálás kezdőpontjától.

**1543.** Add meg a $B$ pont koordinátáit, ha a $B$ pontnak és az $A(3; 4)$ pontnak 1) az abszcisszái azonosak, ordinátái ellentett értékűek; 2) az ordinátái azonosak, viszont ellentettek az abszcisszái; 3) az abszcisszák és az ordináták is ellentettek; 4) az abszcisszák és az ordináták is egyenlők.

***1544.*** Adott az $A(3; 4)$ koordinátájú pont. Írd le annak a $B$ pontnak a koordinátáit, melynek az abszcisszája és az ordinátája:

1) megfelelően egyenlő az $A$ pont ordinátájával és abszcisszájával;
2) kétszer több az $A$ pont ordinátájánál és abszcisszájánál;
3) 3-mal kevesebb az $A$ pont ordinátájánál és abszcisszájánál.

**1545.** Írd le azoknak a pontoknak a koordinátáit, melyek illeszkednek az $OX$ tengelyre és az $A(–6; 0)$ ponttól:

1) 3 egységre vannak; 2) 2,5 egységre vannak.

***1546.*** Írd le azoknak a pontoknak a koordinátáit, melyek illeszkednek az $OY$ tengelyre és az $A(0; 5)$ ponttól:

1) 1,5 egységre vannak; 2) 10 egységre vannak.

**1547.** Húzz az $A(3;2)$ koordinátájú ponton keresztül 1) az abszcissza; 2) az ordináta tengellyel párhuzamos egyeneseket! Döntsd el, illeszkednek-e erre az egyenesre a $B(–3; 2)$, $C(2; 3)$; $D(3; –2)$ pontok.

**1548.** Adott egy téglalap három csúcsa: $A(0; 0)$, $B(2; 0)$ és $D(0; 3)$. Rajzold meg az $ABCD$ téglalapot! Határozd meg a $C$ pont koordinátáit! Számítsd ki a téglalap kerületét és területét.

**1549.** Adott egy négyzet három csúcsa: $A(0; 0)$, $B(2; 0)$ és $D(0; 2)$. Rajzold meg az $ABCD$ négyzetet! Határozd meg a $C$ pont koordinátáit! Számítsd ki a négyzet kerületét és területét.

**1550.** Ábrázold az $A(-2; 2)$ és $B(4; -4)$ pontokra illeszkedő $AB$ egyenest! Határozd meg az egyenes még három pontjának koordinátáit.

**1551.** Határozd meg annak a négyzetnek a területét, melynek ismerjük két szomszédos csúcsának koordinátáit: 1) (3; 5), (8; 5); 2) (4; –3), (1; –3).

**1552.** Ismeretes az $ABCD$ négyzet $A$ (0; 4) csúcsa. A $B$ pont abszcisszája egyenlő az $A$ pont abszcisszájával, ordinátája az $A$ pont ordinátájának 1,5-szerese. Határozd meg a négyzet csúcsainak koordinátáit és ábrázold a négyzetet! Hány megoldása van a feladatnak. Számítsd ki a négyzet területét és kerületét.

**1553.** Melyik koordináta-negyedben van az $M(x; y)$ pont, ha:
1) $x < 1, y \geq 2$; 2) $x = -4, y \geq 2{,}6$?

**1554*.** Ábrázold azon $M(x; y)$ pontok halmazát, ha $-3 \leq x \leq 1$, $|y| \leq 2$, továbbá $x$ és $y$: 1) egész szám;
2) természetes szám;
3) racionális szám.

**1555*.** Ábrázold azokat az $(x; y)$ koordinátájú pontokat, melyekre teljesül, hogy $|x| \leq 6$, $|y| \leq 7$, valamint:
1) minden pont ordinátája egyenlő az abszcisszájával;
2) az abszcissza abszolút értéke egyenlő az ordinátájával;
3) a pont abszcisszája az ordinátájának kétszerese.

**1556*.** Ábrázold azon egész $(x; y)$ koordinátájú pontokat, melyekre teljesül, hogy: 1) $xy < 0$; 2) $xy = 0$; 3) $|xy| \leq 0$.

**1557*.** Ábrázold azon egész (x; y) koordinátájú pontokat, melyekre teljesül, hogy $|x| + |y| \leq 2$.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1558.** Rajzold le egy filmszínház vetítőtermének alaprajzát! Jelöld meg, hol kell ülnie annak a gyereknek, akinek a jegye a 2. sor 6. székébe; a 3. sor 7. székébe; a 12. sor 4. székébe szól.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1559.** Határozd meg a következő kifejezések értékét:

1) $-\frac{8}{19} + \left(-\frac{13}{38}\right) - \frac{30}{19}$; 2) $\left(\frac{5}{9} - \frac{21}{33}\right) + \left(-\frac{4}{11}\right)$.

**1560.** Számítsd ki:

1) $109{,}04 \cdot (-0{,}05)$; 2) $(-45{,}3 - 6{,}29) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.

**1561.** Szorozd meg –3,5 és 7,4 összegét:

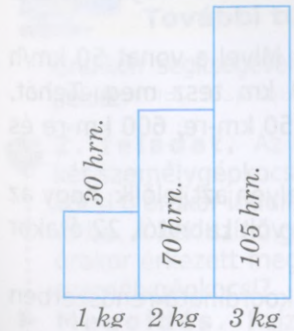
1) a kisebbik számmal; 2) a nagyobbik számmal; 3) a számok különbségével.

**1562.** Szorozd meg –9,3 és 6,8 különbségét:

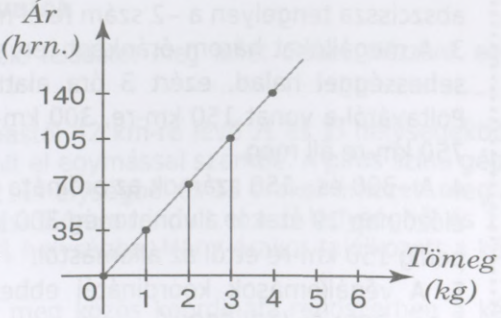
1) a kisebbik számmal; 2) a nagyobbik számmal; 3) a számok összegével.

## 35. § MENNYISÉGEK ÖSSZEFÜGGÉSÉT ÁBRÁZOLÓ GRAFIKONOK

Már tudjátok, hogy a megvásárolt áru értéke a mennyiségtől függ: minél többet vásárolunk, annál többet kell érte fizetnünk. Például, ha 1 kg cukorka ára 35 hrn., akkor 2kg cukorkáért 70 hrivnyát, 3 kg-ért pedig 105 hrivnyát kell fizetni és így tovább. Már tudjátok, hogy az ilyen összefüggés ábrázolható diagramon (174. ábra). Viszont egy diagramról nehéz leolvasni, mennyibe kerül például 2,5 kg cukorka. Ábrázoljuk az áru értékét oszlop diagram helyett függőleges szakaszokkal egy koordináta-rendszerben (175. ábra)! Mivel a „cukorka tömege " és az „ár" egyenesen arányos mennyiségek, ezért a szakaszok végpontjait össze lehet kötni. Ez a szakasz szemlélteti, hogyan függ a megvásárolt mennyiség ára a megvásárolt mennyiség tömegétől. Az ilyen vonalat *grafikonnak* nevezzük, a „meg-




174. ábra




175. ábra

vásárolt termék ára" és „mennyisége" közötti összefüggés grafikonjának

**Figyeld meg:**

az egyenesen arányos mennyiségek grafikonja egy egyenes.

Már azt is tudjátok, hogy a megtett út és a ráfordított idő is egyenesen arányos mennyiségek. Ezért a mozgást ábrázoló grafikon is egy egyenes.

**1. feladat.** A Harkiv-Lviv vonat 19 órakor indul Harkivból és körülbelül 13 órakor érkezik meg Lvivbe. A vonat átlagsebessége 50 km/h. A menetrend szerint 5-ször áll meg, minden harmadik órában. A 176. ábrán látható a vonat mozgásgrafikonja.

1) Hány órakor van a vonat első megállója az indulást követő napon? Hányadik megálló ez?

2) Mit mutat az abszcissza tengelyen a –5 szám; a –2 szám?

3) Mekkora távolságra vannak az első megállótól a többi megállók?

4) Mit mutat az ordináta tengelyen a –330-as szám; a –150-es szám?

5) Melyek a végállomások koordinátái?

**Megoldás.** A feladat feltételei alapján a vonat 19 órakor indul el és másnap 13 órakor érkezik meg.

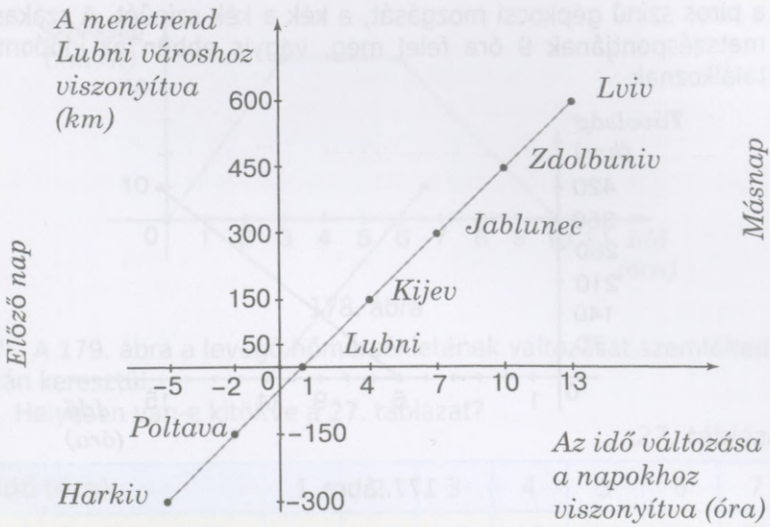
1. A másnap reggelét a vonat Lubni állomáshoz közel köszönti és az első megállója is ezen az állomáson lesz 1 órakor.

2. Mivel a vonat még előző nap indult el, ezért az indulást Harkivból jelölhetjük -5-tel. Valóban, az előző nap 19. órájától másnap 0 óráig pontosan 5 óra telik el. Hasonlóképpen a Poltavai megállónak az abszcissza tengelyen a –2 szám felel meg.

3. A megállókat három óránként tervezték. Mivel a vonat 50 km/h sebességgel halad, ezért 3 óra alatt 150 km tesz meg. Tehát, Poltavától a vonat 150 km-re, 300 km-re, 450 km-re, 600 km-re és 750 km-re áll meg.

4. A –300 és –150 számok az ordináta tengelyen azt jelölik, hogy az előző nap 19 órakor a vonat még 300 km-re volt Lubnitól, 22 órakor pedig 150 km-re ettől az állomástól.

5. A végállomások koordinátái ebben a koordináta-rendszerben (–5; –300) és (13; 600).




176. ábra

Szükséges-e megjelölni a grafikon végpontjait? Nem. Grafikont rajzolhatunk bármelyik két pontján keresztül is. A végállomások pontjait azonban feltétlenül fel kell tüntetni.

**Figyeld meg:**

a mozgásgrafikon egy egyenes (vagy egy egyenes része), ezért bármelyik két pontján keresztül meg lehet rajzolni.

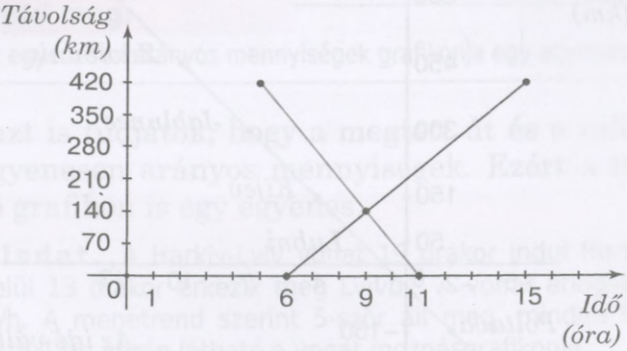
**További tudnivalók**

Grafikon segítségével sokféle feladatot meg lehet oldani. Nézzünk egy példát.

**2. feladat.** Az egymástól 42 km-re lévő $A$ és $B$ helységekből két személygépkocsi indult el egymással szembe. A piros színű gépkocsi 6 órakor indult el az $A$ helységből és 15 órakor érkezett meg a $B$-be. A kék színű gépkocsi 5 órakor indult el a $B$ helységből és 11 órakor érkezett meg az $A$ helységbe. Hány órakor találkozott a két személygépkocsi?

**Megoldás.** Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a két gépkocsi mozgásgrafikonját (177. ábra)! A piros szakasz ábrázolja

a piros színű gépkocsi mozgását, a kék a kék színűét. A szakaszok metszéspontjának 9 óra felel meg, vagyis ebben az időpontban találkoznak.




177. ábra

## IDÉZD FEL A LÉNYEGET!

1. Magyarázd meg, mi a függvény grafikonja?
2. Hogyan kell ábrázolni a vásárolt termék és az ára közötti összefüggés grafikonját? Mit mutat ezen a grafikonon az abszcissza tengely? és az ordináta tengely?
3. Milyen alakzat a vonat mozgásának grafikonja?

## OLDD MEG A FELADATOKAT!

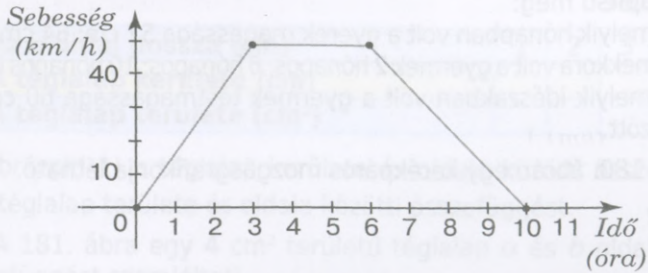
**1563′.** Határozd meg a 175. ábra alapján, mennyibe kerül 1) 2 kg; 2) 3 kg; 3) 4 kg cukorka.

**1564′.** Határozd meg a 175. ábra alapján, hány kg cukorkát lehet vásárolni 1) 70 hrivnyáért; 2) 140 hrivnyáért; 3) 105 hrivnyáért.

