V. H. Barjahtar
F. J. Bozsinova

FIZIKA

10

Akadémiai szint

Tankönyv
az általános oktatási rendszerű tanintézetek
számára

*Ajánlotta Ukrajna Oktatási
és Tudományos Minisztériuma*

ЧОПСЬКА
СЕРЕДНЯ ШКОЛА № 2



Львів
«Світ»
2010

УДК 371.388:53
ББК 22.3я721
Б26

Перекладено з видання:
Бар'яхтар В. Г. Фізика. 10 кл. Академічний рівень : Підручник для загальноосвітніх навч. закладів / В. Г. Бар'яхтар, Ф. Я. Божинова. – Х. : Видавництво «Ранок», 2010.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ Міністерства освіти і науки України від 03. 03. 2010 р., № 177)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Консультант
З. Т. Назарчук, голова Західного наукового центру НАН і МОН України, академік НАНУ

Рецензенти:
Ю. І. Горобець, зав. кафедри загальної і експериментальної фізики фізико-математичного факультета НТУУ «КШ», чл.-кор. НАНУ;
С. В. Каплун, зав. кафедри методики природн.-мат. освіти Харківського обласного науково-методичного інституту безперервної освіти, канд. пед. наук, доцент; *В. В. Хардіков,* доцент кафедри теоретичної радіофізики ХНУ ім. В. Н. Каразіна, канд.фіз.-мат. наук

Бар'яхтар В. Г.

Б26 Фізика : 10 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. із навчанням угорською мовою : академ. рівень / Бар'яхтар В. Г., Божинова Ф. Я. // переклад угорською мовою Буркуш А. А., Штерр А. А. – Львів : Світ, 2010. – 256 с. : іл.

ISBN 978-966-603-672-1

Пропонований підручник є складовою навчально-методичного комплекту «Фізика–10», який включає також збірник задач, зошит для лабораторних робіт і комплексний зошит для контролю знань.

Основна мета підручника – сприяти формуванню базових фізичних знань, достатніх для продовження навчання за напрямками, де потрібна відповідна підготовка з фізики.

УДК 371.388:53
ББК 22.3я721

ISBN 978-966-603-672-1 (угор.)
ISBN 978-611-540-714-9 (укр.)

© Бар'яхтар В. Г., Божинова Ф. Я., 2010
© Алимова Н. В., іл., 2010
© ТОВ Видавництво "Ранок", 2010
© Буркуш А. А., Штерр А. А., переклад, 2010

Kedves barátaim!

Immár negyedik éve tanuljátok a fizikát. Abban bízunk, hogy megértettétek e csodálatos természettudomány értékeit, sőt a megszerzett tudás alapján megkísérlitek felfogni és megmagyarázni a minket körülvevő folyamatokat.

Idén újra találkoztok a mechanikával, de már egy magasabb szinten. Mi magyarázza a newtoni törvényeket, miben különbözik a klasszikus mechanika az Einstein-féle relativisztikus mechanikától, milyen sebességgel kell rendelkeznie a rakétahordozónak ahhoz, hogy pályára állítsa a műholdat, miért kering a Föld körül és nem vész el a kozmikus térben? Ezekre és más kérdésekre is választ kaphattok az idei év tananyagából.

A ***Kinematika*** c. fejezet tanulmányozása során felidéztek egy sor már ismert fogalmat, megismétlitek az egyenes vonalú egyenletes mozgás és a körvonalon végzett egyenletes mozgás szabályait, valamint megismerkedtek olyan új fogalmakkal mint az elmozdulás, gyorsulás, szögsebesség stb.

A sebesség megváltozásának feltételeit, a testek egyenes vonalú egyenletes mozgását a ***Dinamika*** tanulmányozza. Felidézitek a testre ható erőket, megismerkedtek a különböző erőfajtákkal, tanulmányozzátok Newton törvényeit és több test erőhatásával kapcsolatos feladatokat oldtok majd meg.

A mechanikai energia megmaradásának törvénye c. fejezetben megismerkedhettek az impulzusmegmaradás elvével, kiszélesítitek az energiamegmaradásról alkotott elméletet, ami leegyszerűsíti számos feladat megoldását.

A kinematika, dinamika és az energiamegmaradás törvényeinek ismerete lehetővé teszi az olyan típusú mozgások megértését, mint a rezgő mozgás rugalmas közegben való terjedésüket – a mechanikai hullámokat. Ezért a következő fejezetnek a ***Mechanikai rezgések és hullámok*** címet adtuk.

Az A. Einstein által kidolgozott általános relativitáselmélet és annak következményei már több mint száz éve csodálattal töltik el azokat, akik találkoznak velük. Az elmélet egyes tételeivel megismerkedhettek a ***Relativisztikus mechanika*** c. fejezetben.

A paragrafusok ***Összegzés***, ***Ellenőrző kérdések***, ***Gyakorlatok*** rubrikákkal érnek véget. Az *Összegzés* rubrikának köszönhetően lehetőségetek van még egyszer kijelölni a legfontosabbakat a megtanult anyagban és átismételni azt. Az egyes témák tudásszintjének ellenőrzését szolgálják a fejezetek végén található *Ellenőrző kérdések*. A *Gyakorlatok* rubrika lehetővé teszi a megszerzett tudás gyakorlati alkalmazását.

A fizika kísérleti tudomány, ezért a tankönyvben ***Laboratóriumi munkák*** és ***kísérleti feladatok*** várnak rátok. Mindenképpen végezzétek el ezeket, így jobban megértitek és megszeretitek a fizikát.

Az ellenőrző dolgozatokhoz való felkészülés során hasznos lesz az ***Önellenőrző feladatok***, a ***Fejezet összefoglalása*** pedig segít a megszerzett tudás rendszerezésében, és abban, hogy egységes egészként lássuk a fejezet tananyagát.

Aki többet szeretne tudni a fizikai és technikai tudományok fejlődéséről, vagy a jövőben fizikával szeretne foglalkozni, sok hasznos és érdekes információt találhat a ***Fizika és technika Ukrajnában*** és az ***Enciklopédiai oldal*** c. rubrikában.

Sok sikert kívánunk a fizika világába tett érdekes utazáshoz!

BEVEZETÉS

1. §. A FIZIKA MINT TUDOMÁNY MEGSZÜLETÉSE ÉS FEJLŐDÉSE. A FIZIKAI ISMERETEK JELENTŐSÉGE AZ EMBER ÉLETÉBEN ÉS A TÁRSADALOM FEJLŐDÉSÉBEN

?! Korábban az emberiség még csak nem is álmodhatott azokról a javakról, amelyeket ma természetes egyszerűséggel használ. A XVIII. században például a házakban gyertyákkal, fáklyákkal, gázlámpával világítottak, a levelek több hét alatt jutottak el a címzetthez. Manapság az internetnek és a rádióösszeköttetésnek köszönhetően néhány másodperc alatt kapcsolatba léphetünk a bármelyik kontinensen lakó partnerünkkel. A tudomány, ezen belül a fizika a társadalom reális fejlődésének alapját képezi, egy magasabb életszínvonal megteremtését szolgálja. Elegendő, ha csak a számos elektromos eszközre: az audio- és videotechnikára, a gépkocsira, a komputerre, az energiatermelésre, az előre megadott tulajdonságú anyagok előállítására, a rádiótechnika, a repülés, az űrrepülés, a hajózás sikereire gondolunk.
A közgazdászok joggal vélik úgy, hogy egy ország legnagyobb kincse polgárainak tudása. Hogyan változott a fizikatudomány az emberi fejlődés különböző szakaszaiban? Erre keressük a választ a következőkben.

1 Az ókori Görögország fizikája és csillagászata

A fizikai fogalmak és törvényszerűségek kialakulására óriási hatást gyakoroltak az ókori görög gondolkodók: *Arisztotelész, Archimédesz, Szamoszi Arisztarkhosz, Démokritosz, Leukipposz, Püthagorasz, Ptolemaiosz, Eukleidész.* Ők rakták le a környező világ fizikai tulajdonságairól szóló tudományos elképzelések alapjait.

Arisztotelész (i.e. 384–322) úgy került be a tudománytörténetbe, mint kora társadalom- és természettudományi ismereteinek rendszerbe foglalója. Munkáira egészen a XVI. századig, mint a végső és megcáfolhatatlan igazságra tekintettek. Arisztotelész volt az első, aki megfogalmazta a test állapotát a mechanikában, amit szerinte a test térbeli helyzete (a test koordinátái) határoz meg; kivezette az egymáshoz képest párhuzamos, illetve merőleges elmozdulások összeadásának szabályát (vektorösszeadás), valamint az emelő egyensúlyának szabályát. Arisztotelészhez köthető a hang levegőben való terjedésének tudományos elmélete, amit a levegő sűrűbb és ritkább részeinek változásával magyarázott. A hanghullámok terjedésére máig fennmaradt ez a magyarázat.

Az anyag atomi felépítésének rendkívül fontos elképzelése *Démokritoszhoz* és *Leukipposzhoz* (i. e. V. sz.) köthető. Egyébként ezt az elméletet csupán a XX. század elején sikerült kísérletileg is igazolni.

Az ókori Görögország kiemelkedő csillagásza volt *Szamoszi Arisztarkhosz* (i. e. IV. sz. vége, i. e. III. sz. első fele). Jóval a lengyel *Nikolausz Kopernikusz* (1473–1543) előtt felállította a heliocentrikus világképet (a görög *helios* szóból ered, ami Napot jelent). Ennek megfelelően a világmindenség középpontjában a mozdulatlan Nap található, körülötte keringenek a bolygók.

Eukleidész (i. e. III. sz.) megalapozta a geometriai optikát, megfogalmazta a fény egyenes vonalú terjedését, valamint a fényvisszaverődés törvényét (a visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel).

A fizika fejlődéséhez óriási mértékben hozzájárult *Archimédesz* (i. e. 287?–212) kiváló fizikus, mechanikus, matematikus, mérnök. Egyebek közt bevezette a tömegközéppont fogalmát, létrehozta az emelő egyensúlyáról szóló elméletet, definiálta az erőkar fogalmát, kísérletileg meghatározta a testek úszására vonatkozó törvényeket.



1.1. ábra. Galileo Galilei (1564–1642) olasz fizikus, mechanikus és csillagász, az egzakt természettudományok egyik megteremtője. Lerakta a modern mechanika alapjait, megalapozta a kísérleti fizikát

2 Új korszak kezdete a fizikában

A XVII. sz. kétségkívül egyik legkiemelkedőbb fizikusa *Galileo Galilei* volt (1.1. ábra). Jogosan őt tekintik a kísérleti fizika megalapítójának. Ezzel együtt Galilei rendkívüli fontosságot tulajdonított a matematika alkalmazásának a fizikai kísérletekben: „Aki a természettudományok által felvetett problémákat matematika nélkül szeretné megoldani, megoldhatatlan feladatot állít maga elé. Fontos, hogy mindent mérjünk, ami mérhető, és megpróbáljuk mérhetővé tenni, ami még nem az.” Kísérleteivel a tudós Arisztotelész számos állítását cáfolta meg, egyúttal pedig lerakta a klasszikus mechanika alapjait.

A fizika másik minőségileg új szakasza *Isaac Newton* nevéhez kapcsolódik (1.2. ábra). A *Természetfilozófia matematikai alapelvei* c. könyvében Newton megfogalmazta a mechanika fő törvényeit, amelyek meghatározták a fizika fejlődését az elkövetkező 300 évre.



1.2. ábra. Isaac Newton (1643–1727) angol matematikus, fizikus, mechanikus, csillagász, ő alapozta meg a modern természettudományokat; a klasszikus mechanika megteremtője

3 Az elektromosságról és mágnesességről szóló tanok

Az elektromos és mágneses jelenségekről szóló modern tudomány létrehozásához való döntő hozzájárulás *Charles Coulomb* (1736–1806), illetve *André Marie Ampére* francia (1775–1836), *Hans Oersted* (1777–1851) dán, valamint *Michael Faraday* (1791–1867) és *James Maxwell* (1831–1879) brit fizikusoknak köszönhető. A XX. század – az elektromágnesesség mérnöki gyakorlatba és a mindennapi életbe való átültetésének győzedelmes időszaka. A villanymotorok, izzólámpa, a televízió és a számítógép, a hírközlési eszközök és sok minden más a mindennapi élet részévé vált.

4 A hőerőgépekről szóló tanok

A XVIII. században viharos fejlődésnek indult a fizikának a hőerőgépek alkalmazásával foglalkozó ága. Fejlődésére leginkább két esemény volt hatással. Az első a hőerőgép *James Watt* (1736–1819) általi felfedezése. Az egyik ilyen hőerőgépet

1785-ben állították munkába a londoni sörfőzdében, amely 24 ló munkáját végezte el. A másik esemény *Sadi Carnot* (1796–1832) francia mérnök és fizikus *Gondolatok a hő erejéről és a hő által működtetett gépekről* c. munkájának megjelenése. A tudós elemezte az addig meglévő gőzgépeket és kivezette azokat a feltételeket, amelyek mellett a gépek hatásfoka eléri a maximális értéket (ez akkoriban nem haladta meg a 2%-ot, a korszerű gőzturbinákban akár 60% is lehet).

5 A fizika fejlődése a XX. században

A XX. századot az jellemzi leginkább, hogy a fizikai felfedezést követően alig néhány évvel később már széleskörűen alkalmazzák a mindennapi életben. Lássunk néhány példát.

1889-ben *Alekszandr Sztepanovics Popov* (1859–1905) orosz fizikus és elektrotechnikus nyilvánosságra hozta azt az elképzelését, miszerint az elektromágneses hullámok alkalmasak az információ továbbítására, és már 1895. május 7-én a tudós bemutatta az általa létrehozott rádióvevő működését (május 7-e a rádió napja*). Manapság az elektromágneses hullámok a fő információhordozók. Segítségükkel folynak a rádió- és televízióadások, a mobiltelefon-szolgáltatásnak és az internetnek is ez az alapja.

A *p-n* átmenetek – a *p* és *n* típusú félvezetők találkozási felülete – elektromos tulajdonságainak vizsgálata 1947-ben elvezetett a tranzisztor létrehozásához. Néhány év elteltével a tranzisztorok a rádióberendezések fő alkotóelemeivé váltak. Jelenleg pedig az integrált áramkörök alapjait képezik.

A XX. század 50-es éveiben fedezték fel a gerjesztett közegek lézersugárzását, ma pedig nehéz olyan technikai vagy orvosi szakágat megnevezni, ahol ne használnák a lézert.

Még egy jelentős esemény, ami hatással volt a XX. és XXI. századi fizika fejlődésére – a radioaktivitás felfedezése 1896-ban. 1938-ban fedezték fel az urán energiakiválással kísért hasadását, és már 1942-ben beindították az első láncreakción alapuló magreaktort. Napjainkban a világban több mint 400 magreaktort használnak, ezek adják a teljes elektromos energiatermelés 6%-át.

? Ellenőrző kérdések

1. Hozzatok fel példákat a fizikai ismeretek alkalmazására a használati tárgyak készítésében! **2.** Nevezzetek meg néhány ismert fizikatudóst! A fizika mely területén tevékenykedtek? Milyen technikai eszközök elkészítésében alkalmazták a felfedezéseiket?

---

* A. Sz. Popovtól függetlenül foglalkozott az elektromágneses hullámok vezeték nélküli információ átvitelében való alkalmazásával *Guglielmo Marconi* (1874–1937) olasz rádiótechnikus és vállalkozó. Marconi tevékenysége fontos szerepet játszott a rádiótechnika fejlődésében, valamint a rádió, mint távközlési eszköz elterjesztésében.

2. §. A TUDOMÁNYOS MEGISMERÉS ALAPJAI. A FIZIKAI MENNYISÉGEK ÉS MÉRÉSÜK

?! E paragrafus segítségetekre szolgálhat annak felidézésében, hogy milyen módszerei léteznek a fizikai kísérleteknek, mit jelent a fizikai mennyiség mérése, és hogyan kell ezt elvégezni. Megtudjátok azt is, milyen egységeken alapul a nemzetközi mértékrendszer (SI rendszer), és azt is, hogyan határozzák meg ezeket az értékeket a modern fizikában.

1 Mi a fizikai kutatás és milyen módszerei léteznek?

A fizikai kutatáson valamely jelenség céltudatos vizsgálatát értjük a fizika eszközeinek alkalmazásával.

A fizikai kutatás első lépcsője a *megfigyelés*.

A megfigyelés – a természet megértése elsődleges adatok és további elemzés céljából.

A megfigyelések egyáltalán nem mindig vezetnek helyes következtetéshez. Így például, különböző testek szabadesését tanulmányozva Arisztotelész úgy döntött, hogy minél nehezebb egy test, annál gyorsabban esik. Ez a következtetés hibásnak bizonyult, de csupán több ezer év múlva sikerült megcáfolni, hála Galileo Galilei jól előkészített *kísérleteinek*.

A kísérlet – a fizikai jelenség vizsgálata a tudós által ellenőrzött körülmények között, amelynek célja a jelenség mélyebb tanulmányozása.

Alapjában véve a fizika kísérleti tudomány: törvényei kísérleti úton megszerzett tényeken alapulnak. Azonban csupán a *fizikai kutatások kísérleti módszerei* nem elégségesek ahhoz, hogy teljes képet kapjunk arról a jelenségről, amelyet a fizika kutat. A modern fizika széleskörűen alkalmazza *a fizikai kutatások elméleti módszereit*, ami a kísérletek során, a természeti törvények megfogalmazásakor, konkrét jelenségek ezen törvények alapján történő magyarázatakor kapott adatok elemzését feltételezi. Ami a legfontosabb – új jelenségek előrelátása és elméleti megalapozása (a matematikai módszerek széles körű felhasználásával).

Az elméleti vizsgálatokat nem a konkrét testen, hanem annak idealizált *modelljén* végzik, amelynek csupán a vizsgált test *csekély számú alapvető tulajdonságát* kell figyelembe vennie. Például néhány mechanikai mozgásfajta tanulmányozása során a test fizikai modelljét, az anyagi pontot alkalmazzák. Ezt a modellt alkalmazzák, ha a test méretei elhanyagolhatók mozgásának elméleti leírásakor, vagyis az „anyagi pont" modellben csak a test tömegével számolnak, és nem veszik figyelembe alakját és méreteit. Az elektrosztatika tanulmányozásakor megismerkedtetek még egy fizikai modellel – az atom magmodelljével, az atomfizikát tanulmányozva pedig az atommag cseppmodelljével.

Konkrét példákon elmagyarázzuk, mi a különbség a kísérleti és elméleti kutatás között.

A tudósok új rakétahajtómű üzemanyagot javasoltak. Ahhoz, hogy megtudják, mekkora lesz a hajtómű tolóereje, próbapadra helyezték és a megfelelő műszerek segítségével megmérték a hajtóerőt. Ez a kísérleti kutatás példája. Ahhoz viszont, hogy kiszámítsák a rakéta röppályáját a Holdhoz, a tudósok az anyagi testek mozgásának egyenleteit használják, számolnak a Föld és a Hold rakétára gyakorolt vonzóerejével, a Nap hatásával és más tényezőkkel. Ez az elméleti kutatás példája.

A tanév során a kutatásnak mind a kísérleti, mind pedig az elméleti módszereivel találkozni fogtok.

2 Hogyan mérhető a fizikai mennyiség?

A fizikai mennyiség olyan jellemző, amely minőségi szempontból közös több anyagi objektum vagy jelenség számára, de egyéni értéket vehet fel mindannyiukra nézve.

Az út, idő, tömeg, sűrűség, erő, hőmérséklet, nyomás, feszültség, megvilágítás csak néhány az eddig általatok megismert fizikai mennyiségek közül.

Megmérni a fizikai mennyiséget *annyit jelent, mint összehasonlítani az egységül választott, vele egynemű mennyiséggel.*

A mérések lehetnek *közvetlenek*, illetve *közvetettek*.



2.1. ábra. Dohánymérleg súlyokkal (XIX. sz. közepe)

A közvetlen mérések során a mennyiséget a mértékegységével hasonlítják össze (méter, másodperc, kilogramm, amper stb.), amit a megfelelő egységben kalibrált mérőműszerrel végeznek el. A kísérletileg meghatározott alapmennyiségek közé tartozik a távolság, az idő és a tömeg. Ezeket például rendre mérőszalag, óra és mérleg (2.1. ábra) segítségével mérik. Léteznek bonyolultabb mennyiségek mérésére szolgáló műszerek: a testek mozgássebességének megállapításához sebességmérőt alkalmaznak, az elektromos áram erejének meghatározásához pedig ampermérőt.

Közvetett mérések során a keresett mennyiséget más mennyiségek közvetlen méréséből származó adatok alapján számítják ki. Ilyenkor a mért és a kiszámított mennyiségek között matematikai függvénykapcsolat van. Például ahhoz, hogy kiszámítsuk a test átlagsűrűségét, megmérjük a tömegét és a térfogatát, azután pedig a tömeget elosztjuk a térfogattal $\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$.

3 A mértékegységrendszer felépítése

A *mértékegységrendszer* tudományos alapokon való kidolgozásának feladatát a XVIII. század végén, a nagy francia forradalmat követően állították a francia tudósok

elé. Ennek lett eredménye *a nemzetközi mértékegységrendszer,* az SI, ami hamarosan a legfőbbé vált a világon. A távolság mérésének etalonjául egy hosszúság alapján kalibrált szakaszt választottak. Ennek a szakasznak a hosszát **1 m**-ben határozták meg (2.2. ábra).



2.2. ábra. A méter nemzetközi etalonja, amit 1890–1960 között használtak és jelenleg a Párizs melletti Sévres-ben, a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őriznek

1960-ig az időt egy etalonóra segítségével határozták meg. Etalonul egy ingaóra szolgált, amelyet a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őriztek; a laboratóriumokban a másolatait használták. Az SI-ben az idő egységéül az **1 másodpercet** választották. A test tömegét az etalon példánnyal (platina-irídium henger, magassága és átmérője egyaránt 39 cm) való összehasonlítás alapján határozták meg, amit szintén a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őriznek. Ennek az etalonnak a tömegét **1 kilogrammnak** vették. Az etalonnal való összehasonlítás mérleg segítségével történik.

A mértékegységek felépítésének fentebb ismertetett vázlata gyakorlatilag a múlt század közepéig létezett. 1960 után egyre elterjedtebbé váltak a mértékrendszerek felépítésének olyan módszerei, amelyek a sugárzáson, az elektromágneses hullámok terjedésén és visszaverődésén alapulnak. Ezek a módszerek kiemelkednek nagy pontosságukkal és azon alapulnak, hogy a fény sebessége a vákuumban állandó.

Ismertetjük néhány fizikai mennyiség és mértékegység *modern meghatározását.*

Az *idő* – fizikai mennyiség, ami a jelenségek és az anyag állapotának egymást követő változását jellemzi. Az idő egysége a *másodperc* (s). Egy másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.

A *hosszúság* olyan fizikai mennyiség, amely a tér kiterjedését jellemzi. A hosszúság mértékegysége a *méter* (m). A méter egyenlő azzal az úttal, amelyet a fény a vákuumban 1/299 792 458 másodperc alatt tesz meg.

A *tömeg* olyan fizikai mennyiség, ami az anyagi testek tehetetlenségi és gravitációs tulajdonságait jellemzik. A tömeg egysége a *kilogramm* (kg). A kilogramm az etalonhenger tömegével egyenlő.

4 A mértékegységek többszörösének és törtrészének előtagokkal (prefixumokkal) történő képzése

A nagy, valamint a kis fizikai mennyiségek leírásához azok *többszöröseit*, illetve *törtrészeit* használják.

Többszörös egységeken az alapegységek 10-szer, 100-szor, 1000-szer stb. nagyobb alapegységeit értjük.

Törtrész egységeken az alapegységek 10-ed, 100-ad, 1000-ed stb. részeit értjük.

A többszörös, illetve a törtrész egységek leírásához *előtagokat* használnak. Például az egy méter többszörös egysége a **kilométer** (1000 m); az egy méter törtrész egysége a **centiméter** (0,01 m) stb. Az alábbi táblázatban feltüntettük a leggyakrabban használt előtagokat.

A többszörös és törtrész egységek leírására szolgáló előtagok

Előtag	Jelentése (görögből vagy latinból fordítva)	Jele	Szorzó	Előtag	Jelentése (görögből vagy latinból fordítva)	Jele	Szorzó
tera-	szörny	T	10^{12}	centi-	száz	c	10^{-2}
giga-	gigantikus	G	10^{9}	mili-	ezer	m	10^{-3}
mega-	nagy	M	10^{6}	mikro-	kicsi	μ	10^{-6}
kilo-	ezer	k	10^{3}	nano-	törpe	n	10^{-9}
hekto-	száz	h	10^{2}	piko-	kis mennyiség (sp.)	p	10^{-12}

Összegzés

A fizikai kutatásoknak léteznek elméleti és gyakorlati módszerei. A kísérlet – a fizikai jelenség vizsgálata a tudós által ellenőrzött körülmények között, amelynek célja a jelenség elmélyült tanulmányozása. Az elméleti módszerek a kísérletek során szerzett adatok elemzését jelentik, a természeti törvények megfogalmazását, konkrét jelenségek magyarázatát ezen törvények alapján, új jelenségek előrelátását és elméleti megalapozását. Bármely elméleti kutatás alapját egy idealizált objektum – a fizikai modell képezi.

A fizikai mennyiség – több anyagi objektum vagy jelenség közös jellemzője, de egyéni értéket vehet fel mindannyiukra nézve. Megmérni a fizikai mennyiséget annyit jelent, mint összehasonlítani az egységül választott, vele egynemű mennyiséggel.

A mérések lehetnek közvetettek és közvetlenek. A közvetlen mérések során a mennyiséget a mértékegységével hasonlítják össze, amit a megfelelő egységben kalibrált mérőműszerrel végeznek el. Közvetett mérések során a keresett mennyiséget a közvetlen mérésekből származó adatokból számítják ki, az egymással matematikai függvénykapcsolatban álló mennyiségek felhasználásával.

Ellenőrző kérdések

1. Nevezzétek meg a fizikai kutatások főbb módszereit! Hozzatok fel példákat! **2.** Hozzatok fel példákat a fizikai modellekre! Miért idealizált objektum a fizikai modell? **3.** Mit nevezünk fizikai mennyiségnek? Mit értünk alatta? **4.** Mit jelent megmérni a fizikai mennyiséget? **5.** Nevezzétek meg az SI alapegységeit, etalonjait és azokat a mennyiségeket, amelyek a mérésére szolgálnak! **6.** Hozzatok fel példákat olyan előtagokra, amelyek a többszörös, illetve a törtrész egységek létrehozására szolgálnak! Mikor használják őket?

3. §. MÉRÉSEK. MÉRÉSI HIBÁK

?! A fizika kísérleti tudomány. Ez azt jelenti, hogy a fizika törvényeit a kísérleti adatok összegyűjtésével és összehasonlításával állapítják meg, illetve ellenőrzik.

Azonban bármely kísérleti úton szerzett eredmény mindig bizonyos hibákat tartalmaz, mivel egy mennyiség valódi értéke a mérési folyamat véges pontossága folytán méréssel soha nem állapítható meg abszolút pontosan. A lehetséges hibák a kísérleti eredmények, illetve az elméleti számítások eredményeinek összehasonlításakor játszhatnak jelentős szerepet, ezért el kell sajátítani a mérési eredmények feldolgozását. Ebből a paragrafusból megtanulhatjátok, hogyan szokás a mérési eredményeket a mai laboratóriumi gyakorlatban értékelni és megadni.

1 A mérések elvégzésének fő szakaszai

Bármely fizikai mennyiség mérése során általában az alábbi három műveletet végzik el: 1) a műszerek kiválasztása, ellenőrzése és beállítása; 2) a műszer leolvasása; 3) a keresett mennyiség kiszámítása a méréseredmények alapján, a hiba megbecsülése.

Lássunk néhány példát.

Ha a terepen egy kb. 50 m-es távolságot kell megmérni, ehhez nyilván nem 20 cm-es vonalzót használunk, sokkal alkalmasabb egy megfelelő mérőszalag. Minden műszerre bizonyos pontosság jellemző, ezért érdemes megismerkedni a mérőszalag felépítésével és megállapítani a pontosságát. Az 50 m-es távolságot általában nem szükséges milliméternyi pontossággal meghatározni, ezért a mérőszalagon lehet, hogy nincs is ilyen beosztásérték.

Azonban, ha a laboratóriumi vízcsap megjavításához szükséges kisméretű anyacsavar méretét kell megmérni, célszerű a tolómérőt használni (3.1. ábra).



3.1. ábra. Tolómérő. Mérési pontossága a milliméter tizedrésze

A továbbiakban megtudjátok, hogyan határozzák meg a méréseredmények középértékét, hogyan számítják ki a keresett mennyiséget a méréseredmények alapján, valamint megbecsülni a hibát.

2 Mi a mérési hibák oka? Véletlen abszolút hiba

A mérendő mennyiség mért és valódi értéke közötti különbséget **hibának (mérési hibának)** nevezik.

A fizikai mennyiségek mérése során keletkező hibákat két csoportra osztják: *véletlenre* és *rendszeresre*.

A *véletlen hibák a mérési folyamattal állnak összefüggésben*. Például a test röptávolságát mérve, lehetetlen ideálisan egyenesen lefektetni a mérőszalagot; a test tömegének mérlegen történő mérésekor lehetetlen kiküszöbölni a súrlódást stb. Ezért, ha többször végezzük el ugyanazt a mérést, az eredmények kissé különbözni fognak.

Tegyük fel, hogy ugyanazt a mérőeszközt és ugyanazt a mérési módszert alkalmazva, N esetben megmérték az x mennyiséget és az x-re N értéket kaptak: x_1 az

első mérés eredménye, x_2 a másodiké, x_N pedig az N-edik mérésé. Ahhoz, hogy feldolgozhassuk az eredményeket, két kérdésre kell válaszolni. Hogyan lehet megtalálni a mért mennyiség legvalószínűbb értékét? Hogyan határozzuk meg a mérések véletlen hibáját? A választ ezekre a kérdésekre a valószínűség-számítás elmélete adja meg.

A mért mennyiség legvalószínűbb értéke ($x_{mér}$) *megegyezik a mérés során kapott adatok számtani középértékével*:

$$x_{mér} = x_{köz} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}.$$

A véletlen abszolút hibát ($\Delta x_{vél}$) *– az összes mérés eredményéből kapott középhibát a következő képlet segítségével lehet kiszámítani*:

$$\Delta x_{vél} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_{köz})^2 + (x_2 - x_{köz})^2 + ... + (x_N - x_{köz})^2}{N}}.$$

Néha nincs arra szükség, hogy többször megismételjük a méréseket. Például vonalzóval mérve ugyanazt a szakaszt, nem valószínű, hogy mérésenként más-más eredményt kapunk. Azonban ez nem jelenti azt, hogy nincsenek véletlen hibák, hiszen lehetetlen pontosan a szakasz végpontjára állítani a vonalzó skálájának nullpontját, azonkívül valószínűsíthető, hogy a szakasz végpontja nem esik egybe a beosztásértékkel. Az ilyen esetekben úgy tekintjük, hogy a *véletlen hiba a műszer skálája beosztásértékének felével egyenlő.*

3 Rendszeres hibák (a műszer méréshibája)

A rendszeres hibák mindenekelőtt a műszer kiválasztásától függnek: nincs ideálisan elosztott skálával rendelkező mérőszalag, abszolút pontos súlykészlet, ideálisan egyforma karú mérleg. A rendszeres hibát a mérőeszköz minősége határozza meg – a pontossági *osztálya*, ezért gyakran nevezik *műszerhibának* is. Ukrajnában a hiba nagysága alapján hét pontossági osztályba sorolják a mérőeszközöket. Rendkívül pontos (precíziós) műszerek, amelyeket a pontos tudományos kísérletekben használnak – ezek 0,1; 0,2; 0,5 osztályú műszerek.* Ilyen műszereket használnak például a gyógyszeriparban. A technikában kevésbé pontos műszereket használnak – 1; 1,5; 2,5; 4 osztályúakat. A használat során a műszerek pontossága csökkenhet, ezért rendszeresen ellenőrizni kell azokat a mértékek és súlyok kamarájában (Ukrajnában Harkivban található).

Az alábbiakban néhány, *iskolában használatos mérőeszköz abszolút hibája látható*:

* A pontossági osztály egyenlő a műszer százalékokban megadott relatív hibájával (itt megfelelően 0,1%, 0,2%, 0,5%).

Fizikai mérőeszköz	A skála beosztásértéke	Abszolút hiba
Tanulói vonalzó	1 mm	±1 mm
Demonstrációs	1 cm	±0,5 cm
Mérőszalag	0,5 cm	±0,5 cm
Tolómérce	0,1 mm	±0,05 mm
Mikrométer	0,01 mm	±0,005 mm
Mérőhenger	1 ml	±1 ml
Stopperóra	0,2 s	±1 s 30 min alatt
Tanulói mérleg	–	±0,01 g
Tanulói dinamométer	0,1 N	±0,05 N
Aneroid barométer	1 Hgmm	±3 Hgmm
Laboratóriumi hőmérő	1 °C	±1 °C
Tanulói ampermérő	0,1 A	±0,05 A
Tanulói voltmérő	0,2 V	±0,1 V

4 Hogyan kell meghatározni a közvetlen mérések abszolút és viszonylagos hibáját?

Ahhoz, hogy helyesen határozhassuk meg a kísérlet pontosságát, figyelembe kell venni a műszer által okozott hibát ($\Delta x_{műsz}$), valamint a véletlen hibát ($\Delta x_{vél}$), ami a mérések pontatlanságából ered. Ezt az összesített hibát *abszolút méréshibának* (Δx) nevezzük, és a következő képlet segítségével számíthatjuk ki:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{műsz})^2 + (\Delta x_{vél})^2}\,.$$

Az abszolút hiba önmagában nem mutatja meg a mérés minőségét. Valóban, ha a 10 m-es távolságot 0,2 m pontossággal mérték meg, akkor ez meglehetősen jó minőségű mérésre utal. Teljesen más a helyzet, ha ugyanilyen hiba alakul ki 0,5 m-es távolság mérése során. Ezért célszerű szólni a *relatív hibáról* is.

A relatív ε_x hiba a mérés minőségét jellemző mennyiség, amely egyenlő az abszolút hiba (Δx) és a mérendő mennyiség várható középértékének $x_{mért}$ hányadosával:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{mért}}\,.$$

A relatív hibát néha *pontosságnak* is nevezik. A relatív hibát a legtöbb esetben százalékokban szokták megadni:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{mért}} \cdot 100\%.$$

5 Hogyan kell meghatározni a közvetett mérések abszolút és relatív hibáját?

Sok fizikai mennyiséget lehetetlen közvetlenül megmérni. *Közvetett mérésük* kétlépcsős. Először megmérik az x, y, z mennyiségeket, ami közvetlen méréssel

elvégezhető, azután pedig az x, y, z kapott értékeit felhasználva kiszámítják a keresett f mennyiséget. Hogyan kell ebben az esetben meghatározni a mérések abszolút, illetve relatív hibáját? A választ erre a kérdésre szintén a valószínűség-számítás adja meg. A táblázatban több relatív hiba kiszámítására szolgáló képlet látható néhány függvény számára, levezetés nélkül.

A képlet (függvény) alakja	Relatív hiba
$f = x + y$	$\varepsilon_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$
$f = x - y$	$\varepsilon_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$
$f = xy$	$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
$f = \frac{x}{y}$	
$f = x^n$	$\varepsilon_f = n\varepsilon_x$
$f = \sqrt[n]{x}$	$\varepsilon_f = \frac{1}{n}\varepsilon_x$

Egyedi esetben, ha az f fizikai mennyiség megállapítására szolgáló képletben csak szorzás és osztás fordul elő, *akkor a mennyiség relatív hibája egyenlő a képletben szereplő mennyiségek relatív hibáinak összegével.*

Az abszolút hiba (Δf) megállapítható a relatív hiba (ε_f) meghatározásának felhasználásával. Valóban, a meghatározás szerint $\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{f_{\text{mért}}}$, amiből:

$$\Delta f = \varepsilon_f \cdot f_{\text{mért}}.$$

Figyeljétek meg a következőt. Néha olyan kísérleteket végeznek, amiből az szeretnék megtudni, hogy teljesül-e egy bizonyos egyenlőség (például $X = Y$). Ha egy ilyen kísérletben nehéz megbecsülni a hibát, akkor az $X = Y$ egyenlőség kísérleti ellenőrzésének hibáját a következő képlet alapján számítják ki:

$$\varepsilon = \left|\frac{X}{Y} - 1\right| \cdot 100\ \%.$$

6 Hogyan írjuk fel helyesen a mérések eredményeit?

A kísérlet abszolút hibáját az a pontosság határozza meg, amellyel ésszerű elvégezni a mért mennyiség kiszámítását.

Az abszolút hibát mindig az egyetlen értékes számjegyre kerekítik felfelé, a mérési eredményt (adatot) pedig ugyanarra a helyi értékre, amely az abszolút hibában szerepel a kerekítés után.*

Az x mennyiség értékének végső eredményét a következő alakban tüntetik fel:

$$x = x_{\text{mért}} \pm \Delta x,$$

ahol $x_{\text{mért}}$ a mért (közép) mennyiség, Δx pedig az abszolút hiba.

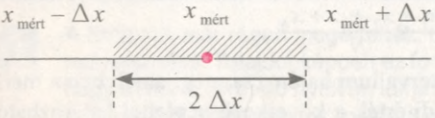
Az utóbbi képlet azt jelenti, hogy a mért mennyiség valódi értéke az $x_{\text{mért}} - \Delta x$ és $x_{\text{mért}} + \Delta x$ intervallumba esik (3.2. ábra). A Δx abszolút hibát pozitívnak szokták

* *Értékes számjegynek* nevezzük a szám valamennyi jegyét a szám elején álló nullák kivételével, amelyek csak a helyi értéket jelzik. Például a 320,0 számban négy értékes számjegy van (3; 2; 0; 0), a 0,32-ben kettő (3; 2), a $0{,}3 \cdot 10^5$-ben pedig egy (3).

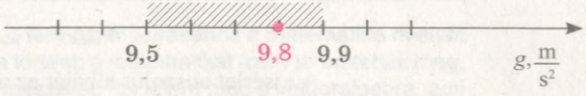
tekinteni, ezért $x_{mért} + \Delta x$ mindig a mért mennyiség *legnagyobb* valószínű értéke, az $x_{mért} - \Delta x$ pedig a *legkisebb*.

Lássunk egy példát. Tegyük fel, hogy a szabadesés g gyorsulását mérték. A kapott kísérleti eredmények alapján megkapták a középértéket: $g_{mért} = 9{,}736\ m/s^2$. Az abszolút hiba $\Delta g = 0{,}123\ m/s^2$ lett. Az abszolút hibát egyetlen értékes számjegyre kell felfelé kerekíteni: $\Delta g = 0{,}2\ m/s^2$. Akkor a méréseredményt is ugyanarra a helyi értékre kell kerekíteni, mint a hiba helyértéke, azaz tizedekre: $g_{mért} = 9{,}7\ m/s^2$.

A kísérlet eredményét a $g = (9{,}7 \pm 0{,}2)\ m/s^2$ alakban adjuk meg, az intervallum pedig, ahol a szabadesés gyorsulásának valódi értéke található: $[9{,}5; 9{,}9]\ m/s^2$ (3.3. ábra).



3.2. ábra. A kísérlet abszolút hibája azt az intervallumot határozza meg, amelyben a mérendő mennyiség valódi értéke található



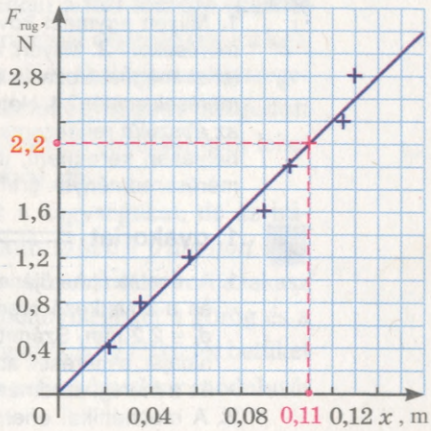
3.3. ábra. A szabadesés gyorsulásának valódi értéke a $[9{,}5; 9{,}9]\ m/s^2$ intervallumban található. Mivel a táblázati érték ($g_{tábl} = 9{,}8\ m/s^2$) ehhez az intervallumhoz tartozik, elmondhatjuk, hogy a kapott értékek a mérési hibahatáron belül vannak, ezért megfelelnek a táblázatinak

7 Az eredmények feldolgozásának grafikus módszere

Néha egyszerűbb grafikus módszerrel feldolgozni a kísérlet eredményeit. Tegyük fel, hogy meg kell határozni a rugó merevségét. A $k = \frac{F_{rug}}{x}$ képlet alkalmazása mellett döntöttek. A legpontosabb eredmény elérése érdekében különböző rugalmassági erőkre mérték a rugó megnyúlását és a mérési eredményeket a következő táblázatba foglalták:

F_{rug}, N	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
x, m	0,0	0,022	0,038	0,058	0,090	0,101	0,123	0,130

A táblázatban szereplő mérési adatokat megjeleníthetjük pontok alakjában. Az abszcisszatengelyen a rugó megnyúlását, az ordinátatengelyen pedig az ennek megfelelő rugalmassági erőt tüntetjük fel (3.4. ábra). Mivel a rugalmassági tényező nem függ a rugó megnyúlásától, ezért elméletileg az $F_{rug}(x)$ grafikonjának a koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó egyenesnek kell lennie. Az egyenes meghúzásánál ügyeljünk arra, hogy minél közelebb essen a kapott pontokhoz, és két oldalán nagyjából azonos számú pont legyen. A grafikon tetszőleges



3.4. ábra. A rugómerevség meghatározása grafikus módszerrel

pontját kiválasztva, és meghatározva az ennek megfelelő F_{rug}, illetve x értékeket, megállapítjuk a rugómerevség középértékét: $k = \frac{F_{rug}}{x} = \frac{2{,}2\ \text{N}}{0{,}11\ \text{m}} = 20\ \text{N/m}$. Tehát a grafikon megszerkesztése bonyolult számítások nélkül, az összes méréseredményt felhasználva lehetővé tette a rugómerevség meghatározását.