**1565′.** Határozd meg a 176. ábra alapján, hány órakor állt meg a vonat Jablunec állomáson.

**1566°.** A 178. ábra egy gépkocsi sebességének változását szemlélteti.

Igaz-e, hogy a személygépkocsi:
1) az első négy órában növelte a sebességét;
2) három órán keresztül ugyanolyan sebességgel haladt;
3) sebessége 3 órakor 40 km/h volt;
4) 4 órakor megállt?




178. ábra

**1567°.** A 179. ábra a levegő hőmérsékletének változását szemlélteti 7 órán keresztül.

Helyesen van-e kitöltve a 27. táblázat?

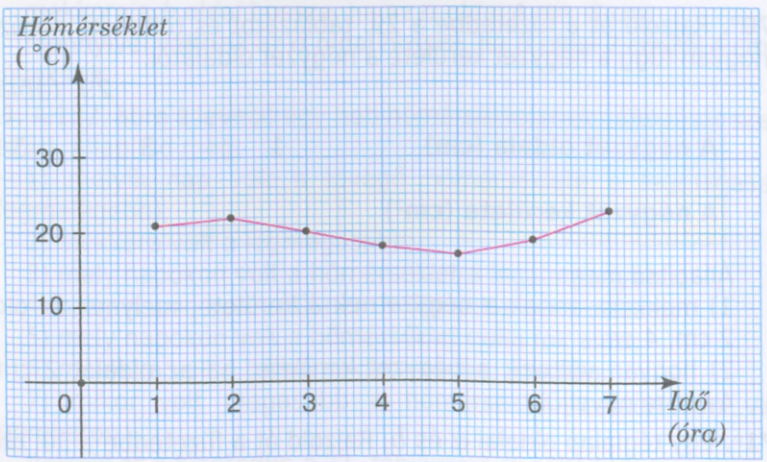
*27. táblázat*

| **Idő (óra)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Hőmérséklet (°C)** | 21 | – 22 | 20 | 18 | 17 | 19 | 22 |

***1568°.*** A 28. táblázatban egy gyerek növekedése van feltüntetve az első életévében. Ábrázold, hogyan fejlődött a gyerek ez alatt az idő alatt.

*28. táblázat*

| **Életkor (hónapokban)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Magasság (cm)** | 54 | 57 | 60 | 62 | 64 | 66 | 67 | 68 | 70 | 71 | 73 | 74 |




179. ábra

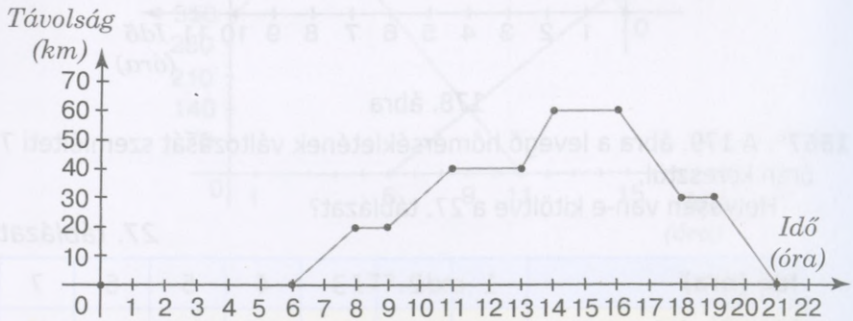
Állapítsd meg:

1) melyik hónapban volt a gyerek magassága 57 cm; 64 cm; 74 cm;

2) mekkora volt a gyermek 2 hónapos; 6 hónapos; 10 hónapos korában;

3) melyik időszakban volt a gyermek testmagassága 60 cm és 70 cm között.

**1569°.** A 180. ábrán egy kerékpáros mozgásgrafikonja látható.




180. ábra

Állapítsd meg:

1) mekkora távolságot tett meg a kerékpáros az indulástól számított 8 óra alatt; 13 óra alatt; 15 óra alatt;

2) hányszor pihent meg a kerékpáros;

3) hány órakor tartotta a kerékpáros az első pihenőt és mennyi ideig;

4) hány kilométert tett meg a kerékpáros az első 2 órában; 9 órától 11 óráig;

5) mikor fejezte be a kerékpáros a kirándulását.

**1570°.** Rajzold át a füzetedbe a 29. táblázatot és töltsd ki! Ábrázold, hogyan függ a négyzet kerülete a négyzet oldalától.

*29. táblázat*

| **A négyzet oldala (cm)** | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| **A négyzet kerülete (cm²)** | | | |

Állapítsd meg:

1) mekkora annak a négyzetnek a kerülete, melynek az oldala 2 cm; 4 cm;

2) hogyan változik a négyzet kerülete, ha az oldalát 2 cm-ről 4 cm-re növeljük.

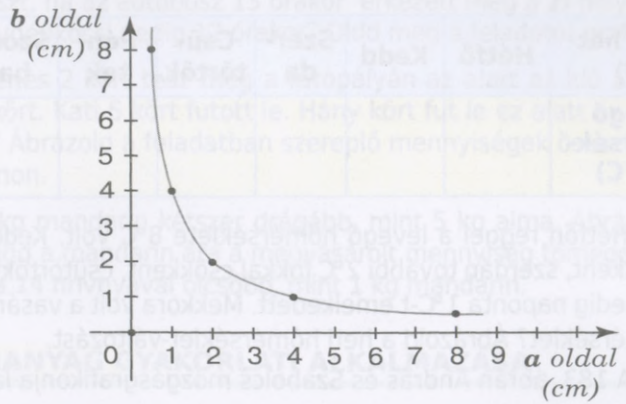
***1571°.*** Egy téglalap oldalai $a$ és $b$. Rajzold át a füzetedbe a 30. táblázatot és töltsd ki, ha $b = 2$ cm.

*30. táblázat*

| Az $a$ oldal hossza (cm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A téglalap kerülete (cm) | | | | | |
| A téglalap területe ($cm^2$) | | | | | |

Ábrázold 1) a téglalap kerülete és oldala közötti összefüggést; 2) a téglalap területe és oldala közötti összefüggést.

**1572.** A 181. ábra egy 4 $cm^2$ területű téglalap $a$ és $b$ oldala közötti összefüggést szemlélteti.




181. ábra

Állapítsd meg:

1) mekkora az $a$ oldal, ha a $b$ oldal 1 cm; 2 cm;

mekkora a $b$ oldal hossza, ha az $a$ oldal 4 cm; 8 cm;

mennyivel változik az $a$ oldal hossza, ha $b$ oldal 2 cm-ről 4 cm-re növekszik.

***1573.*** A 182. ábra a levegő egy heti hőmérsékletének változását szemlélteti. Állapítsd meg:

1) melyik nap volt a levegő hőmérséklete a legmagasabb (legmelegebb);

2) mekkora volt a legmagasabb;

3) mely napokon volt a hőmérséklet a legalacsonyabb;

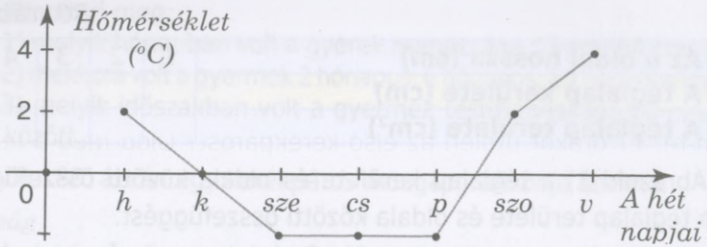
4) hány napon keresztül nem változott a hőmérséklet;

5) mely napokon volt a hőmérséklet nulla fok alatt;

6) mekkora volt a hőmérséklet kedden; szerdán;

7) mikor volt magasabb a hőmérséklet: csütörtökön vagy szombaton.

Rajzold át a füzetedbe a 31. táblázatot és töltsd ki.



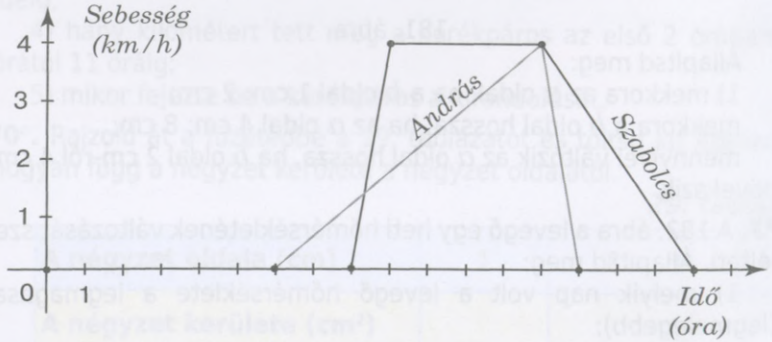

182. ábra

*31. táblázat*

| Idő (a hét napjai) | Hétfő | Kedd | Szerda | Csütörtök | Péntek | Szombat | Vasárnap |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A levegő hőmérséklete (°C) | | | | | | | |

**1574.** Hétfőn reggel a levegő hőmérséklete 8°C volt. Kedden 3°C-kal csökkent, szerdán további 2°C fokkal csökkent, csütörtöktől szombatig pedig naponta 1°C-t emelkedett. Mekkora volt a vasárnap reggeli hőmérséklet? Ábrázold a heti hőmérséklet-változást.

**1575.** A 183. ábrán András és Szabolcs mozgásgrafikonja látható.




183. ábra

Állapítsd meg:

1) melyik fiú sebessége volt nagyobb 10 órakor;
2) mikor volt András sebessége 3 km/h;
3) mekkora volt Szabolcs sebessége 9 órakor; 13 órakor;
4) mikor állt meg Szabolcs pihenni;
5) melyik fiú túrája tartott hosszabb ideig és mennyivel;
6) pihentek-e a fiúk;
7) hány kilométert tett meg Szabolcs 10 órától 12 óráig.

**1576*.** Az egymástól 60 km-re lévő $A$ helységből $B$ helységbe 13 órakor elindult egy kerékpáros, két órával később ugyanabba az irányba elindult egy másik kerékpáros is. Hány órakor érkeznek meg a kerékpárosok a $B$ helységbe, ha a második kerékpáros az $A$ helységtől 40 km-re, 17 órakor utoléri az első kerékpárost? Oldd meg a feladatot grafikusan.

**1577*.** Az egymástól 300 km-re lévő $A$ helységből $B$ helységbe 8 órakor elindult egy autóbusz. Egy órával később ugyanabba az irányba elindult egy személygépkocsi. Mikor érte utol a személygépkocsi az autóbuszt, ha az autóbusz 13 órakor érkezett meg a $B$ helységbe, a személygépkocsi pedig 12 órakor? Oldd meg a feladatot grafikusan.

**1578*.** Dénes 2 kört tesz meg a futópályán az alatt az idő alatt, míg Kati 3 kört. Kati 6 kört futott le. Hány kört fut le ez alatt az idő alatt Dénes? Ábrázold a feladatban szereplő mennyiségek összefüggését grafikonon.

**1579*.** 3 kg mandarin kétszer drágább, mint 5 kg alma. Ábrázold, hogyan függ a mandarin ára a megvásárolt mennyiség tömegétől, ha 1 kg alma 14 hrivnyával olcsóbb, mint 1 kg mandarin.

## A TANANYAG GYAKORLATI ALKALMAZÁSA

**1580.** Ábrázold egy hét hőmérséklet-változását! Határozd meg, mikor volt a hőmérséklet 1) a legalacsonyabb; 2) a legmagasabb.

**1581.** Ábrázold testmagasságod változását bizonyos időszak alatt.

## ISMÉTLŐ FELADATOK

**1582.** Számítsd ki: 1) $\left(|48|:|-6|+\left|-\frac{3}{7}\right|\cdot\frac{21}{9}\right):\left(-\left|-\frac{3}{2}\right|\right)$;

2) $\left(|-54|\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+2{,}25\cdot|-0{,}8|:\left|-\frac{1}{10}\right|\right):\left|-\frac{6}{5}\right|$.

**1583.** Számítsd ki: 1) $3{,}71+(-13{,}6)+\left(-\frac{71}{100}\right)$;

2) $-0{,}109+86\frac{1}{4}+\left(-80\frac{891}{1000}\right)$.

# TESZTFELADATOK A FEJEZETEKHEZ

## 1. FEJEZET

Figyelmesen olvasd el az alábbi feladatokat, és a felajánlott válaszok közül válaszd ki a helyeset! A tesztfeladatok megoldásához 10 – 15 perc szükséges.

**1°.** Milyen számjegyet kell a 1754* számban a csillag helyére írni, hogy a kapott szám osztható legyen 10-zel?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

**2°.** Milyen számjegyet kell beírni 56-hoz balról, hogy a kapott szám osztható legyen 9-cel?

**A.** 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 7.

**3°.** Határozd meg 32 és 36 legkisebb közös többszörösét!

**A.** 144. **B.** 288. **C.** 4. **D.** 1152.

**4.** Legfeljebb hány ugyanolyan csokrot lehet kötni 36 fehér és 126 rózsaszín szegfűből?

**A.** 9. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 4.

**5*.** Határozd meg azt a legkisebb négyjegyű számot, amelyben szerepel a7-es számjegy és osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel is.

**A.** 1710. **B.** 1470. **C.** 1740. **D.** 1170.

# 2. FEJEZET

Figyelmesen olvasd el az alábbi feladatokat, és a felajánlott válaszok közül válaszd ki a helyeset! A tesztfeladatok megoldásához 10 – 15 perc szükséges.

**1. sz.**

**1°.** Az $\frac{5}{15}, \frac{7}{42}, \frac{9}{63}, \frac{11}{23}$ törtek közül melyik egyszerűsíthetetlen?

**A.** $\frac{9}{63}$. **B.** $\frac{11}{23}$. **C.** $\frac{5}{15}$. **D.** $\frac{7}{42}$.

**2°.** Számítsd ki a $\frac{11}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ kifejezés értékét!

**A.** $1\frac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{3}$.

**3°.** A $\frac{2}{9}, \frac{5}{18}, \frac{11}{27}, \frac{1}{3}$ számok közül melyik a legnagyobb?

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{18}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{11}{27}$.

**4.** Egyszerűsítsd a $\frac{15y}{35xy^2}$ $(x \neq 0;\ y \neq 0)$ törtet!

**A.** $\frac{5}{7y}$. **B.** $\frac{3}{7xy}$. **C.** $\frac{3x}{7y^2}$. **D.** $\frac{1}{3xy^2}$.

**5*.** Egy háromszög egyik oldala $\frac{4}{5}$ m. Ez az oldal $\frac{7}{10}$ m-rel nagyobb a második oldalnál, és $\frac{1}{20}$ m-rel rövidebb a harmadik oldalnál. Határozd meg a háromszög kerületét!.