Összegzés

A fizikai mennyiségek mérése közben fellépő hibákat két csoportra osztják: véletlenekre, amelyek a mérés folyamatával állnak összefüggésben, illetve rendszeresekre, amelyet a mérőműszer kiválasztása határoz meg.

Közvetlen mérések során a mért mennyiség legvalószínűbb értéke megegyezik a mérések során kapott számtani középértékkel:

$$x_{\text{mért}} = x_{\text{köz}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}.$$

A kísérlet abszolút hibáját az az intervallum határozza meg, amelyben a mért mennyiség valódi értéke található. A valódi érték a következő képlettel határozható meg: $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{műsz}})^2 + (\Delta x_{\text{vél}})^2}$, ahol $\Delta x_{\text{műsz}}$ műszerhiba (rendszeres hiba); $\Delta x_{\text{vél}}$ véletlen hiba (a mérések pontatlanságából eredő hiba).

A kísérlet abszolút hibáját mindig egyetlen értékes számjegyre kerekítik felfelé, a mérési eredményt (adatot) pedig ugyanarra a helyi értékre, amely az abszolút hibában szerepel a kerekítés után. A méréseredményt a következő alakban tüntetik fel: $x = x_{\text{mér}} \pm \Delta x$.

Relatív hibának az abszolút hiba és a mért mennyiség várható középértékének hányadosát nevezzük: $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{mért}}}$. Ha a kísérletben nehéz meghatározni a hibát, akkor például az $X = Y$ egyenlőség kísérleti ellenőrzésekor fellépő relatív hibát az $\varepsilon = \left|\frac{X}{Y} - 1\right| \cdot 100\%$ képlet segítségével számítják ki.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen egymást követő műveleteket kell végrehajtani bármely fizikai mennyiség mérésekor? **2.** Milyen, a mérés folyamán előforduló hibafajtákat ismertek? **3.** Hogyan lehet meghatározni a mért mennyiség várható értékét (mérések átlaga) közvetlen mérések esetén? **4.** Hogyan lehet meghatározni a mérések véletlen hibáját? **5.** Mi okozza az abszolút rendszeres hibát? **6.** Mit nevezünk relatív méréshibának? **7.** Hogyan kell helyesen kerekíteni, illetve feltüntetni a méréseredményeket? **8.** Mi az előnye a méréseredmények grafikus feldolgozásának?

1. gyakorlat

1. A vezeték átmérőjének tolómérővel való meghatározása során négy mérést végeztek, és a következő eredményeket kapták: d_1 = 2,2 mm; d_2 = 2,0 mm; d_3 = 2,0 mm; d_4 = 2,2 mm. Számítsátok ki a vezeték átmérőjének átlagértékét, a mérés véletlen hibáját, a mérések abszolút és relatív hibáját! Kerekítsétek ki a kapott eredményeket és a mérési eredményeket tüntessétek fel $d = d_{\text{köz}} \pm \Delta d$ alakban!

2. A mechanikai energiamegmaradás törvényének bizonyítása céljából kísérletet végeztek el. Eszerint a testek energiájának középértéke a kölcsönhatás előtt (W_1) 225 J volt, utána pedig W_2 = 243 J. Becsüljétek meg a kísérlet relatív és abszolút hibáját!

3*. A kiskocsi egyenes vonalú egyenletes mozgássebességének meghatározásához kísérletet végeztek el. A megtett utat mérőszalaggal, az időt pedig stopperórával mérték, 1%-os relatív hibával (pontossági osztálya 1). A méréseket ötször végezték el. A mérőszalag által mért érték nem változott és 1 m-rel volt egyenlő. Az idő mérése során a következő értékeket kapták: $t_1 = 5{,}6$ s; $t_2 = 5{,}8$ s; $t_3 = t_4 = 5{,}3$ s; $t_5 = 5{,}5$ s. A fenti eredmények felhasználásával számítsátok ki a kiskocsi átlagos mozgássebességét, a sebességmérés relatív és abszolút hibáját! A kapott eredményeket kerekítsétek, és írjátok fel a következő alakban: $v = v_{köz} \pm \Delta v$.

4. §. A MATEMATIKA NYELVE A FIZIKA TÖRVÉNYEINEK MEGFOGALMAZÁSÁRA

?! A fizikusok már régen megértették, hogy a természet leírásához a matematika nyelvét kell használni. Tulajdonképpen ez fordítva történt: a matematikát azért teremtették meg, hogy tömör és érthető nyelven leírja a természetet. Így jelent meg a vektoralgebra, ami az irányított mennyiségek (például erő és sebesség) elméleti kutatásához szükséges. A pillanatnyi sebesség, a változó erő munkája, a szabálytalan formájú test térfogata stb. meghatározására létrehozták a végtelenül kis mennyiségek matematikáját (integrál és differenciálszámítás). Sok fizikai folyamat szemléletesebbé tételéhez megtanulták a függvényábrázolást, a kísérleti eredmények gyors feldolgozására pedig a közelítő számításokat. Felidézünk néhány fontos matematikai fogalmat és módszert, amelyek nélkül nem boldogultok a 10. osztályos fizika tanulmányozása során.

1 Skaláris és vektormennyiségek

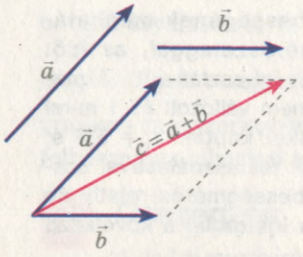
A fizikai jelenségek és testek mennyiségi jellemzésére használt fizikai mennyiségek két nagy osztályra oszthatók: *skaláris*, illetve *vektormennyiségekre*.

A *skaláris mennyiségekhez* vagy *skalárokhoz* (*scalaris* – lépcsőzetes, fokozatos, latin szóból) tartozik a hosszúság, a terület, a hőmérséklet, a sűrűség, a munka és sok más. Ezeket a mennyiségeket egyetlen érték jellemzi, és általában a latin vagy a görög ábécé valamelyik betűjével jelölik (l, S, t, ρ, A stb.). Például a test tömege skaláris mennyiség, és ha azt mondjuk, hogy a test tömege 2 kilogrammal egyenlő ($m = 2$ kg), akkor teljes mértékben meghatározzuk ezt a mennyiséget. Két skaláris mennyiséget összeadni annyit jelent, mint összeadni az azonos mértékegységben megadott értéküket. Természetesen csak azonos skalárokat lehet összeadni (például nem lehet összeadni a tömeget az idővel, a sűrűséget pedig a munkával stb.).

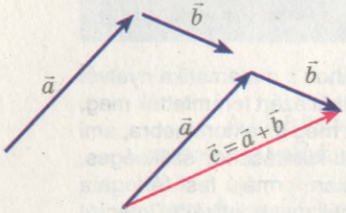
A *vektormennyiségek* meghatározásához nemcsak a nagyságukat, de az irányukat is ismerni kell. *A vektor* (a *vector* – hordozó, latin szóból) *irányított szakasz, vagyis olyan szakasz, amelynek hossza és iránya is van.* Az irányított szakasz hosszát a *vektor abszolút értékének* nevezzük. A vektormennyiségeket a görög és a latin ábécé betűivel jelölik, amelyek fölé nyilat rajzolnak, vagy pedig félkövér betűket használnak. Például a sebességet így jelölik: $\vec{v}$ vagy v, a sebességvektor modulusát pedig v-vel.

A vektorok összeadásának (kivonásának) szabályai különböznek a skaláris mennyiségek összeadásának (kivonásának) szabályaitól.

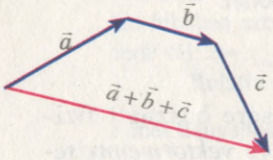
ЧОПСЬКА СЕРЕДНЯ ШКОЛА №17



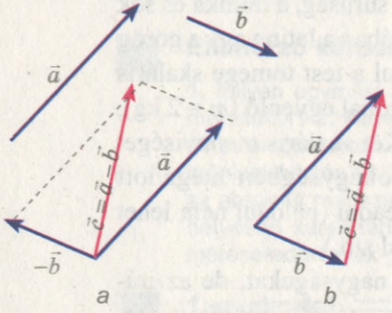
4.1. ábra. Két $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összegének meghatározása a paralelogramma-szabály alapján: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



4.2. ábra. Két $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor összegének meghatározása a háromszög-szabály alapján: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



4.3. ábra. Három $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektor összegének meghatározása



4.4. ábra. Két vektor különbségének meghatározása két módszerrel: a) az $\vec{a}$ vektorhoz hozzáadják a $\vec{b}$ ellentett vektorát: $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ vagyis $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; b) az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat úgy helyezik el, hogy egy pontból induljanak ki, a $\vec{c}$ vektor, amelyik a $\vec{b}$ vektor végpontját összeköti az $\vec{a}$ végpontjával, megegyezik az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségével, vagyis $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Két vektor összegét a paralelogramma- vagy a háromszög-szabály szerint határozzák meg (4.1. és 4.2. ábrák).

A 4.3. és a 4.4. ábrák azt mutatják, hogyan *kell meghatározni több vektor összegét és két vektor különbségét.*

Az $\vec{a}$ *vektormennyiség skaláris k mennyiséggel való szorzásakor* a $\vec{c}$ vektort kapjuk (4.5. ábra).

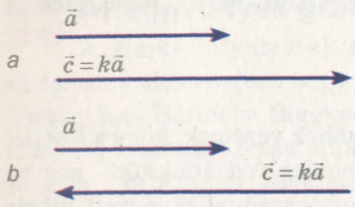
Figyeljétek meg: a fizikában a skaláris és vektormennyiségek abszolút értékének a számértéken kívül mértékegységeik is vannak. A szorzatuk egységét úgy határozzuk meg, mint a vektormennyiség és a skaláris mennyiség egységének szorzatát. Tegyük fel, hogy meg kell határozni annak a repülőgépnek az elmozdulását, amelyik 0,5 óráig repült észak felé állandó, 500 km/h sebességgel. Az elmozdulásvektor képlete $\vec{s} = \vec{v}t$. Mivel $t > 0$, ezért az elmozdulásvektor a sebességvektor $\vec{v}$ irányába mutat, és az elmozdulásvektor abszolút értéke egyenlő: $s = vt = 500 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} = 250 \text{ km}$.

2 Hogyan kell meghatározni a vektor koordinátatengelyre eső vetületét?

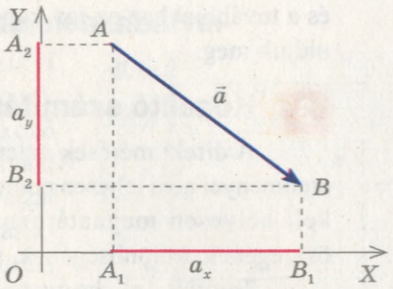
A vektorokkal sokkal bonyolultabb matematikai műveleteket végezni, mint a skaláris mennyiségekkel, ezért a feladatok megoldása során a vektoros fizikai mennyiségekről áttérnek a koordinátatengelyre eső vetületeikre.

Feküdjön az $\vec{a}$ vektor egy síkban az OX és OY tengelyekkel (4.6. ábra). Az A pontból (az $\vec{a}$ vektor kezdete) és a B pontból (az $\vec{a}$ vektor végpontja) merőlegeseket bocsátunk az OX tengelyre. Ezeknek a merőlegeseknek a végpontjait – az A_1 és B_1 pontokat – *az A és a B pontok OX tengelyre eső vetületének nevezzük*, az A_1B_1 *szakaszt pedig az* $\vec{a}$ *vektor OX tengelyre eső vetületének*. A vektor vetületét ugyanazzal a betűvel jelölik mint magát a vektort, az alsó indexben jelölve a tengelyt, például: a_x. Ha az $\vec{a}$ vektor végpontjaiból merőlegeseket bocsátunk az OY tengelyre, akkor az A_2B_2 szakaszt, az $\vec{a}$ vektor OY tengelyre eső vetületét kapjuk (a_y).

A vektor vetülete skaláris mennyiség. Előjele a vektor és a koordinátatengely irányától függ. A



4.5. ábra. Az $\vec{a}$ vektor k skalárissal való szorzatának meghatározása: a $\vec{c}$ vektor abszolút értéke egyenlő a skaláris abszolút értékének és az $\vec{a}$ vektor modulusának szorzatával, vagyis $c = |k|a$. Ha $k > 0$, a $\vec{c}$ és $\vec{a}$ vektorok azonos irányúak (*a*); ha $k < 0$, akkor a $\vec{c}$ és az $\vec{a}$ vektorok ellentétes irányúak (*b*)

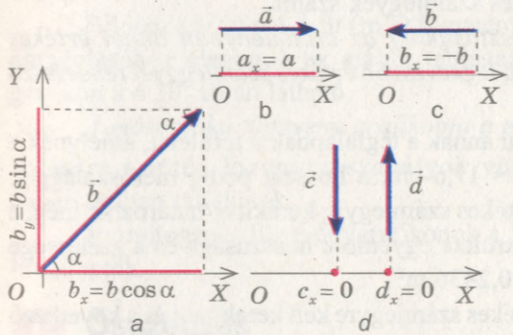


4.6. ábra. A vektor koordinátatengelyekre eső vetületeinek meghatározása; a_x az $\vec{a}$ vektor OX tengelyre eső vetülete, $a_x > 0$; a_y az $\vec{a}$ vektor OY tengelyre eső vetülete, $a_y < 0$

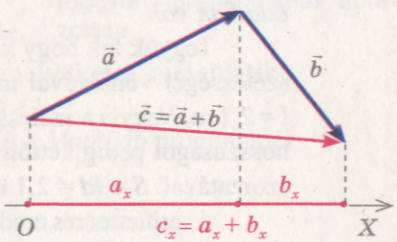
vektor tengelyre eső vetületét *pozitívnak* tekintjük, ha a vektor vetületének kezdőpontjától a vektor vetületének végpontjáig a tengely irányában kell haladni (lásd a 4.6. ábrát). A vektor vetülete negatív, ha a vektor vetületének kezdőpontjától a vektor vetületének végpontjáig a tengely irányával szemben kell haladni.

Általános esetben a vektor vetületét egyszerű geometriai módszerekkel határozzák meg (4.7. *a* ábra). A gyakorlatban gyakran előfordulnak olyan esetek, amikor a vektor párhuzamos, vagy éppen merőleges a koordinátatengelyre. Ha a vektor párhuzamos a koordinátatengellyel, iránya pedig megegyezik a tengely irányával, akkor vetülete erre a tengelyre pozitív, és egyenlő a vektor abszolút értékével (4.7. *b* ábra). Ha a vektor iránya ellentétes a tengely irányával, akkor a vetülete erre a tengelyre megegyezik a vektor ellentett előjellel vett abszolút értékével (4.7. *c* ábra). Ha a vektor merőleges a koordinátatengelyre, akkor a vetülete erre a tengelyre nullával egyenlő (4.7. *d* ábra).

A vetületek nagyon fontos tulajdonsága, *hogy két vagy több vektor vetülete a koordinátatengelyre egyenlő ezen vektorok adott tengelyre eső vetületeinek algebrai összegével* (4.8. ábra). Épp ez a tulajdonság teszi lehetővé azt, hogy az egyenletben a vektormennyiségeket felcseréljük a vetületeikkel – vagyis skaláris mennyiségekkel –,



4.7. ábra. A vektor koordinátatengelyre eső vetületének meghatározása: *a*) a vektor α szögben hajlik a koordinátatengelyhez; *b*), *c*) a vektor párhuzamos a koordinátatengelyekkel; *d*) a vektor merőleges a koordinátatengelyekre



4.8. ábra. A vektorok összegének vetülete egyenlő a vektorok vetületeinek összegével: ha $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, akkor $c_x = a_x + b_x$

és a továbbiakban az így kapott egyenletet már a megszokott algebrai módszerekkel oldjuk meg.

3 Közelítő számítások

A direkt mérések véletlen és rendszeres hibái ahhoz vezetnek, hogy a kísérlet eredményei nem teljesen pontosak, vagyis csak *megközelítőek*. Azt járjuk körül, hogyan kell helyesen meghatározni néhány, különböző pontossággal elvégzett mérés összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának közelítő értékét.

Tegyük fel, hogy néhány test tömegét különböző mérlegekkel (különböző pontossági osztályúval) mérték meg, és a következő eredményeket kapták: $m_1 = 31{,}4$ kg, $m_2 = 230$ g, $m_3 = 27{,}8$ kg, $m_4 = 114{,}2$ g. Az első és a harmadik esetben a méréseket 100 g pontossággal végezték el, a másodikban 1 g, míg a negyedikben 100 mg. Meg kell határozni a megmért testek össztömegét. Ha figyelmen kívül hagyjuk a mérések pontosságát, felírhatjuk:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 =$$
$$= 31{,}4 \text{ kg} + 0{,}240 \text{ kg} + 27{,}8 \text{ kg} + 0{,}1142 \text{ kg} = 59{,}5542 \text{ kg}.$$

Nyilvánvaló, hogy a felírt összegben az utolsó három számjegynek valójában nincs értelme, mivel ismeretlenek a századok, ezredek és tízezredek az első és a harmadik összeadandóban. Ezért a mérések eredményeit tizedekre kell kerekíteni, majd kiszámítani az összeget:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 =$$
$$= 31{,}4 \text{ kg} + 0{,}2 \text{ kg} + 27{,}8 \text{ kg} + 0{,}1 \text{ kg} = 59{,}5 \text{ kg}.$$

Ha több mérés eredményének összegét kell meghatározni, előbb megállapítjuk azt a helyiértéket (az utolsó értékes számjegyet), amelyik mindegyik tagban szerepel és erre az értékre kerekítve adjuk meg a végeredményt. Kivonáskor hasonló az eljárás.

Az méréseredmények szorzásakor, illetve osztásakor nem a mennyiségek nagyságrendje a fontos, hanem az értékes számjegyek száma.

Az eredmények szorzásakor (osztásakor) az eredményben annyi értékes számjegyet hagyunk meg, mint amennyi a legkevesebb értékes számjeggyel rendelkező adatban volt.

Tegyük fel, hogy ki kell számítani annak a téglalapnak a területét, amelynek a szélességét vonalzóval mérték meg: $d = 11{,}6$ cm, a hosszát pedig mérőszalaggal: $l = 2{,}1$ m. Vagyis a szélességet három értékes számjegyig kerekítve határozták meg, a hosszúságot pedig kettőig. A téglalap területe egyenlő a hosszúsága és a szélessége szorzatával: $S = ld = 2{,}1 \text{ m} \cdot 0{,}116 \text{ m} = 0{,}2436 \text{ m}^2$.

A területmérés eredményét két értékes számjegyre kell kerekíteni és a következő formában felírni: $S = 0{,}24 \text{ m}^2 = 2{,}4 \text{ m} \cdot 10^{-1}\text{m}^2 = 2{,}4 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$.

Figyeljétek meg, hogy ebben az esetben az eredmény nem írható fel $S = 2400 \text{ cm}^2$ vagy $S = 2{,}40 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2$ alakban, mert ez azt jelentené, hogy az utolsó számjegy nulla, holott erről semmi biztosat nem állíthatunk.

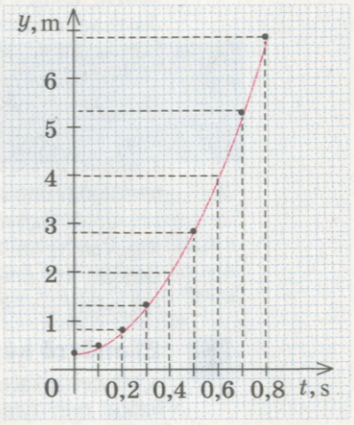
4 A függvények grafikonjai és ábrázolásuk szabályai

A fiziki folyamatok megértésében és a fizikai vizsgálatok elemzésében nagy szerepet játszik a grafikonok ábrázolása. Bármely függvény grafikonja a következő általános módszer szerint ábrázolható: az ábrázolni kívánt függvénygrafikonhoz táblázatot állítanak össze; a táblázat egyik sorában feltüntetik az argumentum értékeit, a másikban az ezek alapján kiszámított függvényértéket. Ezután milliméterpapíron megrajzolják az abszcisszatengelyt (az argumentumérték tengelyét) és az ordinátatengelyt (a függvényérték tengelyét), a táblázatnak megfelelően feltüntetik a pontokat és ezek alapján sima görbét rajzolnak.

Például az $y(t) = 10t^2 + 0{,}4$ (m) ábrázolásához a következő táblázatot lehet összeállítani:

t, s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y(t)$, m	0,4	0,5	0,8	1,3	2,0	2,9	4,0	5,3	6,8

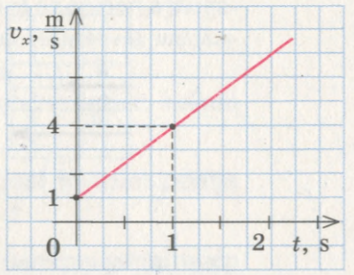
A grafikon olyan alakú, mint az a 4.9. ábrán látható. Hasonlóképpen ábrázolható más függvény grafikonja is. Sok pontot meghatározni a grafikon ábrázolásához nem mindig kényelmes, sőt nem is fontos. A matematika tananyagából tudjátok, hogy például a lineáris függvény grafikonja egyenes és azt is, hogy két adott ponton át egyetlen egyenes halad át. Tehát *bármely lineáris függvény grafikonjának megrajzolásához elegendő meghatározni két pontjának a helyzetét és ezeken a pontokon keresztül egyenest húzni.*



4.9. ábra. Az $y(t) = 10t^2 + 0{,}4$ (m) függvény grafikonjának ábrázolása pontok alapján. A vízszintes tengelyen a t, a függőlegesen az y értéke van feltüntetve

Például a $v_x(t) = 1 + 3t$ (m/s) függvény grafikonjának ábrázolásához elegendő az alábbi táblázat. A függvénygrafikon a 4.10. ábrán látható.

t, s	0	1
v_x, (m/s)	1	4



4.10. ábra. A $v_x(t) = 1 + 3t$ (m/s) függvény grafikonjának ábrázolása

A másodfokú függvény grafikonja a parabola. Ábrázolására szintén bizonyos szabályok vonatkoznak, amelyeket a matematika tananyagában tanultatok.

Számítógépes függvénygrafikonok a *Mathematika* és a *MathLab* programmal készíthetők.

! Összegzés

Geometriai tulajdonságaik alapján a fizikai mennyiségeket skalárisokra és vektormennyiségekre oszthatjuk.

Két skaláris mennyiséget összeadni annyit jelent, mint összeadni az azonos egységben megadott értéküket.

Ha több mérés eredményének összegét kell meghatározni, előbb kerekíteni kell azokat addig a helyiértékig, ami az utolsó a legkisebb tizedes tört résszel rendelkező összeadandóban van, és azután elvégezni az összeadást. A méréseredmények kivonásakor hasonló az eljárás. Az eredmények szorzásakor (osztásakor) az eredményben annyi értékes számjegyet hagyunk meg, mint amennyi a legkevesebb értékes számjeggyel rendelkező adatban volt.

A vektor olyan irányított szakasz, amelynek hossza és iránya is van. Az irányított szakasz hosszát a vektor abszolút értékének nevezzük. Két vektor összegét a paralelogramma- vagy a háromszög- szabály szerint határozzák meg.

A fizikai folyamatok leírására gyakran használják a grafikonokat. A lineáris függvény grafikonja – az egyenes. Ennek a grafikonnak az ábrázolásához elegendő ismerni két pontjának a helyzetét és egyenest húzni rajtuk keresztül. A másodfokú függvény grafikonja – a parabola.

Ellenőrző kérdések

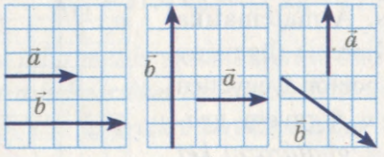
1. Milyen fizikai mennyiségeket neveznek skalárisoknak? Hozzatok fel példákat! **2.** Milyen fizikai mennyiségeket neveznek vektormennyiségeknek? Hozzatok fel példákat! **3.** Fogalmazzátok meg a vektorok összeadásának és kivonásának szabályait, a vektor skaláris mennyiséggel való szorzásának szabályát! **4.** Milyen szabály szerint kell eljárni több mérés eredményének összeadásakor vagy kivonásakor? A szorzatuk vagy hányadosuk kiszámításakor? **5.** Mi a lineáris függvény grafikonja? Milyen szabály szerint kell megrajzolni? Mi a másodfokú függvény grafikonja?

2. gyakorlat

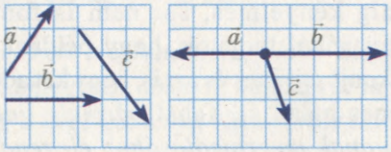
1. Össze lehet-e adni a sebességvektort az erő vektorával? Miért?

2. Rajzoljátok át a füzetetekbe az 1. ábrát! Minden esetben határozzátok meg két vektor összegét és különbségét!

3. Rajzoljátok át a füzetetekbe a 2. ábrát! Minden esetben határozzátok meg három vektor összegét és különbségét!



1. ábra

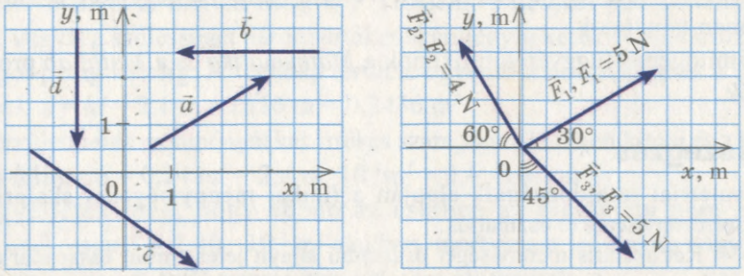


2. ábra

4. Határozzátok meg a vektorok koordinátatengelyekre eső vetületét (3. ábra)!

5. A tanuló megmérte egy fahasáb méreteit és a következő eredményeket kapta: $l = 6{,}3$ cm, $d = 12{,}1$ cm, $h = 84$ mm. Számítsátok ki a hasáb térfogatát!

6. Ábrázoljátok a függvény grafikonját: a) $y = 2x - 6$; b) $v_x = -3t + 9$; c) $y = -x^2 + 4x - 4$; d) $s_x(t) = t^2 + t$; e) $x(t) = 2t^2 - 4t - 6$.



3. ábra

1. FEJEZET. KINEMATIKA

5. §. A MECHANIKA FŐ FELADATA. MECHANIKAI MOZGÁS. KOORDINÁTA-RENDSZEREK ÉS VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK

?! A tehervonat 50 km/h sebességgel halad. Mögötte 1 km-rel egy kanyar mögül megjelenik egy gyorsvonat, amely 1 óra alatt 70 km-t tesz meg. A gyors mozdonyvezetője észreveszi az előtte haladó tehervonatot, és fékezni kezd. Ahhoz, hogy megálljon, 2 km fékútra van szüksége. Vajon bekövetkezik-e valamilyen baleset? Miért kell 2 km ahhoz, hogy a gyorsvonat megálljon? Ezekre a kérdésekre és még sok minden másra felel a fizika *Mechanika* c. fejezete. A mechanikával való ismerkedést a kinematikával kezdjük.

1 Mi a mechanikai mozgás

Valószínűleg mindannyian ismeritek *Epheszoszi Hérakleitosz* (i. e. VI. sz. vége – i. e. V. sz. eleje) ógörög filozófus kijelentését: „Minden mozgásban van, semmi sem marad változatlan." Másképpen mondva, a világon minden mozgásban van. A mozgás legegyszerűbb formája a *mechanikai mozgás*.

A **mechanikai mozgás** a test vagy részeinek más testekhez viszonyított térbeli helyzetváltoztatása az idő múlásával.

Emlékeztetünk arra, hogy a világmindenséget a benne található anyagi testek méretei alapján három szintre osztják: *mikrovilág*, *makrovilág* és *megavilág*. A mikrovilághoz tartoznak az atomok, molekulák és a részecskék, amelyek őket alkotják; a makrovilághoz a bolygók, az embert körülvevő fizikai testek, maga az ember; a megavilághoz a csillagok, galaktikák és más hatalmas kozmikus objektumok. *A mechanikai mozgás a makro- és a megavilág objektumainak mozgása.*

A mechanikai mozgást feltételesen két legegyszerűbb fajtára osztják: *haladó mozgásra*, illetve *forgó mozgásra*.

Haladó mozgás a test olyan mozgása, amikor a test minden pontja egyformán mozog.

Haladó mozgást végez a metró mozgólépcsője, a kurzor a számítógép monitorján, a vonat a pálya egyenes szakaszán stb. *A haladó mozgás közben bármely, a testben képzeletben meghúzott egyenes párhuzamos marad önmagával* (5.1. ábra)

Forgó mozgás vagy körmozgás a test olyan mozgása, amikor a test minden pontja olyan körvonalak mentén mozog, amelyek középpontjai egy egyenes, a forgástengely mentén helyezkednek el.

A Föld napi forgása, a búgócsiga forgása, a Föld Nap körüli forgása – mindezek a forgó mozgás példái.



5.1. ábra. A gépkocsi karosszériájának mozgása haladó; kerekeinek mozgása nem tekinthető haladónak, ez a mozgás a forgó és a haladó mozgás összetevése

Ha a kerékpárt kerekeivel felfelé fordítjuk és megforgatjuk, a kerekek forgó mozgása lesz az eredmény; eközben az egyes kerekek forgástengelye az a tengely lesz, amellyel a kerékpár vázához rögzítették. A kerékpár megszokott mozgása során a kerék egyes pontjai bonyolultabb mozgást végeznek, ami a haladó és a forgó mozgás összetevéséből áll. Meg kell jegyeznünk, hogy általában bármely test mozgása a haladó és a forgó mozgás összege.

2 Mit tanulmányoz a mechanika?

A **mechanika** az anyagi testek mechanikai mozgásáról és az eközben végbemenő kölcsönhatásokról szóló tudomány.

A **mechanika fő feladata** az anyagi testek mechanikai mozgására, a testek kölcsönhatására vonatkozó törvények feltárása; a test viselkedésének előrejelzése a mechanika törvényei alapján; a test mechanikai helyzetének (koordinátáinak és sebességének) meghatározása bármely időpontban.

Például Newton mechanikájának fényes sikere volt a Naprendszer bolygóinak mozgására vonatkozó törvények felismerése, a napfogyatkozások idejének jövőbeni és múltbeli megállapítása.

A mechanikával való ismerkedést hagyományosan a *kinematikával* kezdjük.

A **kinematika** (*kinematos* – mozgás, görög szóból ered) a mechanikának az a fejezete, amely a testek mozgását tanulmányozza, eközben nem foglalkozik a mozgást kiváltó okokkal.

Másképpen fogalmazva, a kinematika nem felel az olyan típusú kérdésekre: „Miért kell 2 km ahhoz, hogy megálljon a gyorsvonat?" – csupán a *mozgás leírásával* foglalkozik. A *mozgás megváltozásának okait* a mechanika részét képező *dinamika* vizsgálja.

3 Miért nem oldható meg a vonatkoztatási rendszer kiválasztása nélkül a mechanika fő feladata?

Figyeljétek meg: bármilyen mechanikai mozgás viszonylagos. A természetben nincsenek mozdulatlan testek, tehát nincs semmiféle abszolút megfelelő test, amihez képest a többi test mozgása tanulmányozható. Ezért a feladattól függően a megfigyelő kiválaszt egy tárgyat, és feltételesen mozdulatlannak tekintve azt, ehhez képest vizsgálja a többi test mozgását. Ezt a testet vonatkoztatási testnek nevezzük.

A **vonatkoztatási testen** egy olyan testet értünk, amely az adott feladat feltételei mellett mozdulatlannak tekinthető, és amelyhez képest az adott feladatban vizsgálandó többi test mozgását tanulmányozzuk.

Általában bármely test kiválasztható vonatkoztatási testként, természetesen a célszerűség figyelembevételével. Így például, ha a vonat A pontból B pontba való mozgását kell megfigyelni, akkor vonatkoztatási testként célszerű valamely, a Fölhöz képest mozdulatlan testet választani, mondjuk a vasútállomást. Viszont, ha az utas vonaton belüli mozgását vizsgáljuk, akkor vonatkoztatási testként célszerű a vagon polcát, vagy bármely más, a vonathoz képest mozdulatlan tárgyat választani.

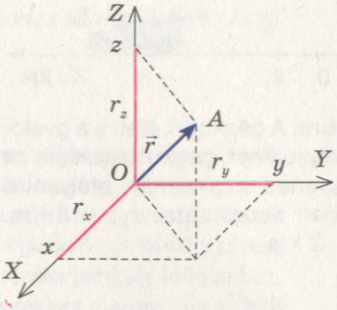
A mechanikai mozgás térben és időben megy végbe, ezért leírásához mindenekelőtt a test térbeli helyzetét kell tudnunk meghatározni. Ezért a vonatkoztatási testhez hozzárendelik a koordináta-rendszert.

Kényelmes a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer használata, amelyet *három* kölcsönösen merőleges *koordinátatengely* (*OX*, *OY*, *OZ*)* alkot, amelyek egy pontban, a *koordináta-rendszer kezdőpontjában* metszik egymást. A tengelyeken a távolságokat tüntetik fel a kiválasztott hosszmértékben, például méterekben. A koordináta-rendszer kezdőpontjától a tengely irányában mért távolságokat *pozitívnak* tekintjük, az ellenkező irányút pedig *negatívnak*. A kiválasztott koordináta-rendszerben a test térbeli helyzetét három koordináta (x, y, z) vagy az ($\vec{r}$) *helyvektor* adja meg (5.2. ábra).

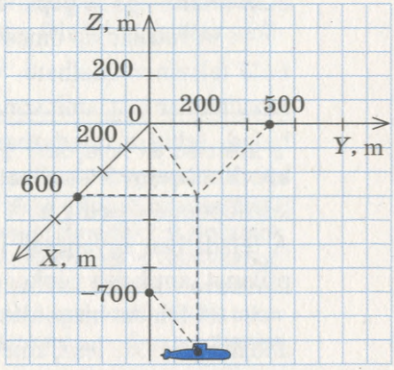
A **helyvektoron** egy olyan vektort értünk, amelyik tetszőleges időpontban összeköti a koordináta-rendszer kezdőpontját a testtel.

Például egy tengeralattjáró helyzetének megadásához (5.3. ábra), előbb ki kell választani a viszonyítási testet (például a kikötő épületét), azután hozzákötni a koordinátatengelyeket (*OX*, *OY*, *OZ*), amelyeken megadjuk az egységnyi szakaszt (200 m). Ennek megfelelően az *A* pont helyzetét a tengeralattjárón három koordináta adja meg: $x = 600$ m, $y = 500$ m, $z = -700$ m.

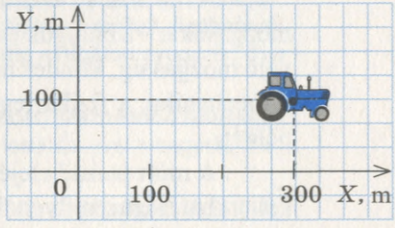
A gyakorlatban gyakran van dolgunk olyan mozgásokkal, amelyek síkban mennek végbe (a csónak mozgása a vízen, a sportoló futása a stadion atlétikai pályáján), vagy egy egyenes mentén (a gépkocsi, illetve a gyalogos mozgása az út egyenes szakaszán, a függőlegesen lehulló kő). Ezekben az esetekben elegendő megfelelően *kétdimenziós* (5.4. ábra) vagy *egydimenziós* (5.5. ábra) koordináta-rendszer alkalmazása.



5.2. ábra. A pont helyzetét a térben három koordináta (x; y; z) vagy az ($\vec{r}$) helyvektor adja meg. A helyvektor koordinátatengelyekre eső vetületei megegyeznek a pont koordinátáival: $r_x = x$; $r_y = y$; $r_z = z$

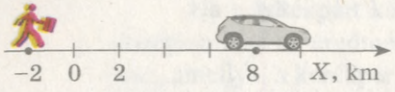


5.3. ábra. A tengeralattjáró helyzetét a térben három koordináta segítségével lehet megadni: $x = 600$ m, $y = 500$ m, $z = -700$ m



5.4. ábra. Ahhoz, hogy meghatározzuk a traktor helyzetét a mezőn, elegendő két koordinátájának az ismerete: $x = 300$ m, $y = 100$ m

* Minden egyes tengely irányát valamely testhez kötik, ezért négy testnek kell lennie, amelyekhez képest a mozgást vizsgálják (három test, amihez a koordinátatengelyeket rögzítik, valamint a vonatkoztatási test). Éppen *négy test adja meg a koordináta-rendszert*.



5.5. ábra. A gépkocsi, illetve a gyalogos helyzetének meghatározására az út egyenes szakaszán elegendő egyetlen koordináta: $x_{GK} = 8$ km, $x_{GY} = -2$ km

Ahhoz, hogy bármely időpontban meghatározhassuk a test helyzetét, nem elegendő megadni a koordináta-rendszert és hozzárendelni azt a viszonyítási testhez, időmérő műszerre is szükség van.

A viszonyítási test, a hozzárendelt koordináta-rendszer és az időmérő műszer alkotják a **vonatkoztatási rendszert**.

Figyeljétek meg: lehetetlen képet alkotni a mechanikai mozgásról a vonatkoztatási rendszer (*a továbbiakban VR*) kijelölése nélkül. Áttekintünk egy, a legegyszerűbb mechanikai mozgásról szóló példát.

Feladat. A gépkocsi A pontból B pontba tart az egyenes autóúton. A közöttük lévő távolság 100 km. Hol lesz az autó 1 óra elteltével, ha a teljes távolságot 2 óra alatt teszi meg? A gépkocsi sebességét állandónak tekintjük.

A feladatban nincs meghatározva a viszonyítási test, de nyilvánvaló, hogy ez a Föld felszínén található. Vagyis a Föld ebben az esetben alkalmas, mint feltételesen mozdulatlan test, amit vonatkoztatási testnek választanak. A gépkocsi egyenes autóúton halad, tehát a feladatban egydimenziós koordináta-rendszert kell használni. A koordinátaegyenest célszerű az AB egyenes mentén irányítani, a koordináta-rendszer kezdőpontjául pedig az A pontot választani. Az egységnyi szakasz már adott – 1 km. A feladatban ugyancsak ismert az idő egysége (1 óra) és az időmérés kezdete (az a pillanat, amikor a gépkocsi kiindult az A pontból).

A feladat megoldásakor könnyen meghatározzuk, hogy 1 óra múlva a gépkocsi abban a pontban lesz, amelynek a koordinátája $x = 50$ km. Ugyancsak meghatározható a gépkocsi helyzete A pontból B-be tartó mozgásának bármely más időpontjában, más szavakkal, meg lehet oldani a mechanika fő feladatát.

4 Milyen feladatokat old meg a mechanika napjainkban?

A mechanika azokat a törvényeket tanulmányozza, amelyek leírják a különböző mozgásokat – a bolygók és az űrhajók mozgásától a gáz, illetve a kőolaj csővezetékben való mozgásáig. Mindez nagyon fontos az emberek gyakorlati tevékenységében. Ezért a mechanika, a fizika legrégebbi része, ma is intenzíven fejlődik. Lássunk néhány példát.

A múlt század elején erős lökést adott a mechanika fejlődésének a repülés: meg kellett határozni, milyen formájúnak kell lennie a repülőgép szárnyának ahhoz, hogy a felhajtóerő a lehető legnagyobb legyen, milyennek kell lennie a repülőgép törzsének, hogy a hangsebesség felett a légellenállás minimális legyen stb.

A XX. század közepétől számos, az űrrepüléssel kapcsolatos feladat merült fel. Ilyen például a rakéta pályájának kiszámítása.

A XX. század végétől nagy figyelmet szentelnek a nem lineáris rezgéseknek – a nagy amplitúdójú rezgéseknek (nemlineáris rezgés éri például a földfelszínt a Richter-skála szerinti 6–7-es erősségű földrengéskor). A nemlineáris rezgésekkel foglalkoztak

például *Mikola Mikolajovics Krilov, Mikolaj Mitrofanovics Boholjubov, Jurij Olekszijovics Mitropolszkij* ukrán fizikusok.

Összegzés

A mechanika az anyagi testek mega-, illetve makrovilágban végbemenő mozgásáról, valamint az eközben végbemenő kölcsönhatásokról szóló tudomány.

A mechanika fő feladata az anyagi testek mechanikai mozgására, a testek kölcsönhatására vonatkozó törvények feltárása, illetve a test viselkedésének előrejelzése a mechanika törvényei alapján; a test helyzetének meghatározása bármely időpontban.

A mechanikai mozgás a test vagy részeinek más testekhez viszonyított térbeli helyzetváltoztatása az idő múlásával. A mozgás legegyszerűbb fajtái – a haladó és a forgó mozgás. A haladó mozgás során a test minden egyes pontja egymással párhuzamos egyenesek szakaszain mozog. Forgó mozgáskor a test pontjai olyan körvonalak mentén mozognak, amelyek középpontjai a forgástengelyen helyezkednek el. A gyakorlatban a test általában mindkét mozgásfajtát egy időben végzi.

Bármely mozgás térben és időben zajlik. A vonatkoztatási test, a hozzákapcsolt koordináta-rendszer és az idő mérésére szolgáló műszer alkotják a vonatkoztatási rendszert (VR). Bármilyen mechanikai mozgással kapcsolatos feladat megoldása során kötelező a vonatkoztatási rendszer kiválasztása.

Ellenőrző kérdések

1. Adjátok meg a mechanikai mozgás meghatározását! **2.** Soroljatok fel példákat a mechanikai mozgásra! **3.** Milyen mozgást nevezünk haladónak? forgónak? **4.** Mit tanulmányoz a mechanika? **5.** Mi a mechanika fő feladata? **6.** Mi a vonatkoztatási test? **7.** Mi a koordináta-rendszer? **8.** Milyen koordináta-rendszereket ismertek? **9.** Hozzatok fel példákat arra, milyen esetekben alkalmazzák a háromdimenziós derékszögű koordináta-rendszert; a kétdimenzióst; az egydimenziót! **10.** Mit nevezünk vonatkoztatási rendszernek? Miért van szükség benne időmérő eszközre? **11.** Mit takar a vonatkoztatási rendszer kiválasztása kifejezés? **12.** Soroljátok fel a modern mechanika néhány aktuális feladatát!

3. gyakorlat

1. Haladó mozgásnak tekinthető-e a hátizsákotok mozgása, amikor felemelitek a padlóról és leteszitek (forgatás nélkül) a padra? Amikor a lépcsőn lefelé haladva lóbáljátok?

2. Melyik vonatkoztatási testhez viszonyítva vizsgálják a mozgást, amikor azt mondják, hogy: a) a folyó vizének áramlási sebessége 3 m/s; b) a gépkocsi mellett elsuhannak az út menti póznák; c) a nap reggel keleten kel, este pedig nyugaton nyugszik; d) a kalap mozdulatlanul fekszik a folyó vizén?

3. Milyen koordináta-rendszert (egy-, két- vagy háromdimenziót) használtok a következő mozgások vizsgálatakor: a méh repülése; korcsolyázás; lesiklás sível a hegyről; a kő esése; a lift mozgása; 60 m-es síkfutás; futballozás?

4. Adottak a következő pontok koordinátái: *A* (–10); *B* (100); *C* (-5; 6); *D* (0,3; 0,8); *E* (4; 6; 8). Rajzoljátok le a füzetetekbe a megfelelő koordináta-rendszereket, és tüntessétek fel a megadott pontokat!

5. Képzeljétek el, hogy négy barátotok e-mailben találkozóra hív benneteket. Egyikük ezt írta: „Találkozzunk 15.00 órakor 100 m-re a Narancs kávézótól"; a második: „Találkozzunk 15.00 órakor 100 m-re a Narancs kávézótól a legközelebbi metróállomás irányában"; a harmadik „Találkozzunk 15.00 órakor"; a negyedik: „Találkozzunk 100 m-re a Narancs kávézótól a legközelebbi metróállomás irányában." Melyik barátotokkal jön létre biztosan a találkozó? Miért nem valószínű ez a többiek esetében?

Kísérleti feladat

„Hozzatok létre" a tanteremben Descartes-féle koordináta-rendszert (az *XOY* sík legyen a padló síkja, az *YOZ* sík annak a falnak a síkja, ahol a tábla függ; az *XOZ* sík annak a falnak a síkja, ahol az ablakok vannak)! Határozzátok meg néhány, az osztályteremben lévő tárgy helyzetét, például a székeketét, az osztálykönyvét a tanári asztalon, az ajtókilincsét stb.

FIZIKA ÉS TECHNIKA UKRAJNÁBAN



J. Sz. Jackiv

Ukrajna Tudományos Akadémiájának fő csillagászati obszervatóriuma (FCSO) (Kijev) – világszerte ismert tudományos intézmény, ahol tudományos kutatásokat végeznek a kozmikus geodinamika, a Nap és a Naprendszer testeinek fizikája, a csillagok és a galaxisok evolúciója, plazmafizika stb. témakörökben.

A tudományos megfigyelések esetében, akárcsak a gyakorlati alkalmazásokban döntő jelentőségű a vonatkoztatási rendszerek létrehozása térben és időben, például a GPS rendszer (Global Positioning System), vagy a GNSS (globális műholdas navigációs rendszer). Az FCSO Ukrajna tudományos és gazdasági objektumainak vezető tudományos központja, ami a koordináta-idő biztosításával kapcsolatos problémákat illeti. A FCSO tudósai több kutatási ciklust végeztek el a Föld pólusainak szabad, illetve kényszerített mozgásával kapcsolatban, a Föld pólusai koordinátáinak meghatározásáról a csaknem egy évszázados csillagászati megfigyelések alapján. Ez a koordinátasor a világ tudósainak körében *„kijevi sor"* néven ismert.

A FCSO akadémikus igazgatójának, az ukrán csillagászati társulás elnökének, Jaroszlav Sztepanovics Jackivnak (a fotón) a javaslatára az intézmény új technikai eszközöket alkalmaz a megfigyelésekre, amelyekkel meghatározhatóak a Föld forgásának paraméterei, valamint új megközelítésbe helyezték az égi és a földi koordináta-rendszert. Vezetése alatt létrehozták a gyenge fényerejű csillagok és a kozmikus rádiósugár-forrásainak nagypontosságú katalógusát. A tudós egy sor kozmikus program előkészítésében és végrehajtásában vállalt aktív szerepet (VEGA, SOPROG, PHOBOS, MARS). A földtengely tájolásának változását a Föld testében és a térben nyomon követő kutatásaiért René Descartes nemzetközi díjjal tüntették ki (2003).

6. §. ANYAGI PONT. MOZGÁSPÁLYA. ÚT. ELMOZDULÁS

?! Minden test óriási mennyiségű részecskéből áll. Például egy cm^3 vas 10^{23} atomot tartalmaz. Hasonlítsátok össze ezt a számot a Föld népességével, amely nagyságrendileg 10^{10}, vagyis 10 milliárd fő. Tehát az 1 cm^3-nyi vas atomjainak a száma nagyságrendekkel több, mint az emberiség lélekszáma. Ahhoz, hogy meghatározzuk a test térbeli helyzetét, szigorúan véve minden egyes pontjának a térbeli helyzetét meg kellene határozni. Vagyis a mechanika fő feladata megoldhatatlan? Valóban így van? És vajon minden esetben ésszerű a test mozgásának vizsgálatakor minden egyes pontjának mozgását áttekinteni?

1 Minden esetben anyagi pontnak tekinthető-e a test?

A mechanikában az anyagi testet a méretei, formája és tömege írja le. Például a 6400 km sugarú Föld gömb alakú, a tömege körülbelül $6 \cdot 10^{24}$ kg.

Felmerül a kérdés: a test mozgásának leírásakor vajon minden esetben szükség van a formájának, illetve tömegének az ismeretére? Megvizsgáljuk valamely próbatest haladó mozgását. Az ilyen mozgás során a test minden egyes pontja egyformán mozog. Ezért elegendő kiválasztani a próbatest egy kicsiny részét és a teljes test „képviselőjének" tekinteni a mozgás során. Ennek a résznek a térbeli helyzetéhez kötjük a teljes test tömegét és elnevezzük *anyagi pontnak.*

Az anyagi pont a test mozgása leírásának leegyszerűsítésére szolgáló fizikai modell, ami egy olyan testnek felel meg, amelynek méretei az adott feladat feltételei mellett elhanyagolhatók.

Az „anyagi pont" modelljének alkalmazási területe behatárolt. Így, a vonat két vasútállomás közötti mozgását vizsgálva a vonat anyagi pontnak tekinthető. Azonban, ha a vonat megáll az állomáson, ez a modell nem működik, hiszen például az utasoknak ismerniük kell a szerelvény vagonjainak a számát, vagyis figyelembe kell venniük a méreteit. Ha a test körmozgást végez és a test pontjai által leírt körvonalak sugarai jelentősen meghaladják a test méreteit, akkor ebben az esetben is anyagi pontnak tekinthetjük a testet. Például az „anyagi pont" modelljének segítségével leírható a Föld Nap körüli mozgása. Eközben a Föld napi forgásának leírására természetesen nem alkalmas ez a modell.

A továbbiakban, hacsak nincsenek különleges kitételek, ***az adott testet anyagi pontnak tekintjük.***

2 Mit nevezünk az anyagi test mozgáspályájának?

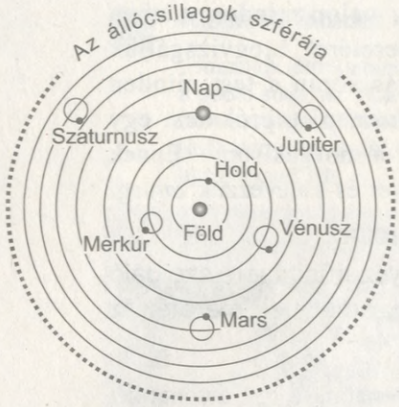
A mozgáspálya olyan képzetes vonal, amelynek sorban minden egyes pontjában előfordult a test a térben való mozgása során.

Húzzátok végig a krétát a táblán. A nyom, amit maga után hagy, a kréta mozgáspályája. Néha megfigyelhető a repülőgép mozgáspályája. A nyomok láncolata a friss hóban segít rekonstruálni az ember vagy az állat mozgáspályáját.

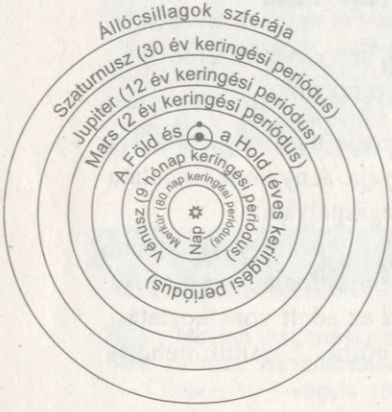
A test mozgáspályája tetszőleges lehet: ív, parabola, egyenes, töröttvonal, vagy más, bonyolult vonal. A pályák szakaszait a formájuk alapján *egyenes és görbe vonalúakra* osztják. Az első esetben a test mozgása az adott vonatkoztatási rendszerben (VR) egyenes vonal, a másodikban pedig görbe. Lássunk néhány példát.

A Föld mozgáspályája a Naprendszerben a pályája. A Föld pályája lapos, gyakorlatilag kör alakú. A Föld műholdjainak mozgáspályája valamivel bonyolultabb és két részből áll: a műhold pályára állítása és a forgó mozgása, vagyis a keringése. Ez utóbbi szintén lapos, de a formája ellipszis.

Figyeljétek meg: ***a test mozgáspályája attól függ, melyik vonatkoztatási testhez képest figyelik a mozgását***. Ezért a test mozgásának a leírásához fontos olyan vonatkoztatási rendszert választani, amelyben mozgáspályája a lehető legegyszerűbb. A szemléletesség kedvéért lássunk egy történelmi példát. *Klau-*



6.1. ábra. A világegyetem ptolemaioszi geocentrikus rendszere. A bolygók mozgásának megmagyarázására Ptolemaiosz kitalálta az epiciklusok rendszerét. A bolygók kis kristályszférához kapcsolódnak, ami egy nagy szférához kapcsolódik Ez utóbbi középpontjában helyezkedik el a Föld. Mindkét szféra forog, emellett mindegyik saját forgásperiódussal rendelkezik. Ptolemaiosz szerint a szférák egyidejű forgásával magyarázható a bolygók szokatlan mozgáspályája.



6.2. ábra. Kopernikusz heliocentrikus világképe. Ennek megfelelően a világegyetem középpontjában a Nap helyezkedik el, a bolygók a Nap körül körpályán keringenek

diosz Ptolemaiosz az égitestek mozgását vizsgálva azt feltételezve, hogy a világmindenség középpontjában a Föld (Geo) helyezkedik el, a *geocentrikus VR*-t javasolta, vagyis egy olyan VR-t, ami a Földhöz kötött (6.1. ábra). A bolygók mozgása ebben a rendszerben annyira bonyolult volt, hogy a kor nagyon művelt embere is nehezen tudta elképzelni, még inkább leírni. Néhány évszázaddal később *Nikolausz Kopernikusz* lengyel tudós a *heliocentrikus VR* bevezetését javasolta, vonatkoztatási testként a Napot választva (6.2. ábra). Ezzel a Naprendszer felépítésének képe egyszerűvé és érthetővé vált.

3 Miben különbözik az út az elmozdulástól?

A mozgáspálya fogalmával szoros kapcsolatban van az *út*.

Az *l* út olyan fizikai mennyiség, amelynek számbeli értéke egyenlő a mozgáspályának azzal a szakaszával, amit a test az adott időintervallum alatt megtesz.

Az út mértékegysége az SI-ben a **méter** (m).

A test által megtett út csak akkor teszi lehetővé a test helyzetének bizonyos időpontban való meghatározását, ha ismert a test mozgáspályája. Ebben az esetben elegendő a test kezdeti helyzetéből a mozgáspályája mentén a mozgás irányában feltüntetni a megtett utat.

Mi a teendő akkor, ha nem ismert a mozgáspálya? Például, ha az iskolából kilépve a tanuló 2 km-nyi utat tett meg fél óra alatt. Ebben az esetben lehetetlen megmondani, hol lesz a tanuló fél óra múlva, hiszen tetszőlegesen választhatja meg a mozgásirányt, illetve a mozgáspályát. Más a helyzet, ha ismeretes, hogy a tanuló fél óra múlva két kilométerre délre lesz az iskolától. Itt egy teljesen más fizikai mennyiségről, az *elmozdulásról* van szó.

Az $\vec{s}$ elmozdulás olyan vektormennyiség, melyet grafikusan a test kezdőpontját a végpontjával összekötő irányított egyenesszakasszal ábrázolunk.

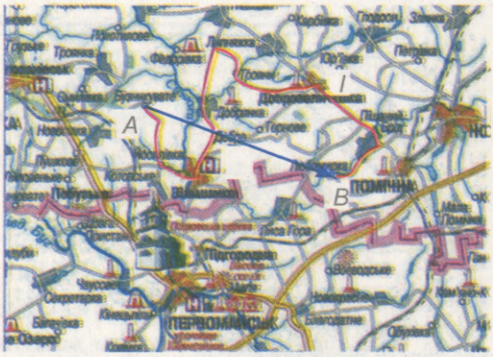
A többi vektorhoz hasonlóan az elmozdulásvektort is akkor tekintjük megadottnak, ha ismert az elmozdulás *iránya és abszolút értéke* (hossza).

Az elmozdulás mértékegysége az SI-ben a **méter** (m).

Általános esetben az elmozdulásvektor nem esik egybe a test mozgáspályájával (6.3. és 6.4. *a*, *b* ábrák), ezért a test által megtett l út nem mindig egyezik meg az elmozdulás abszolút értékével: $l \neq s$. Az út és az elmozdulás csak abban az esetben egyezik meg, ha a test egyenes mentén irányváltoztatás nélkül halad (6.4. *c* ábra).

Figyeljétek meg, *az elmozdulás minden esetben egyenlő a helyvektor változásával:*

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$$



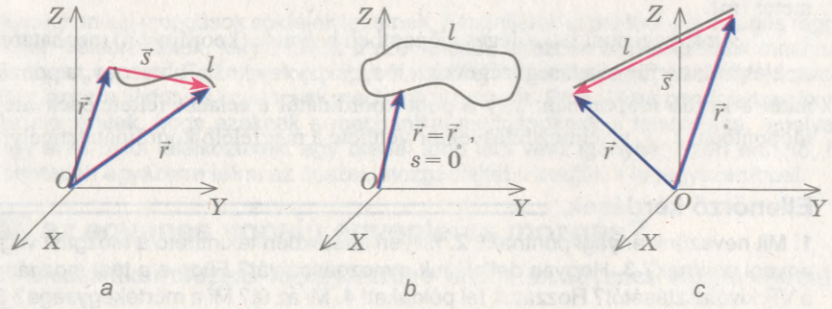
6.3. ábra. Az $\vec{s}$ elmozdulásvektor (kék színnel jelölve) azt mutatja, milyen távolságra és milyen irányban mozdult el a test a kezdeti helyzetéből az adott időtartam alatt. Az *A* pont a test kezdeti helyzete, a *B* pont a test helyzete egy adott időtartam elteltével; l a test által megtett út (piros színnel jelölve)

4 Miért kell tudnunk, hogyan állapíthatjuk meg az elmozdulás vetületét?

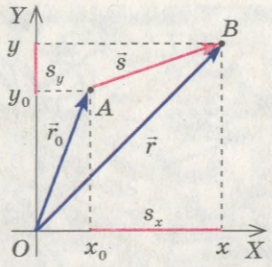
Ha ismert a test elmozdulása, akkor a test helyvektorát tetszőleges időpontban kiszámíthatjuk az alábbi képlet segítségével:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}.$$

Így meghatározható a test helyzete tetszőleges időpontban, vagyis megoldható a mechanika fő feladata. Azonban meglehetősen nehézkes vektor alakban megadott képletekkel számolni, hiszen ebben az esetben folyamatosan figyelembe kell venni a vektorok irányát. Ezért a feladatok megoldása során a vektoros egyenleteket átírják a vektorok vetületeire.



6.4. ábra. A test által megtett l út és a test s elmozdulásának abszolút értéke: *a* – a test mozgáspályája görbe vonal ($l > s$); *b* – a test mozgáspályája zárt vonal ($l \neq 0$, $s = 0$); *c* – a mozgáspálya egyenes vonalú; a mozgásirány változatlan ($l = s$). Minden esetben $\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0$



6.5. ábra. A test térbeli helyzetének vektoros, illetve koordináta-módszerrel való meghatározása közötti összefüggés

Tegyük fel, hogy a test síkban mozog az A pontból, amelynek a helyzetét az $\vec{r}_0$ helyvektor (vagy az x_0, y_0 koordináták) határozza meg, a B pontba, amit az $\vec{r}$ helyvektor (vagy az x, y koordináták) ad meg (6.5. ábra). Akkor az $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}$ egyenlet átírható a következő alakban:

$$r_x = r_{0x} + s_x; \quad r_y = r_{0y} + s_y,$$

ahol s_x és s_y az elmozdulásvektorok megfelelően az OX és OY tengelyre eső vetülete.

Mivel $r_x = x$; $r_{0x} = x_0$; $r_y = y$; ; $r_{0y} = y_0$, ezért koordinátaegyenleteket használhatunk a feladatok megoldása során:

$$x = x_0 + s_x; \quad y = y_0 + s_y$$

Összegzés

Az anyagi pont a test mozgása leírásának leegyszerűsítésére szolgáló fizikai modell, ami egy olyan testnek felel meg, amelynek méretei az adott feladat feltételei mellett elhanyagolhatók. Az anyagi pontot a térben a koordinátái írják le, valamint a tömege, ami megegyezik a test tömegével.

Az anyagi pont mozgásának vonalát a térben mozgáspályának nevezik. A mozgáspályák formájuk alapján egyenesekre, illetve görbe vonalúakra oszthatók. Egyazon anyagi pont mozgáspályája attól függ, milyen viszonyítási testhez képest vizsgáljuk a mozgását.

Az l út olyan fizikai mennyiség, amelynek számbeli értéke egyenlő a mozgáspályának azzal a szakaszával, amit a test az adott időintervallum alatt megtesz.

Az $\vec{s}$ vektor, amely az anyagi pont kezdeti időpontban való helyzetét köti össze azzal a ponttal, amelyikbe a vizsgált időpontban került az anyagi pont.

Általános esetben $l \neq s$. Az út és az elmozdulás egysége az SI-ben a méter (m).

Az anyagi pont tetszőleges időpontbeli helyzete (koordinátái) meghatározhatók az alábbi összefüggések segítségével: $x = x_0 + s_x$; $y = y_0 + s_y$, ahol x_0, y_0 a pont koordinátái a kezdő időpontban; x, y a pont koordinátái a feladat feltételének megfelelő időpontban; s_x, s_y az elmozdulásvektor vetülete a megfelelő koordinátatengelyre.

Ellenőrző kérdések

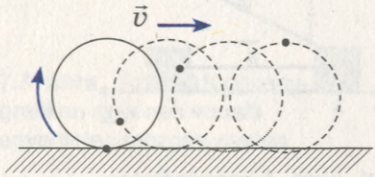
1. Mit nevezünk anyagi pontnak? **2.** Milyen esetekben tekinthető a mozgást végző test anyagi pontnak? **3.** Hogyan definiáljuk a mozgáspályát? Függ-e a test mozgáspályája a VR kiválasztásától? Hozzatok fel példákat! **4.** Mi az út? Mi a mértékegysége? **5.** Miért nem lehet minden esetben az út ismeretében meghatározni a test helyzetét? **6.** Hogyan definiáljuk az elmozdulást? **7.** Milyen esetben egyezik meg az elmozdulás abszolút értéke a megtett úttal? **8.** Írjátok le a test térbeli helyzetének meghatározására szolgáló képleteket vektoros alakban; a vetületei által!

4. gyakorlat

1. Magyarázzátok meg, milyen esetekben tekinthetjük anyagi pontnak a következő testeket: a) gépkocsi; b) rakéta; c) Föld; d) ember!
2. Rajzoljátok le a függőlegesen felszálló helikopter lapátján lévő pont mozgáspályáját a pilótához képest; a Földhöz képest!
3. Egy labdarúgó a mérőzés során kb. 10 km-t fut. Mit takar ez a szám – az utat vagy az elmozdulás abszolút értékét? Mekkora lehet minimálisan a játékos elmozdulásának abszolút értéke a mérkőzés végén?
4. Viszonylagos-e az út, illetve az elmozdulás (függ-e a koordináta-rendszer megválasztásától)?
5. Milyen testhez kell kötni a VR-t ahhoz, hogy az általatok megtett út, valamint az elmozdulás tetszőleges időpontban nulla legyen?
6. A függőlegesen feldobott labda 5 m magasra emelkedett, majd visszaesett ugyanarra a helyre, ahonnan feldobták. Határozzátok meg a labda által megtett utat, valamint az elmozdulást!
7. A gépkocsi egy olyan kanyarban halad, amit egy 20 m sugarú körvonal félköríve képez. Határozzátok meg a gépkocsi által a kanyarban megtett utat, illetve az elmozdulást!
8. A kezdő időpontban a test az $x_0 = 4$ m, $y_0 = -3$ m koordinátájú pontban volt. Egy bizonyos idő elteltével a test elmozdulása során az $x = -4$ m, $y = 3$ m koordinátájú pontba került. Rajzoljátok le az elmozdulásvektort, és határozzátok meg a koordinátatengelyekre eső vetületét! Határozzátok meg az elmozdulás abszolút értékét! Meg lehet-e határozni a feladat feltételeiből a test által megtett utat?

Kísérleti feladat

Készítsetek egy papírból kivágott kisméretű kört – egy kereket. Az „abroncsán" jelöljetek meg egy pontot. Ezután egy papírlapra rajzoljatok egy egyenest. A kereket helyezzétek rá úgy, hogy érintse a vonalat. Az egyenes mentén gurítsátok a kereket, a lapon tüntessétek fel a pont helyzetét (lásd az ábrát). Kössétek össze a kapott jeleket! Ez lesz a pont mozgáspályája a Föld felszínéhez képest. Szerkesszétek meg a pont mozgáspályáját a kerék forgástengelyéhez képest!



Szúrjátok át a papírkereket 2–3 helyen! Szerkesszétek meg ezeknek a pontoknak a mozgáspályáját a Föld felszínéhez képest, valamint a kerék forgástengelyéhez viszonyítva!

7. §. EGYENES VONALÚ EGYENLETES MOZGÁS

?! A mechanikai mozgások sokfélék lehetnek. Képzeljétek el például egy átlagos reggeleteket. Felébredtetek, kinyitottátok a szemeteket, eközben a szempillátok mechanikai mozgást végzett. Felkeltetek az ágyból, újabb mechanikai mozgás. Megnyitottátok a vízcsapot; a vízfolyás ugyancsak mechanikai mozgás. Próbáljátok gondolatban folytatni és megértitek, hogy azoknak a mechanikai mozgásoknak a felsorolása, amelyekkel egy órán belül találkoztatok, egy óránál több időt vesz igénybe. Ezért érthető, hogy lehetetlen egyszerre leírni az összes mozgásfajtát. Kezdjük a legegyszerűbbel.

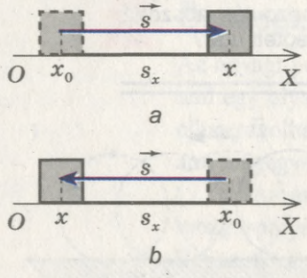
1 Mi az egyenes vonalú egyenletes mozgás?

A mechanikai mozgás legegyszerűbb fajtája az egyenes vonalú egyenletes mozgás.

Az **egyenes vonalú egyenletes mozgás** olyan mechanikai mozgás, amelynek során a test tetszőlegesen kiválasztott egyenlő időközök alatt azonos elmozdulást végez.

Egyenes vonalú egyenletes mozgást végez például a gépkocsi az egyenes útszakaszon (gyorsítás és fékezés nélkül), a folyadékban állandó sebességgel eső golyó, az ejtőernyős bizonyos idővel az ernyő kinyílását követően.

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás meghatározásából az alábbi következtetések vonhatók le. Először is, az ilyen mozgás mozgáspályája egyenes vonal, ezért leírására elegendő az egydimenziós koordináta-rendszer alkalmazása. A koordinátatengelyt, például az OX tengelyt, a test mozgásának irányában kell felvenni. Ekkor az elmozdulásvektor vagy a tengelynek megfelelő irányú vagy vele ellentétes lesz (7.1. ábra). Másodszor, azonos időtartamok alatt a test azonos elmozdulásokat végez, ezért az $\vec{s}$ elmozdulásvektor és a t időtartam hányadosa állandó lesz. A hányadost az *egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test sebességének* nevezik és a $\vec{v}$ szimbólummal jelölik.



7.1. ábra. A koordinátatengely kiválasztása egyenes vonalú egyenletes mozgás esetében: *a*) az $\vec{s}$ elmozdulásvektor iránya megegyezik a koordinátatengely irányával, ezért $s_x = s$; *b*) az $\vec{s}$ elmozdulásvektor iránya ellentétes a koordinátatengely irányával, ezért $s_x = -s$

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás $\vec{v}$ sebességének azt a fizikai vektormennyiséget nevezzük, ami a test elmozdulásának és az elmozdulásra fordított t időnek a hányadosával egyenlő:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}.$$

A meghatározásból következik, hogy *a sebességvektor iránya egybeesik a test elmozdulásának irányával, a sebesség abszolút értékét pedig a következő képlettel lehet meghatározni:*

$$v = \frac{s}{t}.$$

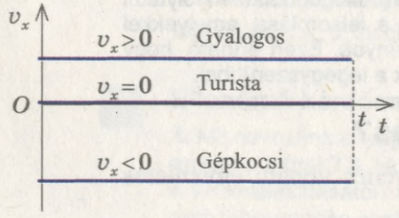
A sebesség mértékegysége az SI-ben a **méter per másodperc** (m/s).

1 m/s *annak a testnek a sebessége, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgása során* 1 s *alatt* 1 m *elmozdulást végez.*

A mozgássebesség megállapítására a *sebességmérő* szolgál.

A mozgás leírására kényelmes a grafikonok használata.

A 7.2. ábrán sebesség-idő grafikonok vetületei láthatók: a gépkocsié, a vele szemben haladó gyalogosé és az útszélen üldögélő turistáé (az OX tengely iránya megegyezik a gyalogos haladási irányával). Az időt az abszcisszatengelyen, a sebességvetületet pedig az ordinátatengelyen ábrázoljuk. *Egyenes vonalú egyenletes*



7.2. ábra. A $v_x(t)$ függvénygrafikon egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén

mozgás esetén a sebesség-idő grafikon az időtengellyel párhuzamos egyenes szakasz, mivel az ilyen mozgás esetén a test sebessége állandó.

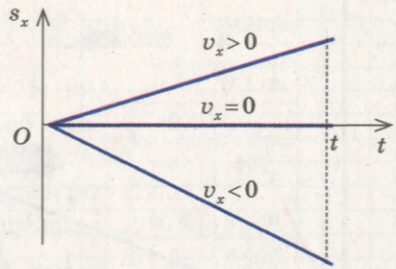
2 Hogyan kell meghatározni a test elmozdulását egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén?

A test sebességének meghatározására szolgáló $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$ képletet alkalmazva meg lehet állapítani a test elmozdulását tetszőleges időintervallum alatt:

$$\vec{s} = \vec{v}t$$

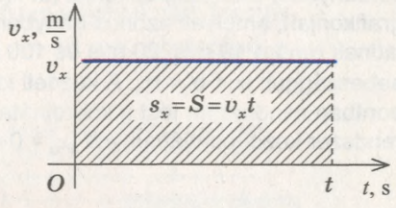
Ez a képlet átírható a vetületekre: $s_x = v_x t$, valamint az abszolút értékekre is: $s = vt$.

Egyenes vonalú egyenletes mozgáskor a sebességvetület nem változik az idő függvényében (v_x = const), ez pedig azt jelenti, hogy az elmozdulás vetülete egyenesen arányos a test mozgásának idejével. Ezért az egyenes arányosságot ábrázoló grafikonokhoz hasonlóan *az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén az elmozdulás-idő grafikon a koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó egyenes egy szakasza* (7.3. ábra).



7.3. ábra. Az $s_x(t)$ függvény-grafikon egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén

Az elmozdulás geometriai értelmezéséhez felhasználjuk a test sebesség-idő grafikonját (7.4. ábra). Az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetében $s_x = v_x t$. A 7.4. ábrán láthatjuk, hogy a v_x megfelel a besatírozott téglalap szélességének, a t pedig a hosszúságának. A téglalap szélességének és hosszúságának szorzata egyenlő a területével. Mivel a besatírozott téglalap egyik oldala másodpercben, a másik pedig m/s-ban van megadva, így a szorzatuk mértékegysége a méter.

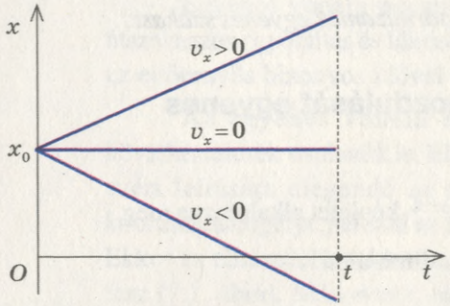


7.4. ábra. A test elmozdulása egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén számbelileg egyenlő a $v_x(t)$ függvénygrafikon alatti téglalap területével

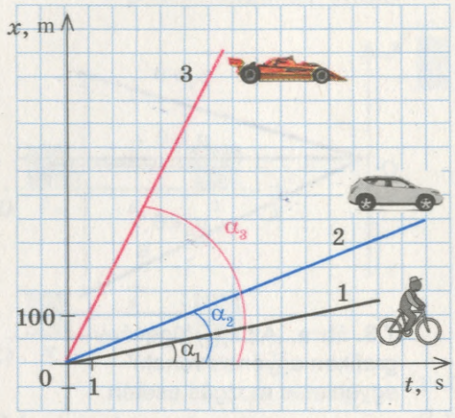
Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a test elmozdulásának vetülete számbelileg megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelyik a sebesség-idő grafikon alatt helyezkedik el. Ebben rejlik az elmozdulás geometriai értelmezése.

3 A koordinátaegyenlet egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén

A test helyzetének (koordinátájának) meghatározásához tetszőleges időpontban – vagyis a mechanika fő feladatának megoldásához – a koordinátaegyenletet használjuk: $x = x_0 + s_x$. Mivel $s_x = v_x t$, ezért *az egyenes vonalú*



7.5. ábra. Az $x(t)$ függvény grafikonja egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén



7.6. ábra. A kerékpár, a gépkocsi és a versenyautó mozgásgrafikonjai (út-idő grafikonjai), amelyek azonos irányban haladnak rendre 10 m/s, 20 m/s és 100 m/s sebességgel; $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. A kezdeti időpontban mindhárom test a koordinátarendszer kezdőpontjában volt ($x_0 = 0$ m)

egyenletes mozgás esetén a koordinátaegyenlet ilyen alakot ölt:

$$x = x_0 + v_x t.$$

Tehát a képlet segítségével, ismerve a test kezdeti helyzetét (x_0), sebességét és mozgásirányát (sebességének v_x vetületét), meghatározhatjuk a test helyzetét tetszőleges időpontban, vagyis megoldható a mechanika fő feladata az adott mozgásfajta esetén.

A test koordinátájának változását az idő függvényében ábrázolhatjuk grafikon segítségével (7.5. ábra). Az ilyen grafikon ugyanúgy teljes mértékben leírja a test mozgását, mint a koordinátaegyenlet. Valóban, ha adott a test mozgásának grafikonja, akkor meg lehet határozni a test x_0 kezdeti helyzetét, x koordinátáját tetszőleges időpontban, valamint mozgásának sebességét $\left(v_x = \frac{x - x_0}{t}\right)$. Figyeljétek meg, hogy minél nagyobb az abszcisszatengely (az idő tengelye) és a grafikon közötti á hajlásszög, annál nagyobb a test sebessége (7.6. ábra).

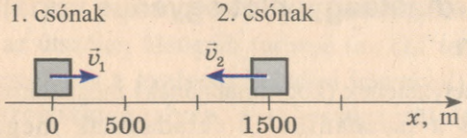
4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. Két, egymástól 1500 méter távolságra lévő motorcsónak állandó 25, illetve 50 m/s sebességgel halad egymás felé. Határozzátok meg találkozásuk idejét és helyét! Ábrázoljátok az út-idő és sebesség-idő grafikonokat!

Adott:
$v_1 = 25$ m/s
$v_2 = 50$ m/s
$l = 1500$ m

$t - ?$
$x - ?$

A fizikai probléma elemzése, megoldás. Magyarázó rajzot készítünk (1. ábra), amelyen feltüntetjük a koordinátatengelyt, a csónakok helyzetét a megfigyelés kezdő időpontjában, valamint a mozgássebességük irányát (a koordinátatengely iránya essen egybe az 1. csónak mozgásának irányával, a koordináta-rendszer kezdőpontja legyen abban a pontban, ahol az 1. csónak volt a megfigyelés kezdetének pillanatában).



1. ábra

Leírjuk az egyenes vonalú egyenletes mozgás koordinátaegyenletét: $x = x_0 + v_x t$. Az 1. ábra segítségével konkretizáljuk ezt az egyenletet az egyes csónakokra nézve:

$$x_{01} = 0,\ v_{1x} = v_1 = 25 \text{ m/s, ebből } x_1 = 25t \text{ (m)};$$
$$x_{02} = 1500 \text{ m},\ v_{2x} = -v_2 = -50 \text{ m/s, ebből } x_2 = 1500 - 50t \text{ (m)}.$$

A találkozás pillanatában a csónakok koordinátái megegyeznek ($x_1 = x_2$), így a következő egyenletet kapjuk: $25t = 1500 - 50t$. Megoldva az egyenletet, kiszámítjuk a motorcsónakok találkozásának idejét: $50t + 25t = 1500$; $75t = 1500$; $t = 20$ s.

Kiszámítjuk az 1. csónak koordinátáját a találkozás pillanatában: $x_1 = 25t = 25 \cdot 20 = 500$ (m).

Az eredmények elemzése. Mivel az 1. csónak lassabban haladt, mint a 2., ezért helyzete, az $x_1 = 500$ m koordinátájú pontban a találkozásuk pillanatában valós érték.

Felelet: A motorcsónakok 20 s múlva találkoztak 500 m-re az 1. csónak kiinduló helyzetétől.

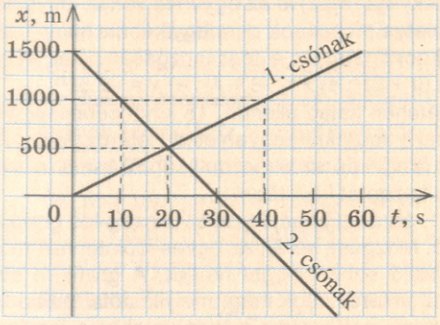
Ismerve mindkét csónak koordinátaegyenletét: $x_1 = 25t$ (m), $x_2 = 1500 - 50t$ (m), megrajzoljuk az út-idő és sebesség-idő grafikonokat. Ezek a grafikonok az egyenesek egy-egy szakaszát jelentik, ezért ábrázolásukhoz elég két-két pontjukat megadni (az egyik pont általában megfelel az időmérés kezdeti időpontjának, a másikat tetszés szerint választják meg).

t, s	x_1, m
0	0
40	100

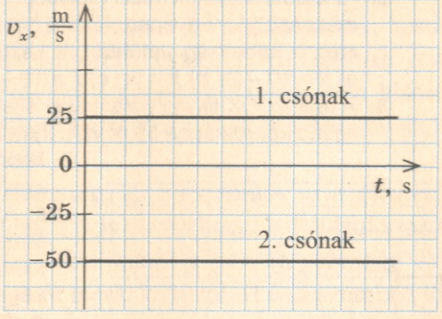
t, s	x_2, m
0	1500
10	1000

Az abszcisszatengelyen (a t tengelyen) feltüntetjük a csónakok mozgásának idejét, az ordinátatengelyen (az x tengelyen) pedig a megfelelő koordinátákat, majd ábrázoljuk mindkét grafikont (2. ábra). A grafikonok a $t = 20$ s, $x = 500$ m koordinátájú pontban metszették egymást, ami egybeesik az analitikus módszerrel meghatározott eredménnyel.

Ebben az esetben a sebességvektorok vetülete az idő tengelyével párhuzamos egyenes egy szakasza. Tudva, hogy $v_{1x} = 25$ m/s és $v_{2x} = -50$ m/s, ábrázoljuk a megfelelő grafikonokat (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Összegzés

Az egyenes vonalú egyenletes mozgásnak az olyan mechanikai mozgást nevezzük, amelynek során a test tetszőlegesen kiválasztott egyenlő időközök alatt egyenlő elmozdulásokat végez.

Az egyenletes egyenes vonalú mozgás $\vec{v}$ sebességének azt a fizikai vektormennyiséget nevezzük, ami a test $\vec{s}$ elmozdulásának és az elmozdulásra fordított t időnek a hányadosával egyenlő: $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$.

Az SI-ben a sebesség mértékegysége a méter per másodperc (m/s).

1 m/s annak a testnek a sebessége, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgása során 1 s alatt 1 m elmozdulást végez.

Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetében a $v_x(t)$ grafikonja az idő tengelyével párhuzamos egyenes egy szakasza.

A test elmozdulása egyenes vonalú egyenletes mozgás során meghatározható az $\vec{s}_x = \vec{v}_x t$ képlettel, vagy vetületekre nézve: $s_x = v_x t$. A test elmozdulásának vetülete számbelileg megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelyik a sebesség-idő grafikon alatt helyezkedik el. Ebben rejlik az elmozdulás geometriai értelmezése.

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén az $s_x(t)$ grafikonja a koordinátarendszer kezdőpontján áthaladó egyenes egy szakasza.

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a koordinátaegyenlet ilyen alakot ölt: $x = x_0 + v_x t$. Az út-idő grafikon az egyenes egy olyan szakasza, amelynek a kezdőpontja az ordinátatengely x_0 pontjában van.

Ellenőrző kérdések

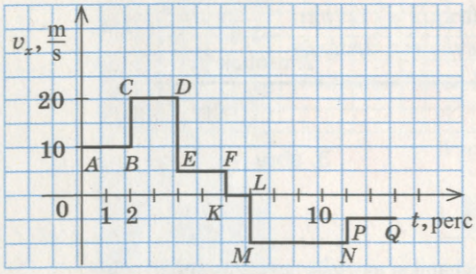
1. Milyen mozgást nevezünk egyenes vonalú egyenletes mozgásnak? **2.** Jellemezzétek az egyenes vonalú egyenletes mozgás sebességét! **3.** Hogyan néz ki a $v_x(t)$ grafikon egyenes vonalú egyenletes mozgás során? **4.** Hogyan kell megállapítani a test elmozdulását, ha ismert a sebessége és a test mozgásideje? **5.** Hogyan néz ki az $s_x(t)$ grafikonja egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén? **6.** Mit tudtok az elmozdulás geometriai értelmezéséről? **7.** Írjátok fel az egyenes vonalú egyenletes mozgás koordinátaegyenletét! **8.** Hogyan néz ki az $x(t)$ grafikonja egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén? **9.** Hogyan függ az egyenes vonalú egyenletes mozgás út-idő grafikonjának hajlásszöge a test sebességétől?

5. gyakorlat

1. A vonat 10 percen keresztül egyenletesen halad a pálya 5 km hosszú, egyenes szakaszán. Határozzátok meg a vonat sebességét! Mi adott a feladatban – az út vagy az elmozdulás?

2. Az alábbi képletek közül melyik (melyek) írja (írják) le az egyenes vonalú egyenletes mozgást? Az egyenes vonalú egyenletes mozgások mindegyikében határozzátok meg a sebesség vetületét, a kezdőkoordinátát és a test mozgásának az irányát: a) $x = 10 - 2t$; b) $x = 5t$; c) $x = 10 - 2{,}5t + 2t^2$; d) $x = -8 + 4t$; e) $x = -2{,}5t^2$!