**A.** $2\frac{1}{20}$ cm. **B.** $1\frac{3}{5}$ cm. **C.** $3\frac{1}{20}$ cm. **D.** $1\frac{3}{4}$ cm.

**2. sz.**

**1°.** Számítsd ki az $\frac{5}{12}:\frac{55}{72}$ hányadost!

**A.** $\frac{6}{11}$. **B.** $1\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{5}{72}$. **D.** $\frac{12}{55}$.

**2°.** Számítsd ki az $\frac{5}{6}\cdot 1{,}2$ szorzatot!

**A.** $\frac{5}{72}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** 10.

**3°.** Határozd meg a $\frac{5}{18}\cdot\frac{3}{35}\cdot 2$ kifejezés értékét!

**A.** $\frac{6}{7}$. **B.** $\frac{5}{42}$. **C.** $\frac{1}{84}$. **D.** $\frac{1}{21}$.

**4.** Számítsd ki annak a négyzetnek a területét, melynek a kerülete $2\frac{6}{7}$ cm.

**A.** $11\frac{3}{7}$ cm². **B.** $\frac{5}{7}$ cm². **C.** $\frac{25}{49}$ cm². **D.** $8\frac{8}{49}$ cm².

**5*.** Határozd meg az $\frac{5}{16}\left(x-\frac{5}{18}\right)=\frac{7}{24}$ egyenlet gyökét! Melyik egyenlőtlenség teljesül az egyenlet gyökére?

**A.** $0{,}36 < x < 0{,}37$.
**B.** $0{,}74 < x < 0{,}75$.
**C.** $0{,}29 < x < 0{,}3$.
**D.** $1{,}21 < x < 1{,}22$.

# 3. FEJEZET

Figyelmesen olvasd el az alábbi feladatokat és a felajánlott válaszok közül válaszd ki a helyeset! A tesztfeladatok megoldásához 10 – 15 perc szükséges.

## 1. sz.

**1°.** Határozd meg a 0,18 : 3,6 arány értékét!
**A.** 0,2. **B.** 0,5. **C.** 0,05. **D.** 5.

**2°.** Határozd meg a $6,4 : x = 4 : 5$ aránypár ismeretlen tagját!
**A.** 8. **B.** 0,8. **C.** 5,12. **D.** 0,2.

**3°.** Mennyibe kerül 9 kg cukorka, ha 4 kg cukorka ára 110 hrivnya?
**A.** 27,5 hrn. **B.** 220 hrn. **C.** 247,5 hrn. **D.** 275 hrn.

**4.** Egy térkép méretaránya 1 : 600 000. Határozd meg, mekkora a valóságban az a távolság, amit a térképen egy 3 cm-es szakasz jelöl?
**A.** 18 km. **B.** 1,8 km. **C.** 180 m. **D.** 18 m.

**5*.** Hány nap alatt fejezi be a munkát 8 munkás, ha 4 munkás ezt a feladatot 6 nap alatt végzi el?
**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

## 2. sz

**1°.** Számítsd ki annak a körvonalnak a kerületét, melynek sugara 7 cm!
**A.** 14 cm. **B.** 21,98 cm. **C.** 43,96 cm. **D.** 439,6 cm.

**2°.** Egy dobókockával dobunk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott szám a 4-es?
**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**3°.** Számítsd ki a 8 cm átmérőjű körlap területét!
**A.** 25,12 $cm^2$. **B.** 200,96 $cm^2$. **C.** 50,24 cm. **D.** 50,24 $cm^2$.

**4.** 12-őt először 25 %-kal megnöveltük, majd megint 15 %-kal. Melyik számot kaptuk?
**A.** 172,5. **B.** 17,25. **C.** 168. **D.** 16,8.

**5*.** A város egyik parkjába fákat ültettek. A fák 60 %-a tűlevelű. Hány fát ültettek el a parkban, ha tűlevelűből 25-tel több van?
**A.** 500. **B.** 450. **C.** 250. **D.** 125.

# 4. FEJEZET

Figyelmesen olvasd el az alábbi feladatokat és a felajánlott válaszok közül válaszd ki a helyeset! A tesztfeladatok megoldására 10 – 15 perc szükséges.

**1. sz.**

**1°.** A 4; 12; $-\frac{6}{3}$; 0; 18; $-2\frac{1}{3}$; –19; 111; –2,4; –91; –14 számok között hány negatív egész szám van?

**A.** 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 8.

**2°.** Határozd meg 0,5 ellentettjét!

**A.** 0,5. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{5}$. **D.** –1,5.

**3°.** Rendezd a 0,6; $-\frac{3}{4}$; –1,9 számokat növekvő sorrendbe!

**A.** 0,6; $-\frac{3}{4}$; – 1,9. **B.** $-\frac{3}{4}$; – 1,9; 0,6.

**C.** 0,6; –1,9; $-\frac{3}{4}$. **D.** –1,9; $-\frac{3}{4}$; 0,6.

**4.** Számítsd ki: $|-9| \cdot |-2| - |-36| : 6$.

**A.** 24. **B.** –12. **C.** –24. **D.** 12.

**5*.** Határozd meg az $A$ és $B$ pont távolságát, ha az $A$ pont a $C$ (– 2) és $D$ (4) végpontú szakasz felezőpontja, a $B$ pont pedig az $M$ (– 3) és $N$ (– 5) végpontú szakasz felezőpontja!

**A.** 5 egység **B.** 6 egység **C.** 3 egység **D.** 2 egység

## 2. sz.

**1°.** Számítsd ki a $-2{,}8 + 0{,}2$ összeget!

**A.** $-3$. **B.** $-2{,}6$. **C.** $3$. **D.** $2{,}6$.

**2°.** Számítsd ki a $-15\ -17$ kifejezés értékét!

**A.** $-32$. **B.** $32$. **C.** $2$. **D.** $-33$.

**3°.** Oldd meg az $x - 1{,}5 = -3{,}4$ egyenletet!

**A.** $1{,}9$. **B.** $-4{,}9$. **C.** $4{,}9$. **D.** $-1{,}9$.

**4.** Határozd meg a következő kifejezés értékét: $\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{9}\right) + \left(-5\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{9} - 0{,}2$!

**A.** $-6$. **B.** $-4\frac{2}{3}$. **C.** $-5\frac{4}{45}$. **D.** $6$.

**5*.** $5{,}6$ és $-1\frac{1}{8}$ összegéből kivontunk egy számot. Az eredmény $-0{,}605$ lett. Melyik ez a szám?

**A.** $3{,}98$. **B.** $5{,}08$. **C.** $-3{,}88$. **D.** $-4\frac{1}{8}$.

## 3. sz.

**1°.** Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik igaz?

**A.** $-2 \cdot (-5) < 0$. **C.** $2 \cdot 5 < 0$.

**B.** $2 \cdot (-5) < 0$. **D.** $-2 \cdot 5 > 0$.

**2°.** Számítsd ki: $-50 \cdot (-0{,}001) \cdot 27{,}28 \cdot (-2)$!

**A.** $-2{,}728$. **B.** $54{,}56$. **C.** $27{,}28$. **D.** $-272{,}8$.

**3°.** Oldd meg a: $-8 \cdot x = 6{,}4$ egyenletet!

**A.** $0{,}8$. **B.** $-8$. **C.** $-0{,}8$. **D.** $-71{,}2$.

**4.** Számítsd ki: $-0{,}2 \cdot (-100 : 4)$!

**A.** $-4$. **B.** $-5$. **C.** $12{,}5$. **D.** $5$.

**5*.** Számítsd ki: $-\frac{5}{11} : \left(-\frac{13}{33}\right) \cdot 78 : \left(-\frac{17}{15} + 3\frac{2}{5}\right) : \left(-\frac{45}{34}\right)$.

**A.** $0$. **B.** $-15$. **C.** $-30$. **D.** $15$.

# 5. FEJEZET

Figyelmesen olvasd el az alábbi feladatokat és a felajánlott válaszok közül válaszd ki a helyeset! A tesztfeladatok megoldásához 10 – 15 perc szükséges.

## 1. sz.

**1°.** Egyszerűsítsd a kifejezést: $6 \cdot (a + 0{,}5) - 4 \cdot (a - 2{,}8)$!

**A.** $6a + 4{,}2$. **B.** $2a - 8{,}2$. **C.** $2a - 14{,}2$. **D.** $2a + 14{,}2$.

**2°.** Oldd meg a következő egyenletet: $2{,}5x + 12 = 2x - 13$.

**A.** 5. **B.** –5. **C.** 50. **D.** –50.

**3°.** Két szám összege 30. Az egyik szám a másik 1,5 szerese. Határozd meg ezeket a számokat!

**A.** 16 és 14. **B.** 18 és 12. **C.** 15,75 és 14,25. **D.** 20 és 10.

**4.** Oldd meg a következő egyenletet: $2 \cdot (y - 3{,}5) = 7 + 3{,}6 \cdot (2y - 1)$!

**A.** 2. **B.** –2. **C.** 0,5. **D.** –0,5.

**5*.** Két polcon összesen 18 könyv volt. Miután az első polcról áttettek 2 könyvet a második polcra, az első polcon 2-szer több könyv maradt, mint a másodikon. Hány könyv volt eredetileg a polcokon?

**A.** 12 és 6. **B.** 14 és 4. **C.** 10 és 8. **D.** 15 és 3.

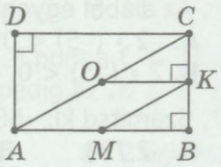
## 1. sz.

**1°.** Az 1. ábrán melyik egyenes merőleges az $AB$ egyenesre?

**A.** $KM$. **B.** $OK$. **C.** $CB$. **D.** $CD$.

**2°.** Mekkora az $\angle AOC$ (1. ábra)?

**A.** 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 180°.



1. ábra

**3°.** Melyik példa szemlélteti mindig a párhuzamos egyeneseket:

**A.** A háromszög oldalai;

**B.** A téglalap oldalai;

**C.** A négyzet szemben lévő oldalai;

**D.** Két ceruza?

**4.** Egy $ABCD$ négyzet három csúcsa $A$ (– 2; 4) ; $B$ (5; 4) és $C$ (5; – 3). Határozd meg a $D$ csúcs koordinátáit!

**A.** (5; 3). **B.** (2; –3). **C.** (–2; –4). **D.** (–2; –3).

**5*.** Az $AB$ szakaszt a $C$ pont 5 : 1 arányban osztja (az $A$ ponttól számítva). Határozd meg a $C$ pont koordinátáit, ha az $A$ (1; – 6) és $B$ (–5; – 6)!

**A.** (–4; –6). **C.** (0; –6).

**B.** (–3; –6). **D.** (–1; –6).

# FELELETEK

## 1. fejezet

### 1. §

**10.** 1) 12; 16; 20; 3) 12; 18. **11.** 1) 18; 24; 30; 3) 30. **12.** 1) 4; 3) 7. **15.** 1) 11; 13; 23. **16.** 1) 29; 37. **17.** 1) 7; 13; 19; 31; 37; 43. **18.** 1) 4. **21.** 1) Igen, 3 dobozzal; 3) igen, 6 dobozzal. **22.** 1) Igen, 18 fős csapatokra; 3) nem. **23.** 3) 16; 32; 48; 64; 80; 96; 4) 22; 44; 66; 88. **24.** 3) 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 4) 15; 30; 45; 60; 75; 90. **25.** 105; 140; 175; 210; 245; 280; 315; 350; 385. **26.** 24; 48; 72; 96. **27.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **28.** Például, 4; 9; 25; 49. **29.** Például, 6; 10; 14; 21. **30.** 13 és 11. **31.** 1) Igen, 45 érmét; 3) igen, 9 érmét. **32.** 15 éves, 33 éves, 55 éves. **33.** 1) $6\frac{10}{11}$; 2) $\frac{20}{21}$. **34.** 50 %-kal.

### 2. §

**41.** 1) 4; 2) 6. **44.** 1) 6. **47.** 1) 5. **50.** 1) 6; 3) 2. **52.** 3) 30; 40; 50. **56.** 2) 110; 355; 180; 650; 780; 4) 110; 180; 650; 780. **57.** 1) 252; 160; 210; 336; 520; 890; 3) 160; 210; 520; 890. **58.** 2) 330 vagy 335; 3) 330. **59.** 2) 1230 vagy 1235; 3) 1230. **60.** 2) 1350 vagy 1355; 3) 1350. **61.** 1) Nem; 3) nem. **62.** 1) Igen; 3) igen. **64.** 3) 10; 4) 11. **65.** 1) Igen. Például, 76 és 66; 2) igen. Például, 67 és 77; 3) nem; 4) nem. **66.** 1) Nem; 3) igen. **67.** Nem. **68.** Igen. **69.** Igen. **70.** 1) 15; 25; 35; 45; 50; 55; 65; 75; 85; 95; 2) 50; 3) 50; 4) 51; 53; 57; 59. **71.** 1) 40; 45; 2) 40; 3) 40; 4) 41; 43; 47; 49. **72.** 1) 160; 3) 290. **73.** 1) 960; 3) 985. **74.** 1) 2000; 2025; 2050; 2200; 2225; 2250; 2500; 2550; 5000; 5025; 5050; 5200; 5225; 5250; 5500; 5525; 5550. **77.** Igen, 5 cukorkájával. **78.** 1) 380,6; 3) 909,9. **79.** 7500 $cm^3$.

### 3. §

**83.** 1) 2. **84.** 72; 81; 90; 99; 108; 117. **85.** 90; 99; 108; 117; 126. **86.** 24; 39; 48; 63. **87.** 1) 2. **88.** 42; 45;48; 51; 54; 57; 60. **89.** 78; 81; 84; 87; 90; 93; 96; 99; 102. **94.** 1) 270; 2) 270; 570; 870. **95.** 1) 1314; 2) 1311; 1314; 1317. **96.** 1) 7128; 2) 1128; 4128; 7128. **97.** 1) 1521; 2) 1221; 1521; 1821. **98.** 1) 5049; 2) 5019; 5049; 5079. **99.** 1) Nem; 2) igen. **100.** 1) Igen; 2) igen. **101.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **102.** 1) 11; 3) 33. **103.** 1) Igen. Például, 2223. **104.** 1) 999; 2) 999. **105.** 1) 1008; 2) 1002. **106.** 1) 333; 666; 999; 2) 111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999; 3) 555. **107.** 1) 10 737; 11 637; 12 537; 13 437; 14 327; 15 237; 16 137; 17 037; 17 937; 18 837; 19 737. **108.** 1) 80 550; 81 540; 82 530; 83 520; 84 510; 85 500; 85 590; 86 580; 87 570; 88 560; 89 550. **111.** 369; 639; 909. **112.** 67. **113.** 1) 3330; 2) 1110; 3000; 3300; 3330. **114.** 3 variánst: 285 228; 585 228; 885 228. **115.** 1005 és 9990. **116.** Igen, 274 hrn fejenként. **117.** Nem. **119.** 36,48-dal kevesebb és 28,6-del több. **120.** 15,3 km.

### 4. §

**129.** 3; 5; 7; 15; 21; 35; 105. **130.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen; 4) igen. **134.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen; 4) nem. **135.** 1) 14; 2) 17; 3) 16; 4) 25. **136.** 1) 12; 2) 13; 3) 35; 4) 48. **137.** 1) 15; 3) 52. **138.** 1) 5; 3) 34. **139.** 1) 6; 3) 12. **140.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem; 4) igen. **142.** 11; 13; 17; 19. **143.** 21; 22; 23; 24; 26; 27; 28; 29. **144.** 6; 10; 14; 15; 21; 35. **145.** 1) 12; 3) 125. **146.** 1) 54; 3) 31. **147.** 15 csomagot. **148.** 135 csokrot. **151.** 1) 5; 2) 4; 3) 2; 4) 14. **152.** 1) 4; 2) 5; 3) 4; 4) 22. **153.** 27 csomagot. **154.** 48 csokrot. **155.** 117. **156.** 966. **157.** 1) 54; 2) 45. **158.** 6 négyzetet 26 cm-es oldalhosszal. **160.** 1) 19,8; 2) 29. **161.** 0,858 kg arany és 1,742 kg ezüst.

### 5. §

**169.** 1) 210; 2) 180; 3) 630. **170.** 1) 36; 2) 90; 3) 42. **171.** 1) 168; 2) 96; 3) 72. **172.** 1) 75; 2) 225; 3) 288; 4) 864. **173.** 1) 192; 2) 99; 3) 112. **174.** 1) 315; 2) 300; 3) 336. **175.** Relatív prímszámok. **176.** 60 alma. **177.** 36 fánkot. **178.** 72 éves. **179.** 1) 1728; 2) 570; 3) 500; 4) 968; 5) 840; 6) 1296; 7) 1125; 8) 555. **180.** 1) 486; 2) 768; 3) 756; 4) 6600. **181.** 1) 72; 2) 96; 3) 1452; 4) 420; 5) 288; 6) 900; 7) 84; 8) 3289. **182.** 1) 330; 2) 720; 3) 350; 4) 3553. **183.** 1) 288; 2) 315. **185.** 1023. **186.** 980. **187.** 18 és 81; 27 és 72; 36 és 63; 45 és 54. **188.** 90 m. **189.** 89 cm. **190.** 4; 8; 24.

## 2. fejezet

### 6. §

**197.** 1) 6; 2) 4; 3) 3; 4) 7. **198.** 1) 5; 2) 6. **201.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **202.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen; 4) nem. **203.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen; 4) igen. **204.** 1) 5; 2) 7; 3) 4; 4) 11. **205.** 1) 5; 2) 11; 3) 7; 4) 13. **208.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{4}{11}$; 4) $\frac{6}{7}$. **209.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{5}{27}$. **212.** 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{20}$; 3) $\frac{6}{25}$; 4) $\frac{1}{8}$. **213.** 0,1; 0,11; 0,3; 0,9; 0,36. **214.** 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15. **215.** 1; 5; 7; 11; 13; 17. **220.** 1) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{3}{11}$. **221.** 1) $\frac{5}{8}$; 3) $\frac{5}{9}$. **222.** 1) $\frac{7}{5}$; 3) $\frac{33}{10}$. **223.** 1) $\frac{3}{200}$ kg; 3) $\frac{1}{4}$ kg. **224.** 1) $10\frac{2}{3}$ perc; 3) $7\frac{1}{12}$ perc. **225.** 1) $6\frac{1}{6}$ óra; 3) $9\frac{1}{5}$ óra. **226.** 1) $\frac{b}{2}$; 3) $\frac{3y}{5}$. **227.** 1) $\frac{ac}{3}$; 3) $\frac{x}{2}$. **228.** 1) 3; 2) 5; 3) 19; 4) 1. **229.** 1) 4; 2) 2; 3) 5; 4) 5. **230.** $\frac{35}{70}$. **231.** $\frac{64}{72}$. **232.** Nem. **233.** $\frac{2}{5}$. **234.** 1) Egyszerűsíthetetlen; 2) $\frac{9}{25}$; 3) egyszerűsíthetetlen; 4) $\frac{7}{101}$. **236.** 1) $\frac{3}{4}$ órát; 2) $\frac{3}{2}$ órát; 3) 3 órát; 4) $\frac{9}{2}$ órát. **237.** $\frac{3}{2}$ kg-t. **238.** 1) 6; 2) 10. **239.** 9 cm és 27 cm.

## 7. §

**244.** 1) 3; 2) 6; 3) 12; 4) 15. **245.** 1) $\frac{10}{12}$; 3) $\frac{20}{24}$. **248.** 1) 34; 3) 20; 5) 15; 7) 77; 9) 24; 11) 24; 13) 36; 15) 45; 17) 75; 19) 72; 21) 120; 23) 210; 25) 648; 27) 336. **249.** 1) 36; 3) 10; 5) 20; 7) 112; 9) 105; 11) 90; 13) 108; 15) 420. **250.** 1) <; 3) >; 5) >. **251.** 1) <; 3) <. **254.** 1) $\frac{25}{120}$ és $\frac{33}{120}$; 3) $\frac{85}{500}$ és $\frac{22}{500}$; 5) $\frac{60}{405}$ és $\frac{33}{405}$; 7) $\frac{25}{945}$ és $\frac{33}{945}$; 9) $\frac{21}{270}$ és $\frac{22}{270}$; 11) $\frac{185}{750}$ és $\frac{22}{750}$. **255.** 1) $\frac{104}{192}$ és $\frac{33}{192}$; 3) $\frac{585}{1500}$ és $\frac{66}{1500}$; 5) $\frac{240}{1620}$ és $\frac{207}{1620}$; 7) $\frac{35}{1323}$ és $\frac{45}{1323}$. **256.** $\frac{5}{12}$. **257.** $\frac{13}{18}$, $\frac{14}{18}$. **260.** 1) $\frac{40}{150}$, $\frac{105}{150}$, $\frac{44}{150}$; 3) $\frac{460}{960}$, $\frac{255}{960}$, $\frac{156}{960}$. **261.** 1) $\frac{24}{54}$, $\frac{9}{54}$, $\frac{44}{54}$; 3) $\frac{92}{96}$, $\frac{17}{96}$, $\frac{78}{96}$. **262.** 1) <; 3) <. **263.** 1) >; 3) <. **264.** A másodikon. **265.** Zöld. **267.** 1) <; 2) >; 3) >. **268.** 1) <; 2) <; 3) >. **269.** A második. **270.** $\frac{1001}{1002}$. **274.** Ugyanannyit készítenek. **275.** 1) 4; 2) 1, 4 vagy 7; 3) 0 vagy 5. **276.** 90 $cm^2$.

## 8. §

**281.** 1) $\frac{7}{10}$; 3) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{9}{14}$; 7) $\frac{10}{27}$. **282.** 1) $\frac{7}{12}$; 3) $1\frac{1}{9}$. **283.** 1) <; 3) <. **284.** 1) <; 2) =. **287.** $1\frac{4}{21}$. **288.** $\frac{67}{100}$. **289.** 1) 17; 3) 51. **290.** 1) 3; 3) 31. **291.** 1) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{1}{72}$; 5) $\frac{5}{16}$; 7) $\frac{1}{27}$. **292.** 1) $\frac{5}{21}$; 3) $\frac{11}{78}$. **293.** 1) >; 3) >. **294.** 1) =; 2) <. **297.** $\frac{36}{55}$. **298.** $1\frac{7}{130}$. **299.** $1\frac{11}{20}$. **300.** 1) $\frac{5}{7}$; 3) $1\frac{53}{65}$. **301.** 1) $\frac{11}{12}$; 2) $1\frac{59}{144}$. **302.** $\frac{4}{27}$ t. **303.** $2\frac{81}{100}$ m. **304.** $4\frac{4}{15}$ hrivnyával. **305.** A második, $\frac{11}{12}$ -del. **306.** 1) $1\frac{11}{12}$; 3) $1\frac{29}{48}$. **307.** 1) $2\frac{5}{14}$; 3) $1\frac{17}{24}$. **310.** 1) $1\frac{1}{90}$. **311.** 1) $1\frac{55}{72}$. **312.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{8}{105}$. **313.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{97}{225}$. **314.** 1) $2\frac{1}{28}$; 3) $3\frac{7}{22}$. **315.** 1) $2\frac{13}{42}$; 3) $3\frac{2}{55}$. **316.** 1) 25; 3) 7; 5) $\frac{11}{15}$. **317.** 1) 17; 3) $\frac{29}{40}$. **318.** $\frac{43}{78}$. **319.** $\frac{151}{192}$. **321.** $1\frac{71}{78}$. **322.** $1\frac{53}{132}$. **323.** $\frac{1}{64}$ -del.

**324.** 1) $\frac{a+1}{a}$; 2) $\frac{a+1}{a}$. **325.** 21 hrn 75 kop. és 15 hrn 75 kop. **327.** 1) 0,96; 3) 1,08. **328.** 35 cm.

**9. §**

**334.** 1) $\frac{10}{21}$; 3) $\frac{10}{63}$; 5) $\frac{2}{7}$; 7) $\frac{1}{11}$. **335.** 1) $\frac{9}{56}$; 3) $\frac{3}{5}$. **336.** 1) $\frac{3}{25}$; 3) $\frac{4}{7}$; 5) $\frac{7}{15}$; 7) $\frac{5}{14}$. **337.** 1) $\frac{7}{44}$; 3) $\frac{14}{17}$. **338.** 1) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{9}$; 5) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{4}$. **339.** 1) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{1}{5}$. **340.** 1) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{5}{21}$; 7) $\frac{1}{2}$. **341.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{2}{7}$. **343.** 1) 1; 2) 4; 3) 5. **344.** 1) 1; 2) 5; 3) 8. **345.** 1) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{6}$. **346.** 1) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{7}{30}$. **347.** 1) $\frac{4}{21}$; 3) $\frac{4}{15}$. **348.** 1) $\frac{3}{34}$; 3) $\frac{1}{30}$; 5) $\frac{1}{14}$. **349.** 1) $\frac{16}{29}$; 3) $\frac{1}{6}$. **350.** $\frac{1}{10}$. **351.** $\frac{5}{11}$. **352.** 1) 1; 3) $1\frac{2}{3}$; 5) $\frac{5}{43}$; 7) 0. **353.** 1) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{16}{41}$. **354.** 1) 2 kg; 3) 60 kg. **355.** $3\frac{2}{5}$ cm. **356.** $1\frac{3}{4}$ cm. **357.** 1) $1\frac{1}{2}$; 3) 10; 5) $1\frac{3}{4}$. **358.** 1) $\frac{5}{41}$; 3) $10\frac{5}{9}$. **359.** 1) $\frac{1}{5}$; 3) $\frac{3}{5}$; 5) $\frac{3}{5}$; 7) $1\frac{1}{5}$. **360.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{2}{3}$. **361.** 1) 2; 3) $1\frac{1}{2}$. **362.** 1) $1\frac{1}{2}$; 2) $1\frac{1}{4}$. **363.** 1. **364.** $\frac{4}{7}$. **365.** $2\frac{1}{3}$ cm². **366.** $1\frac{1}{3}$ cm². **368.** 1) 1; 3) 1; 5) 1; 7) 1; 9) 1; 11) 1. **369.** 1) 1; 3) 1. **370.** 1) 5; 3) 0,3. **371.** 1) 11; 3) 1,3. **372.** 1) $1\frac{3}{5}$; 3) $\frac{7}{32}$; 5) $\frac{10}{17}$; 7) $\frac{10}{59}$. **373.** 1) $3\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$. **374.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen; 4) nem. **377.** 1) 18; 3) $13\frac{2}{3}$. **378.** 1) 9 cm²; 3) $15\frac{3}{7}$ cm². **379.** 1) 9 cm²; 3) $16\frac{1}{2}$ cm². **380.** 1) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{9}{16}$. **381.** 1) $1\frac{1}{15}$; 2) 1. **382.** 1) $\frac{1}{42}$; 3) $5\frac{1}{2}$. **383.** 1) $\frac{11}{15}$; 2) 1,2. **384.** 1) 10; 2) $1\frac{1}{36}$. **385.** $6\frac{19}{51}$ cm, 1 cm². **386.** $11\frac{1}{5}$ m. **387.** $23\frac{19}{20}$ m. **389.** 160 hrn 10 kop. **390.** 130 oldalt. **391.** 41 km. **392.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $1\frac{8}{135}$. **393.** $\frac{11}{20}$. **395.** 33. **398.** 8 cm és 2 cm. **399.** — és $\frac{7}{6}$. **400.** $\frac{4}{5}$ és $\frac{5}{4}$. **401.** $28\frac{7}{20}$ m². **402.** Igen. **403.** 27 m. **404.** 1548 hrn. **405.** 180 g. **406.** 120 alma. **407.** 25 csokrot.