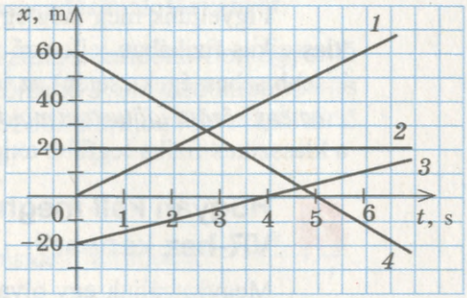
3. A test az OX tengely irányával ellentétesen halad állandó, 18 km/h sebességgel. A kezdő koordinátája 30 m volt. Írjátok fel a koordinátaegyenletet! Határozzátok meg a koordinátáját és az elmozdulását 10 s-mal a megfigyelés kezdetét követően!



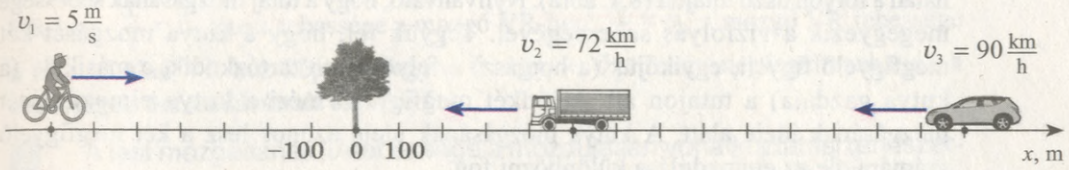
1. ábra

4. Az 1. ábrán egy gépkocsi sebesség-idő grafikonja látható. Mozgása során az egyes időintervallumokon különböző sebességgel haladt. A grafikon segítségével határozzátok meg: melyik időtartamban volt a gépkocsi sebessége a legnagyobb; a legkisebb; mikor állt meg az autó, mennyi ideig állt mozdulatlanul; mikor mozgott az OX tengellyel megegyező irányban; mikor mozgott ellentétesen az OX tengely irányával? Határozzátok meg elmozdulásának abszolút értékét az első 10 perc során, valamint a teljes mozgásidő alatt!

5. A 2. ábrán látható grafikonok segítségével írjátok fel az $x(t)$ függvényt!
6. Az OX tengely mentén két test mozog. Koordinátáik változása az idő függvényében a következő képlettel határozható meg: $x_1 = -4 + t$; $x_2 = 10 - 2t$. Írjátok le ennek a két testnek a mozgását! Határozzátok meg találkozásuk idejét és helyét! Mindkét test esetén ábrázoljátok az $x(t)$ és $v_x(t)$ grafikonokat!
7. A 3. ábra felhasználásával írjátok fel mindegyik közlekedési eszköz mozgásának egyenletét! Határozzátok meg a teherautó és a kerékpár, a személyautó és a kerékpár találkozásának idejét és helyét, valamint azt is, hol előzi meg a személyautó a teherautót!



2. ábra



3. ábra

8. §. A MOZGÁS VISZONYLAGOSSÁGA. AZ ELMOZDULÁSOK ÉS SEBESSÉGEK ÖSSZEADÁSÁNAK TÖRVÉNYEI

?! Megtörtént-e már veletek, hogy át kellett úsznotok egy gyors sodrású folyót? Nem? Akkor higgyétek el, hogy nagyon nehéz úgy átúszni, hogy a másik partot azzal a ponttal éppen szemben érjétek el, ahol bementetek a vízbe. Próbált már valaki közületek lemenni a felfelé haladó mozgólépcsőn? Ez sem egyszerű feladat. Sokkal gyorsabban lehet viszont leérni, ha a mozgásotok iránya megegyezik a mozgólépcső haladási irányával. A felsorolt esetek mindegyikében két mozgásban vesz részt az ember. Hogyan kell ebben az esetben kiszámítani az elmozdulást, illetve a mozgás sebességét? Erre kaptok választ ebből a paragrafusból.

1 Mi a mozgás viszonylagossága?

Már jól tudjátok, hogy a test mozgását csak valamely más testhez (a vonatkoztatási testhez) képest lehet vizsgálni. Éppen a vonatkoztatási testhez kapcsoljuk a koordináta-rendszert és az időmérő eszközt. Bármelyik testet kiválaszthatjuk vonatkoztatási testként. Például a gépkocsi szalonjában ülő utas mozgásának leírásához a vonatkoztatási testként választhatjuk az út menti kávézót, a gépkocsi szalonját vagy a szemben jövő autót.

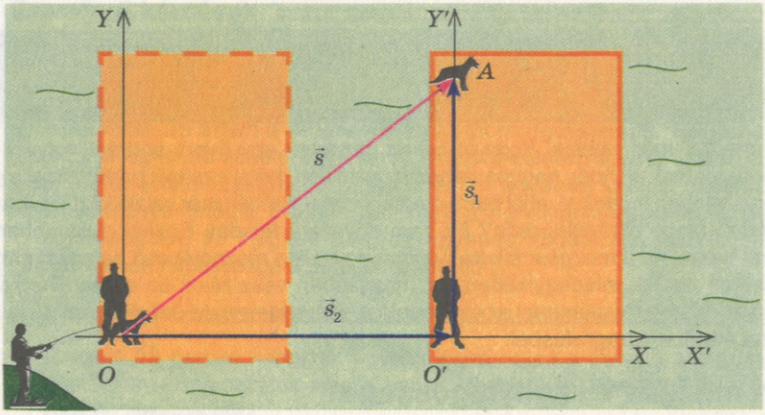
A test mozgását a mozgáspálya, a sebesség, az elmozdulás és a megtett út jellemzi. A VR megváltoztatásakor ezek a jellemzők is megváltoznak. Például a mozgó autóban ülve nyugalmi állapotban vagyunk a szalonhoz képest (a sebesség és az elmozdulás nullával egyenlő), de mozgunk az út menti kávézóhoz és a szemben jövő autóhoz viszonyítva. Eközben mozgásunk sebessége a szemben jövő gépkocsihoz képest nagyobb, mint az út menti kávézóhoz viszonyítva.

A test mozgása során a mozgáspályája, az általa megtett út, elmozdulása és sebessége a vonatkoztatási rendszer kiválasztásától függ. A mozgás ezen tulajdonságát a **mozgás viszonylagosságának** nevezzük.

Figyeljünk meg még egy, a mozgást jellemző fizikai mennyiséget, az *időt*. A klasszikus fizikában jellemző mozgássebességnél (vagyis a fénysebességnél sokkal kisebb sebességek esetén) az idő nem függ a VR kiválasztásától. Vagyis *a két adott esemény közötti időtartam minden vonatkoztatási rendszerben azonos lesz*. Ez az állítás a klasszikus fizika legfőbb axiómája.

2 Hogyan kell meghatározni a test sebességét különböző VR-hez képest?

Megvizsgáljuk egy olyan test mozgását, amelyik egyidejűleg két mozgásban vesz részt. Legyen ez a test egy kutya, amelyik egyenletesen egyenes vonal mentén halad a folyón úszó tutajon (8.1. ábra). Nyilvánvaló, hogy a tutaj mozgásának sebessége megegyezik a vízfolyás sebességével. Tegyük fel, hogy a kutya mozgását két megfigyelő figyeli, egyikőjük (a horgász) a folyóparton tartózkodik, a másikuk (a kutya gazdája) a tutajon áll. Mindkét megfigyelő méri a kutya elmozdulását mozgásának ideje alatt. A kutya mozgásának ideje azonos lesz a két megfigyelő számára, de az elmozdulása különbözni fog.



8.1. ábra. Az elmozdulás és a sebesség összeadásának levezetésére szolgáló rajz

Tegyük fel, hogy egy bizonyos t idő alatt a kutya állandó sebességgel haladva, átfutott a tutaj túlsó felére. Az $\vec{s}_1$ elmozdulás, amit a kutya a tutajhoz képest végzett (és amit a gazdája megmért), abszolút értékét tekintve megegyezik a tutaj szélességével ($O'A$ szakasz) és merőleges a vízfolyás irányára. Az $\vec{s}$ elmozdulás, amit a kutya a folyóparthoz képest elvégzett (és amit a horgász megmért), abszolút értékét tekintve egyenlő az OA szakasz hosszával és bizonyos szög alatt hajlik a vízfolyás irányához. Ez alatt az idő alatt a tutaj a vízfolyás irányában mozgott és a parthoz képest $\vec{s}_2$ elmozdulást végzett. A 8.1. ábra alapján láthatjuk, hogy $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, vagyis *a kutya elmozdulása a parthoz képest egyenlő a kutyának a tutajhoz, illetve a tutajnak a parthoz képest végzett elmozdulása geometriai összegével.* Az XOY koordináta-rendszert a parthoz rendeljük – ez a *mozdulatlan koordináta-rendszer*. A tutajhoz rendeljük az $X'O'Y'$ koordináta-rendszert. Ez lesz a *mozgó koordináta-rendszer*.

Most megfogalmazhatjuk **az elmozdulások összeadásának törvényét.**

A test elmozdulása a mozdulatlan vonatkoztatási rendszerben egyenlő a test mozgó vonatkoztatási rendszerben történő $\vec{s}_1$ elmozdulásának és a mozgó vonatkoztatási rendszernek a mozdulatlanhoz képest történő $\vec{s}_2$ elmozdulásának geometriai összegével:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

Az $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ egyenletet elosztva a test mozgásidejével, adódik: $\frac{\vec{s}}{t} = \frac{\vec{s}_1}{t} + \frac{\vec{s}_2}{t}$.

A test sebességének meghatározása értelmében: $\frac{\vec{s}}{t} = \vec{v}$ a test sebessége a mozdulatlan VR-ben; $\frac{\vec{s}_1}{t} = \vec{v}_1$ a test sebessége a mozgó VR-ben; $\frac{\vec{s}_2}{t} = \vec{v}_2$ a mozgó VR sebessége a mozdulatlan VR-hez képest. Vagyis $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Tehát megfogalmazhatjuk a **sebességek összeadásának törvényét.**

A test mozgásának $\vec{v}$ sebessége a mozdulatlan vonatkoztatási rendszerben egyenlő a test mozgó vonatkoztatási rendszerben mért $\vec{v}_1$ sebességének és a mozgó vonatkoztatási rendszernek a mozdulatlanhoz mért $\vec{v}_2$ sebességének geometriai összegével:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

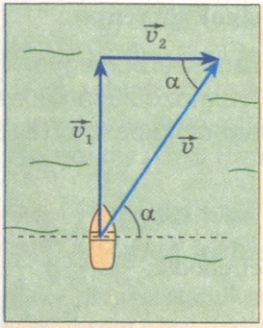
Figyeljétek meg: mivel a mozgás és a nyugalmi állapot viszonylagos, a fent említett példában a mozdulatlan vonatkoztatási rendszert a tutajhoz is köthettük volna. Ebben az esetben a parthoz kötött VR lett volna a mozgó rendszer, mozgásiránya pedig ellentétes lett volna a vízfolyás irányával.

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A horgász csónakon úgy kel át a folyón, hogy a vízfolyás irányához képest merőlegesen tartja a vízi járművet. A csónak vízhez mért $\vec{v}_1$ mozgássebessége 4 m/s, a vízfolyás $\vec{v}_2$ sebessége 3 m/s, a folyó l szélessége pedig 400 m.

a) Hogyan irányul a csónak v sebessége a parthoz képest?
b) Mennyi t idő múlva kel át a csónak a folyón?
c) Mennyi t_1 idő alatt kelne át a másik partra a csónak, ha állóvízben haladna?
d) Mekkora a v sebesség, illetve az s elmozdulás abszolút értéke a parthoz viszonyítva?
e) A vízfolyás irányában milyen s_2 távolságra éri el a csónak a szemközti partot a kiinduló ponthoz képest?

$\vec{v}_1 = 4$ m/s $\vec{v}_2 = 3$ m/s $l = 400$ m	*A fizikai probléma elemzése, matematikai modell keresése, megoldás.* A mozdulatlan VR-t a Földhöz kötjük, a mozgót pedig a vízhez. Magyarázó rajzot készítünk, amelyen feltüntetjük a csónak sebességének az irányát ($\vec{v}_1$), a vízfolyás sebességének irányát ($\vec{v}_2$) és a csónak parthoz mért sebességvektorát ($\vec{v}$). Leírjuk a sebességek összeadásának törvényét: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
$t - ?$ $t_1 - ?$ $s - ?$ $v - ?$ $s_2 - ?$	



a) Az ábrából kitűnik, hogy a $\vec{v}$ sebesség a parttal bizonyos α szöget zár be, miközben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_2}$.

b) A vízhez kötött VR-ben a csónak $v_1 = \frac{s_1}{t}$ sebességgel mozgott, eközben megtette a folyó szélességének megfelelő távolságot: $s_1 = l$. Ebből meghatározzuk a csónak mozgásidejét: $t = \frac{l}{v_1}$.

c) Ebben az esetben a csónak t_1 mozgásideje nem függ a vízfolyás sebességétől, ezért állóvízben is ugyanannyi időbe telne az átkelés ($t = t_1$).

d) A csónak v sebességének abszolút értékét a parthoz képest a Pitagorasz-tétel segítségével lehet kiszámítani: $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. A csónak elmozdulásának s abszolút értékét a parthoz képest kiszámítjuk az $s = vt$ egyenlőségből, ahol t a csónak mozgásának ideje.

e) Ismerve a csónak t mozgásidejét, valamint a vízfolyás v_2 sebességét, meghatározzuk az s_2 távolságot, amennyire a csónakot a vízfolyás lejjebb sodorta a kiinduló ponthoz képest: $s_2 = v_2 t$.

Meghatározzuk a keresett mennyiségek értékét:

$$[\operatorname{tg}\alpha] = \frac{\text{m/s}}{\text{m/s}} = 1, \quad \{\operatorname{tg}\alpha\} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33, \text{ tehát } \alpha \approx 53°;$$

$$[t] = \frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \text{s}, \quad \{t\} = \frac{400}{4} = 100, \quad t = 100 \text{ s} = 1 \text{ min } 40 \text{ s};$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \{v\} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5, \quad v = 5\frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$[s] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}, \quad \{s\} = 5 \cdot 100 = 500, \quad s = 500 \text{ m};$$

$$[s_2] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}, \quad \{s_2\} = 3 \cdot 100 = 300, \quad s_2 = 300 \text{ m}.$$

Felelet: a csónak a parthoz képest $v = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel halad, ami 53°-os szöget alkot a folyóparttal. A csónak 1 perc 40 s alatt kel át a folyón, eközben elmozdulása a parthoz képest $s = 500$ m; a csónakot a vízfolyás $s_2 = 300$ m-rel lejjebb sodorja a kiinduló pontjához képest. Állóvízben a csónak $t_1 =$ 1 perc 40 s alatt érné el a túlsó partot.

Összegzés

A test mozgáspályájának, az általa megtett útnak, elmozdulásának és mozgássebességének függését a vonatkoztatási rendszer kiválasztásától a mozgás viszonylagosságának nevezik.

Az idő nem függ a VR kiválasztásától azokra a testekre nézve, amelyek a klasszikus fizikában jellemző sebességgel mozognak.

Az elmozdulások összeadásának törvénye: a test $\vec{s}$ elmozdulása a mozdulatlan vonatkoztatási rendszerben egyenlő a test mozgó vonatkoztatási rendszerben történő $\vec{s}_1$ elmozdulásának és a mozgó vonatkoztatási rendszernek a mozdulatlanhoz képest történő $\vec{s}_2$ elmozdulásának geometriai összegével: $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

A sebességek összeadásának törvénye: a test mozgásának $\vec{v}$ sebessége a mozdulatlan vonatkoztatási rendszerben egyenlő a test mozgó vonatkoztatási rendszerben mért $\vec{v}_1$ sebességének és a mozgó vonatkoztatási rendszernek a mozdulatlanhoz mért $\vec{v}_2$ sebességének geometriai összegével: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk a mechanikai mozgás viszonylagossága alatt? **2.** A mechanikai mozgás mely jellemzői változnak az egyik VR-ből egy másikba való áttérés következtében? Melyek maradnak változatlanok? **3.** Soroljatok fel olyan példákat, amelyek a mozgás, illetve a nyugalmi állapot viszonylagosságát bizonyítják! **4.** Fogalmazzátok meg az elmozdulások összeadásának törvényét! **5.** Fogalmazzátok meg a sebességek összeadásának törvényét! **6.** A Földhöz kötött vonatkoztatási rendszert kell-e minden esetben mozdulatlannak választanunk?

6. gyakorlat

1. A motorcsónak 10 m/s sebességet fejt ki a vízfolyáshoz képest. A víz áramlási sebessége 1 m/s. Mekkora lesz a motorcsónak sebessége a parthoz képest, ha a vízfolyás irányában halad? ha vele szemben?

2. A kőrisfa szárnyas magja állandó, 0,3 m/s sebességre tesz szert, gyakorlatilag azonnal, ahogy lehull a fa csúcsáról. A fa tövétől mekkora távolságra ér földet a mag vízszintes, 1 m/s sebességű szélirány esetén, ha a fa magassága 50 méter? Mekkora lesz a mag elmozdulása a Földhöz képest?

3. A repülőgép déli irányban repül 540 km/h sebességgel a levegőhöz képest. Útja során végig egy kelet felé 250 km/h sebességgel mozgó légáramlatban halad. Milyen a gép repülési iránya a Föld felszínéhez képest? Mekkora utat tesz meg a repülő a Földhöz képest 15 perc alatt?

4. A levegőhöz képest 300 km/h sebességgel haladó repülőgép pilótájának el kell érni a 600 km-re észak felé fekvő várost. Nyugati irányú, 40 km/h sebességű szél fúj. Milyen repülési irányt kell választania a pilótának? Mennyi ideig tart az út?

5. A folyó szélessége 150 méter, a vízfolyás sebessége 1 m/s. A folyón átúszó ember sebessége 2 m/s a vízhez képest. Mekkora lesz az úszó sebessége és elmozdulása a parthoz képest, ha a vízfolyás irányára állandóan merőlegesen halad? Mennyi időre van szüksége, hogy így elérje a túlsó partot, és mennyire sodorja le a vízfolyás?

6*. A mozgólépcső 1 perc alatt viszi fel az álló utast. Ha az utas az álló lépcsőn megy fel, ez 3 percet vesz igénybe. Mennyi idő alatt jut fel az utas, ha működő mozgólépcsőn halad felfelé?

9. §. VÁLTOZÓ MOZGÁS. ÁTLAGSEBESSÉG ÉS PILLANATNYI SEBESSÉG

Idézzétek fel, hogyan halad a gépjármű egyik településről a másikra. Nem mondhatjuk, hogy mozgása egyenletes, hiszen a teljes menetidő alatt változtatja a sebességét: időnként megáll a közlekedési lámpáknál, fékez a gyalogátkelők előtt, növeli a sebességét stb. A sebességmérő mutatója folyamatosan más értéket mutat és csak ritkán áll mozdulatlanul. Ebben a paragrafusban arról lesz szó, milyen sebességet is mutat a sebességmérő.

1 Hogyan lehet meghatározni a test mozgásának átlagsebességét?

A valós életben ritkán találkozunk egyenes vonalú egyenletes mozgással. Gyakrabban történik meg, hogy a mozgássebesség változik az időben, vagyis a

sebesség az idő függvénye. *Az olyan mozgást, amelynek során a test azonos időintervallumok alatt különböző utat tesz meg,* ***változó mozgásnak*** *nevezik.* A változó mozgás jellemzésére bevezetjük az *átlagsebesség* (*vektoros és útra vonatkozó*), valamint a *pillanatnyi sebesség* fogalmakat.

A **sebességvektor átlagértéke** $\vec{v}_{\text{átl}\,s}$ olyan fizikai vektormennyiség, ami a változó mozgást jellemzi és egyenlő az $\vec{s}$ elmozdulás és az elmozdulásra fordított idő hányadosával:

$$\vec{v}_{\text{átl}\,s} = \frac{\vec{s}}{t}$$

A sebességvektor átlagértéke meghatározásából következik, hogy iránya megegyezik az elmozdulás irányával, nagysága (abszolút értéke) pedig meghatározható a $v_{\text{átl}\,s} = \frac{s}{t}$ képlettel. A gyakorlatban sűrűbben alkalmazzák a *megtett útra vonatkoztatott átlagsebesség* fogalmát.

A **megtett útra vonatkoztatott $v_{\text{átl}\,l}$ átlagsebesség** olyan fizikai mennyiség, amely egyenlő a teljes útszakasz l hosszának és a megtételére fordított t időnek a hányadosával:

$$v_{\text{átl}\,l} = \frac{l}{t}.$$

Mivel az út nem mindig egyenlő az elmozdulás nagyságával, ezért a sebességvektor átlagértéke sem mindig egyenlő a *teljes útszakaszra vonatkozó átlagsebességgel* (lásd a paragrafus 3. pontjának feladatát).

2 Mi a pillanatnyi sebesség?

Az átlagsebesség fontos szerepet játszik mind a tudományban, mind pedig a mindennapi életben. Például Ukrajnában 60 km/h-ban állapították meg a gépkocsik átlagsebességét lakott területen és 90 km/h-ban az országúton*. Ezt biztonsági megfontolások alapján vezették be: közismert, hogy a vezetőnek 2 s-ra van szüksége az észleléstől a döntésen keresztül a cselekvésig. Nem nehéz rájönni, hogy az említett korlátozások a *rövid idő alatt mért átlagsebességre vonatkoznak*. Hiszen ha a vezető 30 percen keresztül 100 km/h sebességgel száguld a városban, majd a következő 30 percben 20 km/h-val cammog, akkor az átlagsebessége nem haladja meg a 60 km/h-át: $v_{\text{átl}\,l} = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{100\,\text{km/h} \cdot 0{,}5\,\text{h} + 20\,\text{km/h} \cdot 0{,}5\,\text{h}}{0{,}5\,\text{h} + 0{,}5\,\text{h}} = 60\,\text{km/h}$. Azonban a gépkocsi ilyen mozgását nem mondhatjuk biztonságosnak. Más a helyzet, ha az átlagsebességet nagyon rövid időtartam alatt mérjük.

A végtelenül rövid idő alatt mért átlagsebességet a test **pillanatnyi sebességének** nevezik. Egy másik megfogalmazás szerint: pillanatnyinak az olyan sebességet nevezzük, amellyel a test az adott időpontban, illetve a pálya adott pontjában rendelkezik.

Hogy megérthessük ennek a meghatározásnak az értelmét, nézzünk egy példát. Tegyük fel, hogy az autó a gyorsforgalmi út egyenes vonalú szakaszán halad. Az

* Helyesebb a legnagyobb megengedett sebességről beszélni (*a ford. megj.*).

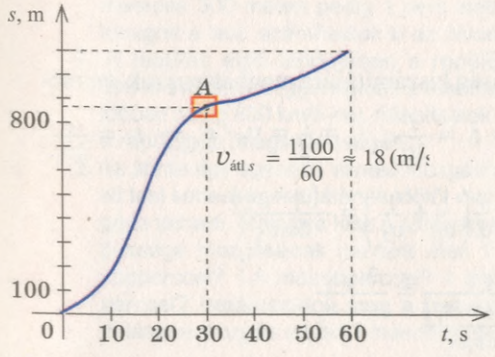
elmozdulás időfüggvényének grafikonját a 9.1. *a* ábrán láthatjuk. A gépkocsi sebessége folyamatosan változik, ezért a grafikonja nem egyenes vonal.

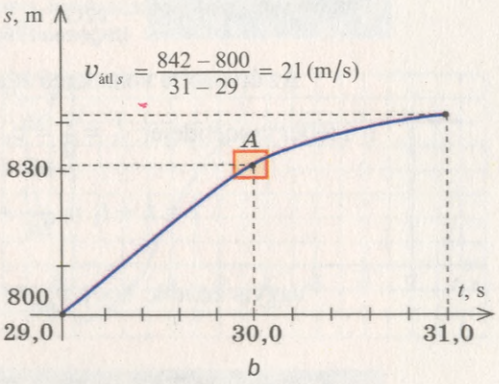
Tegyük fel, hogy meg kell határozni a jármű pillanatnyi sebességét 30 másodperccel a megfigyelés kezdetét követően (a sebességét az *A* pontban). Meghatározzuk a sebességvektor középértékét (átlagát) a $t_1 = 29$ s és a $t_2 = 31$ s közötti időtartamban (9.1. *b* ábra): $v_{\text{átl }s1} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{42\text{ m}}{2\text{ s}} = 21\text{ m/s}$.

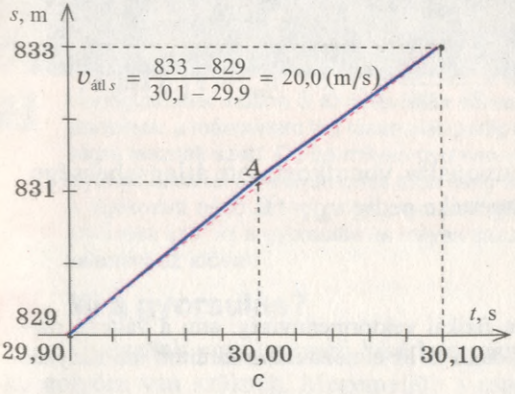
Ha tízszeresére csökkentjük a vizsgált időintervallumot, vagyis a gépkocsi mozgását a $t_1 = 29{,}9$ s és a $t_2 = 30{,}1$ s közötti időtartamban vizsgáljuk (9.1. *c* ábra), akkor a grafikon megfelelő szakasza már csaknem egyenes vonalú, az átlagsebesség értéke pedig megközelíti a $t = 30$ s időpontban mért értéket: $v_{\text{átl }s2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{4\text{ m}}{0{,}2\text{ s}} = 20\text{ m/s}$.

Ha tovább csökkentjük a vizsgált időtartamot ($\Delta t \to 0$), akkor a gépkocsi átlagsebessége mind jobban közelít a pillanatnyi sebességének az *A* pontbeli értékéhez*.

A **pillanatnyi sebesség** olyan fizikai vektormennyiség, amely egyenlő a végtelenül kis időtartam alatt mért átlagos sebességvektorral.







9.1. ábra. A folytonosan sebességét változtató gépkocsi mozgásának $s_x(t)$ grafikonja: *a*) a gépkocsi mozgásának grafikonja a $t_1 = 0$ időponttól $t_2 = 60$ s időpontig; *b*) a grafikonnak az a szakasza, ami megfelel az autó mozgásának a $t_1 = 29$ s időponttól $t_2 = 31$ s időpontig, tízszeres nagyításban; *c*) a grafikonnak az a szakasza, ami megfelel az autó mozgásának a $t_1 = 29{,}9$ s időponttól $t_2 = 30{,}1$ s időpontig; százszoros nagyításban majdnem egyenesnek tűnik

* Ezt a folyamatot a matematika *differenciálszámítással* foglalkozó szakágában vizsgálják.

A test pillanatnyi sebességének az iránya, akárcsak az átlagos sebességvektor iránya megegyezik a test elmozdulásának irányával.

Ahhoz, hogy kiszámítsuk a test pillanatnyi sebességét, általános elképzelést kell alkotnunk mozgásának jellegzetességeiről. A pillanatnyi sebesség kiszámításának módját Isaac Newton javasolta – ő adta meg a „pillanat" általános meghatározását, mint az időtartam végtelenül kis határértékét, kivezette az anyagi testek általános mozgásegyenleteit.

A továbbiakban a test sebességéről beszélve a pillanatnyi sebességét értjük alatta.

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. Egyik pontból a másikba a motorkerékpáros 72 km/h sebességgel haladt, visszafelé pedig 48 km/h sebességgel. Határozzátok meg a sebességvektor átlagértékét, valamint a teljes útvonalra vonatkozó átlagsebességét a mozgás ideje során!

Adott:

$v_1 = 72$ km/h
$v_2 = 48$ km/h

$v_{\text{átl}\,s} - ?$
$v_{\text{átl}\,l} - ?$

A fizikai probléma elemzése, matematikai modell keresése, megoldás. A meghatározás szerint $v_{\text{átl}\,s} = \frac{s}{t}$, $v_{\text{átl}\,l} = \frac{l}{t}$. Mivel a motorkerékpáros ugyanabba a pontba tért vissza ahonnan elindult, így elmozdulása nulla ($s = 0$), ezért $v_{\text{átl}\,s} = 0$.

Az útvonalra vonatkozó átlagsebesség kiszámítására meghatározzuk a motoros teljes menetidejét: $l_1 = \frac{l}{2} = v_1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l}{2v_1}$; $l_2 = \frac{l}{2} = v_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{l}{2v_2}$;

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2v_1} + \frac{l}{2v_2} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{l(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}.$$

Vagyis adódik, hogy $v_{\text{átl}\,l} = \frac{l}{t} = \frac{l}{\frac{l(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$.

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$[v_{\text{átl}\,l}] = \frac{\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}}}{\frac{\text{km}}{\text{h}} + \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{\text{km}}{\text{h}}; \quad \{v_{\text{átl}\,l}\} = \frac{2 \cdot 72 \cdot 48}{72 + 48} = 57{,}6; \quad v_{\text{átl}\,l} = 57{,}6 \text{ km/h}.$$

Felelet: a motorkerékpáros útvonalra vonatkoztatott átlagsebessége $v_{\text{átl}\,l} = 57{,}6$ km/h, a sebességvektor átlagértéke pedig $v_{\text{átl}\,s} = 0$.

! Összegzés

A sebességvektor átlaga $\vec{v}_{\text{átl}\,s}$ olyan fizikai vektormennyiség, ami a változó mozgást jellemzi és egyenlő az $\vec{s}$ elmozdulás és az elmozdulásra fordított idő hányadosával: $\vec{v}_{\text{átl}\,s} = \frac{\vec{s}}{t}$.

A megtett útra vonatkoztatott $v_{átl\,l}$ átlagsebesség olyan fizikai mennyiség, amely egyenlő a teljes útszakasz l hosszának és a megtételére fordított t időnek a hányadosával: $v_{átl\,l} = \frac{l}{t}$.

A végtelenül kis időtartam alatt mért átlagsebességet pillanatnyi sebességnek nevezzük. Pillanatnyinak az olyan sebességet nevezzük, amellyel a test az adott időpontban, illetve a pálya adott pontjában rendelkezik. Az adott időpontban a pillanatnyi sebesség iránya megegyezik elmozdulásának irányával.

Ellenőrző kérdések

1. Fogalmazzátok meg az átlagos sebességvektor meghatározását! Melyik képlet segítségével állapítják meg? **2.** Hogyan lehet meghatározni az útvonal átlagsebességét? **3.** Minden esetben megegyezik-e a sebességvektor átlagértéke az útvonal átlagsebességével? Válaszotokat indokoljátok meg! **4.** Hogyan definiáljuk a pillanatnyi sebességet? **5.** Milyen irányú a pillanatnyi sebesség vektora? **6.** Melyik sebességet mutatja a sebességmérő?

7. gyakorlat

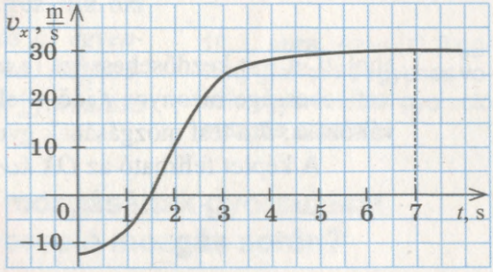
1. Az út első, 120 m-es szakaszát a síző 2 perc alatt tette meg, a második 30 m-es szakaszt pedig 0,5 perc alatt. Határozzátok meg a síző átlagsebességét a teljes útszakaszon!

2. A test egy 4 m sugarú körvonal félkörívén mozog. A körvonal első negyedén sebessége 2 m/s, a másodikon pedig 8 m/s. Határozzátok meg a teljes útvonalra vonatkoztatott átlagsebességet és az átlagsebesség vektor nagyságát a mozgás teljes ideje alatt!

3. Ismert, hogy a teljes út egyharmad részén a test 36 km/h sebességgel haladt, a maradék 300 métert pedig 1 perc alatt tette meg. Határozzátok meg, mennyi ideig mozgott a test, számítsátok ki az útvonal átlagsebességét!

4. A repülés első félidejében a repülőgép 600 km/h sebességgel haladt, a fennmaradt időben pedig 800 km/h-val. Állapítsátok meg a repülőgép átlagsebességét!

5. Az ábrán egy egyenes vonalú mozgást végző test sebességvetületének időtől való függése látható. Mekkora lesz a pillanatnyi sebessége mozgásának kezdete után 1 másodperccel? 1,5 másodperccel? 4 másodperccel? Határozzátok meg a test elmozdulását a mozgás utolsó 3 másodpercében!

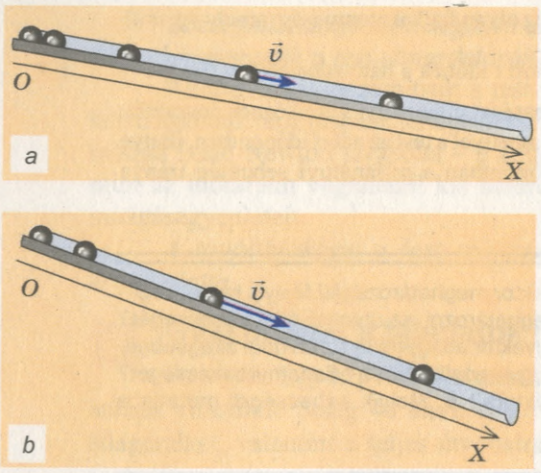


10. §. EGYENES VONALÚ EGYENLETESEN GYORSULÓ MOZGÁS. GYORSULÁS

Megfigyeltétek valaha a rövidtávfutók versenyét? A sportolók szinte egy pillanat alatt startolnak, a másodperc tört része alatt pedig az átlagember számára elérhetetlen sebességre tesznek szert. De bármilyen gyorsan veszik fel a sebességüket, vannak közöttük olyanok, akiknél a nekiiramodás több ideig tart és ezért ezek veszítenek a versenyben. A tájékozott néző azt mondja: „nem volt elég a gyorsulása". Ebben a paragrafusban arról lesz szó, mi a gyorsulás és milyen összefüggésben van a mozgás sebességével, valamint az idővel.

1 Mi a gyorsulás?

Elvégzünk egy egyszerű kísérletet, amihez egy fából készült csatornára és egy golyóra van szükség. Megemeljük a csatorna egyik végét, majd ráhelyezzük a golyót és elengedjük. A golyó elkezd lefelé gurulni. A 10.1. *a* ábrán, amely a



10.1. ábra. A rajz a golyó csatornában történt mozgásának sztroboszkópos fényképe alapján készült

folyamat sztroboszkópos felvétele alapján készült, láthatjuk, hogy minél távolabb van a golyó a csatorna felső végétől, annál nagyobb távolságot tesz meg azonos időintervallum alatt. Ez azt jelenti, hogy a golyó mozgásának sebessége nő az eltelt idő függvényében. Megismételjük a kísérletet úgy, hogy megnöveljük a csatorna dőlésszögét (10.1. *b* ábra). A golyó haladása során gyorsabban nő az a távolság, amit a golyó azonos időközök alatt megtesz, mint a megelőző kísérletben. Vagyis gyorsabban nő a golyó sebessége. A fizikában azt mondják, hogy a második kísérletben a golyó nagyobb *gyorsulással* mozgott.

A **gyorsulás** a test sebességváltozásának sebességét jellemző fizikai vektormennyiség, ami egyenlő a test sebességváltozásának és a változás időtartamának hányadosával:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t},$$

ahol $\vec{v}_0$ a test kezdősebessége (a test mozgássebessége az időmérés kezdetén); $\vec{v}$ a test sebessége bizonyos t idő elteltével; $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ a test mozgássebességének változása; $\vec{a}$ a test mozgásának gyorsulása.

A képlet felírható az *OX koordinátatengelyre eső vetületek segítségével* is:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$$

A gyorsulás mértékegysége az SI-ben a **méter per másodperc a négyzeten** (m/s²): $[a] = \frac{1\,\text{m/s}}{1\,\text{s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2 Milyen mozgást nevezünk egyenes vonalú egyenletesen gyorsulónak?

Ha a test nem egyenletes mozgást végez, akkor sebessége az idő múlásával folyamatosan változik. Általában azonos időintervallumok alatt a test mozgássebessége különböző mértékben változik. Például járás közben az ember hol gyorsabban, hol lassabban változtatja mozgásának sebességét. Néha lelassítja lépteit, közben az is előfordul, hogy egy bizonyos időközben állandó sebességgel halad. Ezért általános esetben az $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{t}$ képlettel a test *átlaggyorsulását* számítják ki.

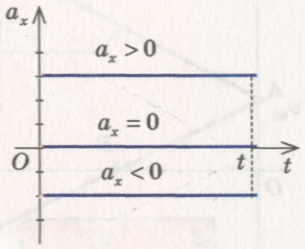
Az időben váltakozó gyorsulású mozgások vizsgálata meglehetősen bonyolult, ezért részletesebben a *legegyszerűbb gyorsuló mozgást, **az egyenletesen gyorsuló mozgást** fogjuk* tanulmányozni. A *Dinamika* c. fejezetben megtudjátok, hogy ilyen mozgás akkor megy végbe, ha a testre ható eredő erő állandó.

Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás olyan mozgás, amelynek során a test sebessége tetszőlegesen választott azonos időközök alatt egyformán változik:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \text{const}$$

Másként fogalmazva, *az egyenletesen gyorsuló mozgás – állandó gyorsulással végzett mozgás. Az egyenletesen gyorsuló mozgáskor a gyorsulás azt mutatja, mennyire változott meg a test mozgássebessége egységnyi idő alatt.*

Az egyenletesen gyorsuló mozgás során a test gyorsulása állandó a mozgás teljes ideje alatt, azért a gyorsulás vetületének grafikonja az idő függvényében az idő tengelyével párhuzamos egyenes egy szakasza (10.2. ábra).



10.2. ábra. Az $a_x(t)$ függvény grafikonja egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén

Figyeljétek meg: ha a test gyorsulása nulla, akkor a test nem változtatja mozgássebességét $\left(\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0\right)$, vagyis egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ez azt jelenti, hogy *az egyenes vonalú egyenletes mozgás az egyenletesen gyorsuló egyenes vonalú mozgás részesete, méghozzá olyan egyenletesen gyorsuló mozgás, amelynek gyorsulása nulla.*

3 Hogyan kell meghatározni a test mozgásának gyorsulását egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás során?

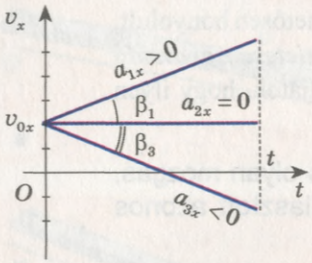
A gyorsulás kiszámítására szolgáló képletből könnyen megkaphatjuk a test sebességét tetszőleges időpontban meghatározó képletet. Valóban, mivel $\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$, ezért

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

A feladatok megoldása során az OX (vagy OY) tengelyre eső vetületek formájában felírt sebességképletet fogjuk alkalmazni:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

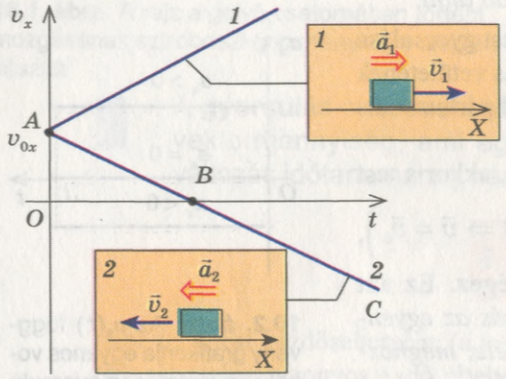
Az utóbbi képletben a v_{0x} és a_x mennyiségek nem függnek az időtől, ezért a sebességvetületek időtől való függése lineáris, és a $v_x(t)$ grafikon az egyenes egy szakasza. Ha $t = 0$ (a kezdő időpont), akkor $v_x = v_{0x}$, vagyis általános esetben a grafikon



10.3. ábra. A $v_x(t)$ függvény grafikonja egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén. A β szög a = tgβ összefüggésben áll a gyorsulással (az ábrán $a_1 = \text{tg}\beta_1$, $\beta_2 = 0$, $a_3 = \text{tg}\beta_3$)

kezdőpontja a sebesség tengelyén (az ordinátatengelyen) a v_{0x} pontban lesz (10.3. ábra).

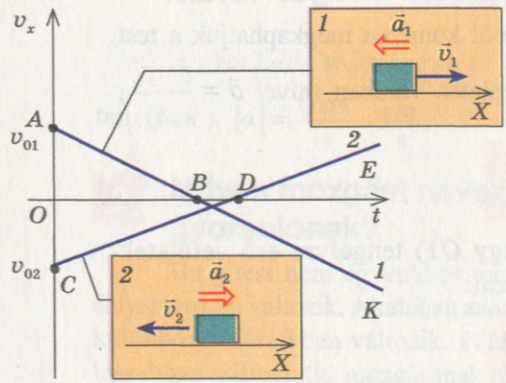
Megvizsgáljuk néhány egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végző test $v_x(t)$ grafikonját (10.4. ábra). Az *1.* testre vonatkozó grafikonból látható, hogy ennek a testnek folyamatosan nő a sebessége, eközben a sebesség és a gyorsulás vetületeinek előjelei megegyeznek ($a_x > 0$, ezért a grafikon emelkedik; $v_x > 0$, mivel a grafikon az abszcisszatengely felett helyezkedik el). A *BC* szakaszon a *2.* test sebessége szintén növekszik és a sebesség, illetve a gyorsulás vetületeinek előjelei szintén megegyeznek ($a_x < 0$, $v_x < 0$, mivel a grafikon ereszkedik és az abszcisszatengely alatt van). Ha a vektorok egy egyenes mentén irányulnak, és vetületeik előjele megegyezik, akkor ezek a vektorok azonos irányúak. Tehát, ha a *gyorsulásvektor és a sebességvektor azonos irányú* ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}$), *akkor a sebesség abszolút értéke növekszik.*



10.4. ábra. Ha a gyorsulásvektor iránya megegyezik a sebességvektor irányával, akkor a test mozgássebessége növekszik (*1.* grafikon, a *2.* grafikon *BC* szakasza)

Ha pedig a sebesség és a gyorsulás vetületeinek előjele különböző ($a_x > 0$, $v_x < 0$ vagy $a_x < 0$, $v_x > 0$), vagyis amikor *a gyorsulásvektor és a sebességvektor ellentétes irányú* ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$), *akkor a sebesség abszolút értéke csökken* (10.5. ábra).