## 10. §

**413.** 1) 3; 3) 3; 5) $1\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{2}$; 9) –; 11) $1\frac{2}{3}$. **414.** 1) 2; 3) $1\frac{1}{2}$. **416.** 1) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{3}$. **417.** 1) 3; 3) $1\frac{1}{2}$. **418.** 1) 8; 2) 34. **419.** 1) $\frac{4}{7}$; 3) $\frac{3}{4}$. **420.** 1) $\frac{2}{11}$; 3) $\frac{4}{5}$. **421.** $\frac{5}{6}$. **422.** 1) $1\frac{1}{13}$; 3) $1\frac{5}{9}$; 5) $3\frac{1}{2}$; 7) $7\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$; 11) $4\frac{2}{5}$. **423.** 1) $1\frac{2}{7}$; 3) $2\frac{3}{4}$. **424.** 1) $1\frac{1}{3}$; 3) $3\frac{2}{5}$. **425.** 1) $3\frac{1}{2}$; 3) $8\frac{1}{3}$. **426.** $\frac{8}{43}$. **427.** 1) $13\frac{1}{3}$ kg; 3) $6\frac{2}{3}$ kg. **428.** 1) $\frac{4}{49}$; 3) 3. **429.** 1) $\frac{1}{3}$; 3) $4\frac{2}{3}$. **430.** 1) $\frac{6}{11}$; 3) $1\frac{3}{4}$. **431.** 1) $\frac{7}{16}$; 3) $2\frac{1}{2}$. **432.** 6. **433.** $\frac{5}{7}$ cm. **434.** 8 cm. **435.** $1\frac{1}{3}$ cm. **439.** 1) $2\frac{1}{2}$; 3) $\frac{5}{7}$. **440.** 1) 27 cm; 2) 49 cm. **441.** 1) 108°; 2) 80°. **442.** 1) 100°; 2) 162°. **443.** 1) 6; 3) $\frac{3}{4}$; 5) $9\frac{5}{11}$; 7) 12; 9) –. **444.** 1) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{11}{17}$. **445.** 1) $1\frac{5}{6}$; 3) $10\frac{1}{2}$; 5) 3. **446.** 1) $\frac{2}{3}$; 3) 1. **447.** $11\frac{1}{3}$ cm. **448.** $\frac{5}{12}$ cm². **449.** $10\frac{4}{5}$ cm, $5\frac{17}{20}$ cm². **450.** $41\frac{14}{15}$ m. **451.** 3 perc; 2,5 perc. **452.** 222 oldalt. **453.** 53 km. **454.** 1) 1; 2) $1\frac{5}{8}$; 3) $1\frac{1}{5}$. **455.** 1) $\frac{4}{11}$; 2) 18. **456.** A legkisebb 36-t, a középső – 27-t, a legidősebb – 9 diót. **457.** 6. **458.** 48. **459.** 74 libája. **460.** Igen. **461.** 5 tekercset. **462.** $\frac{5}{8}$ kg alma és $\frac{8}{9}$ kg kivi. **463.** 1) Nem; 2) nem; 3) nem. **464.** 16,8 km.

## 11. §

**470.** 1) 0,(3); 2) 0,6; 3) 0,625; 4) 0,(571428). **471.** 1) 0,1(6); 2) 0,15; 3) 0,875; 4) 0,(285714). **472.** 1) Igen; 2) igen. **473.** 1) 0,777777...; 3) 1,5333333...; 5) 4,171717...; 7) 0,298298.... **474.** 1) 0,666666...; 3) 4,327777.... **475.** 1) 0,4375; 3) 0,36; 5) 0,(8); 7) 0,2(6); 9) 0,(3); 11) 0,(1). **476.** 1) 0,8(3); 2) 0,8125; 3) 0,08(3); 4) 0,96. **477.** 1) 4; 3) 36; 5) 6. **478.** 1) 81; 3) 3. **479.** 4) 2,34 és 2,35. **480.** 1) 0,1 és 0,2. **481.** 4) 0,27 és 0,28. **482.** 2) 0,5 és 0,6. **483.** 3) 1,347 és 1,348. **484.** 1) >; 3) <. **485.** 1) <; 2) <. **486.** 1) 0,1; 2) 0,6; 3) 0,5; 4) 0,3. **487.** 1) 0,43; 2) 0,13; 3) 0,24; 4) 0,53. **488.** 1) 0,82; 2) 0,17; 3) 0,33; 4) 0,47. **489.** 13,54 cm. **490.** 14 cm. **491.** 1) 0,6 és 0,7. **492.** 3) 0,4 és 0,5. **493.** 1) $0,5 < 0,(5) < 0,6$; 3) $0,1 < 0,16 < 0,2$. **494.** 1) $0,8 < 0,(8) < 0,9$; 3) $0,6 < 0,64 < 0,7$. **502.** 1) 0,0(73); 2) 0,3589(74). **503.** 1) 0,121(95); 2) 1,15. **506.** 1) 5,1708(3). **507.** 1) 6,37; 2) 3,(461538). **508.** 1) a) 0,08; b) 0,09; 2) a) 0,71; b) 0,72. **509.** 1) a) 0,0; b) 0,1; 2) a) 6,4; b) 6,5. **510.** 1) $0,63 < \frac{12}{19} < 0,64$;

$\frac{12}{19} > 0{,}61$; 3) $0{,}82 < \frac{98}{119} < 0{,}83$; $\frac{98}{119} < 0{,}85$. **511.** 1) $0{,}47 < \frac{8}{17} < 0{,}48$; $\frac{8}{17} > 0{,}45$; 3) $0{,}62 < \frac{77}{123} < 0{,}63$; $\frac{77}{123} > 0{,}61$. **512.** $17\frac{1}{3} \approx 17{,}(3)$ cm; $17{,}33 < 17{,}(3) < 17{,}34$. **513.** $26\frac{14}{87} \approx 26{,}1609$ cm; $26{,}160 < 26{,}1609 < 26{,}161$. **514.** 0,40. **515.** 1) $\frac{130}{111}$; 2) 1,03(6). **519.** 1) 130; 2) 315; 3) 84. **520.** 20 cm.

## 3. fejezet

### 12. §

**527.** 1) 4; 2) 2; 3) $\frac{2}{35}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{4}{7}$; 6) $\frac{1}{4}$. **528.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 5; 3) $\frac{1}{25}$; 4) 0,2. **534.** 1) 2; 2) $\frac{1}{25}$; 3) 4 km/h; 4) 4 m/sec. **535.** 1) 6; 2) 5 m/sec. **536.** $1\frac{2}{7}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}$. **537.** $1\frac{1}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}$. **538.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{1}{45}$; 3) $\frac{10}{63}$; 4) $\frac{66}{133}$. **539.** 1) 30; 2) $3\frac{1}{3}$. **540.** 1) 100; 2) 125; 3) 75; 4) 200. **541.** A második brigádé. **542.** Egyforma. **543.** 1) 12,5; 2) $\frac{2}{3}$. **544.** 1) 4; 2) $\frac{3}{4}$. **545.** 75 m. **546.** $1\frac{2}{3}$. **547.** $1\frac{1}{4}$-szer. **550.** 102. **551.** 4 és 6,5.

### 13 §

**572.** 1) 15; 2) 24; 3) 6; 4) 15; 5) 0,5; 6) 3,5; 7) $11\frac{2}{3}$; 8) 32; 9) $3\frac{1}{3}$; 10) 6; 11) 11; 12) 0,24. **573.** 1) 21; 2) 1,5; 3) 2; 4) $8\frac{2}{3}$; 5) 16; 6) 0,2. **576.** 35. **577.** 6. **578.** 4. **579.** 1,44. **580.** 1) 6,4; 2) $1\frac{2}{7}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 6; 5) 7; 6) 0,5; 7) 3,75; 8) 7. **581.** 1) $1\frac{1}{2}$; 2) 3; 3) 16; 4) $1\frac{1}{3}$. **582.** 7. **583.** 1,68. **584.** 4. **585.** 1) 12; 2) $\frac{1}{2}$. **587.** 1) 8; 2) $2\frac{2}{3}$; 3) 1,5. **588.** 36 vagy 18.

### 14. §

**594.** 1) 72 hrn; 2) 10 alkatrész. **595.** 320 hrn. **596.** 56 hrn. **597.** 40 km. **598.** 7 óra. **599.** 3000 kg. **600.** 12 kg. **601.** 140 km. **602.** 48 km. **604.** 1) 60 km/h; 2) 4 munkás. **605.** 6 nap. **606.** 3 nap. **607.** 66 km/h. **608.** 125 km/h. **609.** 48 hrn. **610.** 24 hrn. **611.** 2920; 45. **612.** 50 hrn; 18. **613.** 2; 4. **614.** 180 l; 4,5 perc. **615.** 4 óra; 80 km/h. **616.** 1,5 óra; 3 km/h. **617.** 3 nap; 6. **618.** 4 nap; 12. **621.** 10 perc. **622.** 6 nap. **623.** 16 kört. **624.** 1 óra. **625.** 32 betű. **628.** 1) $\frac{4}{11}$; 2) 3.

### 15. §

**637.** 1) 6 és 18; 2) 9 és 15; 3) 3, 6 és 15; 4) 6, 6 és 12. **638.** 1) 10 és 20; 2) 6, 8 és 16. **641.** 4 cm, 14 cm. **642.** 9 cm, 15 cm. **643.** 200 hrn, 120 hrn. **644.** 5720 hrn, 6480 hrn. **645.** 90 g; 180 g. **646.** 150 g; 450 g. **649.** 1 km. **650.** 100 m. **651.** 1) 5 km; 2) 15 km; 3) 22,5 km; 4) 31 km. **652.** 1) 80 km; 2) 220 km. **653.** 1) 2,6 cm; 2) 0,65 cm. **654.** 8,8 cm. **655.** 3 cm, 8 cm. **656.** 12 cm, 21 cm. **657.** 20 cm, 12 cm, 16 cm. **658.** 16 cm, 12 cm, 8 cm. **659.** 248 km, 217 km. **660.** 104 m, 96 m. **661.** 42 oldal, 48 oldal. **662.** 30 alk., 40 alk. **663.** 240 kg. **664.** 1200 g. **665.** 72 cm, 48 cm. **666.** 6 m, 9 m. **669.** 0,5. **670.** 150, 100 és 60. **671.** 48, 160, 120. **677.** 1) 20; 2) 28; 3) 3250. **678.** 4 km/h.

### 16. §

**685.** 1) 4 cm és 12,56 cm; 2) 1 m és 3,14 m. **686.** 1) Kétszeresére növekszik; 2) négyszeresére csökken. **688.** 1) 8 cm, 25,12 cm, 50,24 $cm^2$; 2) 1 cm, 6,28 cm, 3,14 $cm^2$. **689.** 1) Kilencszeresére növekszik; 2) tizenhatszorosára csökken. **692.** 1) 72°; 2) 60°. **693.** 36°. **694.** 1) 113,04 $cm^2$; 2) 78,5 $cm^2$. **696.** 1) 18,84 cm; 2) 31,4 cm. **697.** 25,12 cm. **700.** 37,68 cm; 113,04 $cm^2$. **701.** 0,2 m. **702.** 625. **703.** 1) 80°, 120°, 160°; 2) 40°, 80°, 100°, 140°. **704.** 90°, 120°, 150°. **706.** Igen. **707.** Nem. **711.** 1) 286; 2) 30. **712.** 23.

### 17. §

**722.** *Útmutatás*: 50 — 150°, 30 — 90°, 40 — 120°. **723.** *Útmutatás*: 35 — 105°, 50 — 150°, 35 — 105°. **724.** *Útmutatás*: 40°, 200°, 120°. **725.** *Útmutatás*: 252° és 108°. **735.** *Útmutatás*: 90°, 54°, 144° és 72°. **736.** *Útmutatás*: 216°, 72°, 54° és 18°. **747.** 44 %. **748.** 1.

### 18. §

**755.** 10 cm. **756.** 8 cm. **764.** 2 cm, 5 cm. **765.** 16 cm, 24 cm. **767.** 7 cm, 3 cm. **768.** 10 cm, 4 cm. **770.** 7,5 cm. **771.** 7,5 cm. **772.** 7 cm. **773.** 8 cm, 10 cm. **774.** 6,35 ezer km; 39,88 ezer km. **778.** 1) 27,8; 2) 25,5. **779.** 21 hrn.

### 19. §

**789.** 1) 9; 2) 90; 3) 337,5; 4) 540. **790.** 1) 72; 2) 360. **791.** 700 kg. **792.** 432. **793.** 1) 200; 2) 400; 3) 80; 4) 10. **794.** 1) 50; 2) 200. **795.** 200 km. **796.** 125 hrn. **797.** 1) 25 %; 2) 20 %; 3) 10 %; 4) $3\frac{1}{3}$ %. **798.** 1) 50 %; 2) 12,5 %. **799.** 25 %. **800.** 25 %. **801.** 31,25 %. **802.** 37,5 %. **803.** 42. **804.** 60. **805.** 1) 25,6; 2) 24; 3) 16; 4) 8. **806.** 1) 42; 2) 15. **807.** 1) 66; 2) 75; 3) 90; 4) 132. **808.** 1) 175; 2) 312,5. **809.** 2,3 kg. **810.** 600 hrn. **811.** 9200 hrn. **812.** 30 hrn. **813.** 1) 70; 2) 200. **814.** 400. **815.** 1) 300; 2) 700. **816.** 40. **817.** 300 hrn. **818.** 5000 hrn. **819.** 3 kg, $33\frac{1}{3}$ % kg. **820.** 200, 315. **821.** 40 %. **822.** $33\frac{1}{3}$ %. **823.** 25 %. **824.** 25 %. **825.** 1) 120 %; 2) 110 %. **826.** 60 %. **827.** 1) 200 %; 2) 300 %. **828.** 75 %. **829.** 80 %. **830.** 88 %. **831.** 160 %. **832.** 125 %. **835.** 10

vörösfenyőt, 40 lucfenyőt. **836.** 100. **839.** 2000 kg, 1300 kg. **840.** 400 munkás, 90 munkás. **841.** 40 %. **842.** 48 %. **845.** 1,8 dm-rel nőtt. **846.** 0,32 m-rel nőtt. **847.** 13 cm-rel csökkent. **848.** 46 cm-rel csökkent. **849.** Igen. **850.** 86,25. **851.** 31,2. **852.** 63,24. **853.** 52,5. **854.** 25 %-kal. **855.** 9 %-kal csökkent. **858.** 15 %-kal. **860.** 36300 hrn. **861.** 180 km. **862.** 200 oldalas. **863.** 20 %-os. **864.** 25 %-kal. **865.** 70 %. **866.** 20 %, 30 %, 50 %. **868.** 18 %-kal olcsóbb lett. **869.** 6,25 %-kal kisebb lett. **870.** 1) 20 %; 2) 50 %. **872.** 82 %-kal. **873.** Négyszeresére nő. **874.** 14 %-t. **875.** 17 perc. **876.** 4 %-kal. **880.** 1) 30; 2) 6. **881.** 384 $cm^2$. **882.** 22,7 km-t.