Figyeljétek meg, ha a test mozgásának sebessége nullára csökken, de ezt követően nem szűnik meg a mozgása, ez azt jelenti, hogy a test a korábbival ellentétes irányba kezdett haladni. Emellett a test sebessége a „fordulópont elérését követően növekedni kezd (lásd az *1.* grafikon *BK* szakaszát és a *2.* grafikon *DE* szakaszát a 10.5. ábrán).



10.5. ábra. Ha a gyorsulásvektor iránya ellentétes a sebességvektor irányával, akkor a test sebessége csökken (az *1.* grafikon *AB* szakasza, a *2.* grafikon *CD* szakasza)

4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

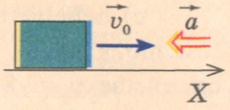
1. feladat. A 90 km/h sebességgel haladó gépkocsi megáll a közlekedési lámpa előtt. Eközben gyorsulása 5 m/s^2 volt. Határozzátok meg az autó fékezésének idejét, ha mozgását egyenes vonalú egyenletesen gyorsulónak tekintjük!

Adott:
$v_0 = 90$ km/h =
$= 25$ m/s
$a = 5$ m/s^2
$v = 0$
$t - ?$

A fizikai probléma elemzése. A gépkocsi megáll, ezért végsebessége nulla ($v = 0$), a gyorsulásvektor iránya pedig ellentétes a sebességvektoréval ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$).

Kiválasztjuk a földfelszín egy pontjához kötött VR-t.

Magyarázó rajzot készítünk, amelyen feltüntetjük a koordinátatengelyt (iránya essen egybe a mozgás irányával), az autó mozgásának sebességét és gyorsulását.



Matematikai modell keresése, megoldás. Mivel a gépkocsi egyenletesen gyorsulva egyenes vonalon halad, a megoldáshoz felhasználjuk a $v_x(t)$ függvény egyenletét az egyenletesen gyorsuló mozgásra: $v_x = v_{0x} + a_x t$.

Az ábra felhasználásával konkretizáljuk ezt az egyenletet:

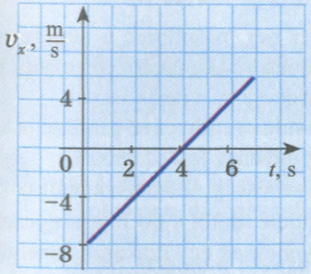
$v_{0x} = v_0$, $v_x = 0$, $a_x = -a$, tehát $0 = v_0 - at \Rightarrow v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$.

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$[t] = \frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = \text{s}; \quad \{t\} = \frac{25}{5} = 5; \quad t = 5 \text{ s}.$$

Felelet: a gépkocsi fékezésének ideje $t = 5$ s.

2. feladat. A test egyenes vonalú mozgást végzett az OX tengely mentén. A $v_x(t)$ függvény grafikonja alapján (1. ábra): 1) írjátok le a test mozgásának jellemzőit; 2) írjátok fel a mozgássebesség vetületének egyenletét; 3) ábrázoljátok a gyorsulás-idő grafikont!



1. ábra

A fizikai probléma elemzése, megoldás

(1) A gyorsulás-idő grafikon egyenes vonal, tehát a test mozgása egyenletesen gyorsuló volt.

Az első 4 másodpercben a test az OX tengellyel ellentétes irányban haladt (a sebességvetület negatív előjelű), a test mozgássebessége pedig csökkent.

A $t = 4$ s időpontban a test sebessége nullával volt egyenlő, vagyis a test megállt, ezután ellentétes irányban kezdett el mozogni (a sebesség vetületének előjele ellenkezőjére fordult). A következő 3 másodpercben a test egyenletesen gyorsuló mozgást végzett az OX tengellyel megegyező irányban, mozgássebessége ezalatt nőtt.

(2) Mivel a test egyenletesen gyorsuló mozgást végzett, általános alakban feltüntetjük az egyenletesen gyorsuló mozgás sebességvetületének egyenletét: $v_x = v_{0x} + a_x t$. Konkretizáljuk ezt az egyenletet:

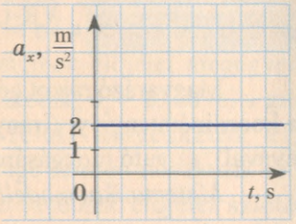
a) a grafikon alapján meghatározzuk a kezdősebesség koordinátáját: $v_{0x} = -8$ m/s;

b) kiválasztunk a grafikonon egy tetszőleges pontot, például azt, amelyiknek a $t = 4$ s és $v_x = 0$ felel meg, és meghatározzuk a gyorsulás vetületét:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{0 - (-8)\,\text{m/s}}{4\,\text{s}} = 2\,\text{m/s}^2;$$

c) behelyettesítjük a kapott értékeket a test mozgásának sebességvetületét kifejező egyenletbe: $v_x = -8 + 2t$ (m/s).

(3) mivel a test gyorsulása állandó ($a_x = 2$ m/s^2), ezért az $a_x(t)$ függvény grafikonja az idő tengelyével párhuzamos és felette elhelyezkedő egyenes (2. ábra).



2. ábra

Felelet: a test egyenletesen gyorsulva, egyenesen mozgott 8 m/s kezdősebességgel. Az első 4 s alatt az *OX* tengellyel ellentétes irányban haladt és a sebessége csökkent; 4 s elteltével a test megállt, majd ellenkező irányban (az *OX* tengely irányában) kezdett el mozogni, és a sebessége nőtt. A test mozgásának sebességvetületét kifejező egyenlet $v_x = -8 + 2t$ (m/s) alakú.

Összegzés

Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás olyan mozgás, amelynek során a test sebessége tetszőlegesen választott azonos időközök alatt egyformán változik. Az egyenletesen gyorsuló mozgás – állandó gyorsulással végzett mozgás.

A gyorsulás $\vec{a}$ olyan fizikai vektormennyiség, ami a test mozgássebesség változásának sebességét jellemzi és egyenlő a test mozgássebesség változásának és a változás időtartamának hányadosával:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

A gyorsulás mértékegysége az SI-ben a méter per másodperc a négyzeten (m/s^2). 1 m/s^2 annak az egyenletesen gyorsuló, egyenes vonalon mozgó testnek a gyorsulása, amelyik úgy mozog, hogy 1 s alatt a sebessége 1 m/s-mal változik.

Az egyenletesen gyorsuló mozgás során a gyorsulás vetületének grafikonja az idő függvényében ($a_x(t)$) az időtengellyel párhuzamos egyenes egy szakasza.

Az egyenletesen gyorsuló mozgás során a sebesség lineárisan változik: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ ($v_x = v_{0x} + a_x t$); a mozgássebesség vetülete időtől való függvényének grafikonja (sebesség-idő grafikon) ($v_x(t)$) annak az egyenesnek egy szakasza, amelyik a sebességtengely v_{0x} pontjában kezdődik.

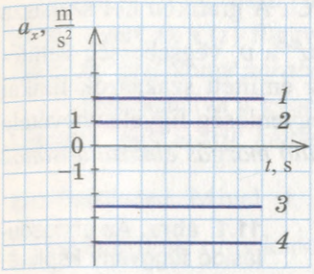
Ellenőrző kérdések

1. Milyen egyenes vonalú mozgást nevezünk egyenletesen gyorsulónak? **2.** Hogyan definiáljuk a gyorsulást? **3.** Mi a gyorsulás mértékegysége? Hogyan hangzik a meghatározása? **4.** Milyen alakú az $a_x(t)$ függvény grafikonja? **5.** Írjátok fel a $v_x(t)$ összefüggés egyenletét az egyenletesen gyorsuló egyenes vonalú mozgásra nézve! Milyen alakja van ennek a függvénygrafikonnak? **6.** Hogyan mozog a test, ha gyorsulásának iránya: a) megegyezik a sebesség irányával? b) ellentétes a sebesség irányával?

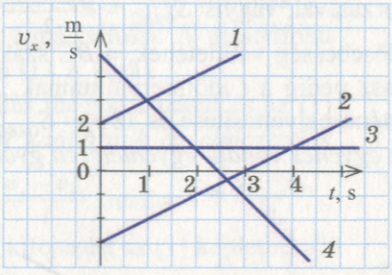
8. gyakorlat

1. Mozoghat-e a test nagy sebességgel, de kis gyorsulással?
2. Előfordulhat-e egyidejűleg, hogy a test sebessége nulla, a gyorsulása azonban nem egyenlő nullával?
3. Számítsátok ki, milyen gyorsulással mozog az álló helyzetből induló autó, ha tudjuk, hogy sebessége 10 s alatt eléri az 54 km/h-t?
4. A golyót felfelé lökték egy lejtőn, 2 m/s kezdősebességet közölve vele. Határozzátok meg a golyó mozgássebességét 0,5 s; 1 s; 1,5 s-mal a mozgás kezdetét követően! A golyó gyorsulása 2 m/s^2. A kapott eredményeket magyarázzátok meg!
5. Az állandó 0,2 m/s^2 gyorsulású egyenes vonalú mozgás során a kerékpáros 25 s alatt éri el az 5 m/s sebességet. Mennyi volt a kerékpáros kezdősebessége?
6. Mennyi időre van szüksége az autóbusznak ahhoz, hogy sebességét 54 km/h-ról 5 m/s-ra növelje? Az autóbusz gyorsulása állandó, értéke 0,5 m/s^2.
7. Az 1. ábrán négy test $a_x(t)$ függvénygrafikonja látható. Írjátok le mindegyik test sebességének $v_x(t)$ függvényét, és rajzoljátok meg grafikonjaikat! Tekintsétek úgy, hogy $v_{01x} = -4$ m/s, $v_{02x} = 6$ m/s, $v_{03x} = 2{,}5$ m/s; $v_{04x} = -10$ m/s.
8. A 2. ábrán négy test $v_x(t)$ függvénygrafikonja látható. Írjátok le mindegyik test mozgásának jellegét, mozgássebességük egyenleteit, ábrázoljátok a gyorsulás vetületének időfüggvényét!

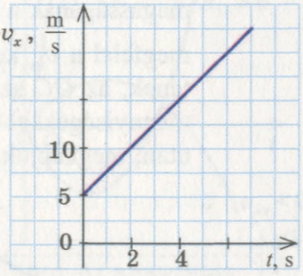
9*. A test huzamosabb ideig egyenletesen gyorsulva mozgott. A 3. ábrán mozgássebességének vetülete látható egy meghatározott időponttól kezdve. Meghatározható-e az az időpont, amikor a test megváltoztatta mozgásának irányát? Ha lehetséges, határozzátok meg!



1. ábra



2. ábra



3. ábra

11. §. ELMOZDULÁS AZ EGYENLETESEN GYORSULÓ MOZGÁS SORÁN. KOORDINÁTAEGYENLET

?! Minden bizonnyal láttátok már a televízióban, hogy amikor közlekedési baleset történik, a közlekedési rendőrök megmérik a fékutat. Miért teszik ezt? Azért, hogy meghatározzák a gépkocsi mozgássebességét a fékezés kezdetén, valamint gyorsulását a fékezés közben. Ezeket az adatokat a továbbiakban felhasználják a baleset okainak tisztázása során: átlépte-e a vezető a megengedett sebességet, hibásan működtek-e a fékek, esetleg az autóval minden rendben volt és a gyalogos a hibás, aki megszegte a közlekedési szabályokat. Hogyan lehet a fékezés idejének és a fékút hosszának az ismeretében kiszámítani a mozgás sebességét és gyorsulását, megtudjátok ebből a paragrafusból.

1 Elmozdulás az egyenletesen gyorsuló mozgás során

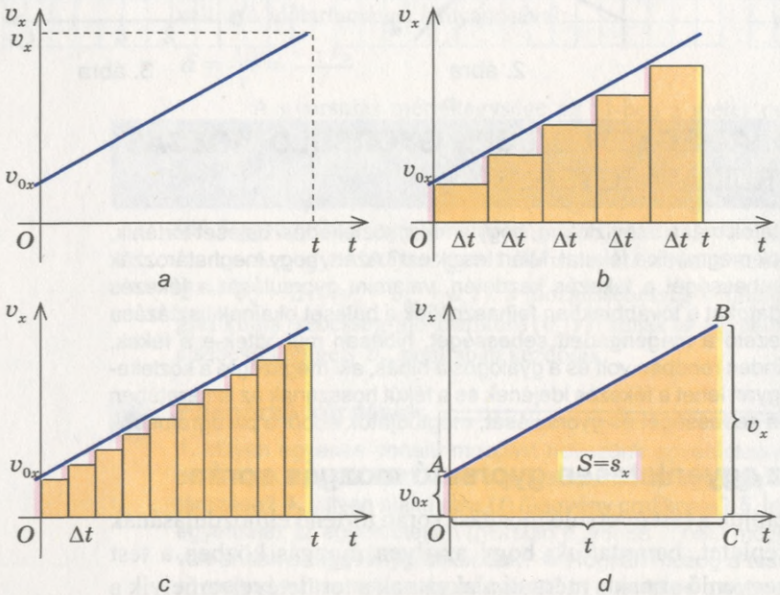
Ahhoz, hogy megkapjuk a test gyorsuló mozgása során történő elmozdulásának kiszámítására szolgáló képletet, bemutatjuk, hogy az ilyen mozgás közben a test elmozdulása számbelileg egyenlő annak a mértani alakzatnak a területével, amelyik a

sebesség-idő grafikon alatt helyezkedik el. Az egyszerűség kedvéért olyan egyenletesen gyorsuló mozgást fogunk vizsgálni, amelynek során a kezdősebesség és a gyorsulás iránya megegyezik, az OX tengely pedig a sebesség irányába mutat. Ebben az esetben a $v_x(t)$ grafikonja olyan, mint ahogy azt a 11.1. *a* ábra mutatja.

A grafikon felhasználásával megállapítjuk a test elmozdulásának bizonyos t idő alatti s_x vetületét. Ehhez a teljes mozgásidőt kis Δt intervallumokra osztjuk (11.1. *b* ábra). Feltételezzük, hogy minden egyes időintervallumban a test mozgássebessége változatlan maradt. Vagyis a valós, egyenletesen gyorsuló mozgást imaginárius (nem valós) mozgással helyettesítjük, amikor is a sebesség nem egyenletesen, hanem ugrásszerűen változik.

Állandó sebességű mozgáskor a test elmozdulása számbelileg egyenlő a $v_x(t)$ grafikon alatti téglalap területével. A teljes elmozdulás az imaginárius mozgás során egyenlő a téglalap alakú, Δt szélességű sávok területeinek összegével, amelyek együttesen lépcsőzetes alakzatot hoznak létre. Ha csökkentjük a Δt időt (11.1. *c* ábra), akkor az elmozdulás, mint korábban is a lépcsőszerű, egyre inkább trapézra hasonlító alakzat területével egyenlő.

Könnyen beláthatjuk, hogy az időintervallum végtelen kicsire való csökkentésének ($\Delta t \to 0$) eredményeként a lépcsőzetes alakzat trapézzá módosul, az elmozdulás pedig számbelileg egyenlő lesz ennek a trapéznak a területével (11.1. *d* ábra). A trapéz területe egyenlő az alapjai számtani közepének és a magasságának a szorzatával, vagyis $S_{OABC} = \frac{OA + BC}{2} OC$. A grafikon OA szakasza megfelel a v_{0x} kezdősebesség vetületének, a BC szakasz a v_x végsebesség vetületének, az OC szakasz pedig a t időintervallumnak. Az említett szakaszok fizikai mennyiségekkel történő helyettesítése és az $s_x = S_{OABC}$ egyenlőség figyelembevétele után, megkapjuk *az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás elmozdulásának*



11.1. ábra. Az elmozdulásidő függvény képletének kivezetéséhez egyenletesen gyorsuló mozgáskor: *a*) a $v_x(t)$ függvény grafikonja; a (*d*) grafikont a (*b*) grafikonból kaptuk a Δt időintervallum végtelen csökkentése által. A test elmozdulása számbelileg egyenlő annak a trapéznak a területével, amelyet az Ov_x és Ot tengely, valamint a $v_x(t)$ grafikon és a t pontra állított merőleges $v_x(t)$ grafikonnal való metszéspontjáig terjedő szakasz határol

geometriai értelmezésére szolgáló képletet:

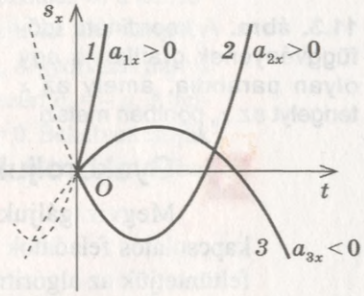
$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t \qquad (1)$$

2 Még hogyan lehet meghatározni az elmozdulást egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás során

Az (1) képlet alkalmas lehet sokféle feladat megoldására, azonban segítségével nem állapítható meg a test elmozdulásának vetülete és mozgásának ideje közötti függvénykapcsolat ($s_x(t)$), mivel az (1) képletben egyidejűleg két változó található: v_x és t. A v_x változó könnyen kizárható, tudva azt, hogy az egyenletesen gyorsuló mozgás sebességének vetülete: $v_x = v_{0x} + a_x t$. Ezt a kifejezést az (1) képletbe behelyettesítve adódik: $s_x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = \frac{2v_{0x} + a_x t}{2} t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$. Tehát megkaptuk az *elmozdulás időfüggvényének képletét* ($s_x(t)$)*:

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad (2)$$

Mivel a v_{0x} és a_x mennyiségek nem függnek az időtől, ezért az $s_x(t)$ függvény másodfokú. A másodfokú függvény grafikonja *parabola* (11.2. ábra).



11.2. ábra. Az elmozdulás vetülete időtől való függésének grafikonja a koordináta-rendszer kezdőpontján áthaladó parabola: ha $a_x > 0$, akkor a parabola felfelé nyitott, ha $a_x < 0$, akkor lefelé (3. grafikon). Minél meredekebb a grafikon, annál nagyobb a gyorsulás ($a_1 > a_2$)

Felhasználva a gyorsulás meghatározását és az (1) képletet, egy *másik képletet kaphatunk az elmozdulás kiszámítására*. Mivel $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$, ezért $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$. Behelyettesítjük a t-re kapott kifejezést az (1) képletbe:

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot t = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{(v_{0x} + v_x)(v_x - v_{0x})}{2a_x}.$$

Végezetül:

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \qquad (3)$$

A (3) képletet akkor célszerű használni, amikor a feladatban nincs megadva a test mozgásideje és azt ki sem kell számítani.

Figyeljétek meg: az összes kivezetett képletben (1)–(3) a v_x, v_{0x} és a_x vetületei mind pozitívak, mind pedig negatívak is lehetnek, attól függően, hogy milyen irányúak a $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ és $\vec{a}$ vektorok az OX tengelyhez képest.

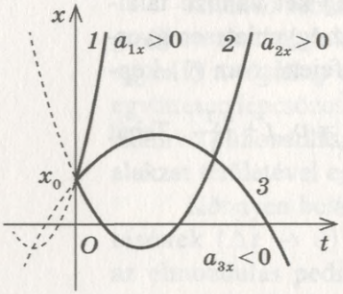
* Az $\vec{s}$ elmozdulás vektormennyiség, ezért egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén az $\vec{s}(t)$ függvényt megadó képlet: $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$.

3 Hogyan függ a test koordinátája az időtől egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás során?

Ismerve az $s_x(t)$ függvény egyenletét, egyszerű eljutni az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végző test koordinátaegyenletéhez.

Valóban, minden mozgásfajta esetében az elmozdulást és a koordinátát az $x = x_0 + s_x$ összefüggés köti össze; az egyenletesen gyorsuló mozgásra nézve $s_x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$. Tehát a *koordinátaegyenlet egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetében:*

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2. \qquad (4)$$



11.3. ábra. A koordináta időfüggvényének grafikonja egy olyan parabola, amely az x tengelyt az x_0 pontban metszi

Ismerve a test kiinduló (x_0) helyzetét a $t = 0$ időpontban, a test $\vec{v}_0$ kezdősebességét, az $\vec{a}$ gyorsulását, a (4) képlet segítségével meghatározható a test helyzete tetszőleges időpontban, vagyis megoldható a mechanika fő feladata egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén.

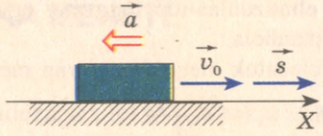
Elemezve a koordinátaegyenletet, levonhatjuk azt a következtetést, hogy az $x(t)$ függvény másodfokú, ezért a koordináta időtől való függésének grafikonja parabola (11.3. ábra).

4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Megvizsgáljuk egy konkrét példán az egyenletesen gyorsuló mozgással kapcsolatos feladatok megoldásának fő szakaszait. A táblázat bal oldali oszlopában feltüntetjük az algoritmust – azoknak a lépéseknek, műveleteknek a sorrendjét, amit számos kinematikai feladat során be kell tartani – a jobb oldali oszlopában pedig a feladat megoldásának példáját.

A műveletek sorrendje	A feladat megoldásának példája
1. Figyelmesen olvassátok el a feladat feltételét! Tisztázzátok, mely testek vesznek részt a mozgásban, milyen a mozgásuk jellege, a mozgás mely paraméterei ismertek!	**Feladat.** A vonat a fékezés megkezdését követően 225 m-t tett meg a megállóig. Mennyi volt a vonat sebessége a fékezés megkezdése előtt? Tekintsétek úgy, hogy a vonat gyorsulása állandó, értéke 0,5 m/s².
2. Írjátok le a feladat rövid feltételét! Szükség esetén a fizikai mennyiségek értékeit alakítsátok át az SI egységeibe!	Adott: $s = 225$ m $a = 0{,}5$ m/s² $v = 0$ ——— $v_0 - ?$

A táblázat folytatása

A műveletek sorrendje	A feladat megoldásának példája
3. Készítsetek magyarázó rajzot, amin tüntessétek fel a koordinátatengelyeket; tüntessétek fel minden test sebességének irányát, a kezdősebességet, a gyorsulást!	A magyarázó rajzon az OX tengelyt a vonat haladási irányával megegyezően irányítjuk. Mivel a vonat csökkenti a sebességét, ezért $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}_0$. 
4. Az egyenletesen gyorsuló mozgás képletei közül válasszátok ki azokat, amelyek a leginkább megfelelnek a feladat feltételeinek! $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$; $v_x = v_{0x} + a_x t$; $s_x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$; $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$; $s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$. A kivrálasztott képletet vonatkoztassuk az adott esetre.	A feladat feltétele alapján ismert az a, v és s, meg kell határozni a v_0-t. Mind a négy fizikai mennyiség szerepel az $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$ képletben. Hozzáigazítjuk a képletet a feladat feltételeihez (az ábra segítségével a vetületekről áttérünk az abszolút értékekre). Az elmozdulás és a kezdősebesség iránya megegyezik az OX tengely irányával, ezért $s_x = s$, $v_{0x} = v_0$. A gyorsulás iránya ellentétes az OX tengellyel, ezért $a_x = -a$. A feltétel szerint a végsebesség $v = 0$. Behelyettesítjük a kapott adatokat az elmozdulás képletébe: $s = \frac{0 - v_0^2}{-2a} = \frac{v_0^2}{2a}$.
5. Oldjátok meg a feladatot általános alakban (állítsátok fel a keresett mennyiségek matematikai kifejezését)!	Az $s = \frac{v_0^2}{2a}$ képletből kivezetjük a v_0 kezdősebességet: $v_0 : v_0^2 = 2as$, innen $v_0 = \sqrt{2as}$.
6. Ellenőrizzétek le a keresett mennyiség egységét!	$[v] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,\text{m}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
7. Számítsátok ki a keresett mennyiség számbeli értékét!	$\{v\} = \sqrt{2 \cdot 225 \cdot 0{,}5} = \sqrt{225} = 15$.
8. Írjátok le, és elemezzétek az eredményt!	$v_0 = 15$ m/s $= 54$ km/h teljesen valós szám a vonat sebességét illetően.
9. Írjátok le a feleletet!	*Felelet*: a fékezés kezdete előtt a vonat sebessége $v_0 = 54$ km/h.

Összegzés

Akárcsak az egyenletes mozgás esetében, az elmozdulás vetülete az egyenletesen gyorsuló mozgáskor is számbelileg egyenlő a sebesség-idő grafikonja alatt elhelyezkedő alakzat területével: $s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$.

Az elmozdulás vetületének egyenlete az egyenletesen gyorsuló egyenes vonalú mozgás során: $s_x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$.

Az elmozdulás-idő függvény egyenlete másodfokú, így az $s_x(t)$ függvény grafikonja parabola.

A feladatok megoldása során még egy képletet használnak az elmozdulás kiszámítására: $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$.

A test koordinátáját az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás során a következő egyenlet alapján határozzák meg: $x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$.

Ismerve a test kiinduló x_0 helyzetét, $\vec{v}_0$ kezdősebességét és $\vec{a}$ gyorsulását, meghatározható a test helyzete tetszőleges időpontban, vagyis megoldható a mechanika fő feladata az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetében.

Ellenőrző kérdések

1. Bizonyítsátok be, hogy az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén az elmozdulás vetülete számbelileg egyenlő a sebesség-idő grafikon alatt elhelyezkedő alakzat területével! **2.** Mely képletekkel határozható meg az elmozdulás vetülete az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetében? Vezessétek le ezeket a képleteket! **3.** Milyen alakú az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás koordináta-idő grafikonja; elmozdulás-idő grafikonja? **4.** Hogyan kell megoldani a mechanika fő feladatát egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetén?

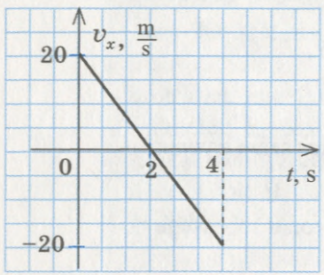
9. gyakorlat

1. Az 1 m/s sebességgel haladó síző megkezdi a lesiklást a hegyről. Határozzátok meg a lejtő hosszát, ha a síző 10 s alatt teljesítette a távot, és 0,5 m/s² állandó gyorsulással mozgott!

2. A személyvonat a fékezés során 54 km/h-ról 5 m/s-ra csökkentette sebességét. Számítsátok ki a fékezés alatt megtett utat, ha a vonat 4m/s² állandó gyorsulással mozgott!

3. A személyautó féke rendben működik, ha 8 m/s sebesség mellett a fékút 7,2 m-rel egyenlő. Határozzátok meg a fékezés időtartamát és a gépkocsi gyorsulását!

4. Az ábrán egy test sebesség-idő függvényének grafikonja látható. Állapítsátok meg a test által megtett utat és elmozdulásának vetületét az idő mérésének 4 másodperce alatt! Írjátok le a koordinátaegyenletet, ha a $t = 0$ időpontban a test a –20 m koordinátájú pontban volt!



5. A testek mozgását a következő egyenletek adják meg: a) $x_1 = 4 + 5t + 2t^2$; b) $x_2 = -9 + t - 0{,}5t^2$; c) $x_3 = 0{,}2t^2$; d) $x_4 = -5t - 3t^2$; e) $x_5 = 4 + 0{,}75t$. Mindegyik esetben írjátok le a $v_x(t)$ függvényt; ábrázoljátok ennek a függvénynek a grafikonját; írjátok le a test mozgásának jellegét!

6*. Két gépkocsi ugyanabból a pontból, ugyanabba az irányba indult. Az első autó húsz perccel a második után indult. Mindkét jármű egyenletesen gyorsulva, 0,4 m/s² gyorsulással halad. A második autó indulásától számítva mennyi idő múlva lesz a távolság közöttük 240 m?

1. SZ. LABORATÓRIUMI MUNKA

Téma: egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végző test gyorsulásának meghatározása.

Cél: a ferde csatornában guruló test gyorsulásának meghatározása.

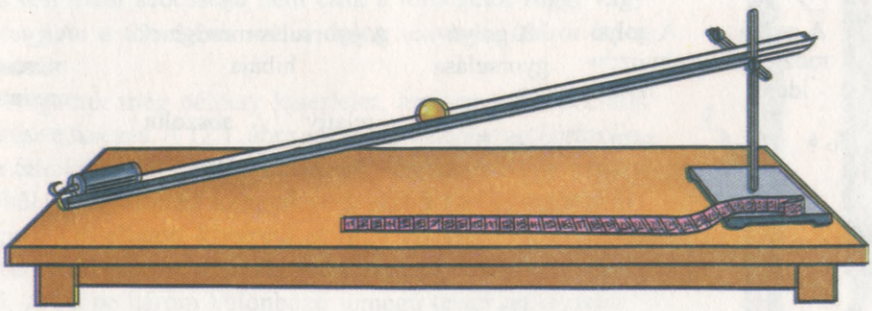
Eszközök: fémből vagy fából készült csatorna, golyó, szorítócsavarral és fogóval ellátott laboratóriumi állvány, stopperóra, mérőszalag, fémhenger vagy más, a golyó mozgásának megállítására alkalmas tárgy.

A MUNKA MENETE

A kísérlet előkészítése

1. Mielőtt elkezditek a munkát, idézzétek fel a válaszokat az alábbi kérdésekre, és oldjátok meg a feladatot!
   1) Milyen mozgást nevezünk egyenletesen gyorsulónak?
   2) Mi a test mozgásának gyorsulása?
   3) Mi a gyorsulás mértékegysége az SI-ben?

   Feladat. A laposan lejtő csatornában leguruló golyó egyenletesen gyorsulva mozog. Határozzátok meg a golyó gyorsulását, ha az s hosszúságú csatornán a golyó t idő alatt halad végig, a golyó kezdősebessége pedig nulla volt!
2. Elemezve a feladat megoldásakor kapott végső képletet, írjátok fel, milyen fizikai mennyiségeket kell megmérni a laboratóriumi munka elvégzése során, és ehhez milyen műszerekre van szükség!
3. Rögzítsétek a csatornát az állvány fogójába! Engedjétek le a fogót úgy, hogy a csatorna kis szöget zárjon be a vízszintessel (lásd az ábrát)!



4. A csatorna alsó részén helyezzétek el a fémhengert!
5. A csatorna felső részén jelöljétek meg a golyó indítási helyét!

Kísérlet

A méréseredményeket foglaljátok táblázatba!

1. Mérjétek meg a jel és a henger közötti s távolságot (ez a távolság egyenlő a golyó elmozdulásának abszolút értékével).
2. Helyezzétek el a golyót a jellel szemben! Állítsátok be a stoppert!

3. Engedjétek el a golyót, és mérjétek meg azt a t_1 időt, ami alatt a golyó legurul a csatornában (a golyó mozgása megkezdésének pillanatától a fémhengerbe ütközéséig eltelt időt).
4. Nem változtatva a csatorna hajlásszögét és a golyó kiinduló helyzetét, ismételjétek meg a kísérletet még négyszer, minden esetben megmérve a golyó mozgásának időtartamát!

A kísérleti eredmények feldolgozása

1. Számítsátok ki a golyó mozgásának átlagos idejét: $t_{\text{átl}} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}$.
2. Számítsátok ki a golyó gyorsulásának középértékét: $a_{\text{átl}} = \frac{2s}{t_{\text{átl}}^2}$.
3. Becsüljétek meg a kísérlet abszolút és relatív hibáját (lásd a 3.§-t). Ehhez:
   1) számítsátok ki az időmérés abszolút és relatív hibáját:
   $$\Delta t = \frac{\sqrt{(t_1 - t_{\text{átl}})^2 + (t_2 - t_{\text{átl}})^2 + (t_3 - t_{\text{átl}})^2 + (t_4 - t_{\text{átl}})^2 + (t_5 - t_{\text{átl}})^2}}{5}; \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta t_{\text{átl}}}{t_{\text{átl}}};$$
   2) számítsátok ki az elmozdulás abszolút értékének mérésekor keletkezett abszolút és relatív hibát: $\Delta s = \sqrt{\Delta s_{\text{műsz}}^2 + \Delta s_{\text{vél}}^2}$; $\varepsilon_s = \frac{\Delta s}{s}$;
   3) számítsátok ki a gyorsulás abszolút értékének mérésekor keletkezett relatív és abszolút hibát: $\varepsilon_a = \varepsilon_s + 2\varepsilon_t$; $\Delta a = \varepsilon_a \cdot a_{\text{átl}}$!
4. Kerekítsétek az eredményt a kerekítés szabályai szerint, a mérés eredményét írjátok le $a = a_{\text{átl}} \pm \Delta a$ alakban!
5. Töltsétek ki a táblázatot!

A kísérlet sorszáma	A golyó mozgásideje		A golyó elmozdulása	A golyó gyorsulása	A gyorsulás mérésének hibája		A gyorsulás mérésének eredménye
	t_i, s	$t_{\text{átl}}$, s	s, m	$a_{\text{átl}}$, m/s²	relatív ε_a, %	abszolút Δa, m/s²	$a = a_{\text{átl}} \pm \Delta a$, m/s²

A kísérlet és eredményeinek elemzése

Elemezzétek a kísérletet és az eredményeit! Vonjatok le következtetést, amiben tüntessétek fel, milyen mennyiséget mértetek, milyen eredményeket kaptatok, mi a hiba oka, szerintetek melyik mennyiség mérése adja a legnagyobb hibát!

Alkotó feladat

Gondoljátok végig, milyen tényezőktől függ a gyorsulás, amellyel a golyó a lejtőn legurul! Írjátok le a feltételezések helyességének ellenőrzésére szolgáló kísérlet elvégzésének tervét! Végezzétek el a kísérletet! Írjátok le az eredményét, vonjatok le következtetést feltételezések helyességét illetően!

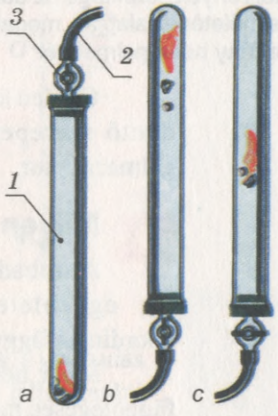
12. §. A TESTEK SZABADESÉSE. A SZABADESÉS GYORSULÁSA. A SZABADESÉST VÉGZŐ TESTEK MOZGÁSEGYENLETE

?! Arisztotelész azt állította, hogy minél nehezebb a test, annál gyorsabban hull a Földre. Ezt az állítást 2000 év múlva cáfolta meg Galileo Galilei. Hogyan lehet ezt megcáfolni? – kérdezhetitek. – Hiszen ez valóban így van! Igaz, ha például azonos magasságig emelünk egy teli és egy üres gyufásdobozt, és egyszerre engedjük el őket, a teli doboz esik le hamarabb. De ez csak akkor van így, ha a mozgás a levegőben megy végbe. Mi van akkor, ha mindez a vákuumban történik, ahol semmi sem gátolja a dobozok mozgását? Ez a paragrafus arról szól, hogyan esik le a test, ha semmi sem gátolja a mozgását.

1 Mi a szabadesés

Elvégzünk néhány egyszerű kísérletet. Az egyik kezünkbe egy magazint, a másikba egy papírlapot fogunk, bizonyos magasságba emeljük, majd elengedjük őket. A magazin hamarabb esik le, mint a papírlap. Vagyis, első látásra úgy tűnik, hogy minél nehezebb a test, annál gyorsabban esik. Folytatjuk a kísérletet. Veszünk két papírlapot, azonos magasságba emeljük, majd egyszerre elengedjük őket – a papírlapok gyakorlatilag egyszerre érik el a padlót. Következik-e ebből, hogy az azonos tömegű testek azonos sebességgel esnek? Megváltoztatjuk a kísérlet feltételeit. Veszünk két egyforma papírlapot, de az egyiket összegyűrjük. Az előző következtetést véve alapul, feltételezhetjük, hogy a papírlapoknak egy időben kellene földet érniük. A kísérlet azonban azt mutatja, hogy az összegyűrt papírlap sokkal gyorsabban mozog, mint a sima, pedig a tömegük azonos. Vagyis a test esési sebessége nem csak a tömegétől függ, vagy egyáltalán nem a tömegben van a dolog lényege. Akkor mi a magyarázat?

Elvégzünk még néhány kísérletet, amihez már speciális berendezés szükséges. A 12.1. ábra az ún. *Newton-csövet* ábrázolja, amely a feltalálójáról kapta a nevét. A Newton-cső egy hosszú üvegcsőből (*1*) áll, aminek az egyik vége zárt, a másik végén pedig egy csappal (*3*) ellátott kivezető cső (*2*) található. A kivezető csövön keresztül egy speciális szivattyú segítségével eltávolítható a levegő. A csőbe három különböző tömegű testet helyeztek el: egy ólomgolyót, egy darabka habszivacsot és egy madártollat.



12.1. ábra. Különböző tömegű testek szinkronban való esésének bemutatása a Newton-csőben: *a* – a cső általános alakja; *b* – ha a csőben levegő van a testek különböző időpontokban érik el a cső alját; *c* – vákuumban a testek egyszerre érik el a cső alját

Nyitott csap mellett, gyorsan megfordítjuk a csövet. Előbb az ólomgolyó, majd a habszivacs, végül pedig a madártoll éri el az üvegcső alját (12.1. *b* ábra). Kiszivattyúzzuk a csőből a levegőt, elzárjuk a csapot, és gyorsan újra megfordítjuk az üveget. Most mindhárom test egyszerre hull le a cső aljára (12.1. *c* ábra). Kísérleti úton megállapítható, hogy *légüres térben a testek esése egyenletesen gyorsuló mozgás*. Az a tény, hogy a testek egy időben érték el a cső alját azt mutatja, hogy a gyorsulás, amellyel a testek haladtak, nem függ a tömegüktől.

A testek esését a légüres térben **szabadesésnek** nevezzük.

Szabadeséskor a testek tömegüktől függetlenül azonos gyorsulással esnek a Földre. Ezt a gyorsulást a szabadesés gyorsulásának nevezzük és $\vec{g}$-vel jelöljük.



12.2. ábra. Christiaan Huygens (1629–1695) németalföldi matematikus, csillagász, fizikus. Feltalálta a felhúzható mechanizmussal ellátott ingaórát, felfedezte a fizikai inga rezgésének törvényeit, lefektette az ütközés elméletének alapjait, megalkotta a fény hullámelméletét

A szabadesés gyorsulásának vektora mindig függőlegesen lefelé irányul. A szabadesés gyorsulásának abszolút értékét elsőként *Christiaan Huygens* (12.2 ábra) mérte meg 1656-ban. A Föld felszínének közelében gyakorlatilag változatlan és értéke kb. 9,8 m/s^2 *.

2 Hogyan cáfolta meg a kísérlet Arisztotelész véleményét?

A testek esését elsőként Galileo Galilei tanulmányozta, aki előbb kifejtette, majd kísérletileg is igazolta azt a hipotézisét, miszerint a légellenállás az oka annak, hogy a könnyű testek kisebb gyorsulással esnek a levegőben. A légüres térben az összes test – függetlenül a tömegüktől, térfogatuktól, formájuktól – azonos gyorsulással esik a földre. Galilei elvégzett egy sor jól átgondolt kísérletet (a tudós különböző golyókat gurított le a lejtőn, fokozatosan változtatva a lejtő hajlásszögét) és bebizonyította, hogy Arisztotelész feltevése, miszerint a test esésének sebessége egyenesen arányos a test tömegével, ellenkezik a kísérleti adatokkal.

Galileo kísérleteinek általános tudományos jelentősége is volt: a fizikai kísérlet döntő szerepet kezdett játszani a különböző következtetések végső megfogalmazásakor.

3 Milyen alakúak a szabadesés mozgásegyenletei?

A szabadesés állandó gyorsulással végzett mozgás, ezért matematikai leírására az egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség-, elmozdulás, illetve koordinátafüggvényének képleteit alkalmazzuk.

Most nézzük a szabadesés törvényei leírásainak gyakorlati részleteit. A függőlegesen mozgó test mozgásának leírásakor a sebesség-, gyorsulás- és elmozdulás vektort hagyományosan az *OY* tengelyre vetítik, miközben a vízszintes mozgás leírásakor az *OX* tengelyre, vagyis az egyenletekben az *x*-et *y*-ra *cseréljük*. Hagyományosan *h*-val (magasság) jelölik a test mozgását a függőleges mentén, ezért az *s*-t *h*-ra *cseréljük*. A szabadon eső testek azonos gyorsulással mozognak, melynek betűjele *g*, ezért az *a* jelölés helyett *g*-t *használunk*. A cserék eredményeként megkapjuk *a szabadon eső test mozgásának leírására szolgáló egyenleteket*:

* Amikor nincs szükségünk hajszálpontos eredményre, akkor a $g \approx 10$ m/s^2 értékét vehetjük.