### 20. §

**888.** $\frac{1}{2}$. **889.** $\frac{1}{2}$. **890.** Útmutatás: kétjegyű prímszámok – 21. 1) $\frac{1}{21}$; 2) $\frac{17}{21}$. **891.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) –. **892.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) –; 4) $\frac{1}{3}$. **893.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$. **894.** $\frac{7}{15}$ és $\frac{8}{15}$. **895.** $\frac{17}{32}$ és $\frac{15}{32}$. **896.** $\frac{3}{5}$ és $\frac{2}{5}$. **897.** $\frac{4}{9}$ és $\frac{5}{9}$. **898.** $\frac{1}{4}$. **899.** $\frac{1}{2}$. **900.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$. **901.** $\frac{1}{2}$. **902.** $\frac{1}{5}$. **903.** $\frac{1}{6}$. **904.** 0,97. **905.** $\frac{33}{34}$. **906.** $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$. **907.** $\frac{5}{36}$. **908.** $\frac{1}{6}$. **910.** $\frac{1}{8}$. **911.** 6. **914.** 1) 2; 2) 175. **915.** 32.

## 4. fejezet

### 21. §

**922.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen; 4) nem. **924.** 1) A bank és az iskola. **930.** 1) –3 °C; 2) + 11 °C; 3) –3 (km); 4) + 2,3 (km). **931.** 1) Igen; 3) nem; 4) nem. **933.** 1) –11, $-\frac{1}{2}$, –35,9; 2) 0,99, 102, $\frac{1}{5}$; 3) 0,99, 102, 0, $\frac{1}{5}$. **934.** –4°, –5°, –6°, –8°, –10°, –6°, –6°. **936.** 20 egység. Az $O$ pont jobbra esik az $A$ ponttól és balra a $B$ ponttól. **937.** 10 egység. Az $O$ pont jobbra esik a $B$ ponttól és balra az $A$ ponttól. **938.** 58 egység. **942.** 1) 6; 2) 4. **943.** 1) 5; 2) 10.

### 22. §

**951.** 1) $A$ (–4); 2) $B$ (6). **952.** 1) $A$ (–2,5) és $B$ (2,5); 2) $A$ (–7) és $B$ (7). **953.** 1) $A$ (–5) és $B$ (5); 2) $A$ (–10) és $B$ (10). **955.** $A$ (2), $B$ (5), $C$ (–2), $D$ (–4), $E$ (–5). **956.** $A$ (–1), $B$ (–3), $C$ (–5), $M$ (4), $E$ (2). **957.** $B$ (4), $C$ (6), $D$ (–1), $E$ (–3), $F$ (–4). **958.** $B$ (3), $C$ (4), $D$ (–4), $M$ (5), $N$ (–5). **961.** 1) $A$; 2) $C$; 3) $N$. **962.** 1) $N$; 2) $B$; 3) $K$. **967.** $A\left(\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{2}{3}\right)$, $D\left(1\frac{1}{3}\right)$, $E$ (1,5), $M\left(-\frac{1}{3}\right)$, $F\left(-1\frac{1}{6}\right)$, $L\left(-\frac{5}{6}\right)$, $N\left(-\frac{2}{3}\right)$. **968.** $B$ (0,1), $C$ (0,4), $D$ (1,5), $E$ (2), $K$ (–0,4), $M$ (–0,7),

$L$ (–0,9), $F$ (–1,1), $N$ (–1,2). **969.** $A$ (0,5), $B$ (1,5), $C$ (–0,5), $D$ (–1,5), $E$ (–2,5). **970.** 1) $M$( 8), $N$ (4); 2) $M$ (–5), $N$ (–13). **971.** 1) $A$ (–8,5), $B$ (–5,5); 2) $A$ (6,2), $B$ (–3,8). **973.** 1) $M$ (15); 3) $M$ (3,5); 4) $M$ (–2). **974.** 2) $M$ (0); 3) $M$ (–7,5). **975.** $M$ (–7), $N$ (5), $B$ (1), $C$ (–11). **976.** $M$ (5,6), $N$ (1,6), $B$ (3), $C$ (–1). **977.** $C$ (1,8). **981.** 1) 85; 2) 484. **982.** 221,5 kg-t vásároltak, 147,75 kg-t adtak el, 73,75 kg maradt.

## 23. §

**989.** 1) 2 vagy –2; 2) 4 vagy –4; 3) 3 vagy –3. **990.** 1) 5 vagy –5; 2) 8 vagy –8. **993.** 2) 12; 3) $\frac{4}{9}$; 4) 3,8. **994.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **995.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **998.** 1) –5,6; 3) 0; 4) 5. **999.** 1) –41; 4) 8,09. **1000.** 1) –9; 2) 20; 4) 0. **1001.** 1) –9,5; 2) 6; 4) –38. **1002.** 1) –34; 2) –5; 3) 65; 4) 8. **1003.** 1) –28; 2) –2; 3) 86; 4) 5. **1005.** 1) 7; 2) 8; 4) 0; 5) 1; 8) 250. **1006.** 1) 12; 3) 0; 5) 8. **1007.** 1) 3,6; 1,8; 3) 56; 528. **1008.** 2) 36; 288; 3) 56; 528. **1009.** 1) 18 és –18; 2) 5,4 és –5,4. **1010.** 1) –24; 2) –0,4; 3) –14,25. **1011.** 1) –15; 15; 2) 100; –100; 6) 0. **1012.** 1) 1; –1; 2) 125; –125; 3) 7,8; –7,8. **1013.** 1) a) 8,2, b) 8,2. **1014.** 1) –53; 3) –71. **1015.** 1) –2; 2) 0; 3) –30. **1019.** 1) 2; 2) 10; 3) 10. **1023.** 1) 36; 3) –96; 4) –127. **1024.** 10,004. **1027.** 1) Igen; 2) igen. **1029.** 1) –100;–100; 2) –13; 13; 5) nincs gyöke; 6) –12; 12. **1030.** 1) –4,2; 4,2; 2) nincs gyöke; 3) 0; 4) –32; 32. **1031.** 1) 20. **1032.** 1) 5; 2) 2,9. **1033.** $B$ 11-szer. **1034.** $a = 4$. **1042.** 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22. **1043.** 16. **1044.** 2) 618 kg 908 g; 3) 6 nap 1 óra 20 perc.

## 24. §

**1048.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen. **1051.** 1) 534; 2) 534; 0. **1053.** 1) 23 egész szám, 11 természetes szám. **1054.** 1) 15 egész számot, 15 természetes számot; 2) 9 egész számot, 0 természetes számot. **1055.** 1) 0 számot; 2) 7 számot. **1057.** 1; 2; 3; 4; –1; –2; –3; –4. **1058.** 1) –1; –2; 0; 1; 2; 3) –1; 0; 1. **1061.** 1) –3; $-\frac{35}{7}$. **1062.** 1) –13; –14; 13; 14; 5) –59; 59. **1063.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **1065.** 1; –1. **1067.** $x = 1$, $y = 5$; $x = 2$, $y = 4$; $x = 3$, $y = 3$; $x = 4$, $y = 2$; $x = 5$, $y = 1$. **1069.** Létezhet, 28 tanulóval. **1070.** Nem.

## 25. §

**1080.** 1) $-2 < 0$; 2) $2{,}5 > 0$. **1083.** 1) $2 > -4$; 2) $-45 < 6$. **1084.** 1) $77 > -99$; 2) $-0{,}004 < 0{,}00003$; 3) $-\frac{5}{2} < \frac{2}{5}$. **1085.** 1) $4{,}4 > 0$; 2) $-3{,}1 < 0$. **1086.** 1) $6{,}04 > 0$; 2) $-0{,}0001 < 0$; 3) $-1\frac{5}{7} < 0$. **1087.** 1) $-72 < -32$; 2) $-4{,}2 > -4{,}201$; 3) $-1{,}2 = -\frac{6}{5}$; 4) $-0{,}25 = -\frac{1}{4}$. **1088.** 1) $-34{,}2 < -9{,}99$; 2) $-3{,}5 = -\frac{7}{2}$; 3) $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{9}{2} < -\frac{2}{9}$. **1089.** 1) $5{,}6 > 5{,}01$; 2) $-5{,}6 < 5{,}01$; 4) $-5{,}6 < -5{,}01$.

**1090.** 1) 0; 0,08; –6,7; 9; –10; –12,5; –31,4; 45; 2) –31,4; –12,5; –10; –6,7; 0; 0,08; 9; 45. **1092.** 1) 2; 1; 2) 1; 3) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. **1093.** 1) 0; 3) 0; 1; –1. **1097.** 1) –28; –27; –26; –25; –24; –23; –22; 2) 0; 1. **1098.** 1) –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4. **1099.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 0; –1; –2; –3; –4; –5; –6; 2) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 0; –1; –2; –3; –4; –5; –6; –7. **1100.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **1101.** 1) 2; 3; 4; 5; 2) –2; –3; –4; –5; 2; 3; 4; 5. **1105.** 3,01; 2,4; 0; –2,7. **1107.** 1) –73. **1111.** 1) Elegendő; 2) nem elegendő. **1113.** 1) 1; 2) $\frac{3}{4}$.

**1114.** 1) 28,6.

## 26. §

**1122.** 1) –6; 2) –4. **1124.** 1) –4; 2) –98; 3) –16; 4) –80; 5) 4,6; 6) –3,5; 7) 6,59; 8) –1,94; 9) –0,12; 10) –50,8; 11) 6,75; 12) 3,22. **1125.** 1) 4; 2) 98; 3) 16; 5) 80,09; 6) –3,1. **1127.** 1) –50; 2) –304; 3) –23; 4) –91; 5) –13,15; 6) –75,79; 7) –0,22; 8) –16,4; 9) –0,9. **1128.** 3) –13,231; 4) –4,4; 5) –8; 6) –100. **1129.** 1) –6; 2) 4; 3) –4; 4) 6; 5) 11; 6) –11; 7) –5,1; 8) 5,1. **1130.** 1) 50,2; 2) –50,2; 3) –39,8; 4) 39,8. **1131.** 1) –18; 2) –1. **1132.** 1) –26; 2) –4. **1133.** 1) –20; 2) 20. **1134.** 1) –40; 2) –53. **1135.** 1) 23; 2) 12; 4) –0,1. **1136.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **1137.** 1) 0; 2) 0. **1138.** 1) 5,2; 2) $2\frac{2}{3}$.

**1139.** 2) 14,5. **1143.** 1) –4,1; 3) 7,79. **1144.** 1) 3,6; 2) 2,4; 3) 0,4. **1145.** 1) $a$; 2) $-b$. **1146.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **1147.** 1) Igen; 2) nem; 3) igen. **1150.** 5 tanulóval bővült a létszám. **1153.** $C$ (–1). **1154.** $C$( 9,7). **1155.** $C$ (–7,5). **1156.** 1) –7,7; 2) $-1\frac{1}{11}$; 7) 2. **1157.** 1) $\frac{1}{3}$; 3) –10,6.

**1158.** 1) –8,7; 2) 0,4; 3) 3,5. **1159.** 1) 14; –10; 2) –13; 23. **1161.** 9900. **1162.** –90. **1163.** 1) $2a - 5n + 23m - 33$; 2) $c + 2d$. **1166.** 1) –3; 2) –21. **1168.** 0. **1174.** 7 cm-t emelkedett. **1175.** 1) 67 km 4 m; 2) 56 kg 558 g; 3) 72 t 884 kg 812 g; 4) 9 óra 21 perc 50 mp. **1176.** 3) 186,14. **1177.** 10 g.

## 27. §

**1184.** 1) 5; 2) 0. **1185.** 1) 20; 2) –30. **1186.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen. **1187.** 1) –25; 2) 64; 3) 25; 4)0; 5) –3,9; 6) –4,9; 7) –1,55; 8) –4,54; 9) –0,5. **1188.** 1) 58; 2) –18; 3) –37,01. **1190.** 1) –76; 2) –79; 3) –35; 4) –182; 5) –7,23; 6) –8,04. **1191.** 1) –77; 2) –872. **1192.** 1) 5; 2) 6. **1193.** 1) 62; 2) 0; 3) –800; 4) 100; 5) –320; 6) 252; 9) –4,5; 12) –292. **1194.** 1) –29; 2) 410; 3) 20,7. **1195.** 3) 12. **1196.** 1) 17; 2) –85; 3) 85; 4) –17; 5) –0,6; 6) 0,6; 7) –5,2; 8) 5,2. **1197.** 1) 2,2; 2) –2,2; 3) –9,8; 4) 9,8. **1200.** 1) 42; 2) –690. **1202.** 1) –37; 2) 0; 3) 12. **1203.** 1) –28; 2) –18. **1205.** 1) 6,2; 3) 22,45. **1206.** 1) 1,29; 2) 0,25; 3) 1. **1208.** 1) –27739; 2) –7832. **1209.** 3) 0; 4) 0,9. **1210.** 1) –5; 2) $-\frac{5}{24}$.

**1211.** 1) 4503; 2) 695. **1212.** 6) 1,4; 7) 4,5; 8) 9. **1213.** 1) –6; 2) –30; 3) –24. **1215.** 1) 8; 2) 17; 3) 14,5; 4) 4,4; 5) 30. **1216.** 1) –4; –6; 2) –1; –7. **1217.** 1) 0,01;

2) –0,8. **1218.** 1) –2,8; 2) 58. **1219.** 1) –0,58; 2) 19,2; 3) –1,25. **1220.** 10098. **1221.** –1098. **1222.** –85. **1225.** –0,99. **1232.** 1) 7800; 2) 1360. **1233.** 1) 4,195; 3) 4,5. **1234.** 1) $\frac{2}{7}$; 3) 0. **1235.** 17,1.

### 28. §

**1242.** 1) 90; 2) –35. **1243.** 1) 12; 2) –30. **1244.** 1) 18; 2) –36; 3) –2,5. **1245.** 1) –40; 3) –2,1; 5) –3; 6) –0,5. **1246.** 1) –1; 2) –2,8; 3) –146; 4) –23. **1248.** 1) 100; 2) 1200; 5) 3. **1249.** 1) 88; 3) 0,63. **1251.** 1) –40; 2) –40; 3) 40; 4) 40. **1252.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **1255.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **1256.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **1257.** 1) 56; 3) –56; 5) 0,92; 7) 0,8. **1261.** 1) –31; 2) 0,24; 4) 12; 7) –30; 8) 3,6. **1262.** 2) 0,1. **1264.** 1) –19; 2) –10,8; 3) –7; 6) –12. **1265.** 1) –0,1; 3) –269. **1266.** 1) Negatív; 2) pozitív. **1267.** 1) Pozitív; 2) negatív. **1269.** 1) –4,8; 2) –24; 3) 3. **1270.** 1) –34; 2) –27. **1271.** 1) –360; 2) –3. **1272.** 1) –352; 2) –6,9; 4) –6. **1273.** 1) 256; 2) –232. **1274.** A számok összege. **1275.** A számok összege. **1276.** 1) 1; 2) –64; 3) 1; 7) –4,65. **1278.** 40320. **1279.** 0. **1280.** 1) 15,12-dal; 3) 18,82-dal. **1281.** 1) 15-tel; 2) 16-tal; 3) 19-cel. **1282.** 1) 16; 2) 23; 3) –19. **1286.** 1) 4; 2) –7,8; 3) 0; 4) 5. **1287.** 1) 41; 2) –0,25; 3) 0. **1290.** Pozitív. **1291.** 1) Pozitív; 2) negatív. **1292.** 2) –8,55; 3) –1,88. **1293.** 1) –8; $6m$; 2) $-a$; –60. **1294.** 1) 0; 3,7; –9,2; 2) 23; –12,7; 3) –0,3; 0,3; 5; 16,5; 4) 0; 6,7. **1295.** 1) $b > 0$; 2) $b > 0$; 3) $b < 0$. **1301.** 30,1 hrn; **1302.** 1) 2; 2) 18. **1305.** 57.

### 29. §

**1313.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **1315.** 1) –7; 2) –11; 3) –0,25; 5) –34; 6) –7; 7) –24; 8) –3; 9) –0,5; 10) –0,04; 11) –0,7; 12) –310; 13) –0,41; 14) –1,3; 15) –1000. **1316.** 1) –49; 2) –7; 3) –0,3; 5) –90; 6) –45. **1317.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem. **1318.** 2) 7; 3) 13; 5) 51; 6) 2,5; 7) 9; 8) 2,1; 9) 10,1. **1319.** 1) 31; 2) 0,5; 3) 33,7. **1323.** 1) –6; 2) –3,67; 3) 0; 4) 0; 5) –51. **1324.** 1) –13; 2) 56; 3) –187; 4) 0. **1325.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **1326.** 1) 0; 2) 0; 3) –16. **1327.** 1) –1; 2) –1; 3) –1. **1329.** 1) 1,01; 2) 1,01; 3) –1,01; 4) –1,01. **1330.** 1) 42; 2) 42; 3) –42; 4) –42. **1331.** 1) –4,5; 2) 5,6; 3) 2,2. **1332.** 1) 1,6; 2) –0,31; 3) 115,4. **1336.** 1) 0; 2) –0,3; 3) 0,5; 4) –40. **1337.** 1) 0; 3) –42. **1338.** 1) $-\frac{1}{12}$; 3) –11; 5) –64. **1339.** 1) –152; 2) 481. **1340.** 1) –31; 2) 39. **1341.** 1) Nem; 2) nem. **1343.** 5) 0,625; 6) 98. **1344.** 1) 0,7; 2) 6. **1345.** 1) 56. **1349.** 1) 4; 2) 1,1; 4) 0; 5) 5. **1350.** 1) 36; 2) –0,2; 3) 0. **1355.** –11,5. **1356.** 362,5. **1357.** 0,4. **1358.** 0,23. **1359.** –0,5. **1360.** –270. **1362.** 1) –1; 2) $\frac{17}{18}$. **1363.** –24. **1364.** 0. **1365.** –1. **1366.** 1) 0; 2) 23; –12,7; 3) 4; 3; 4) 0; –0,4. **1367.** 90 km/h. **1369.** 1) 24; 2) 0,035. **1373.** 1) 6; 2) 3.

## 5. fejezet

### 30. §

**1378.** 1) $-24ab$; 2) $-6cd$; 3) $30mn$; 4) $xyz$; 5) $-2ab$; 6) $-2xyz$. **1379.** 1) $-30ab$; 2) $80cd$; 3) $-2nm$; 4) $-\frac{1}{2}xy$. **1380.** 1) $5a$; 2) $4b + 4$; 3) $-10c + 7$; 4) $-2$; 5) $-2a - 7b$; 6) $10n - 15m$. **1381.** 1) $2a$; 2) $5b + 4$; 3) 4; 4) $-20n + 5m$. **1386.** 1) 7,5; 2) 22,4; 3) 2; 4) 2,8. **1387.** 1) $-11{,}6$; 2) $-23$. **1390.** 1) $6ab$; 2) $-cd$; 3) $-4{,}8nm$; 4) $0{,}5xy$; 5) $-2ab$; 6) $1{,}5xyz$. **1391.** 1) $-9ab$; 2) $cd$; 3) $20nm$; 4) $-0{,}6xyz$. **1392.** 1) $-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$; 2) $c - 1\frac{3}{4}d$; 3) $-3m + 2{,}6n$; 4) $-15{,}2p - 5\frac{1}{14}k$; 5) $3x - 1{,}8$; 6) 20,8. **1393.** 1) $-2a - b$; 2) $1{,}4c - 2{,}5d$; 3) $-3m - 1{,}4n$; 4) $-7p - 4\frac{14}{15}$. **1394.** 1) $-3{,}6a + 26{,}2$; 2) $3y - 110{,}4$; 3) $-0{,}1c + 0{,}9d$; 4) $14{,}5m - 19{,}4n$. **1395.** 1) $-1{,}1a + 9{,}8$; 2) $12x - 5{,}5y$. **1396.** 1) 29; 2) $-0{,}2$; 3) $-69$; 4) $-3{,}4$. **1397.** 1) 4; 2) $-84{,}5$. **1403.** 1) 4; 2; 4 és 2; 2) 6; 3; 6 és 3. **1406.** 1) 12; 2) $-2{,}7$. **1407.** 24 hrn.

### 31. §

**1415.** 1) 2; 2) $-10$; 3) 4; 4) $-4$; 5) 4; 6) $-7$; 7) $-8$; 8) 2; 9) 6; 10) $-4$; 11) 7; 12) 0. **1416.** 1) 6; 2) 2; 3) 2; 4) 2; 5) 3; 6) $-3$. **1417.** 1) 1; 2) 60; 3) $\frac{1}{15}$; 4) 18; 5) $-28$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) 15; 8) $-12$. **1418.** 1) $-5$; 2) 20; 3) 12; 4) 11. **1421.** 1) 5; 2) 4; 3) 24; 4) 1; 5) 4,6; 6) 1; 7) 0; 8) $-1$; 9) $-2$; 10) 1,3; 11) $-1\frac{2}{3}$; 12) $-2$. **1422.** 1) $-4$; 2) 1; 3) $-2$; 4) $-4{,}6$; 5) $-2$; 6) 6. **1423.** 1) $-0{,}37$; 2) $9\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) 0,5; 5) 25; 6) 0,4; 7) 1; 8) $-9$. **1424.** 1) $-1$; 2) $-\frac{4}{7}$; 3) $-2\frac{2}{7}$; 4) 2,4. **1425.** 1) 8; 2) 14; 3) 12; 4) 15. **1426.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $-12$. **1427.** 1) $-2$; 2) $-3\frac{1}{3}$; 3) 3; 4) 2. **1428.** 1) $-9$; 2) 0,5. **1429.** 1) 2 és 3; 2) 12 és 6. **1430.** 1) 3; 2) $-1$; 3) 11,5; 4) 1. **1434.** 1) $-6{,}4$; 2) 160. **1435.** 195 m.

### 32. §

**1439.** 1) 36 és 12; 2) 27 és 9; 3) 24 és 8. **1440.** 1) 16 és 4; 2) 28 és 7. **1441.** 10 és 12,2. **1442.** 15 és 18,5. **1443.** 2,5 hrn, 3 hrn. **1444.** 19 hrn, 30 hrn. **1445.** 9 óra alatt. **1446.** 20 nap alatt. **1447.** 60 km/h, 70 km/h. **1448.** 70 km/h, 75 km/h. **1449.** 80 km/h, 70 km/h, 675 km. **1450.** 50 km/h, 60 km/h.

**1451.** 2 kg, 4 kg. **1452.** 7 és 8. **1453.** 40 km/h, 80 km/h. **1454.** 12 km/h, 4 km/h. **1455.** 30 és 9. **1456.** 12 és 18. **1457.** 30. **1458.** 25. **1459.** 100 km. **1460.** 240 km. **1461.** 90. **1462.** 30, 24 és 27. **1463.** 60. **1464.** 63. **1465.** 60. **1466.** 36. **1467.** $\frac{28}{49}$. **1468.** $\frac{15}{24}$. **1469.** 15 km. **1470.** 480 km. **1471.** 2 óra. **1472.** 15 és 30. **1473.** 80, 40, 24 és 36. **1474.** 30 és 10. **1475.** 36 hrn, 48 hrn. **1477.** $\frac{2}{3}$ és $\frac{1}{3}$. **1478.** 36. **1479.** 1,6; 1,2 és 2,1. **1480.** 4,5 és 3. **1484.** 1.

## 33. §

**1505.** 30°. **1506.** 65°. **1514.** Téglalap. **1519.** 1) 0,2; 2) –3,53. **1520.** 10 cm, 20 cm.

## 34. §

**1529.** 1) (2; 0); 2) (–2; 0). **1530.** 1) (0; 2); 2) (0; –2). **1531.** 1) $A$, $E$, $K$; 2) $F$, $C$, $K$. **1536.** $A$ (3; 3), $B$ (6; 5), $C$ (5; 0), $F$( –2; –3), $N$ (0; –7). **1537.** $A$ (5; 0), $B$ (0; –4), $F$ (3; 3), $E$ (–2; 1). **1541.** 1) (0; 2), (0; –2), (2; 0), (–2; 0); 2) (0; 7), (0; –7), (7; 0), (–7; 0). **1542.**1) (0; 3), (0; –3), (3; 0), (–3; 0); 2) (0; 2,5), (0; –2,5), (2,5; 0), (–2,5; 0). **1543.** 1) $B$ (3; –4); 2) $B$ (–3; 4); 3) $B$ (–3; –4); 4) $B$ (3; 4). **1544.** 1) $B$ (4; 3); 2) $B$ (6; 8). **1545.** 1) (–9; 0), (–3; 0). **1546.** 1) (0; 3,5), (0; 6,5); 2) (0; 15), (0; –5). **1548.** $C$ (2; 3), 6 négyzetegység, 10 egys. **1549.** $C$ (2; 2), 4 négyzetegység, 8 egys. **1551.** 1) 25 négyzetegység; 2) 9 négyzetegység. **1552.** 8 egys., 4 négyzetegység. A feladatnak két megoldása van. **1553.** 1) I vagy II; 2) II. **1561.** 1) –13,65; 2) 28,86. **1562.** 1) 149,73; 2) –109,48; 3) 40,25.

## 35. §

**1566.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **1567.** Nem. **1568.** 1) 2 m., 5 m., 12 m.; 2) 57 cm, 66 cm, 71 cm. **1569.** 2) 4-szer; 3) 8 órakor, 1 órát; 4) 20 km, 20 km; 5) 21 órakor. **1572.** 1) 4 cm, 2 cm; 2) 1 cm, 0,5 cm; 3) 1 cm-rel. **1573.** 1) Vasárnap; 2) 4 °C; 3) szerdától péntekig; 4) 3 napon; 7) szombaton. **1574.** 6 °C. **1575.** 1) Szabolcs; 4) 17 órakor; 7) 8 km. **1582.** 1) –6; 2) 10. **1583.** 1) –10,6; 2) 5,25.