A képlet neve	Az *OX* tengely mentén egyenletesen gyorsuló testek mozgását leíró egyenletek	Az *OY* tengely mentén szabadesést végző testek mozgását leíró egyenletek
A sebesség-idő függvényének egyenlete	$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} + g_y t$
Az elmozdulás-idő függvényének egyenlete	$s_x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	$s_y = h_y = v_{0y} t + \frac{1}{2} g_y t^2$
Az elmozdulás vetületének kiszámítására szolgáló képlet, ha ismeretlen a test mozgásideje	$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$	$s_y = h_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g_y}$
Az elmozdulás geometriai értelmezését kifejező képlet	$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t$	$s_y = h_y = \frac{v_{0y} + v_y}{2} t$
A koordinátaegyenlet	$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g_y t^2$

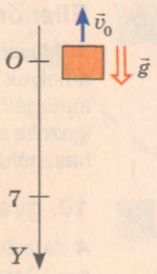
4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A léghajó egyenletesen emelkedik, 2 m/s sebességgel. 7 m-rel a Föld felszíne felett kisméretű, nehéz tárgyat dobtak ki belőle. Mennyi idő múlva esik le a tárgy a földre? Milyen lesz a sebessége a becsapódás pillanatában? A tárgy esését tekintsük szabadesésnek.

Adott:
$v_0 = 2$ m/s
$h = 7$ m
$g \approx 10$ m/s^2

$t - ?$
$v - ?$

A fizikai probléma elemzése. A feladat megoldásához előbb magyarázó rajzot készítünk. Az *OY* tengelyt függőlegesen lefelé irányítjuk, a koordináta-rendszer kezdőpontjának (az *O* pontnak) a test esése megkezdésének pillanatában elfoglalt helyzetét tekintjük. Mivel a testet egy egyenletesen felfelé mozgó léghajóból engedték el, ezért az esés megkezdésének pillanatában a test mozgási sebessége megegyezett a léghajó sebességével és felfelé irányult.



Matematikai modell keresése, megoldás. Mivel ismert a kezdősebesség, a gyorsulás és a test elmozdulása, az esés idejének meghatározásához célszerű felhasználni az elmozdulás egyenletét: $h = v_{0y} t + \frac{1}{2} g_y t^2$. Konkretizáljuk az egyenletet (az ábra felhasználásával a vetületekről áttérünk az abszolút értékekre) $h_y = h = 7$ m, $v_{0y} = -v_0 = -2$ m/s, $g_y = g = 10$ m/s^2. Behelyettesítjük ezeket az adatokat az elmozdulás egyenletébe: $7 = -2t + 5t^2 \Rightarrow 5t^2 - 2t - 7 = 0$.
Megoldjuk a másodfokú egyenletet és meghatározzuk a t értékét:

$D = \sqrt{4 + 4 \cdot 5 \cdot 7} = 12$; $t_1 = \frac{2 + 12}{10} = 1{,}4$ (s); $t_2 = \frac{2 - 12}{10} = -1$ (s) nem megoldása a feladatnak, mivel az idő előjele nem lehet negatív.

A test mozgássebességének meghatározásához a becsapódása pillanatában alkalmazzuk a sebesség képletét: $v_y = v_{0y} + g_y t$. Konkretizálása után: $v_y = -v_0 + gt$. Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s} = \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad \{v\} = -2 + 10 \cdot 1{,}4 = 12; \quad v = 12 \text{ m/s}.$$

Felelet: a test $t = 1{,}4$ s elteltével csapódik a földbe, sebessége a becsapódás pillanatában $v = 12$ m/s lesz.

Összegzés

A testek esését a légüres térben szabadesésnek nevezzük. Kísérleti bizonyítást nyert, hogy a szabadesés egyenesen gyorsuló mozgás. Szabadeséskor a testek tömegüktől függetlenül azonos gyorsulással esnek a Földre, ezt a gyorsulást a szabadesés gyorsulásának nevezzük és $\vec{g}$-vel jelöljük.

A szabadesés gyorsulásának vektora mindig függőlegesen lefelé irányul. A szabadesés gyorsulásának számértéke a Föld felszínének közelében gyakorlatilag változatlan és értéke kb. 9,8 m/s^2.

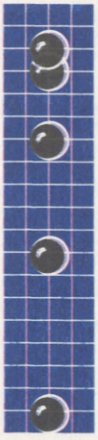
A szabadesés leírására és a feladatok megoldása során a következő képleteket használjuk: $v_y = v_{0y} + g_y t$; $h_y = v_{0y} t + \frac{1}{2} g_y t^2$; $h_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g_y}$; $h_y = \frac{v_{0y} + v_y}{2} t$; $y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g_y t^2$, ahol v_{0y} a kezdősebesség OY tengelyre eső vetülete; v_y a végsebesség OY tengelyre eső vetülete; g_y a szabadesés gyorsulásának az OY tengelyre eső vetülete; h_y a test elmozdulásának vetülete az OY tengelyre; y_0 a test kezdeti koordinátája; y a test koordinátája a t időpontban.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen mozgást nevezünk szabadesésnek? **2.** Vázoljátok azokat a kísérleteket, amelyek segítségével igazolni lehet, hogy a szabadesés gyorsulása nem függ a test tömegétől! **3.** Hogyan irányul a szabadesés gyorsulása és mennyi az értéke? **4.** Ki igazolta először, hogy minden test azonos gyorsulással esik a földre? **5.** Milyen képleteket használunk a testek szabadesésének leírására?

10. gyakorlat

A feladatok megoldása közben tekintsétek úgy, hogy nincs légellenállás és $g \approx 10$ m/s^2.



1. A labdát 20 m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobták. Számítsátok ki a labda mozgásának sebességét és elmozdulását 3 s-mal a mozgás megkezdése után!

2. A testet 30 m/s kezdősebességgel függőlegesen feldobták. Mekkora magasságon csökken a sebessége a harmadára?

3. A sztroboszkópos fénykép alapján készített rajz alapján határozzátok meg a golyó szabadesésének gyorsulását! A sztroboszkóp felvillanásai között eltelt idő 0,1 s, a háló minden négyzetének oldalhossza 5 cm.

4. A nyílvesszőt függőlegesen felfelé lőtték ki az íjból 10 m/s sebességgel. Tudjuk, hogy 2 s elteltével ugyanazzal a sebességgel már lefelé esett. Határozzátok meg a nyílvessző által elért maximális emelkedési magasságot, valamint az általa megtett utat és az elmozdulását ezalatt a 2 s alatt!

5. Két golyó ugyanazon függőleges mentén helyezkedik el, egymástól 10 m távolságra. A felső golyót ledobják 29 m/s kezdősebességgel, az alsót pedig vele egyidejűleg egyszerűen elengedik. Mennyi idő elteltével ütköznek össze a golyók?

6*. A tetőről lelógó jégcsapról elszakadt egy vízcsepp. Mekkora utat tesz meg az elszakadása utáni negyedik másodpercben?

13. §. A TEST GÖRBE VONALÚ MOZGÁSA

?! Már szó esett arról, hogy a mozgáspályájuk alakja alapján minden mozgás két fajtára osztható: egyenes vonalú, illetve görbe vonalú mozgásokra. Eddig olyan mozgásokat tanulmányoztunk, amelyek során a mozgáspálya egyenes vonalú volt. Azonban a gyakorlatban sokkal gyakrabban találkozhatunk görbe vonalú mozgással. A gépkocsi befordul a kereszteződésben, a gyalogos a kanyargós ösvényen halad, a bolygó száguld a csillaga körül, a töltött részecske elhajlik a mágneses térben és sok más mozgás. Ezek mind a nem egyenes vonalú mozgások példái.

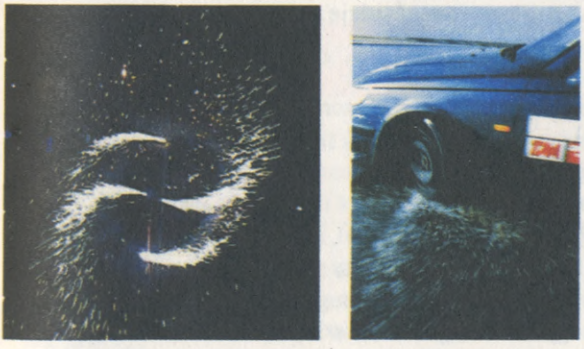
1 Miben rejlenek a görbe vonalú mozgás jellegzetességei?

A **görbe vonalú mozgás** olyan mozgás, amelynek során a test mozgáspályája görbe vonalú.

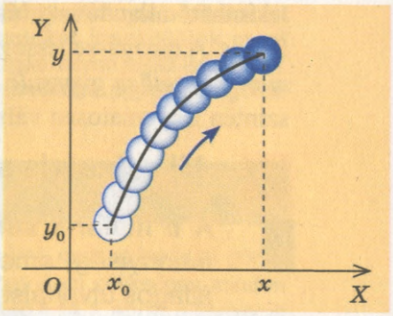
A görbe vonalú mozgás sokkal bonyolultabb az egyenes vonalúnál. Először is, görbe vonalú mozgáskor a testnek legalább két koordinátája változik (13.1. ábra).

Másodszor, görbe vonalú mozgás során a pillanatnyi sebesség vektora, tehát az elmozdulásvektor is független a test mozgáspályájától, azaz nem esik vele egybe.

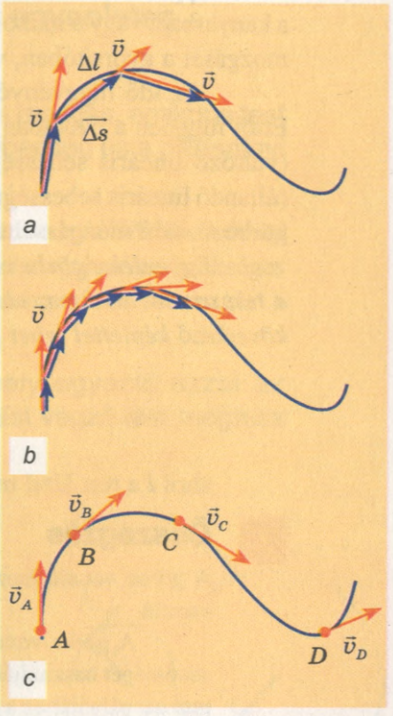
A pillanatnyi sebesség vektora minden esetben egybeesik a mozgáspályához az adott pontban húzott érintővel, és a test haladási irányába mutat (13.2., 13.3. ábra).



13.3. ábra. A tűzijátékból szóródó szikrák, a gépkocsi kerekeiről lerepülő sárdarabok a mozgáspályához húzott érintő mentén irányulnak, tehát az érintő mentén irányul pillanatnyi sebességük is (azaz a testtől való elszakadásuk pillanatában mért sebességük)



13.1. ábra. Ha a görbe vonalú mozgás a síkban történik, akkor a testnek két, *x* és *y* koordinátája változik



13.2. ábra. A test mozgáspályáját egyre kisebb Δl szakaszokra darabolva láthatjuk, hogy a sebesség iránya egyre jobban közelít az érintő irányához $\left(\vec{v} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta s}\right)$ (*a*, *b*). Az adott pontban ($\Delta t \to 0$) a pillanatnyi sebesség a mozgáspálya adott pontban húzott érintő mentén irányul (*c*)

Harmadszor, görbe vonalú mozgáskor a sebességvektor iránya folyton változik, ezért még ha a sebesség abszolút értéke nem is változik, a mozgássebesség nem tekinthető állandónak, hiszen a vektormennyiségeknek a számértéke és az iránya is fontos. A mozgássebesség folytonos változása azt jelenti, hogy *a görbe vonalú mozgás minden esetben gyorsuló mozgás*. A görbe vonalú mozgás során a gyorsulás iránya szintén folyamatosan változik.

2 Mi a lineáris sebesség?

A v lineáris sebesség – a görbe vonalú mozgást jellemző fizikai mennyiség, amely egyenlő a végtelenül kis időintervallumban mért átlagos útvonalsebességgel.

Mivel a nagyon kis időintervallumokban az elmozdulás nagysága (a Δs húr hossza) közelít a mozgáspálya szakaszának (Δl) hosszához (lásd a 13.2. ábrát), ezért *az adott pontban a lineáris sebesség egyenlő a pillanatnyi sebesség abszolút értékével.*

Éppen a lineáris sebességre gondolunk, amikor a gépkocsi mozgását jellemezzük a kanyarban, vagy a műhold repülési sebességéről beszélünk, vagy leírjuk a részecskék mozgását a gyorsítóban, vagy éppen a sízó mozgássebességét a lesiklópályán stb.

Az idő függvényében a lineáris sebesség változhat, de állandó is maradhat. Ettől függően a fizikában megkülönböztetik a *nem egyenletes görbe vonalú mozgást* (változó lineáris sebességű mozgás), illetve az *egyenletes görbe vonalú mozgást* (állandó lineáris sebességű mozgás). Az iskolai fizika tananyagban csak az egyenletes görbe vonalú mozgással találkoztok.

Egyenletes görbe vonalú mozgáskor tetszőleges egyenlő időintervallumok alatt a test azonos utat tesz meg, ezért a test mozgásának lineáris (kerületi) sebességét a következő képlettel lehet meghatározni:

$$v = \frac{l}{t},$$

ahol l a test által megtett út; t a test mozgásideje.

! Összegzés

A görbe vonalú mozgás olyan mozgás, amelynek során a test mozgáspályája görbe vonalú.

A görbe vonalú mozgás sebességének jellemzésére a pillanatnyi és a lineáris sebességet használják. A pillanatnyi sebesség vektora minden esetben egybeesik a test mozgáspályájához a vizsgált pontban húzott érintővel, a pillanatnyi sebesség nagysága pedig megegyezik a lineáris sebességgel. A mozgássebesség folytonos változása azt jelenti, hogy a görbe vonalú mozgás minden esetben gyorsuló mozgás.

A v lineáris sebesség egyenlő a végtelenül kis időintervallumban mért átlagos útvonalsebességgel.

Az állandó lineáris sebességgel végzett mozgást egyenletes görbe vonalú mozgásnak nevezik. Ilyen mozgáskor a lineáris sebességet a $v = \frac{l}{t}$ képlettel számítják ki.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen mozgást nevezünk görbe vonalúnak? **2.** Végezhet-e a test gyorsulás nélküli görbe vonalú mozgást? Állításotokat bizonyítsátok be! **3.** Hogyan irányul a pillanatnyi sebességvektor görbe vonalú mozgás során? Válaszotokat indokoljátok meg! **4.** Definiáljátok a lineáris sebességet! **5.** A görbe vonalú mozgás milyen fajtáit ismeritek? Definiáljátok őket! **6.** Hogyan kell meghatározni a lineáris sebességet egyenletes görbe vonalú mozgás során?

14. §. EGYENLETES KÖRMOZGÁS

A görbe vonalú mozgást már csak azért is elég nehéz leírni, mert számtalan görbe vonalú mozgáspálya létezik. Azonban gyakran kiderül, hogy nem szükséges minden görbén külön vizsgálni a mozgást. Figyelmesen nézzétek meg a 14.1. ábrát: a bonyolult görbe vonalú mozgáspályák egyes szakaszait úgy tekinthetjük, mint különböző sugarú körívek összességét. Ezért gyakorlatilag bármilyen görbe vonalú mozgást úgy vizsgálhatunk, mint a köríveken való mozgást. Mint mindig, a legegyszerűbbel, az egyenletes körmozgással kezdjük.

1 Milyen fizikai mennyiségek jellemzik az egyenletes körmozgás periodikusságát?

A **test egyenletes körmozgása** olyan periodikus mozgás, amikor a test mozgáspályája körvonal, s emellett a lineáris sebesség és a pillanatnyi sebesség értéke nem változik az időben.

Az egyenletes körmozgás – *periodikus mozgás*, mivel *azonos időközök elteltével megismétlődik*, ez az időintervallum egyenlő egy teljes fordulat megtételéhez szükséges idővel. A 8. osztály fizika tananyagából tudjátok, hogy minden periodikus mozgást a *periódusidő* és a *rezgésszám* jellemez.

A **periódusidő** olyan fizikai mennyiség, amely egyenlő azzal az időtartammal, ami alatt az egyenletes körmozgást végző test megtesz egy teljes fordulatot:

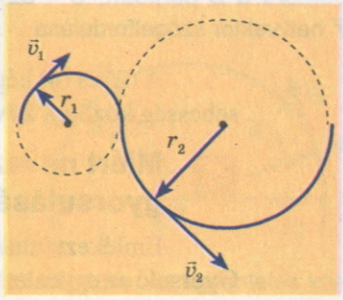
$$T = \frac{t}{N}, \qquad (1)$$

ahol T a periódusidő; N a test által t idő alatt megtett teljes fordulatok száma.

A periódusidő egysége az SI-ben a **másodperc** (s).

Ismerve a periódusidőt és a körvonal sugarát, könnyű meghatározni a test mozgásának v lineáris sebességét. Valóban, egy teljes fordulat időtartama alatt ($t = T$) a test a körvonal hosszának megfelelő távolságot tesz meg: $l = 2\pi r$. Mivel $v = \frac{l}{t}$, adódik:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$



14.1. ábra. Bármilyen görbe vonalú mozgás úgy is felfogható, mint a köríveken való mozgás

Az n **fordulatszám** olyan fizikai mennyiség, ami számbelileg egyenlő az egységnyi idő alatt elvégzett teljes fordulatok számával:

$$n = \frac{N}{t}, \tag{3}$$

ahol n a fordulatszám; N a t idő alatt elvégzett teljes fordulatok száma.

A fordulatszám mértékegysége az SI-ben a **fordulat per másodperc** (ford/s vagy s^{-1}).

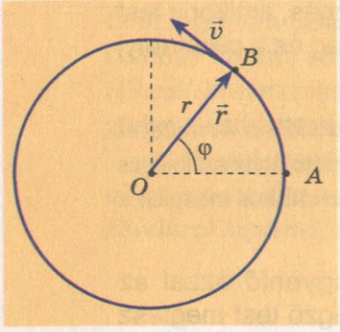
Az (1) és (3) képletekből következik, hogy a periódusidő és a fordulatszám összefüggésben állnak egymással:

$$n = \frac{1}{T}.$$

Behelyettesítve ezt a kifejezést a (2) képletbe, megkapjuk az egyenletes körmozgást végző test lineáris sebességének még egy képletét: $v = 2\pi r n$.

2 Mi a szögsebesség és milyen összefüggésben áll a lineáris sebességgel?

A lineáris sebességen kívül a körmozgást végző test sebességének jellemzésére gyakran használják a *szögsebességet.*



14.2. ábra. A test egyenletes mozgása a körvonalon; r – sugár; $\vec{v}$ – a pillanatnyi sebesség vektora a B pontban; φ – az $\vec{r}$ helyvektor szögelfordulása

A **szögsebesség** olyan fizikai mennyiség, ami számbelileg egyenlő a helyvektor egységnyi idő alatti szögelfordulásával.:

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

ahol ω a szögsebesség; φ a helyvektor szögelfordulása t idő alatt (14.2 ábra).

A szögsebesség mértékegysége az SI-ben a **radián/másodperc** (rad/s, vagy s^{-1})*.

Mivel az egy fordulat megtételéhez szükséges idő alatt ($t = T$) a helyvektor egy teljes fordulatot végez el ($\varphi = 2\pi$), a szögsebességet ki lehet számítani az alábbi képlettel:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \tag{4}$$

A (2) és (4) képletekből következik, hogy a szögsebesség és a lineáris (kerületi) sebesség között a következő összefüggés áll fenn: $v = \omega r$.

3 Miért nevezik az egyenletes körmozgást végző test gyorsulását centripetálisnak?

Emlékeztetünk arra, hogy bármilyen körmozgás egyben gyorsuló mozgás is. Gyorsuló az egyenletes körmozgás is, mivel a pillanatnyi sebesség iránya folyamatosan változik. Meghatározzuk a test egyenletes körmozgását jellemző gyorsulás nagyságát és irányát.

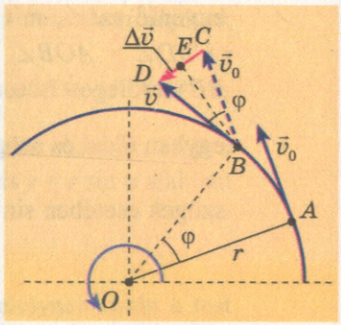
* A 360°-os szög (egy teljes fordulat) 2π radiánnal egyenlő, ahol $\pi = 3{,}14$.

A gyorsulás meghatározásából $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ következik, hogy a gyorsulás és a sebességváltozás vektorai azonos irányúak ($\vec{a} \uparrow\uparrow \Delta \vec{v}$), a gyorsulás nagysága pedig meghatározható az $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ képlettel.

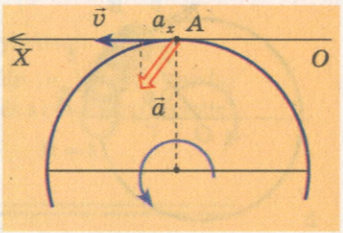
Előbb meghatározzuk a gyorsulás irányát (14.3. ábra). Ehhez először is önmagához képest párhuzamosan eltoljuk a $\vec{v}_0$ vektort úgy, hogy a B pontból induljon ki. A 14.3. ábrából látszik, hogy kis φ szögeknél $\Delta \vec{v}$ sebességváltozás vektora a kör középpontja felé mutat. Mivel $\vec{a} \uparrow\uparrow \Delta \vec{v}$, ezért ugyanolyan irányú az $\vec{a}$ is. Bebizonyítjuk, hogy az $\vec{a}$ közvetlenül a kör középpontja felé irányul, vagyis a sugár mentén. Mivel a test körmozgásakor a $\vec{v}$ pillanatnyi sebessége az érintő mentén irányul, az érintő pedig merőleges a sugárra, ezért be kell bizonyítani, hogy $\vec{a} \perp \vec{v}$.

A bizonyítást inverz módszerrel végezzük el. Tegyük fel, hogy a gyorsulásvektor és a pillanatnyi sebesség vektora nem merőlegesek egymásra (14.4. ábra). Ez azt jelenti, hogy a gyorsulásvektor vetülete az OX tengelyre nem egyenlő nullával. Azonban ebben az esetben, ha $a_x > 0$, akkor a test mozgássebessége növekedni, ha $a_x < 0$, csökkenni fog. Ez viszont nem egyenletes mozgást jelentene, miközben mi az egyenletes mozgást tanulmányozzuk. Feltételezésünk tehát helytelen volt. Vagyis $\vec{a} \perp \vec{v}$.

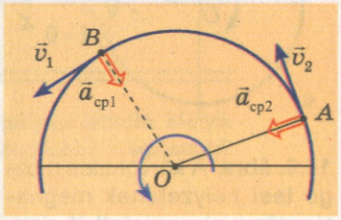
Éppen ezért a test körmozgásakor a gyorsulásvektor a körvonal adott pontjában mindig merőleges a pillanatnyi sebesség vektorára és a körvonal középpontja felé mutat. Ezért a test gyorsulását a körmozgása során *centripetális gyorsulásnak* nevezzük és így jelöljük: $\vec{a}_{cp}$ (14.5. ábra).



14.3. ábra. A gyorsulás meghatározása a test egyenletes körmozgásakor. Ha nagyon kis Δt időintervallum alatt a test állandó v lineáris sebességgel mozogva az r sugarú körív az A pontból a B pontba kerül, akkor a test helyvektora kis φ szöggel fordul el, a sebességváltozása pedig: $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$



14.4. ábra. Ha a gyorsulásvektor nem merőleges a sebességvektorra, akkor az a_x – a gyorsulás vetülete az OX vektorra – nem egyenlő nullával



14.5. ábra. Az egyenletes körmozgás során a test gyorsulása az adott pontban mindig a körvonal középpontja felé irányul (merőleges a pillanatnyi sebességre)

4 Mivel egyenlő a gyorsulás nagysága a test egyenletes körmozgásakor?

A gyorsulás nagyságának meghatározásához újra visszatérünk a 14.3. ábrához.

Megvizsgáljuk a BCD háromszöget, amit a $\Delta \vec{v}$ ($\overrightarrow{CD}$), $\vec{v}$ ($\overrightarrow{BD}$) és $\vec{v}_0$ ($\overrightarrow{BC}$) vektorok alkotnak. Ez a háromszög

egyenlő szárú, mivel $v = v_0$ (a mozgás egyenletes). A háromszög csúcsszöge φ ($CBD\angle = AOB\angle$, mint kölcsönösen merőleges szárú szögek). A CD oldalra BE merőlegest bocsátunk. Az egyenlő szárú háromszög csúcsából kiinduló magasság egyben oldal és szögfelező is, ezért $CD = 2CE = 2BC \sin\frac{\varphi}{2}$ vagy $\Delta v = 2v \sin\frac{\varphi}{2}$. Kis szögek esetében $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, ezért $\Delta v = 2v\frac{\varphi}{2} = v\varphi$.

A meghatározás szerint $a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, tehát $a_{cp} = \frac{v\varphi}{\Delta t}$. Mivel $\frac{\varphi}{\Delta t} = \omega$ a szögsebesség, a szögsebességet a lineáris sebességgel pedig az $\omega = \frac{v}{r}$ képlet köti össze, ezért végeredményben:

$$a_{cp} = v\omega = \frac{v \cdot v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

Tehát *a test egyenletes körmozgásakor a gyorsulás nagysága nem függ az időtől és a következő képlettel számítható ki:*

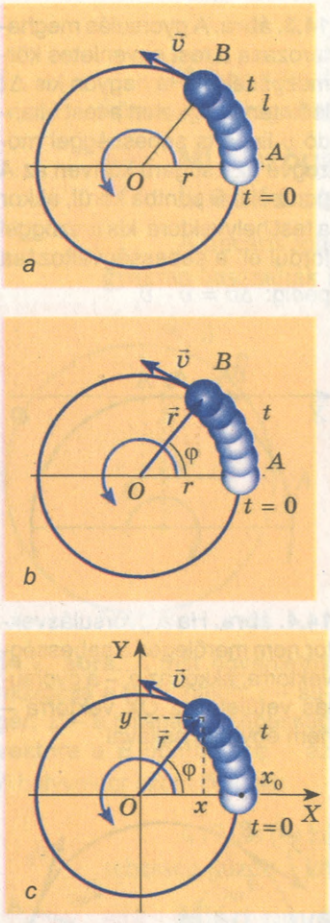
$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

Figyelembe véve, hogy a lineáris sebesség felírható a periódusidő, a fordulatszám és a szögsebesség segítségével is, a következő képleteket kapjuk:

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \text{ ezért } a_{cp} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

$$v = 2\pi r n, \text{ ezért } a_{cp} = \frac{(2\pi r n)^2}{r} = 4\pi^2 n^2 r;$$

$$v = \omega r, \text{ ezért } a_{cp} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r.$$



14.6. ábra. A körvonalon mozgó test helyzetének meghatározása: *a*) a megtett út alapján: $l = vt$; *b*) a helyvektor elfordulásának szöge alapján: $\varphi = \omega t$; *c*) a koordinátaegyenletek alapján: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$

5 Hogyan oldhatjuk meg a mechanika fő feladatát egyenletes körmozgás esetén?

A mechanika fő feladatát akkor tekinthetjük megoldottnak, ha bármely előre megadott időpontban meg tudjuk határozni a test helyzetét. Ha ismert a test mozgáspályájának sugara (r), a test kezdőhelyzete (x_0; y_0), a lineáris (v) és ennek megfelelően a szögsebessége (ω) az adott mozgáspályán, a test helyzetének tetszőleges időpontban való meghatározásának három módja létezik.

1. módszer – a test által a kezdőhelyzetéből megtett l út segítségével (14.6. *a* ábra): $l = vt$.

2. módszer – a helyvektor elfordulásának φ szöge (14.6. b ábra) segítségével: $\varphi = \omega t$.

3. módszer: a koordinátaegyenletek (14.6. c ábra) segítségével: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Mivel a szögelfordulás φ az idővel a $\varphi = \omega t$ törvény szerint változik, ezért a test egyenletes körmozgásának koordinátaegyenletei $x = r \cos \varphi$ és $y = r \sin \varphi$ alakban írhatók fel.

Összegzés

Az egyenletes körmozgás olyan görbe vonalú mozgás, amelynek során a test mozgáspályája körvonal, a lineáris sebesség és a pillanatnyi sebesség nagysága pedig nem változik az időben.

Az ω szögsebesség olyan fizikai mennyiség, ami számbelileg egyenlő a helyvektor egységnyi idő alatti szögelfordulásával: $\omega = \frac{\varphi}{t}$.

A szögsebesség mértékegysége az SI-ben a radián/másodperc (rad/s, vagy s^{-1}). A szögsebesség és a lineáris sebesség között a következő összefüggés áll fenn: $v = \omega r$.

A fordulatszám olyan fizikai mennyiség, ami számbelileg egyenlő az egységnyi idő alatt elvégzett teljes fordulatok számával: $T = \frac{t}{N}$.

A fordulatszám olyan fizikai mennyiség, ami számbelileg egyenlő az egységnyi idő alatt elvégzett teljes fordulatok számával: $n = \frac{N}{t}$.

A periódus és a fordulatszám összefüggésben állnak egymással: $n = \frac{1}{T}$.

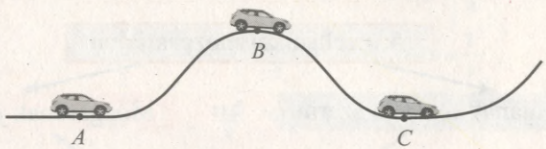
A test egyenletes körmozgása során a gyorsulás centripetális (a_{cp}), vagyis mindig a körvonal középpontja felé irányul; nagysága nem függ az időtől és a következő képlettel számítható ki: $a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen mozgást nevezünk egyenletes körmozgásnak? **2.** Milyen fizikai mennyiségek jellemzik a test körmozgásának sebességét? Jellemezzétek őket! **3.** Milyen összefüggés áll fenn a mozgás szögsebessége és lineáris sebessége között? Vezessétek le ezt az összefüggést! **4.** Jellemezzétek a test körmozgásának periodikusságát leíró fizikai mennyiségeket! **5.** Hogyan függ össze a periódusidő és a fordulatszám? **6.** Bizonyítsátok be, hogy az egyenletes körmozgás során a gyorsulás a körvonal középpontja felé irányul! **7.** Milyen képlettel határozzák meg a centripetális gyorsulást? Vezessétek le ezt a képletet! **8.** Soroljátok fel a mechanika fő feladatának általatok ismert megoldási módjait a test egyenletes körmozgása esetében!

11. gyakorlat.

1. Az ábrán egy állandó sebességgel mozgó gépkocsi mozgáspályája látható. Melyik feltüntetett pontban lesz az autó centripetális gyorsulása a legnagyobb? a legkisebb?



2. Határozzátok meg a Föld Nap körüli forgásának lineáris, illetve szögsebességét! Tekintsétek a Föld keringési pályáját $1{,}5 \cdot 10^8$ km sugarú körvonalnak!

3. A kerékpár kerekének sugara 0,4 m. Hány fordulatot tesz meg percenként a kerék, ha a kerékpár sebessége 15,7 m/s?
4. A gépkocsi 36 km/h sebességgel halad át a domború, 30 m görbületi sugarú hídon. Mivel egyenlő a gépkocsi gyorsulása és merre irányul?
5. Az óra percmutatója háromszor hosszabb a másodpercmutatónál. Milyen a mutatók végpontjai lineáris sebességeinek és gyorsulásainak az aránya?
6. Írjátok fel a 10 m sugarú körívén, $\frac{1}{6}\pi$ s^{-1} szögsebességgel mozgó test mozgásegyenletét! Milyen lesz a test koordinátája 3 másodperccel az időmérés megkezdését követően?

Kísérleti feladat

1. Határozzátok meg a mosógép forgódobján elhelyezkedő pont lineáris és szögsebességét, valamint centripetális gyorsulását mosás üzemmódban; centrifuga üzemmódban! Milyen méréseket kell elvégeznetek a feladat megoldásához?
2. Határozzátok meg a gépkocsi vagy kerékpár kerekén lévő pont periódusidejét, fordulatszámát és centripetális gyorsulását! A mozgás sebességét válasszátok meg önállóan!

AZ I. FEJEZET ÖSSZEGZÉSE

1. Az I. fejezet tanulmányozása során megismerkedtetek a *mechanika fő fogalmaival,* tudatosítottátok *fő feladatának a lényegét.*

A **mechanika** – a mechanikai mozgásról és az anyagi testek kölcsönhatásáról szóló tudomány.

A **mechanika fő feladata** – a test mechanikai állapotának (koordinátáinak és mozgássebességének) meghatározása bármely időpontban.

A **kinematika** a testek mechanikai mozgását tanulmányozza a *mozgást kiváltó okok tisztázása nélkül.*

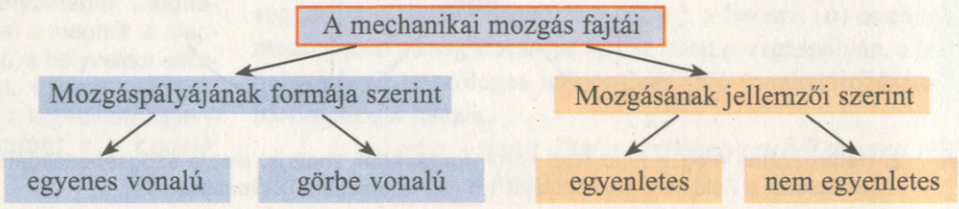
A **vonatkoztatási rendszer** a vonatkoztatási testből, a hozzá kapcsolt koordináta-rendszerből és az idő mérésére szolgáló műszerből áll.

Az **anyagi pont** – a test modellje olyan körülmények között, amikor a test méretei elhanyagolhatók.

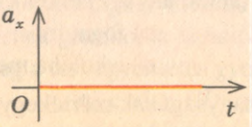
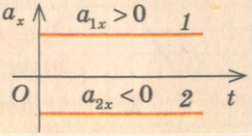
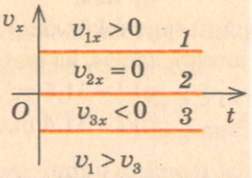
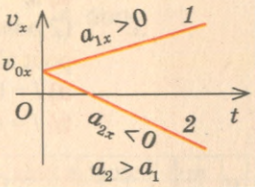
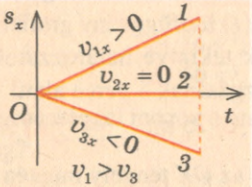
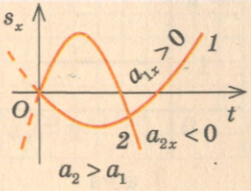
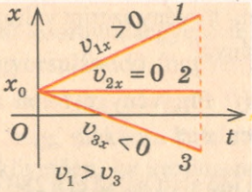
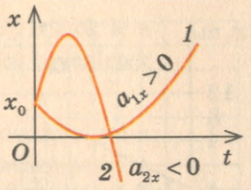
Az **anyagi pont mozgáspályája** – képzelt vonal, amelynek minden pontjában előfordult a test mozgása során.

Elmozdulás – vektormennyiség, amit grafikusan a test mozgásának kezdő és végpontját egy egyenes mentén összekötő irányított szakasszal ábrázolnak.

2. Megismerkedtetek a *mechanikai mozgás különböző fajtáival.*



3. Megismerkedtetek az *egyenes vonalú egyenletes és az egyenletesen gyorsuló mozgásokat jellemző* fő fizikai mennyiségekkel.

Fizikai mennyiség	Egyenes vonalú (a mozgáspálya – egyenes vonal)			
	Egyenletes		Egyenletesen gyorsuló	
	Képletek	Grafikonok	Képletek	Grafikonok
A mozgás gyorsulása	$a = 0$; $a_x = 0$		$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$; $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$	
A mozgás sebessége	$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$; $v_x = \frac{s_x}{t}$		$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$; $v_x = v_{0x} + a_x t$	
A test elmozdulása	$\vec{s} = \vec{v}t$; $s_x = v_x t$; $s = vt$		$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$; $s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	
A test koordinátája $x = x_0 + s_x$	$x = x_0 + v_x t$		$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	

4. Megismerkedtetek az egyenletesen gyorsuló mozgás közismert esetével – a *testek szabadesésével*, ami a Föld vonzóerejének a hatására történik. A szabadesés gyorsulása (nehézségi gyorsulás) $g \approx 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

5. Megismerkedtetek *az anyagi pont egyenletes körmozgásának fő jellemzőivel*:

Fizikai mennyiség	Jelölés	Egység	Meghatározás szerinti képlet	Összefüggési képlet
Periódusidő	T	s	$T = \frac{t}{N}$	$n = \frac{1}{T}$
Fordulatszám	n	Hz	$n = \frac{N}{t}$	$T = \frac{1}{n}$
Lineáris sebesség	v	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$v = \frac{l}{t}$	$v = \frac{2\pi r}{T}$; $v = 2\pi r n$
Szögsebesség	ω	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ vagy s^{-1}	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\omega = 2\pi n$
Centripetális gyorsulás	a_{cp}	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$a = \frac{v^2}{r}$	$a = \frac{v^2}{r}$; $a = \omega^2 r$

ÖNELLENŐRZÉSRE SZOLGÁLÓ FELADATOK A *KINEMATIKA* CÍMŰ FEJEZETHEZ

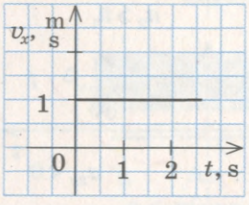
1. rész. Egyenletes mozgás. A mozgás viszonylagossága. A mozgás átlagsebessége

Az 1–4. feladatok feltüntetett megoldásai közül csak egy helyes

1. (*1 pont*) Mikor tekinthető a tanuló anyagi pontnak?
a) ha a tanuló tornázik; **c)** fogat mos;
b) reggelizik; **d)** iskolába megy.

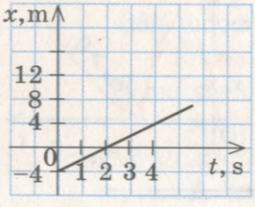
2. (*1 pont*) Mi az elmozdulás nagyságának mértékegysége az SI-ben?
a) s; **b)** m; **c)** m/s; **d)** m/s^2.

3. (*2 pont*) Az anyagi pont egy 5 m sugarú körvonal mentén mozog. Mennyi lesz a pont által megtett út, illetve az elmozdulás, ha megtesz egy teljes fordulatot?
a) $l = 0$, $s = 0$; **c)** $l = 31{,}4$ m, $s = 0$;
b) $l = 0$, $s = 5$ m; **d)** $l = 31{,}4$ m, $s = 5$ m.



1. ábra

4. (*2 pont*) Az 1. ábrán az *OX* tengely mentén mozgó test sebességvetületének $v_x(t)$ időfüggvény grafikonja látható. A mozgás jellegét változatlannak tekintve határozzátok meg a test elmozdulásának nagyságát mozgásának 5 perce alatt!
a) 5 m; **b)** 25 m; **c)** 50 m; **d)** 300 m.

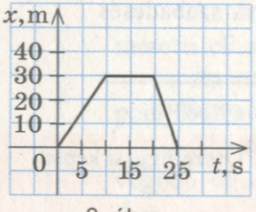


2. ábra

5. (*2 pont*) A test az *OX* tengely mentén mozog, eközben koordinátája az $x = 15 - 2t$ (m) törvény szerint változik. Milyen a test sebességének nagysága és iránya?

6. (*2 pont*) Az $x(t)$ függvénygrafikon alapján (2. ábra) írjátok le a koordinátaegyenletet!

7. (*2 pont*) Mennyi idő alatt halad el a 280 m hosszú, 72 km/h sebességgel haladó gyorsvonat a vele szembe mozgó, 700 m hosszú tehervonat mellett? A tehervonat sebessége 54 km/h.



3. ábra

8. (*3 pont*) A kerékpáros 600 m távolságot 10 m/s sebességgel tett meg, a következő 160 m-t pedig 4 m/s sebességgel. Határozzátok meg a kerékpáros átlagsebességét!

9. (*3 pont*) A 3. ábrán az *OX* tengely mentén mozgó test koordináta-idő függvényének grafikonja látható. Ábrázoljátok a $v_x(t)$ és $l(t)$ függvények grafikonjait!

10. (*4 pont*) Az *A* pontból és tőle 250 km távolságra lévő *B* pontból egyidejűleg két gépkocsi indult el egymással szemben. Az *A* pontból kiinduló autó 60 km/h sebességgel mozog, a *B* pontból kiinduló pedig 40 km/h sebességgel. Határozzátok meg a találkozásuk helyét és a találkozásig eltelt időt! A feladatot analitikus és grafikus módon is oldjátok meg!

Válaszaitokat hasonlítsátok össze a könyv végén feltüntetettekkel. Jelöljétek meg a helyes válaszokat és számoljátok össze a megszerzett pontokat. Az eredményt osszátok el kettővel. Az így kapott szám megfelel a tanulmányi eredményeteknek.

2. rész. Egyenletesen gyorsuló mozgás. Egyenletes körmozgás

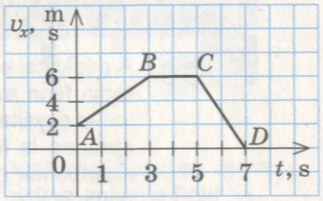
Az 1–5. feladatok feltüntetett megoldásai közül csak egy helyes.

1. (*1 pont*) Melyik mennyiség változásának sebessége jellemzi a test gyorsulását?

a) tömeg; **c)** koordináta;
b) sebesség; **d)** idő.

2. (*1 pont*) A 4. ábrán az *OX* tengely mentén mozgó test sebesség-idő függvényének grafikonja látható. A grafikon mely részei felelnek meg a test egyenletes gyorsulásának?

a) csak az *AB* szakasz; **c)** csak a *CD* szakasz;
b) csak a *BC* szakasz; **d)** az *AB* és a *CD* szakasz.



4. ábra

3. (*1 pont*) Mekkora gyorsulással mozog a test, ha 2 s alatt mozgásának sebessége 3-ról 6 m/s-ra nőtt?

a) 1,5 m/s^2; **c)** 4,5 m/s^2;
b) 3 m/s^2; **d)** 6 m/s^2.