# TÁRGYMUTATÓ

**A** természetes szám osztója 5
Alaptulajdonság 88
— aránye 88
— törté 32
— aránypáré 94
Arány 87
— kölcsönösen fordított 88
— értéke 87
— tagjai 87
Arányosság 102
— egyenes arányosság 102
Aránypár 93
Aránypár ismeretlen tagjának meghatározása 96
— zárójel felbontása 235

**D**erékszögű koordináta-rendszer 263
Diagram 123
— kör 123
— oszlop 123

**E**gyenesek 257
— párhuzamos egyenesek 257
— merőleges egyenesek 255
Egyenlet 241
— gyöke 241
— megoldása 241
Egynemű tagok 235
Együttható 235
— kifejezésé 235
— arányossági 109
Esemény 148
— véletlen 148
— biztos 149
— lehetetlen 149
Esemény valószínűsége 149
Események 149
— egymást kizáróak 149
— egyenlő esélyűek 149

**F**ordított mennyiségek 103
Forgástestek 132

**G**ömb 131
Gömbfelület 132

**H**almaz 180
— egész számok halmaza 180
— racionális számok halmaza 181
— természetes számok halmaza 180

**K**ét szám legkisebb közös többszöröse 27
Két szám legnagyobb közös osztója 22
Kivonás 49
— különböző nevezőjű számok kivonása 49
— kivonás helyettesítése összeadással 205
Kísérlet 148
Koordináta 263
Koordináta-negyedek 265
Kölcsönösen fordított aránypár 95
— az aránypár kültagjai 93
— az aránypár beltagjai 93
Körcikk 119
Körlap 118
Körvonal 116
— átmérője 116
— sugara 116
— középpontja 116
Körvonal átmérőjének képlete 117
— hosszának képlete 117
— a körlap területének képlete 118
Közös nevező 40
— legkisebb közös nevező 41
Kúp 131

**L**egkisebb közös többszörös 26
Legnagyobb közös osztó 22

**M**éretarány 110
Mozgásgrafikon 272

**O**sztás 109
— arányos osztás 109
— két negatív szám osztása 225
— közönséges törtek osztása 68
— különböző előjelű számok osztása 224
Oszthatóság 2-vel 10
— 3-mal 16
— 5-tel 10
— 9-cel 15
— 10-zel 10

**Ö**sszeadás 48
— különböző nevezőjű számok összeadása 48
— azonos előjelű számok összeadása 195
— különböző előjelű számok összeadása 194

**P**ont abszcisszája 264
— pont ordinátája 264
— pont koordinátája a számegyenesen 264
— pont koordinátája a koordináta-síkon 264
Pótszorzó 40

**S**zám abszolút értéke 171
Szám meghatározása törtrésze alapján 69
Szám prímtényezős felbontása 20
Számegyenes 163
Számlálás kezdőpontja a számegyenesen 163
Számok 164
— negatív számok 164
— reciprok értékű számok 57
— relatív prímek 22
— pozitív számok 163
— ellentett számok 171
— páratlan számok 9
— páros számok 9
— prímszámok 6
— összetett számok 6
Szorzás 214
— két negatív szám szorzása 214
— közönséges törtek szorzása 56
— különböző előjelű számok szorzása 213
— racionális számok szorzása 188

**T**engely 263
— abszcissza 263
— ordináta 263
Természetes szám többszöröse 5
Tizedes számok kerekítése 78
— felfelé 78
— lefelé 78
Tört 33
— közönséges egyszerűsíthetetlen 33
— véges 77
— végtelen szakaszos 77
— törtek közös nevezőre hozása 39, 40
— törtek bővítése 40
— szám törtrészének meghatározása 58
— törtek egyszerűsítése 32, 33, 41
Tulajdonság 172
— abszolút értéké 172
— egyenlőtlenségeké 242, 243
— egyenleté 244

**V**életlen esemény 148
— sztochasztikus esemény 148

**Z**árójelek felbontása 235

# TARTALOM

Kedves tanulók!... 3

**1. fejezet. Természetes számok oszthatósága** ... 4
1. § A természetes számok osztói és többszörösei. Prímszámok (törzsszámok) ... 5
2. § Oszthatóság 2-vel, 10-zel és 5-tel ... 9
3. § Oszthatóság 3-mal és 9-cel ... 15
4. § Számok szorzatra bontása. Legnagyobb közös osztó ... 20
5. § Legkisebb közös többszörös ... 26

**2. fejezet. Közönséges törtek és a velük végzett műveletek** ... 30
6. § A tört alaptulajdonsága. A törtek egyszerűsítése, bővítése ... 31
7. § Törtek közös nevezőre hozása. Törtek összehasonlítása ... 39
8. § Törtek összeadása és kivonása ... 47
9. § Törtek szorzása. A törtrész meghatározása ... 55
10. § Törtek szorzása. A szám meghatározása törtrésze alapján ... 67
11. § Közönséges törtek tizedes tört alakja. Közönséges törtek tizedes tört alakjának közelítő értéke ... 77

**3. fejezet. Arányok és aránypárok** ... 86
12. § Az arány és tulajdonságai ... 87
13. § Aránypár és tulajdonságai ... 93
14. § Egyenes és fordított arányosság ... 101
15. § Egy szám adott arányban való felosztása. Méretarány ... 109
16. § Körvonal, körlap, körcikk ... 116
17. § Diagramok ... 123
18. § Henger, kúp és gömb ... 130
19. § Százalékszámítás ... 136
20. § Valószínűség. Véletlen események ... 147

**4. fejezet. Racionális számok.**
**Racionális számokkal végzett műveletek** .. 156
21. § Pozitív és negatív számok. A nulla. ..... 157
22. § A számegyenes ..... 163
23. § A szám abszolút értéke ..... 170
24. § Egész számok. Racionális számok ..... 180
25. § Racionális számok összehasonlítása..... 186
26. § Racionális számok összeadása ..... 193
27. § Racionális számok kivonása ..... 204
28. § Racionális számok szorzása ..... 212
29. § Racionális számok osztása ..... 223

**5. fejezet. Kifejezések és egyenletek** ..... 234
30. § Kifejezések és azok egyszerűsítése..... 235
31. § Egyenletek. A mérlegelv ..... 241
32. § Szöveges feladatok megoldása egyenlettel.... 248
33. § Merőleges és párhuzamos egyenesek ..... 255
34. § A koordináta-sík..... 262
35. § Mennyiségek összefüggését ábrázoló grafikonok..... 271

**Tesztfeladatok a fejezetekhez** ..... 280

**Feleletek** ..... 287

**Tárgymutató** ..... 300

## Adatok a tankönyv állapotáról

| № | A tanuló neve | Tanév | A tankönyv állapota | | Értékelés |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | évkezdéskor | év végén | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |

Переклад видання:

Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. Математика : підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К. : Видавничий дім „Освіта", 2014.

*Навчальне видання*

ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна, БОГАТИРЬОВА Ірина Миколаївна,
КОЛОМІЄЦЬ Оксана Миколаївна, СЕРДЮК Зоя Олексіївна

**МАТЕМАТИКА**

**Підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

Переклад з української: *Золтан Кулін*
Угорською мовою

Редактор *Л. Сіладі*
Технічний редактор *С. М. Максимець*
Коректор *Е. Сабов*
Верстка *І. В. Стусика*
Малюнки *О. І. Дядика*
На обкладинці використано фото *Jacek Chabraszewski*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 19,0 + 0,25 форзац.
Обл.-вид. арк. 18,0 + 0,44 форзац. Наклад 1688 прим. Зам. № 969

ВИДАВЕЦЬ І ВИГОТОВЛЮВАЧ:
**Видавничий дім „БУКРЕК"**
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкта видавничої справи
серія ЧЦ № 1 від 10.07.2000 р.
Адреса видавництва: 58000, м. Чернівці, вул. Радищева, 10
**www.bukrek.net**

## OSZTHATÓSÁG

| A szám osztható | A szám jellegzetessége | Példa |
|---|---|---|
| 2-vel | az utolsó számjegy páros | 132; 12346 |
| 3-mal | a számjegyek összege osztható 3-mal | 123; 12345 |
| 5-tel | az utolsó számjegy 0 vagy 5 | 130; 12345 |
| 9-cel | a számjegyek összege osztható 9-cel | 126; 12645 |
| 10-zel | az utolsó számjegy 0 | 130; 12340 |

## A TÖRT ALAPTULAJDONSÁGA

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}, \text{ ha } c\neq 0, \quad \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}, \text{ ha } c\neq 0.$$

### Műveletek közönséges törtekkel

| Művelet | Példa |
|---|---|
| Összeadás | $\overset{5}{\frac{5}{6}}+\overset{2}{\frac{13}{15}}=\frac{25+26}{30}=\frac{51}{30}=\frac{17}{10}=1\frac{7}{10}$ |
| Kivonás | $\overset{2}{\frac{13}{15}}-\overset{5}{\frac{5}{6}}=\frac{26-25}{30}=\frac{1}{30}$ |
| Szorzás | $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{8\cdot 7}=\frac{15}{56}$ |
| Osztás | $\frac{5}{6}:\frac{5}{12}=\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{6}}\cdot\cancel{5}}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 1}=\frac{2}{1}=2$ |

## AZ ÖSSZEADÁS ÉS A SZORZÁS TÖRVÉNYEI

| | |
|---|---|
| **Az összeadás felcserélhetőségi törvénye** $a+b=b+a$ | **A szorzás felcserélhetőségi törvénye** $a\cdot b=b\cdot a$ |
| **Az összeadás csoportosítási törvénye** $(a+b)+c=a+(b+c)$ | **A szorzás csoportosítási törvénye** $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ |
| **A szorzás széttagolási törvénye** $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ | |

## AZ ARÁNYPÁR ÉS TULAJDONSÁGAI

| Az aránypár megadása | Az aránypár tagjai | Alaptulajdonság |
|---|---|---|
| $a : b = c : d$<br>vagy<br>$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ | Beltag<br>$a : b = c : d$<br>Kültag | ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,<br>akkor $ad = bc$ |

## AZ ARÁNYPÁROK KISZÁMÍTÁSA

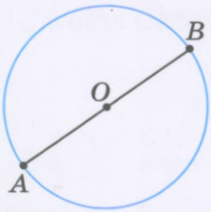
| | |
|---|---|
| $a : x = c : d$<br>vagy<br>$a : b = x : d$ | Ismeretlen kültag meghatározása<br>$x = a \cdot d : c$<br>$x = a \cdot d : b$ |
| $x : b = c : d$<br>vagy<br>$a : b = c : x$ | Ismeretlen kültag meghatározása<br>$x = b \cdot c : d$<br>$x = b \cdot c : a$ |

## ARÁNYOS MENNYISÉGEK

| Egyenes arányosság | Fordított arányosság |
|---|---|
| $2\ kg - 72\ hrn$<br>$4{,}5\ kg - x$<br>$\frac{2}{4.5} = \frac{72}{x}$ | $90\ km/h \quad - 2\ óra$<br>$X \quad - 2{,}5\ óra$<br>$\frac{x}{90} = \frac{2}{2{,}5}$ |

## ALAKZATOK A SÍKON

**Körvonal**



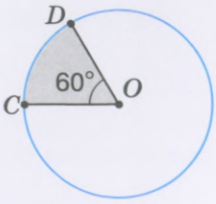

A körvonal hossza:
$C = 2\pi R$

**Körlap**




A körlap területe:
$S = \pi R^2$

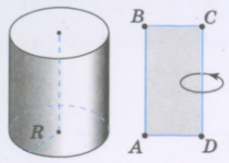
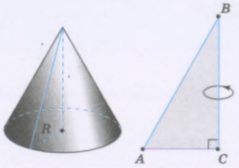
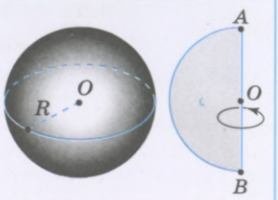
**Körcikk**



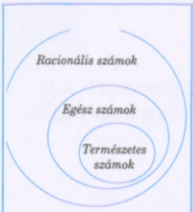

A körcikk középponti szöge:
$\angle COD = 60°$

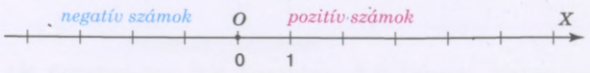
$\pi = 3{,}14159265358979... \approx 3{,}14$

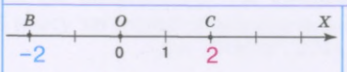
# FORGÁSTESTEK

| Henger | Kúp | Gömb |
|---|---|---|
|   |   |   |

# RACIONÁLIS SZÁMOK




−2 és 2 — ellentett számok

$|-2| = 2 \qquad |2| = 2$

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a > 0, \\ -a, \text{ ha } a < 0 \\ 0, \text{ ha } a = 0 \end{cases}$$

# MŰVELETEK RACIONÁLIS SZÁMOKKAL

| Okfejtés | Az összeadás szabályai |
|---|---|
| A vagyon és a vagyon összege vagyon | Pozitív számok összege pozitív szám |
| Az adósság és az adósság összege adósság | Két negatív szám összege negatív szám |
| A vagyon és az adósság összege egyenlő a különbségükkel | Két különböző előjelű szám összege egyenlő abszolút értékeik különbségével és a nagyobb abszolút értékű szám előjelével |
| A vagyon és a vele azonos adósság összege nulla | Két ellentett szám összege nulla |

**A kivonás helyettesítése összeadással**

$$a - b = a + (-b)$$

| | |
|---|---|
| A barátom barátja az én barátom is | $(+1) \cdot (+1) = +1$ |
| A barátom ellensége az én ellenségem is | $(-1) \cdot (+1) = (-1)$ |
| Az ellenségem ellensége az én barátom | $(-1) \cdot (-1) = +1$ |
| Az ellenségem barátja az ellenségem | $(+1) \cdot (-1) = (-1)$ |

**Az osztás helyettesítése szorzással**

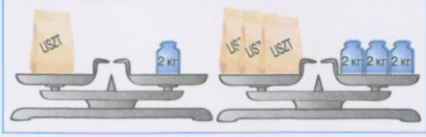
$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0$$

Ha az egyik szorzótényező nulla, akkor a szorzat is nulla

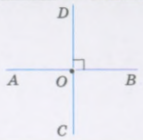
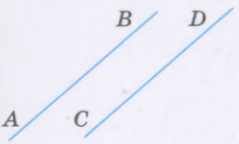
**Nullával osztani nem lehet**

## EGYENLŐSÉGEK ÉS EGYENLETEK

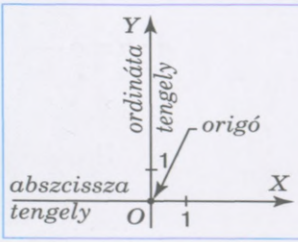
***Egyenletnek*** nevezzük azokat az ismeretlent tartalmazó egyenlőségeket, amelyekben meg kell határozni az ismeretlen értékét.
A $4x + 7 = 15$ olyan egyenlet, ahol $x$ a meghatározandó ismeretlen.

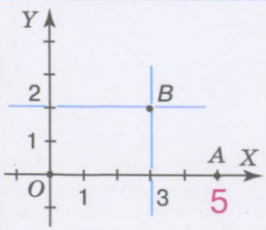
| **Az egyenlőségek tulajdonságai** | **Az egyenletek tulajdonságai** |
|---|---|
| Ha egy egyenlőség mindkét oldalához hozzáadjuk (mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, igaz egyenlőséget kapunk | Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk (mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot |
|   | $x + 3 = 11$<br>$x = 11 - 3$ |
| Ha az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk (mindkét oldalát elosztjuk) ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal, igaz egyenlőséget kapunk | Az egyenlet gyökei nem változnak, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (mindkét oldalát elosztjuk) ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal |
|   | $3x = 6 \mid :3$<br>$x = 2$ |

## KÉT EGYENES KÖLCSÖNÖS HELYZETE A SÍKON

| **Merőleges egyenesek** | **Párhuzamos egyenesek** |
|---|---|
|    |    |

## KOORDINÁTA-SÍK




**A pont koordinátái**
$B\,(3; 2)$
$A\,(5; 0)$