4. (*2 pont*) Mekkora a pont fordulatszáma a lejátszó lemezén, ha 6 s alatt a lemez 10 teljes fordulatot végez?

a) 0,6 s^{-1}; **c)** 16 s^{-1};
b) közel 1,7 s^{-1}; **d)** 60 s^{-1}.

5. (*2 pont*) Mekkora szögsebességgel mozog a test az 5 m sugarú köríven, ha 2 s alatt 4 m távolságot tesz meg?

a) 0,4 s^{-1}; **b)** 2 s^{-1}; **c)** 2,5 s^{-1}; **d)** 10 s^{-1};

6. (*2 pont*) Az anyagi pont koordinátaegyenlete: $x = 5 + 12t - 2t^2$ (m). Írjátok le a pont sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényeit megadó képleteket egyenletek formájában!

7. (*3 pont*) Határozzátok meg, mekkora lesz a test elmozdulása 2 másodperccel a mozgásának kezdetét követően, ha kezdősebessége 5 m/s, a gyorsulása pedig a mozgás vonala mentén irányul és értéke 0,4 m/s^2! Tekintsetek át minden lehetséges változatot!

8. (*3 pont*) A test mozgását az $x = 0{,}5 + 2t + 5t^2$ (m) egyenlet adja meg. Határozzátok meg a test elmozdulását a mozgás első 10 másodperce alatt! Tekintsétek úgy, hogy a kiválasztott VR-ben a test az *OX* tengely mentén haladt.

9. (*3 pont*) A 4. ábrán látható grafikon alapján határozzátok meg a test elmozdulását a megfigyelés teljes ideje alatt! Tekintsétek úgy, hogy a kiválasztott VR-ben a test az *OX* tengely mentén haladt!

10. (*3 pont*) A testet 30 m/s sebességgel függőlegesen feldobták. Mennyi idő telik el, amíg a test a kiindulási ponttól 25 m távolságra kerül?

11. (*4 pont*) A Föld felszínétől 2 m magasságban lévő *A* pontból 3 m/s sebességgel függőlegesen feldobtak egy testet. Amikor a test elérte a legmagasabb emelkedési pontját, ugyanabból az *A* pontból ugyanolyan sebességgel egy másik testet is feldobtak. Határozzátok meg a testek találkozásának idejét és helyét!

Válaszaitokat hasonlítsátok össze a könyv végén található megoldásokkal. Jelöljétek meg a helyes válaszokat és számoljátok össze a megszerzett pontokat. Az eredményt osszátok el kettővel. Az így kapott szám megfelel a tanulmányi eredményeteknek.

2. FEJEZET. DINAMIKA

15. §. AZ INERCIAJELENSÉG. INERCIÁLIS VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK. NEWTON ELSŐ TÖRVÉNYE

?! A gépkocsi az úton száguld, madár száll az égben, a bowling golyó gurul a pályán. Mi tartja fenn ezeket a mozgásokat? Van-e a mozgásoknak valamiféle okuk? Szükség van-e egyáltalán bármire is a mozgás fenntartásához? Ezek a kérdések már Arisztotelész korában is foglalkoztatták a tudósokat, a válaszokat azonban csak Galileinek és Newtonnak (lásd az 1.1. és 1.2. ábrákat) sikerült megtalálni. Ebből a paragrafusból megtudjátok, milyen jelentőségük volt Galilei munkáinak a mechanika fejlődése számára.

1 Mit tanulmányoz a dinamika?

A kinematika tanulmányozása során leírtuk a testek mozgását, azonban a mozgásokat kiváltó okokról nem esett szó. Eközben a mechanika fő feladata nem csak a test mozgásának az adott időpontban történő leírásában rejlik, de annak az előrelátásában is, hogyan mozog majd a továbbiakban. Ehhez annak a megállapítása szükséges, miért változtatta meg a test mozgásának jellegét, vagy megfordítva, miért és milyen feltételek mellett marad változatlan a test mozgásának jellege. Éppen ezekkel a kérdésekkel foglalkozik a *dinamika*.

A **dinamika** a mechanikának az az ága, amely a test mozgásának jellegét meghatározó kölcsönhatások mennyiségi leírására szolgál.

A dinamika fő feladata tanulmányozni a testek lehetséges kölcsönhatásait, tisztázni azokat a törvényeket, amelyek leírják a testek mozgását és kölcsönhatását, és ezeknek a törvényeknek az alapján bármely időpontban meghatározni a testek helyzetét.

2 Mikor őrzi meg a test a mozgássebességét?

A dinamika tanulmányozását azoknak a feltételeknek a tisztázásával kezdjük, amelyek teljesülésekor a test mozgássebessége változatlan marad. A kinematikából tudjátok, hogy a test sebessége állandó egyenes vonalú egyenletes mozgása során, mivel az ilyen mozgáskor nem változik sem a sebesség nagysága, sem pedig az iránya. A test sebessége abban az esetben állandó (egyenlő nullával), ha a test nyugalomban van. Bármilyen mozgás leírásához ki kell választani a vonatkoztatási rendszert (VR). Alkalmazzuk a számunkra legkényelmesebb VR-t, a Föld felszínének valamely pontjához rögzített vonatkoztatási rendszert.

Tehát tisztázzuk, *milyen feltételek mellett végez a test egyenes vonalú egyenletes mozgást vagy van nyugalomban a Földhöz képest.*

Az asztalon lévő labda, a rugóra akasztott nehezék (15.1. ábra) nyugalmi állapotban van. Azonban elegendő meglökni a labdát vagy megnyújtani a rugót, és a testek nyugalmi állapota azonnal megszűnik. Ebben az esetben a testek megváltoztatják a sebességüket (mozogni kezdenek a Földhöz képest) az ember kezével való kölcsönhatásuk eredményeként. De ezt megelőzően is kölcsönhatásban álltak valamivel? Természetesen, igen. Jól tudjátok, hogy a földfelszín közelében lévő testek kölcsönhatásban állnak a Földdel. Ha elvennénk az asztalt, leakasztanánk a rugót, a

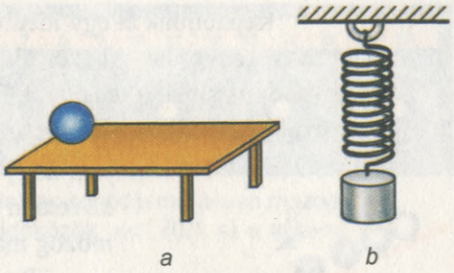
labda és a súly azonnal mozgásba jönnének a föld gravitációs vonzása következtében. Nyugalomban pedig azért vannak, mert a Föld hatását *kompenzálják* (*kiegyenlítik*) más testek: a labdára a Földön kívül hat még az asztal is, a Föld hatását az asztal hatása kompenzálja; a súlyra a Földön kívül hat még a rugó is és a Föld hatását a rugó hatása kompenzálja*

Tehát levonható a következtetés: *a test nyugalmi állapotban van, ha a rá ható testek hatása kiegyenlíti egymást.*

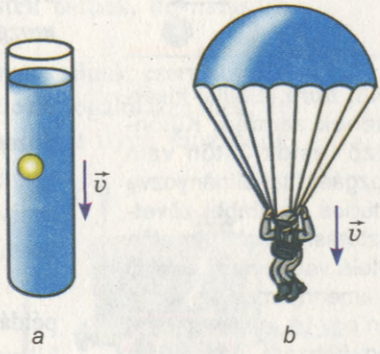
Nézzünk néhány példát az egyenes vonalú egyenletes mozgásra. Ha a borsszemet magas, vízzel telt edénybe eresztjük, akkor előbb gyorsulással fog mozogni, azonban egy bizonyos idő elteltével sebessége állandósul, és a fennmaradó utat egyenletesen teszi meg (15.2. *a* ábra). Az a helyzet, hogy a borsószemre észrevehetően két test hat: a víz és a Föld. A víz hatása (az archimédeszi erő és a közegellenállás) felfelé irányul, a Föld hatása pedig (a nehézségi erő) lefelé. A borsószem mozgássebességének növekedésével a víz ellenállása addig nő, amíg a víz hatása nem kompenzálja a Föld hatását.

Ugyanígy, röviddel az ejtőernyő kinyílását követően az ejtőernyős mozgása egyenletessé válik (a széllökéseket figyelmen kívül hagyva) (15.2. *b* ábra).

Számos kísérlet igazolja, hogy a *test egyenes vonalúan egyenletesen mozog, ha más testek hatása kompenzálódik.*



15.1. ábra. A test nyugalomban van a Földhöz viszonyítva, mivel a Föld hatását kompenzálja: *a* – az asztallap; *b* – a rugó



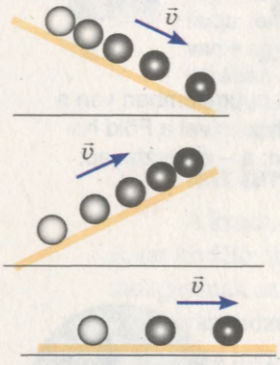
15.2. ábra. Egy bizonyos idő elteltével a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a Földhöz viszonyítva, mivel a Föld hatását kompenzálja: *a* – a víz; *b* – a levegő

3 Milyen mozgást nevezünk inerciális mozgásnak?

Mintegy 2500 évvel ezelőtt *Arisztotelész* ógörög filozófus a testek mozgásának okáról gondolkozva, a józan ész szemszögéből nézve ésszerű következtetésre jutott: „Minden, ami mozog, mozgását valaminek köszönheti. Ha a testre irányuló hatás megszűnik, akkor megszűnik a mozgás is." Valóban, ahhoz, hogy a szekér mozogjon a vízszintes úton az szükséges, hogy a ló húzza. Ha megszüntetjük a ló hatását, a szekér megáll. De vajon valóban így van?

* A valóságban a labdára és a nehezékre még több más erő is hat: ez a környező testek részéről a testre ható gravitációs erő, a levegő felhajtóereje, és a különböző levegőáramlatok. A jelen esetben ezekkel az erőkkel nem kell számolnunk, mivel ezek hatása jelentéktelen.

Képzeljünk el egy idealizált helyzetet. A szekér kerékagyai annyira jól meg vannak kenve, hogy közöttük és a kerekek között nincs súrlódás, az út ideálisan egyenes és sima, a tengelyek fel vannak erősítve és nem gátolják a mozgást. Más szóval – képzeletben kikapcsoljuk az összes lehetséges súrlódási erőt. Elképzelhetjük, hogy ebben az esetben a szekér a mozgása megkezdését követően tetszőleges ideig egyenletesen és egyenes vonalúan mozog majd.



15.3. ábra. Galilei kísérletének sémája. Különböző testek lejtőn való mozgását tanulmányozva a tudós az alábbi következtetésre jutott: „A lejtőn felfelé vagy lefelé történő valamennyi mozgás során van egy ok, amely sebességváltozást idéz elő; a vízszintes felületen való súrlódásmentes mozgás állandó sebességgel megy végbe

Pontosan erre a következtetésre jutott a XVI. sz. vége felé *Galileo Galilei* olasz tudós. A testek lejtőn való mozgását tanulmányozva (15.3. ábra) és gondolatkísérletet folytatva megfogalmazta azt a törvényt, amit később ***Galilei tehetetlenségi törvényének*** neveztek el.

Ha a testre nem hatnak más testek, akkor a test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását.

Meg kell említeni, hogy Arisztotelész gyakorlatilag ugyanerre a következtetésre jutott: „Ha az egyszer már mozgásba hozott test az ürességben van, akkor megállás nélkül mozognia kell a végtelenségig.” Azonban a tudós később úgy döntött, hogy az ilyen mozgás nem lehetséges, mivel a természetben nem lehet üresség.

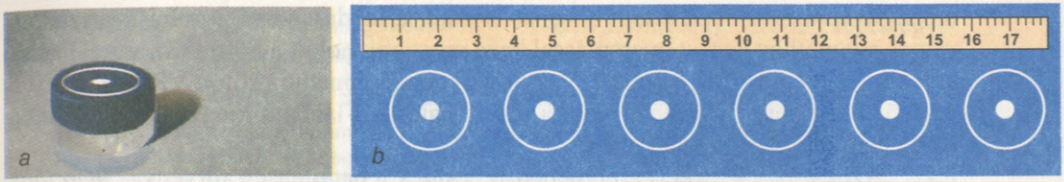
Most már tudjuk, hogy az ilyen mozgás lehetséges. Így például, ha az űrhajó a csillagoktól távol van, akkor a hajtóművek kikapcsolása után tovább folytatja egyenes vonalú egyenletes mozgását ugyanazzal a sebességgel, amivel a kikapcsolás pillanatában rendelkezett.

Azt a testet, amire nem hatnak más testek vagy terek, *magára hagyott testnek* nevezzük. A magára hagyott test mozgását *inerciális mozgásnak* nevezzük, ezért a Galilei által felfedezett törvényt *inerciatörvénynek* nevezik. A gyakorlatban csaknem lehetetlen olyan feltételeket létrehozni, amikor a testre semmi sem hat, *ezért inerciális mozgásnak általában olyan eseteket tartanak, amikor más testek, valamint terek hatásai a test mozgásvonala mentén elég gyengék, ezért nem vezetnek a sebesség észrevehető csökkenéséhez, és a test jelentős utat tesz meg.*

Így, inerciális mozgásnak tekinthető a gyakorlatilag egyenletes mozgás: a korongé a jégen az ütést követően, a golyóé a bowlingpályán stb. (15.4. ábra).

4 Milyen alapkövetelményt állít Newton első törvénye?

G. Galilei inerciatörvénye az első lépés volt a mechanika fő törvényeinek felfedezéséhez. A testek fő mozgástörvényeinek megfogalmazásakor I. Newton ezt a törvényt a *mozgás első törvényének* nevezte el és ilyen formában tette közzé:



15.4. ábra. A fémkorong a száraz jég felületén (*a*) gyakorlatilag súrlódásmentesen mozog. A sztroboszkópos felvételen (*b*) látjuk, hogy egyenlő időközök alatt (0,1 s) a korong gyakorlatilag egyenlő távolságot tesz meg

Minden magára hagyott test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását.

Figyeljük meg a következőt.

Először is, a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalmi állapotban van, ha magára hagyott (vagyis nem hatnak rá más testek), vagy amennyiben a rá ható testek kölcsönhatásai kompenzálódnak. Ezért azt állíthatjuk, hogy más testek hatásának hiánya azonos azzal, hogy a testre más testek hatnak, de hatásaik kompenzálják egymást.

Másodszor, minden mozgást valamely VR-hez képest vizsgálunk: ezért Newton első törvénye nem csak a test inerciális mozgásának a feltételeit fogalmazza meg, de megköveteli az olyan VR-ek létét is, amelyekhez képest az ilyen mozgások megfigyelhetők.

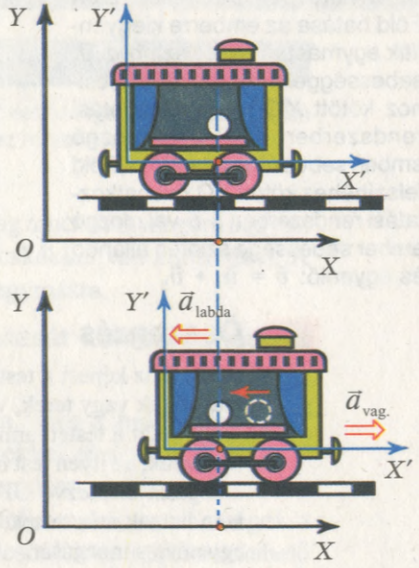
Ebből kiindulva megfogalmazható *Galilei inerciatörvénye* (*vagy Newton első mozgástörvénye*) *a modern elképzeléseknek megfelelően. Tehát,* a **newtoni mechanika első törvénye**:

Léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekhez képest a test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, ha nem hatnak rá más testek és terek, vagy hatásaik kiegyenlítik egymást.

5 Milyen vonatkoztatási rendszereket neveznek inerciálisnak?

A 8. osztály fizika tananyagából tudjátok, hogy *a nyugalmi állapot vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgás megőrzése a test által azzal a feltétellel, hogy nem hatnak rá más testek és terek, vagy a hatásaik kiegyenlítődnek, a* ***tehetetlenség jelensége***.

De minden VR-ben tapasztalható-e a tehetetlenség megnyilvánulása? Képzeljétek el, hogy a vágányon álló vagon fülkéjében ültök. Az asztalon egy labda áll (15.5. ábra). A labdára két test hat: a Föld és az asztal. Az asztal és a Föld hatása kompenzálja egymást, és a labda nyugalmi állapotban van a peronhoz képest. Tehát a peronhoz kötött VR-hez képest a tehetetlenség



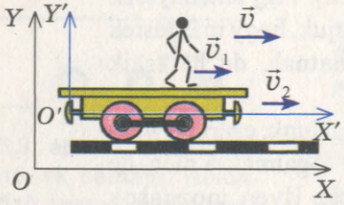
15.5. ábra. A Föld és az asztal részéről a labdára ható két erő kiegyenlíti egymást. A peronhoz rögzített *XOY* vonatkoztatási rendszerben a labda nyugalomban marad, ezért ez a VR inerciarendszer; a mozgását megkezdő vonathoz rögzített *X′O′Y′* vonatkoztatási rendszerben a labda gyorsulva mozog, ezért ezt a VR-t nem tekinthetjük inerciarendszernek

megnyilvánul. Azonban amint a vonat elindul, a labda elkezd gurulni az asztalon, vagyis a vonathoz képest gyorsulással kezd mozogni, holott a Föld és az asztal hatása továbbra is kiegyenlítik egymást. Vagyis a gyorsuló vonathoz kötött VR-hez képest a tehetetlenség nem figyelhető meg (a testek hatásai a labdára kiegyenlítődnek, de a labda nem őrzi meg a sebességét).

Azokat a VR-eket, amelyekben teljesül a tehetetlenség törvénye, *inerciális vonatkoztatási rendszereknek* vagy *inerciarendszereknek* nevezzük; azokat a VR-eket, amelyekben nem teljesül a tehetetlenség törvénye, nem tekintjük inerciarendszernek.

A továbbiakban, hacsak nincs egyéb kikötés, *csak inerciarendszereket fogunk használni.*

Az **inerciarendszerek** olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekhez képest a test folyamatosan megőrzi mozgássebességét, ha nem hatnak rá más testek és terek, vagy hatásaik kiegyenlítik egymást.



15.6. ábra. A platós kocsi és a Föld hatása az emberre kiegyenlítik egymást. A földfelszínhez $\vec{v}_2$ sebességgel mozgó platós kocsihoz kötött $X'O'Y'$ vonatkoztatási rendszerben a $\vec{v}_1$-gyel mozgó ember sebessége állandó. A Föld felszínéhez kötött XOY vonatkoztatási rendszerben a $\vec{v}$-vel mozgó ember sebessége szintén állandó és egyenlő: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Általában inerciális vonatkoztatási rendszerként a földfelszín egy fix pontjához szigorúan rögzített VR-t használnak. Azonban ez nem az egyetlen inerciális VR – ezekből végtelenül sok van. *Bármely, a Földhöz képest egyenletes sebességgel mozgó VR inerciális*.* Valóban, ha a test megőrizte nyugalmi helyzetét vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását a Földhöz viszonyítva, akkor az említett test a Földhöz képest állandó sebességgel mozgó testhez viszonyítva is állandó sebességgel mozog, igaz, értéke más lesz (15.6. ábra).

Említést érdemel, hogy a szigorúan Földhöz kötött vonatkoztatási rendszert csak feltételesen lehet inerciarendszernek nevezni, mivel a Föld forog a tengelye körül. A pontosabb mérésekhez más, a Naphoz kötött inerciarendszert kell választani, még ennél is jobb a távoli csillagokhoz kötött VR.

Összegzés

A Földhöz képest a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ha nem hatnak rá más testek vagy terek, vagy hatásaik kiegyenlítődnek.

Azt a testet, amire nem hatnak más testek vagy terek, magára hagyott testnek nevezzük, az ilyen test mozgását pedig inerciális mozgásnak. A magára hagyott testek mozgását elemezve G. Galilei megfogalmazta a tehetetlenség törvényét: ha a testre nem hatnak más testek, akkor a test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását.

I. Newton Galilei tehetetlenségi törvényét a mozgás első törvényének nevezte el. A mai fizika nyelvén Newton törvényét így fogalmazzák meg: léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekhez képest a test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, ha nem hatnak rá más testek és terek, vagy hatásaik kiegyenlítik egymást. Az ilyen VR-t inerciarendszernek nevezik. Általában inerciális vonatkoztatási rendszerként a Földhöz kapcsolt VR-t használják; a pontosabb számításokhoz –

* Nem tekintjük inerciarendszernek a Föld felszínéhez képest gyorsulva mozgó vonatkoztatási rendszert.

a Naphoz vagy a távoli csillagokhoz kötött VR-eket. Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek is inerciarendszerek.

Ellenőrző kérdések

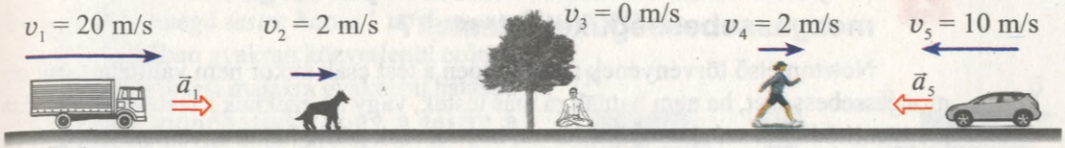
1. Mit tanulmányoz a dinamika? **2.** Mi a dinamika fő feladata? **3.** Milyen feltételek mellett őrzi meg a test a mozgássebességét? Hozzatok fel néhány példát! **4.** Írjátok le azokat a kísérleteket, amelyek révén G. Galilei felfedezte a tehetetlenségi törvényt! Fogalmazzátok meg a törvényt! **5.** Milyen testet neveznek magára hagyottnak? Hogyan mozog a magára hagyott test? Mi az ilyen mozgás neve? **6.** Fogalmazzátok meg Newton első törvényét! **7.** Milyen VR-t neveznek inerciálisnak? nem inerciálisnak? Hozzatok fel példákat ezekre a rendszerekre!

12. gyakorlat

1. A széken ülve te is és a szék is nyugalmi állapotban van a Földhöz képest. Milyen testek hatnak a székre? Rád? Mit lehet elmondani ezekről a hatásokról?

2. A vízfolyással szemben evező kajakosok képtelenek felfelé haladni a folyón. A kajak nyugalmi állapotban van a parthoz képest. Mely testek hatásai kompenzálják egymást ebben az esetben?

3. Az ábrán néhány test látható. Melyik testhez kötnétek a VR-t, hogy inerciális maradjon? nem inerciális? A választ indokoljátok meg!



16. §. KÖLCSÖNHATÁS. ERŐ

?! Már tudjátok, milyen feltételek mellett őrzi meg a test állandó sebességét. Tisztázzuk, milyen feltételek mellett változik meg a test sebessége, és hogy ez milyen tényezőktől függ.

1 Milyen kölcsönhatások léteznek?

Már szó esett arról, hogy a természetben gyakorlatilag nincsenek magára hagyott testek. Bármely test vagy részecske más testekkel (részecskékkel van körülvéve). A testek (vagy a részecskék) bizonyos hatást gyakorolnak egymásra.

A testek vagy részecskék egymásra való hatását **kölcsönhatásnak** nevezzük.

A kölcsönhatás nem csak a fizika, de általában véve a tudomány egyik alapfogalma. Éppen a kölcsönhatások okozzák a testekkel történő valamennyi változást. A szupernóva robbanás, a sejt táplálása, a sas repülése, az anyag radioaktív bomlása, a széllökés, a kémiai reakciók – mindezek a folyamatok és jelenségek a természetben a kölcsönhatások révén mennek végbe. A kölcsönhatásoknak köszönhető magának a természetnek a léte is: az atomok és összetevőiknek léte, a bolygók, csillagok, galaktikák, az emberek és a környező tárgyak léte – mindez éppen a kölcsönhatásoknak köszönhetően lehetséges.

A ***kölcsönhatásoknak négy fundamentális fajtáját*** különböztetik meg: *gravitációs, elektromágneses, erős és gyenge**.

* A XX. sz. 60-as éveiben megalkották az elektrogyenge kölcsönhatások elméletét, amelynek keretében egyesítették az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatást. Napjainkban a fizikusok egy olyan elmélet megalkotásán munkálkodnak, ami egyesítené a kölcsönhatások valamennyi fajtáját.

A *gravitációs kölcsönhatás* univerzális – minden test és részecske részt vesz benne. Ez a kölcsönhatás meghatározó az égitestek létezése és mozgása szempontjából. Részletesebben az általános tömegvonzás törvényének tanulmányozása során ismerkedhettek meg vele.

Az *elektromágneses kölcsönhatás* csak az elektromos töltéssel rendelkező részecskék között mutatható ki. Ez a kölcsönhatás határozza meg az anyag szerkezetét: összeköti az elektronokat és a magot az atomokban, az atomokat a molekulákban, meghatározza a kémiai és biológiai folyamatokat stb. A mechanikában ezzel a kölcsönhatással akkor találkoztatok, amikor a rugalmassági és a súrlódási erőt tanulmányoztátok.

A gravitációs és az elektromágneses kölcsönhatások *távolhatók* – elég nagy távolságon is tapasztalható az objektumok közötti hatásuk és nincs végső hatósugaruk.

Az *erős és gyenge kölcsönhatások* által kiváltott folyamatok a kvantummechanika törvényei által írhatók le. Ezek a kölcsönhatások a mikrovilágban jelentkeznek.

2 Milyen feltételek mellett változtatják meg mozgássebességüket a testek?

Newton első törvényének megfelelően a test csak akkor nem változtatja meg a mozgássebességét, ha nem hatnak rá más testek, vagy ha ezeknek a testeknek a hatása kiegyenlítődik. A szánkó, amit a havon húztok csak addig halad egyenletesen, amíg a hó hatását kompenzálja a kéz hatása. A rakéta távol a csillagoktól egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, mivel nem hatnak rá más testek. A gémkapcsos doboz az asztalon fekszik, mert a Föld hatását kompenzálja az asztal hatása.

Azonban elegendő elengedni a madzagot, és a hó hatása lelassítja a szánkó mozgását. Ha működésbe lépnek a rakéta hajtóművei, akkor a fúvókáiból kilövellő forró gáz megváltoztatja a mozgássebességét. Ha a gémkapcsos doboz közelébe mágnest viszünk, a mágneses kölcsönhatás eredményeként a doboz mozgásba jön (gyorsulásra tesz szert).

Számos megfigyelés és kísérlet bizonyítja, hogy *a test más testekkel való kölcsönhatásának következtében változtatja meg mozgássebességét.*

3 Mi az erő?

Képzeljétek el, hogy felgyorsultok a versenykerékpárral és abbahagyjátok a pedálok tekerését. Előbb-utóbb feltétlenül megálltok – a kerékpár mozgássebessége fokozatosan nullára csökken. A kerékpár megállásáig eltelt idő, és ennek következtében a gyorsulás is nagymértékben attól függ, hogy fékeztek-e közben. Vagyis ugyanaz a test különböző hatás (kölcsönhatás) eredményeként különböző gyorsulásra tesz szert. Ezért a kölcsönhatást mennyiségileg is lehet, sőt kell is jellemezni. Bármely kölcsönhatás mennyiségi jellemzője az *erő*.

Az erő a testek kölcsönhatását jellemző fizikai mennyiség.

A következő tényeket kell szem előtt tartani.

Először is, az *egyik testnek a másikra gyakorolt hatásának eredménye ennek a hatásnak az irányától függ*. Például, ha a mozgásban lévő kiskocsit mozgásának irányában lökjük meg a kezünkkel, a sebessége megnő. Ha a kéz hatása a mozgás

irányával ellentétes lesz, a kiskocsi sebessége csökkenni fog. Vagyis az erőnek, mint a testek kölcsönhatását jellemző fizikai mennyiségnek, iránya van.

Másodszor, *a kölcsönhatás során a test mozgássebessége nem feltétlenül változik meg.* Például, ha összenyomjuk a kezünkben tartott labdát, akkor nyugalomban marad, azonban egyes részei elmozdulnak egymáshoz képest. A kéz hatására a labda megváltoztatja a formáját – *deformálódik.*

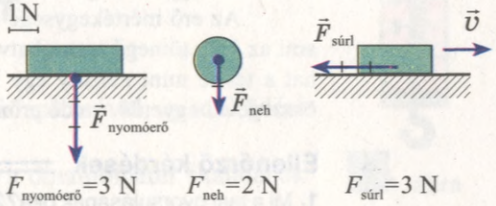
A mechanikában csak a gravitációs erőt vizsgálják, valamint néhány elektromágneses erőt: a rugalmassági, súrlódási, és közegellenállási erőt. Mindezek az erők azokat a kölcsönhatásokat jellemzik, amelyek a test sebességváltozását vagy/és alakjuk és méretük változását okozzák.

Az $\vec{F}$ **erő (a mechanikában)** olyan fizikai vektormennyiség, amely a testre más testek részéről gyakorolt hatás mértéke, aminek az eredményeként a test gyorsulásra tesz szert vagy/és megváltoztatja alakját, illetve a méretét.

Az erő mértékegysége az SI-ben a **newton** (N). 1 N *egyenlő azzal az erővel, ami az* 1 kg *tömegű testre hatva* 1 m/s² *gyorsulást közöl vele.*

A fizikában gyakran közvetlenül erőnek nevezik az egyik test másikra gyakorolt hatását. Például azt mondhatjuk, hogy a testre a nehézségi erő hat, holott valójában a testre a Föld hat, amelynek hatását a nehézségi erő jellemzi.

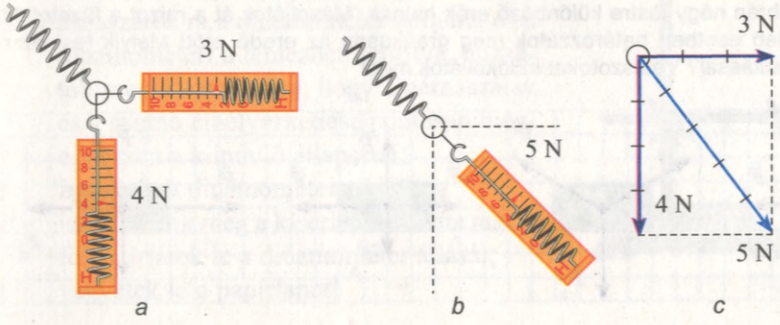
Hogy teljesen meghatározzuk az erőt, fel kell tüntetni az értékét (vagy a meghatározására szolgáló képletet), megadni az irányát és azt a pontot (vagy testet), ahol az erőhatás a testet éri, azaz a támadáspontot (16.1. ábra).



16.1. ábra. Az erő teljesen meghatározott, ha adott a nagysága, iránya és támadáspontja

4 Az erők összeadása. Eredő erő

A testre gyakorlatilag sohasem hat csupán egyetlen erő. Legtöbbször két, három vagy több erő is hat rá egyszerre. A 8. osztály fizika tananyagából tudjátok: ha a testre több erő hat, akkor a hatásuk eredménye ugyanolyan lesz, mintha a testre csupán egyetlen erő hatna, amit *eredőnek* nevezünk (16.2. ábra).



16.2. ábra. A 3 N és 4 N erők 90°-os szöget zárnak be egymással (*a*) és úgy hatnak a rugóra, mint az 5 N erő (*b*). Ebben az esetben az 5 N erő a 3 N és a 4 N erők eredője (*c*)

Azt az erőt, amely úgy hat a testre mint néhány egy időben ható erő, és az adott testre ható erők mértani összegével egyenlő, **eredő erőnek** nevezzük:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n,$$

ahol n a testre ható erők száma.

Mivel az erő vektormennyiség, ezért a testre ható több erő eredőjét a vektorok összeadásának szabálya szerint határozzák meg (lásd a 4. §-t).

Összegzés

A testek vagy a részecskék egymásra való hatását kölcsönhatásnak nevezzük. A kölcsönhatásoknak négy fajtáját különböztetik meg: gravitációs, elektromágneses, erős és gyenge. Bármely kölcsönhatás mennyiségi jellemzője az erő. A test kölcsönhatását jellemző fizikai mennyiséget erőnek nevezzük. A mechanikában csak a gravitációs erőt vizsgálják, valamint néhány elektromágneses erőt: a rugalmassági, súrlódási és közegellenállási erőt.

Az $\vec{F}$ erő (a mechanikában) olyan fizikai vektormennyiség, amely a testre más testek részéről gyakorolt hatás mértéke, aminek az eredményeként a test gyorsulásra tesz szert vagy/és megváltoztatja alakját, illetve a méretét.

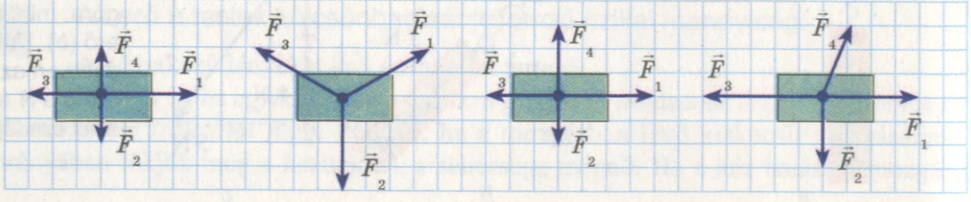
Az erő mértékegysége az SI-ben a newton (N). 1 N egyenlő azzal az erővel, ami az 1 kg tömegű testre hatva 1 m/s^2 gyorsulást közöl vele. Azt az erőt, amely úgy hat a testre mint néhány egy időben ható erő, és az adott testre ható erők mértani összegével egyenlő, eredő erőnek nevezzük: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$.

Ellenőrző kérdések

1. Mi a test gyorsulásának oka? **2.** A kölcsönhatások milyen fajtáit ismeritek? **3.** Soroljatok fel példákat olyan jelenségekre, amelyekben a gravitációs kölcsönhatás; az elektromágneses kölcsönhatás játssza a döntő szerepet! **4.** Definiáljátok az erőt! Mi a mértékegysége? **5.** Mit kell tudni az erő meghatározásához? **6.** Definiáljátok az eredő erőt!

13. gyakorlat

1. Állíthatjuk-e, hogy az egyik testnek egy másikra gyakorolt hatása okozza a mozgásukat?
2. Az ejtőernyősre a levegőben két erő hat: a Föld vonzóereje, amelynek iránya megegyezik az ejtőernyős haladási irányával és 90 N, valamint a légellenállás, ami az ejtőernyős mozgásával szemben irányul és szintén 90 N-nal egyenlő. Határozzátok meg az erők eredőjét! Írjátok le az ejtőernyős mozgásának jellegét!
3. A testre kölcsönösen merőlegesen ható erők eredőjének nagysága 13 N. Az egyik erő nagysága 12 N. Mennyivel egyenlő a másik erő nagysága?
4. Az ábrán négy testre különböző erők hatnak. Másoljátok át a rajzot a füzetetekbe! Minden esetben határozzátok meg grafikusan az eredő erőt! Melyik test mozog gyorsulással? Válaszotokat indokoljátok meg!



2. SZ. LABORATÓRIUMI MUNKA

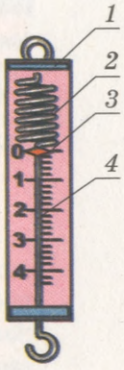
Téma: az erő mérése.

Cél: dinamométerrel megmérni a nehézségi erőt és a csúszó súrlódási erőt; kísérletileg meggyőződni arról, hogy a testre ható erők eredője egyenlő az erők vektorösszegével.

Eszközök: laboratóriumi állvány két szorítócsavarral és fogóval; deszkalap; 300–400 g tömegű fahasáb akasztófüllel a felső lapon; furnérlemez három szöggel; két 40–45 cm hosszú cérnaszál (az egyiknek mindkét végén hurok van); rajzszögek, két papírlap; háromszög; dinamométer.

Elméleti tudnivalók

Az erőt meghatározni annyit jelent, mint egy ismert erővel kiegyensúlyozni. A 8. osztályos fizika tananyagból tudjátok, hogy az erő mérésére a *dinamométer* szolgál. A dinamométer működése általában a mért erőnek a rugó rugalmassági erejével való összehasonlításán alapul. A legegyszerűbb laboratóriumi dinamométer (1. ábra) egy fa vagy műanyag skálával ellátott panelből áll. A panel kis *1* kiemelkedéséhez erősítik a *2* rugót, amelynek szabad végén található a *3* mutató és a *4* horog.



1. ábra

A MUNKA MENETE

A kísérlet előkészítése

1. Ismerkedjetek meg a dinamométer felépítésével és működési elvével.
2. Határozzátok meg a beosztásértéket és a dinamométer skálájának mérési határát.

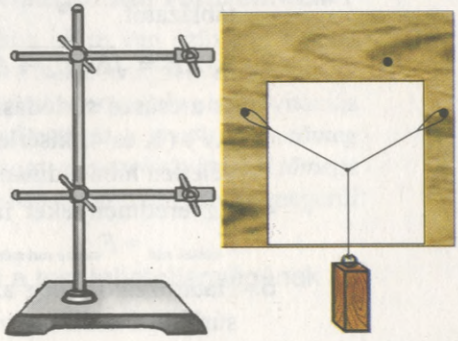
Kísérlet

A mérések eredményeit azonnal írjátok be a táblázatba.

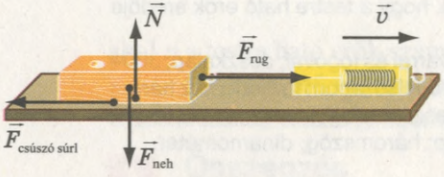
1. kísérlet. Akasszátok a hasábot a dinamométer horgára és mérjétek meg a hasáb P súlyát.

2. kísérlet. A rajzszögek segítségével erősítsétek fel a lemezre a papírlapot. Állítsátok össze a berendezést a 2. ábrán látható módon. A papírlapon jelöljétek meg a csomó helyét és rajzoljátok le a vonalakat, amelyek mentén elhelyezkednek a cérnaszálak. A dinamométer segítségével mérjétek meg a cérnaszálak T_1 és T_2 húzóerejét. Ehhez:

1) akasszátok le a szögről az egyik hurkot, akasszátok rá a dinamométer horgára, és a dinamométert a lemezhez szorítva, húzzátok meg a cérnát úgy, hogy a cérnaszálak és a csomó elhelyezkedése pontosan megegyezzen a kiinduló állapottal;
2) írjátok le a dinamométer állását;
3) ismételjétek meg a kísérletet a cérna másik felén, írjátok le a dinamométer állását;
4) vegyétek le a papírlapot!


2. ábra

3. kísérlet. Ismételjétek meg a 2. kísérletben leírt lépéseket a cérnaszál egyik hurkát a harmadik szögre akasztva, ezáltal más szögben elhelyezve a cérnaszálakat.



3. ábra

4. kísérlet. A hasábot helyezzétek rá a deszkalapra. Mérjétek meg a hasábra ható csúszó súrlódási erőt $F_{csúszó\ súrl}$: a hasábot a dinamométer horgára akasztva, minél egyenletesebben húzzátok a deszkalap mentén (3. ábra). Mivel a hasáb egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ezért az erőhatások kiegyenlítik egymást, tehát $F_{csúszó\ súrl} = F_{rug}$.

A kísérlet sorszáma	A hasáb súlya P, N	A csúszó súrlódási erő nagysága $F_{csúszó\ súrl}$, N	A cérnaszál feszítőereje		A T_1 és T_2 erők eredőjének nagysága F, N
			T_1, N	T_2, N	
1		—	—	—	—
2		—			
3		—			
4			—	—	—

A kísérlet eredményeinek feldolgozása

1. Az 1. és 4. kísérletekhez készítsetek magyarázó rajzokat, amelyeken megfelelő méretarányban tüntessétek fel a hasábra ható erőket. Tüntessétek fel az általatok választott léptéket.
2. A furnérlemezről levett papírlapokon megfelelő méretarányban tüntessétek fel a csomóponthoz fektetett $\vec{T}_1$ és $\vec{T}_2$ erők vektorait. A paralelogramma szabály szerint határozzátok meg az erők eredőjét. Hasonlítsátok össze a cérnaszálak feszítőerejének eredőjét és a hasáb súlyát. Töltsétek ki a táblázatot.
3. A $\Delta F = \sqrt{\Delta F_{műsz}^2 + \Delta F_{vél}^2}$ képlet felhasználásával határozzátok meg a súly és a csúszó súrlódási erő mérésének abszolút hibáját ($\Delta P = \Delta F_{csúszó\ súrl} = \Delta F$) (1. és 4. kísérletek). Mivel *csak egyetlen mérést* végeztetek, ezért a véletlen hiba a dinamométer skálabeosztásának felével egyenlő.
4. Az eredményeket írjátok le a következő alakban : $P = P_{mérés} \pm \Delta F$, $F_{csúszó\ súrl} = F_{csúszó\ súrl\ mérés} \pm \Delta F$.
5. Határozzátok meg azt az intervallumot, ahol a megmért súly és csúszó súrlódási erők nagyságainak valódi értéke található; jelöljétek meg a számegyenesen.

A kísérlet és eredményeinek elemzése

Elemezzétek a kísérletet és eredményeit. Vonjatok le következtetést, amiben feltüntetitek: milyen fizikai mennyiséget mértetek, milyen eredményeket kaptatok, miről győződtetek meg a kísérlet során; tüntessétek fel, mi okozhatta a hasáb súlyának és a cérnák feszítőereje eredőjének mérésekor az eredmények esetleges különbségét.

+ Alkotó feladat

Gondoljátok végig, és írjátok le két ellentétesen irányuló erő eredőjének meghatározása céljából elvégzendő kísérletnek a tervét. Végezzétek el a kísérletet, készítsetek magyarázó rajzot, írjátok le a kísérlet eredményeit!

17. §. TEHETETLENSÉG. A TEST TÖMEGE

?! A mindennapi életből jól tudjátok, hogy a test sebességváltozása nem csak a rá ható erőtől függ. Ha a labdára és az elefántra ugyanolyan erő hat, akkor nyilvánvaló, hogy az elefánt sebessége kisebb mértékben változik (a sebességváltozáshoz mindenképp hosszabb idő szükséges). Vagyis a különböző testek különbözőképpen reagálnak ugyanarra a hatásra. Ebben a paragrafusban arról lesz szó, mi ez a tulajdonság és milyen fizikai mennyiség jellemzi.

1 Hogyan változtatják a testek mozgássebességüket?

Ahhoz, hogy megváltoztassuk bármely test mozgássebességét, időre van szükség – a sebesség nem tud egy pillanat alatt megváltozni. Így például, mielőtt elmozdítanánk a bőröndöt a helyéről, előtte egy bizonyos ideig hatunk rá a kezünkkel; a golyó a lőporgázok hatására bizonyos sebességre tesz szert a csőben való mozgása során; a gépkocsi nem azonnal, hanem csak bizonyos idő elteltével áll meg.

A testnek azt a tulajdonságát, hogy a sebessége megváltozásához bizonyos idő szükséges, **tehetetlenségnek** nevezzük.

Ha két különböző testre azonos erő hat, akkor egy bizonyos sebességváltozáshoz a nagyobb tehetetlenséggel rendelkező testnek több időre van szüksége, mint ugyanilyen sebességváltozáshoz a kisebb tehetetlenségű testnek (a fent említett példában az elefánt tehetetlensége nagyobb, mint a labdáé). Ez azt jelenti, hogy az adott erő hatásának eredményeként a nagyobb tehetetlenséggel bíró test kisebb gyorsulást kap, mint a kevésbé tehetetlen.

2 Mi a test tömege és milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

Bármely test sebességének megváltoztatásához időre van szükség, vagyis minden test tehetetlenséggel rendelkezik. A testnek ezt a tulajdonságát a *tehetetlenségi tömeg* jellemzi. Ugyanakkor minden test rendelkezik a más testekkel való gravitációs kölcsönhatás tulajdonságával. A testnek ezt a tulajdonságát a *gravitációs tömeg* jellemzi. Napjainkban már kísérleti bizonyítást nyert, hogy *a test tehetetlenségi tömege megegyezik a gravitációs tömegével.* Ezért a továbbiakban egyszerűen a test tömegéről fogunk beszélni.

Az m **tömeg** olyan fizikai mennyiség, ami a test tehetetlenségének és gravitációjának mértéke*.

* A *tömeg az energia mértéke is egyben*. Erről a később fogunk tanulni.

A tömeg mértékegysége az SI-ben a **kilogramm** (kg). 1 kg *egyenlő a kilogramm nemzetközi etalonjának tömegével.*

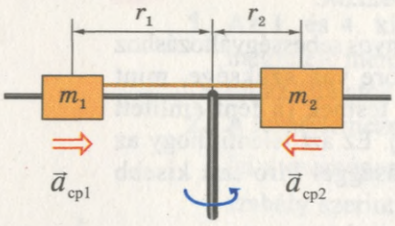
A tömeg alaptulajdonságai

1. A *test tömege – invariáns* (változatlan értékű) mennyiség: nem függ a VR kiválasztásától. Például az utas tömege a mozgó vonatban ugyanannyi, mint a peronon.
2. *A test tömege nem függ a test mozgássebességétől.* A tömegnek ez a tulajdonsága az invarianciájából következik.
3. *A test tömege – additív mennyiség*: a test tömege egyenlő a testet alkotó összes részecske tömegének összegével, a rendszer tömege pedig egyenlő a rendszert alkotó testek tömegeinek összegével. Például a golyóstoll tömege egyenlő az őt alkotó molekulák tömegeinek összegével és az alkatrészei tömegének összegével.
4. *A klasszikus mechanikában teljesül a tömegmegmaradás törvénye*: a rendszerben lezajló bármely folyamat során a rendszer össztömege változatlan marad; a test tömege nem változik más testekkel való kölcsönhatása során.

Első pillantásra úgy tűnik, hogy a tömeg felsorolt tulajdonságai nyilvánvalóak, azonban a bizonyításukhoz egy sor komoly kísérleti és elméleti vizsgálatot végeztek.

3 Hogyan kell megmérni a test tömegét?

A test tömegét megmérni annyit jelent, mint összehasonlítani az etalon tömegével (az egységnyinek választott test tömegével). A test tömegének direkt módon való mérésének egyik legelterjedtebb módja a *mérlegelés*. Mivel a tömeg a gravitáció mértéke is, ezért az egyenlő tömegű testeket egyformán vonzza a Föld.



17.1. ábra. A gyorsulás meghatározása a testek kölcsönhatása alapján. Két, m_1 és m_2 tömegű hengert egy centrifugagép rúdjára húztak, egy cérnával összekötötték őket, majd a gépet forgásba hozták. Pár fordulat után a rúd mentén súrlódásmentesen csúszó hengerek egy bizonyos távolságra lesznek a forgástengelytől (rendre r_1 és r_2 távolságra). A kísérlet azt mutatja, hogy bármilyen fordulatszám esetén igaz a következő aránypár $\frac{a_{cp1}}{a_{cp2}} = \frac{m_2}{m_1}$

A mérlegelés – a test tömege megállapításának egyik legkényelmesebb módja, ezzel együtt nem univerzális. Hogyan lehet például megmérni a molekula vagy a Mars tömegét, hiszen nem tehetjük őket a mérlegre? Ezekben az esetekben azt a tényt alkalmazzák, hogy a tömeg – a tehetetlenség mértéke. *Két test bármilyen kölcsönhatásakor a tömegeik aránya fordítottan arányos a kölcsönhatás következtében kapott gyorsulásaik nagyságának arányával* (17.1. ábra)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Tehát, ha az egyik test tömege (például az m_1) ismert, a másik test tömegét (m_2) pedig meg kell határozni, akkor a testek kölcsönhatásakor szerzett gyorsulást megmérve kiszámítható a másik test tömege:

$$m_2 = \frac{m_1 a_1}{a_2}.$$

Összegzés

A testnek azt a tulajdonságát, hogy bizonyos gyorsulással reagál a rá hatást gyakorló testre, tehetetlenségnek nevezzük. A tehetetlenség a testnek az a tulajdonsága, hogy mozgássebességének megváltozásához bizonyos időre van szükség.

Az m tömeg olyan fizikai mennyiség, ami a test tehetetlenségének és gravitációjának mértéke. A tömeg mértékegysége az SI-ben a kilogramm (kg).

A test tömegét megmérni annyit jelent, mint összehasonlítani a tömegegységként választott test tömegével. A test tömegének mérési módszerei: a mérlegelés; egy ismert és egy ismeretlen tömegű test kölcsönhatása során szerzett gyorsulásuk aránya alapján.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiáljuk a tehetetlenséget? **2.** Miért állíthatjuk, hogy az elefánt tehetetlensége nagyobb, mint a labdáé? Válaszotokat indokoljátok! **3.** Mit nevezünk a test tömegének? Mi a tömeg mértékegysége? **4.** Mi a tömeg etalonja? **5.** Nevezzétek meg a tömeg alaptulajdonságait! **6.** Mit jelent megmérni a test tömegét? A tömeg mérésének milyen módjait ismeritek?

14. gyakorlat

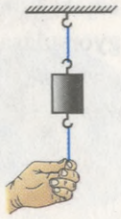
1. Soroljatok fel olyan testpárokat, amelyek közül az egyik nagyobb tehetetlenséggel rendelkezik, mint a másik (például a Föld tehetetlensége nagyobb, mint a Holdé; az asztal tehetetlensége nagyobb, mint a széké)!

2. Az acélból készült kiskocsi 4 m/s sebességgel mozogva ütközött a mozdulatlan alumínium kiskocsival. Ezután a sebessége 1 m/s lett. Mekkora sebességre tett szert az ütközést követően az alumíniumból készült kiskocsi, ha a tömege háromszor kisebb az acél kiskocsi tömegénél?

3*. Két hengert – egy rézből és egy fából készítettet– cérnával kötöttek össze és centrifugagépen forgásba hozták őket. Kiderült, hogy eközben a rézhenger a forgástengelytől 8 cm-re helyezkedett el. Milyen hosszú a cérnaszál, ha a hengerek térfogatai egyformák?

Kísérleti feladat

Egy állványhoz kötött vékony cérna másik végére erősítsetek egy hengert, annak alsó részéhez kössetek egy ugyanolyan cérnaszálat (lásd az ábrát). Lassan húzzátok az alsó cérnaszálat addig, amíg a felső el nem szakad. Ismételjétek meg a kísérletet, de most hirtelen rántsátok meg az alsó cérnaszálat. Magyarázzátok meg a kapott eredményeket, és vonjatok le következtetést!

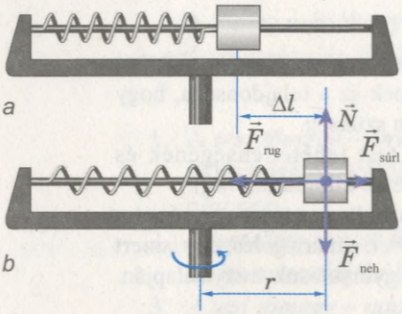


18. §. NEWTON MÁSODIK TÖRVÉNYE

Már sok szó esett Isaac Newton zseniális angol tudósról. Tudományos érdemeinek elismeréseként lovagi címet és lordi titulust kapott. „A természet számára nyitott könyv volt, amit erőlködés nélkül olvasott" – írta róla Albert Einstein. A *természetfilozófia matematikai alapelvei* c. művében (1687) Newton megfogalmazta a *mozgás axiómáit* – ezeket most *Newton törvényeinek* nevezik. Ebben a paragrafusban Newton második törvényéről – a mechanika alaptörvényéről lesz szó.

1 Newton második törvénye

A testre ható bizonyos erő hatására a test gyorsulásra tesz szert, amelynek az értéke a test tömegétől függ. Kísérletileg tisztázzuk, milyen összefüggés áll fenn az erő, a gyorsulás és a test tömege között.



18.1. ábra. A Newton második törvényének kivezetésére szolgáló kísérlet a centrifugagép segítségével: *a* – amíg a gép nem jön forgásba, a rugó nyugalmi állapotban marad és a rugó részéről a hengerre ható rugalmassági erő nullával egyenlő; *b* – a forgás megkezdését követően a rugó megnyúlik és a hengerre hatni kezd a rugó rugalmassági ereje, centripetális gyorsulást közölve vele

A kísérlethez hengert használunk, amelyet a centrifugális gép rúdjára erősítünk, valamint egy rugót, aminek egyik végét a hengerhez, a másikat a gép keretéhez erősítünk (18. *a* ábra).

A forgatás során a hengerre négy erő hat: a rugó $\vec{F}_{rug}$ rugalmassági ereje, a henger és a rúd között ható $\vec{F}_{súrl}$ súrlódási erő, az $\vec{F}_{neh}$ nehézségi erő és a támaszték $\vec{N}$ reakcióereje (18.1. *b* ábra). A nehézségi erőt kiegyenlíti a támaszték reakcióereje, a rúd és a nyílás alaposan lecsiszolt és megkent, ezért a hengernek a tengellyel való súrlódása elhanyagolható. Tehát megfelelő pontossággal állíthattuk, hogy az adott esetben a henger gyorsulásának az oka csakis a rugalmassági erő, aminek az értékét könnyű meghatározni a rugó Δl megnyúlása alapján: $F_{rug} = k\Delta l$, ahol k a rugómerevség.

A kísérlet azt mutatja, hogy minél gyorsabban forog a gép, annál jobban megnyúlik a rugó. Eközben ahányszorosára nő a rugó rugalmassági ereje, ugyanannyiszorosára nő a centripetális gyorsulás, amit a henger az erő hatására nyer. Tehát a *test gyorsulása egyenesen arányos a rá ható erővel:*

$$a \sim F.$$

A különböző tömegű hengerekkel végzett kísérletek a következő eredményt adják: változatlan rugalmassági erő mellett (a rugó megnyúlása nem változik) a henger gyorsulása annyiadrészére csökken, ahányszorosára nő a henger tömege. Tehát *a gyorsulás, amire a test az adott erő hatására szert tesz, fordítottan arányos a test tömegével:*

$$a \sim \frac{1}{m}.$$

Az inerciarendszerekben mindenfajta kölcsönhatáskor teljesülnek a következő arányosságok: $a \sim F$ és $a \sim \frac{1}{m}$.

Egyesítve a két arányt és figyelembe véve, hogy a test gyorsulásának iránya mindig megegyezik annak az erőnek az irányával, amelynek hatására a test gyorsulásra tett szert ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$), megfogalmazzuk **Newton második törvényét:**

A gyorsulás, amelyre a test az erő hatására szert tesz, egyenesen arányos ezzel az erővel és fordítottan arányos a test tömegével:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Ez a kifejezés a modulusokra is felírható: $a = \frac{F}{m}$,

illetve a vetületekre is: $a_x = \frac{F_x}{m}$; $a_y = \frac{F_y}{m}$; $a_z = \frac{F_z}{m}$.

2 Mi következik Newton második törvényéből?

Newton második törvényének következményei

1. *A gyorsulást a testre ható erő határozza meg* (az erő a gyorsulás oka). Az erő változása vezet a gyorsulás megváltozásához és nem megfordítva.

2. Ha a testre egyidejűleg több erő hat, akkor a Newton törvényét kifejező matematikai képletben az erőt $\vec{F}$ úgy kell értelmezni, mint a testre ható összes erő eredőjét: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$ (18.2. ábra). Ebben az esetben Newton második törvényét így lehet leírni:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n}{m}, \text{ vagy } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = m\vec{a}.$$

Az utóbbi képletet a feladatok megoldásakor célszerű használni.

3. A test gyorsulásának iránya mindig megegyezik a testre ható erők eredőjének irányával.

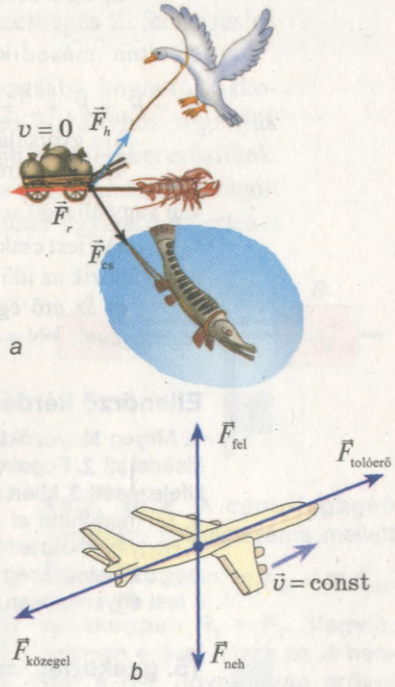
4. Ha a testre ható erők kiegyenlítik egymást, vagyis ha $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0$, akkor $\vec{a} = 0$ (18.3. ábra). Tehát a tehetetlenségi törvényt így lehet megfogalmazni: *a test nyugalmi állapotban van vagy állandó sebességgel mozog* ($\vec{a} = 0$), *ha a testre ható erők eredője nullával egyenlő.*

5. A test csak abban az esetben végez egyenletesen gyorsuló mozgást, ha a testre ható erők eredője nem változik az idő függvényében. Valóban, mivel $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ és m = const, ezért $\vec{a}$ = const, ha $\vec{F}$ = const.

6. Newton második törvényének alapján meghatározható az erő mértékegysége: ha a test tömege 1 kg, a testtel az erő által közölt gyorsulás 1 m/s², akkor az $F = ma$ egyenlőségből kapjuk, hogy az erő 1 N (1 N = 1 kg · 1 m/s²).



18.2. ábra. Az $\vec{F}$ erő a hegyről lesikló sízőre ható $\vec{F}_{\text{neh}}$ nehézségi, $\vec{N}$ reakcióerő és az $\vec{F}_{\text{csúszó súrl}}$ csúszó súrlódási erő eredője. Az erő hozza létre a sízők gyorsulását



18.3. ábra. Ha a testre ható erők eredője nulla, a test nyugalmi állapotban van (*a*) vagy állandó sebességgel mozog (*b*)

3 Miért nevezik Newton második törvényét a dinamika alaptörvényének?

Newton második törvénye lehetővé teszi sok mechanikai jelenség okának tisztázását, segítségével megoldható a legtöbb test mozgásáról szóló gyakorlati feladat. Newton második törvénye lehetővé teszi a test helyzetének tetszőleges időpontban való meghatározását, vagyis a mechanika fő feladatának a megoldását. Valóban, ismerve a test tömegét és a rá ható erőket, könnyű meghatározni a test gyorsulását. Tudva azt, hogyan függ a test gyorsulása az időtől, valamint ismerve a mozgás kezdőfeltételeit (a kezdősebességet, a test kiinduló koordinátáit), meghatározhatóak a test helyzetének koordinátái, valamint a mozgássebessége bármely időpontban.

Összegzés

Newton második törvénye a mechanika alaptörvénye. Ez a törvény csak az inerciális vonatkoztatási rendszerekben teljesül: az $\vec{a}$ gyorsulás, amelyre a test az $\vec{F}$ erő hatására szert tesz, egyenesen arányos ezzel az erővel és fordítottan arányos a test m tömegével: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Newton második törvényének következményei:

1) az erő a gyorsulás oka; a gyorsulást az erő határozza meg, és nem megfordítva;

2) ha a testre egyidejűleg több erő hat ($\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$), akkor Newton második törvényét így is leírhatjuk: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n}{m}$, vagy $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = m\vec{a}$;

3) a gyorsulás iránya mindig megegyezik a testre ható erők eredőjének irányával;

4) ha a testre ható erők kiegyenlítik egymást, akkor a test nyugalmi állapotban van vagy állandó sebességgel mozog (ha $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0$, akkor $\vec{a} = 0$);

5) a test csak akkor mozog egyenletesen gyorsulva, ha a testre ható erők eredője nem változik az idő múlásával;

6) az erő egysége (newton) megállapítható Newton második törvényének a segítségével: $1\ \text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m/s}^2$.

Ellenőrző kérdések

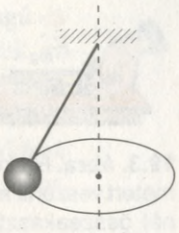
1. Milyen tényezőktől függ a testek gyorsulása? Vázoljátok fel az ezzel kapcsolatos kísérletet! **2.** Fogalmazzátok meg Newton második törvényét, írjátok le a matematikai kifejezését! **3.** Miért nevezik Newton második törvényét a mechanika alaptörvényének? **4.** Mi mondható el az erő és a gyorsulás irányáról, amit ez az erő közöl a testtel? **5.** Hogyan írható le Newton második törvénye, ha a testre több erő hat? **6.** Fogalmazzátok meg a tehetetlenség törvényét Newton második törvényére támaszkodva! **7.** Mi a feltétele a test egyenletesen gyorsuló mozgásának?

15. gyakorlat

1. Hogyan irányul az autóra ható eredő erő, ha az út vízszintes szakaszán egyenletesen gyorsul?

2. Az $\vec{F} = m\vec{a}$ törvényből kiindulva állíthatjuk-e, hogy a testre ható erő a test tömegétől és az erő által kölcsönzött gyorsulástól függ?

3. A 2 kg tömegű, déli irányban mozgó test állandó, kelet felé irányuló 10 N erő hatására megváltoztatja a sebességét. Határozzátok meg a test gyorsulásának nagyságát és irányát!
4. A 200 g tömegű golyó egy gyakorlatilag súlytalan tengelyhez van erősítve és egy 10 cm sugarú körvonal mentén egyenletes mozgást végez (lásd az ábrát). Milyen erők hatnak a golyóra? Hová irányul az eredőjük? Határozzátok meg az értékét, ha a golyó 10 fordulatot tesz meg 5 s alatt!
5. Az 5 kg tömegű testre két kölcsönösen merőleges, 9 N és 12 N nagyságú erő hat. Határozzátok meg a test gyorsulását!
6. A 15 kN nagyságú erő hatására a test olyan egyenes vonalú mozgást végez, hogy eközben a koordinátái az $x = -200 + 9t - 3t^2$ törvény szerint változnak. Határozzátok meg ennek a testnek a tömegét!



19. §. NEWTON HARMADIK TÖRVÉNYE

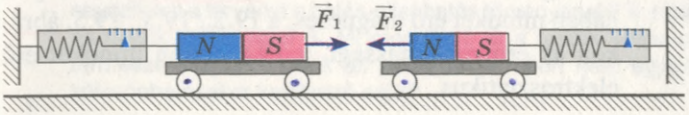
?! Csapjatok a kezetekkel a padra. Fáj? De miért? Hiszen ti ütöttétek meg a padot, nem pedig a pad titeket. Húzzátok a társatokat a sima jégen állva. Ki mozdul el? Mindkettőtök? Vajon miért? Hiszen ti húztátok a társatokat, nem pedig ő titeket. Ki tudjátok-e magatokat húzni a hajatoknál fogva a vízből? Nem? Miért? Hiszen ily módon elég könnyen kihúzhattok a vízből egy felnőtt, nálatok jóval nehezebb embert. Ezek és más kérdések megválaszolásában segít nektek Newton harmadik törvénye.

1 Newton harmadik törvénye

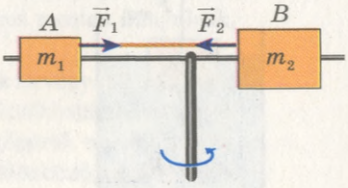
Már beszéltünk arról, hogy a természetben nem fordul elő, hogy az *A* test hat a *B* testre, viszont eközben a *B* nem hat az *A*-ra. A testek mindig kölcsönösen hatnak egymásra – *kölcsönhatásban* vannak. Tisztázzuk, milyen összefüggés áll fenn a testek között ható erők között. Ehhez kísérlethez folyamodunk.

A vízszintes felületre két egyforma könnyen mozgásba hozható kiskocsit helyezünk és dinamométerek segítségével függőleges állványhoz rögzítjük őket. A kiskocsikra ellentétes pólusaikkal egymás felé fordított mágneseket erősítünk. Ennek eredményeként a kocsik vonzzák egymást, megnyújtva a dinamométerek rugóit (19.1. ábra). A kísérlet azt mutatja, hogy mindkét dinamométer ugyanazt az értéket mutatta. Ez azt jelenti, hogy amilyen erővel vonzotta az *A* mágnes a *B* mágnest, ugyanolyan erővel vonzza a *B* mágnes az *A*-t: $F_1 = F_2$. Az erők eközben ellentétes irányúak: $\vec{F}_1 \uparrow\downarrow \vec{F}_2$.

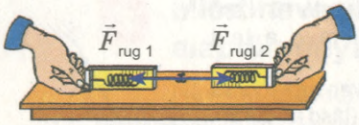
Számtalan kísérlet elvégezhető, amelyekben a két test közötti kölcsönhatási erőt mérik, de az eredmény mindig ugyanolyan lesz: ezek az erők azonos nagyságúak és ellentétes irányúak lesznek (19.2.–19.5. ábrák).



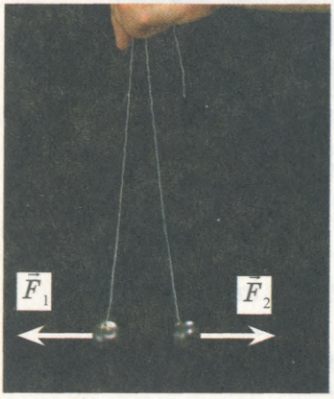
19.1. ábra. A mágnesek kölcsönhatásakor keletkező erők nagysága egyenlő, irányuk pedig ellentétes: $F_1 = F_2$, $\vec{F}_1 \uparrow\downarrow \vec{F}_2$, tehát $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



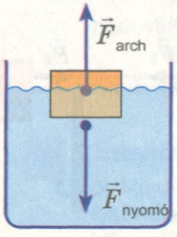
19.2. ábra. A centrifugagép bármilyen fordulatszáma mellett $\frac{a_{cp1}}{a_{cp2}} = \frac{m_2}{m_1}$, innen: $m_1 a_{cp1} = m_2 a_{cp2}$, másképpen $F_1 = F_2$. Vagyis, amilyen erővel húzza az *A* henger a *B*-t, ugyanolyan erővel húzza a *B* henger az *A*-t; ezek az erők egymással szemben irányulnak, vagyis irányuk ellentétes: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



19.3. ábra. Ha két egyforma dinamométert veszünk a kezünkbe, a horguknál összeakasztjuk, majd ellentétes irányban kezdjük húzni őket, akkor mindkét dinamométer azonos nagyságú erőt mutat: $\vec{F}_{rug\ 1} = -\vec{F}_{rug\ 2}$



19.4. ábra. Mindkét azonos töltéssel rendelkező golyóra Coulomb-féle erő hat a másik golyó részéről. Ezek az erők azonos nagyságúak és ellentétes irányúak: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



19.5. ábra. Az $\vec{F}_{arch}$ archimédeszi erő, amellyel a víz felfelé nyomja a felszínén úszó fahasábot, nagyságát tekintve egyenlő, irányát tekintve pedig ellentétes az $\vec{F}_{nyomó}$, nyomóerővel, amivel a hasáb nyomja a vizet: $\vec{F}_{arch} = -\vec{F}_{nyomó}$

A kölcsönhatást a hatás-ellenhatás törvény írja le, vagyis **Newton harmadik törvénye***.

Az erők, amelyekkel a testek kölcsönösen hatnak egymásra, egy egyenes mentén irányulnak, nagyságuk egyenlő, irányuk pedig ellenttétes:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

ahol $\vec{F}_{12}$ az az erő, amivel a második test az elsőre hat; ez az erő az első testre fejti ki a hatását; $\vec{F}_{21}$ az az erő, amivel az első test a másodikra hat; ez az erő a második testre fejti ki a hatását.

2 Milyenek a testek kölcsönhatásának a sajátosságai?

A fenti példák alapján egy sor sajátosságot vehetünk észre.

1. *Newton harmadik törvénye teljesül mind a testek közvetlen érintkezésekor* (lásd a 19.2., 19.3., 19.5. ábrákat), mind pedig a testek távoli kölcsönhatásakor (lásd a 19.1., 19.4. ábrákat).

2. *Az erők mindig párosával jönnek létre*, ha jelen van az A testre a B test részéről ható $\vec{F}_1$ erő, akkor feltétlenül jelen van a vele egyenlő nagyságú és ellentétes irányú $\vec{F}_2$ erő, amelyik az A test részéről a B testre hat. Figyeljétek meg: ezeknek az erőknek (vagy egyiküknek) a hatása nem mindig észrevehető. Például járás közben ellökitek magatokat a Föld felszínétől, tehát erő hat rátok a Föld részéről. Newton harmadik törvényének megfelelően ti ugyanolyan erővel lökitek vissza a Földet, azonban a Föld hatalmas tömege miatt ennek az erőnek a hatása észrevehetetlen. Ha viszont egy könnyű csónakban próbáltok menni, akkor hatásotok a csónakra rögtön feltűnik: az mozgásba jön, mégpedig a haladási irányotokkal ellentétesen.

3. *Két test kölcsönhatásakor a létrejövő erőpárok mindig azonos természetűek.* A 19.1. ábrán látható példában mindkét erő mágneses, a 19.2., 19.3., 19.5. ábrákon az erő rugalmassági, a 19.4. ábrán mindkét erő elektrosztatikus.

* Newton megfogalmazásában ez a törvény így hangzott: a hatásnak mindig létezik egyenlő és ellentétes ellenhatása, másképpen: két test kölcsönhatása egyenlő és ellentétes irányú.

4. Úgy tűnhet, ha a testek bármiféle kölcsönhatásakor azonos nagyságú és ellentétes irányú erőpárok jönnek létre, ezeknek az erőknek ki kell egyenlítődniük, ez pedig egyenértékű azzal, hogy nincs kölcsönhatás. Ebből az következne, hogy mozdulatlanságra vagy állandó mozgásra vagyunk kárhoztatva. A valóságban azonban ez nem így van! Az a helyzet, hogy *csak az ugyanarra a testre ható erők egyenlítődnek ki, a kölcsönhatáskor keletkező erők pedig különböző testekre fejtik ki a hatásukat, ezért nem kompenzálhatják egymást.*

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A vízzel telt edény egyensúlyban van a mérlegen. Megváltozik-e a mérleg egyensúlyi állapota, ha az ujjunkat a vízbe merítjük úgy, hogy közben nem érünk az edény falához?

A fizikai probléma elemzése. Mivel az ujj kölcsönhatásba kerül a vízzel, a feladat megoldásához Newton harmadik törvényét, valamint a testek egyensúlyának feltételét alkalmazzuk.

Megoldás. A kísérlet megkezdése előtt a mérleg egyensúlyban van, tehát a mérleg jobb és bal karjára ható erők egyenlők. Miután az ujj a vízbe kerül, függőlegesen felfelé irányuló archimédeszi erő kezd rá hatni. Newton harmadik törvényének megfelelően az erők párosával jönnek létre, ezért az ujj részéről a vízre ugyancsak erő kezd hatni – az archimédeszi erővel azonos nagyságú és függőlegesen lefelé irányuló. Így az ujj (még úgy is hogy nem ér hozzá az edény aljához, valamint a falaihoz) „megtolja" a vizet, vele együtt pedig az edényt is lefelé, miáltal a mérleg egyensúlya megbomlik a vízzel telt edény felé.

Felelet: a mérleg egyensúlya megbomlik a vízzel telt edény felé.

! Összegzés

A testek mindig kölcsönösen hatnak egymásra – kölcsönhatásban vannak. A kölcsönhatást Newton harmadik törvénye (a hatás-ellenhatás törvénye) írja le: az erők, amelyekkel a testek kölcsönösen hatnak egymásra, egy egyenes mentén irányulnak, nagyságuk egyenlő, irányuk pedig ellentétes: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

A testek kölcsönhatásának sajátosságai: Newton harmadik törvénye teljesül mind a testek közvetlen érintkezésekor, mind pedig a testek távoli kölcsönhatásakor; az erők mindig párosával jönnek létre; a kölcsönhatáskor létrejövő erőpárok mindig azonos természetűek; ezek az erők nem egyenlítik ki egymást, mivel különböző testekre fejtik ki hatásukat.

? Ellenőrző kérdések

1. Fogalmazzátok meg Newton harmadik törvényét! Milyen a matematikai alakja? Miért nevezik ezt a törvényt a hatás-ellenhatás törvényének? **2.** Hozzatok fel példákat Newton harmadik törvényére! **3.** Mi mondható el a testek kölcsönhatásakor létrejövő erők természetéről? Hozzatok fel példákat! **4.** Miért nem egyenlítik ki egymást a testek kölcsönhatásakor keletkező erők?

16. gyakorlat

1. Tekintsétek át a fa ágán függő alma és a Föld gravitációs kölcsönhatását! Mi vonzódik erősebben: az alma a Földhöz vagy a Föld az almához?

2. Igazat mondott-e Münchausen báró, amikor azt állította, hogy hajánál fogva kihúzta magát a mocsárból? Válaszotokat indokoljátok!
3. A 48 kg tömegű fiú a jégen korcsolyán állva ellök magától egy 3 kg tömegű golyót, vízszintes irányban 8 m/s² gyorsulást közölve vele. Milyen gyorsulásra tesz szert a fiú?
4. A kötél szakítószilárdsága (elszakításához szükséges feszültség) 300 N. Elszakad-e ez a kötél, ha két ember, egyenként 200 N erővel ellentétes irányban húzza? Elszakad-e a kötél, ha az egyik végét rögzítjük, a másik végét pedig a két ember azonos irányban húzza?
5*. A ló szánt húz. Newton harmadik törvényének megfelelően a szán ugyanakkora erővel húzza hátrafelé a lovat, mint amilyennel a ló a szánt előre. Akkor mégis miért a ló húzza a szánt és nem fordítva? Mi a magyarázata annak, hogy mindketten mozognak?

20. §. AZ ÁLTALÁNOS TÖMEGVONZÁS TÖRVÉNYE

?! Úgy tartják, hogy I. Newton maga mesélte el, hogyan jutott el az általános tömegvonzás törvényének felfedezéséhez. Egyszer a tudós egy almáskertben sétált és a nappali égbolton megpillantotta a Holdat. Ebben a pillanatban a szeme láttára hullott le egy alma az ágról. Newton tudta, hogy az alma a Föld vonzásának következtében hullt le. Azt is tudta, hogy a Hold a Föld körül forog, tehát van valamiféle erő, ami a pályáján tartja. Éppen ekkor jutott a tudós eszébe a gondolat: lehetséges, hogy egyazon erő kényszeríti az almát arra, hogy lehulljon a földre, a Holdat pedig arra, hogy Föld körüli pályán maradjon.

1 Mi a gravitációs kölcsönhatás?

A világegyetemben kivétel nélkül minden anyagi test vonzza egymást. Ezt a jelenséget nevezik *általános tömegvonzásnak* vagy *gravitációnak* (a latin *gravitas* szóból ered, amelynek jelentése: súly).

A **gravitációs kölcsönhatás** olyan kölcsönhatás, amely a világegyetem összes testének sajátossága és a kölcsönös vonzásukban nyilvánul meg.

Például ebben a pillanatban te és a könyved a gravitációs kölcsönhatás erejével kölcsönhatásban álltok egymással. Azonban ebben az esetben az erők annyira kicsik, hogy még a legpontosabb modern műszerek sem képesek kimutatni. A gravitációs vonzóerők csak akkor érnek el észrevehető értékeket, ha legalább az egyik test tömege összemérhető az égitestek tömegével.

A gravitációs kölcsönhatás az anyag különleges fajtájának, a gravitációs erőtérnek a segítségével megy végbe, ami minden test körül jelen van: legyen az csillag, bolygó, ember, könyv, molekula atom stb.

2 Hogyan fedezték fel az általános tömegvonzás törvényét?

Az ún. nehézkedéssel kapcsolatos első kifejezések az antik időkből származnak. Így például *Plutarkhosz* ógörög bölcselő ezt írta: „A Hold kőként zuhanna a Földre, amint megszűnne repülésének ereje."

A XVI–XVII. században Európa tudósai újra visszatértek a testek kölcsönös vonzása létezésének elméletéhez. Az újjászületéséhez a lökést mindenekelőtt a csillagászati felfedezések adták: *Nikolausz Kopernikusz* (20.1. ábra) bebizonyította,

hogy a Naprendszer középpontjában, a világegyetem központjában a Nap helyezkedik el, a bolygók pedig körülötte forognak. *Johannes Kepler* (20.2. ábra) felfedezte a bolygók Nap körüli mozgásának törvényeit. *Galileo Galilei* (1.1. ábra) megalkotta a távcsövet és segítségével megpillantotta a Jupiter holdjait.

Miért keringenek a bolygók a Nap körül, miért keringenek a holdak a bolygók körül, milyen erő tartja az égitesteket a pályájukon? A tudósok arra a következtetésre jutottak, hogy a magyarázat a testek kölcsönös vonzásában rejlik. Ezt az elsők között *Robert Hooke* (1635–1703) angol tudós értette meg. Ezt írta: „Minden égitest vonzással, vagy nehézkedéssel rendelkezik a középpontja irányában, aminek következtében nem csupán a saját részeiket vonzzák, megakadályozva, hogy szerteszóródjanak, mint ahogy az a Földön tapasztalható, de emellett vonzzák a hatásövezetükhöz tartozó más égitesteket is."

Éppen Hooke fejtette ki azt a feltételezést, hogy a vonzóerő a kölcsönható testek tömegétől és a közöttük lévő távolságtól függ, de nem sikerült megtalálnia az ennek az erőnek a kiszámítására szolgáló matematikai kifejezést. Ezt I. Newton tette meg, megfogalmazva az *általános tömegvonzás törvényét*, amit gyakran Newton negyedik törvényének neveznek.



20.1. ábra. Nikolausz Kopernikusz (1473–1543) lengyel csillagász, a heliocentrikus világkép megalkotója



20.2. Johannes Kepler (1571–1630) német csillagász, asztrológus, matematikus. Felfedezte az égitestek mozgástörvényeit (a Kepler törvényeket), amelyeket később Newton az általános tömegvonzás törvényének megalapozásakor használt

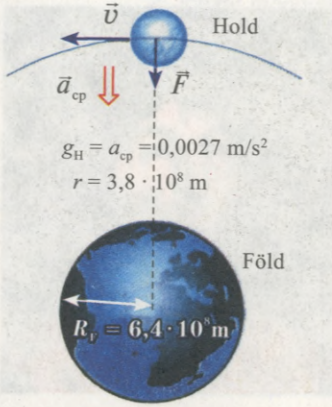
3 Hogyan számítható ki a gravitációs vonzóerő?

Newton gondolatmenetét követve eljutunk az általános tömegvonzás törvényéhez.

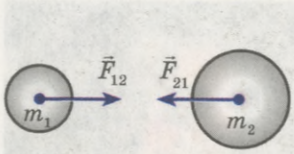
1. Előbb megállapítjuk, hogyan függ a Föld középpontjától való távolságtól a szabadesés gyorsulása, amit a Föld gravitációs vonzása okoz:

a) a szabadesés gyorsulása a földfelszín közelében, vagyis a középpontjától $6{,}4 \cdot 10^6$ m távolságra 9,8 m/s^2 (a föld sugara $R_F = 6{,}4 \cdot 10^6$ m);

b) a Hold a Föld körül $T = 27{,}32$ nap $= 2{,}36 \cdot 10^6$ s periódusidővel kering $r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m $= 60\ R_F$ sugarú körpályán. A Föld gravitációs vonzásának hatására a Hold centripetális gyorsulást kap (20.3. ábra): $a_{cp} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0{,}0027\ \text{m/s}^2$. Tehát a Hold $g_H = a_{cp} = 0{,}0027$ m/s^2 gyorsulással „esik" a Földre;



20.3. ábra. A Hold centripetális gyorsulását a Föld vonzása okozza



20.4. ábra. Newton harmadik törvényének megfelelően az $\vec{F}_{21}$ erő nagysága, amellyel az m_1 tömegű test vonzza az m_2 tömegű testet, egyenlő az $\vec{F}_{12}$ erő nagyságával, amellyel az m_2 tömegű test vonzza az m_1 tömegű testet

c) a test szabadesésének gyorsulása nem függ a test tömegétől, ezért bármely test, amelyik a Föld középpontjától a Hold távolságára található, ugyancsak 0,0027 m/s² gyorsulással fog közeledni a Földhöz. Vagyis, ha a Föld középpontjától mért r távolságot 60-szorosára növeljük, a test szabadesésének gyorsulása 60^2-szer csökken $\left(\frac{g}{g_H} = \frac{9{,}8}{0{,}0027} = 3600\right)$.

Tehát a *szabadesés g gyorsulása fordítottan arányos a testnek a Föld középpontjáig mért távolságának négyzetével:* $g \sim \frac{1}{r^2}$.

2. Newton második törvényének megfelelően $g \sim F$, tehát:

$$F \sim \frac{1}{r^2}, \qquad (1)$$

vagyis *két test gravitációs vonzásának ereje fordítottan arányos a közöttük lévő távolság négyzetével.*

3. Newton második törvényének értelmében a Föld a felszíne közelében minden testtel $g = \frac{F}{m}$ gyorsulást közöl. De ez a gyorsulás nem függ a test tömegétől – ez csak akkor lehetséges, ha a gravitációs kölcsönhatás egyenesen arányos a test tömegével ($F \sim m$).

4. Newton harmadik törvényének megfelelően két, m_1 és m_2 tömegű test azonos nagyságú erővel hat egymásra (20.4. ábra), de $F_{12} \sim m_1$ és $F_{21} \sim m_2$. Vagyis *két test közötti gravitációs erő egyenesen arányos e testek tömegének szorzatával*:

$$F \sim m_1 m_2. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) képleteket egyesítve megkapjuk az **általános tömegvonzás törvényét.**

Bármely két test között olyan kölcsönös vonzóerők hatnak, amelyek egyenesen arányosak a testek tömegének szorzatával, és fordítottan arányosak a közöttük lévő távolság négyzetével:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

ahol m_1 és m_2 a kölcsönható testek tömegei; r a testek közötti távolság; G gravitációs állandó (minden test számára azonos arányossági tényező), $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

Az általános tömegvonzás törvénye – a természettudomány kiemelkedő eredménye. Lehetővé teszi számos jelenség leírását, köztük a Naprendszer természetes és mesterséges testei mozgását, a kettős csillagok mozgását, a csillaghalmazokat stb. A modern csillagászatban erre a törvényre támaszkodva számítják ki az égitestek tömegét, határozzák meg mozgásuk jellegét, felépítését, fejlődését.

4 Mik a határai az általános tömegvonzási törvény alkalmazásának?

Az általános tömegvonzás törvénye a *következő esetekben ad pontos eredményt:*

1) ha a testek méretei elhanyagolhatóan kicsik a köztük lévő távolsághoz képest, vagyis amikor a testek anyagi pontnak tekinthetők;

2) ha mindkét test gömb alakú és homogén az anyag eloszlása; ebben az esetben a testek közötti távolságként a gömbök középpontjai közötti távolságot tekintik;

3) ha a kölcsönható testek egyike gömb, amelynek mérete és tömege sokkal nagyobb a másik test méreténél és tömegénél, amelyik a gömb felszínén, vagy annak közelében helyezkedik el.

Azonban, amikor a gravitációs terek annyira erősek, hogy fénysebesség körüli sebességre gyorsítják a bennük elhelyezkedő testeket, vagy amikor a részecskék, amelyek elrepülnek a masszív testek mellett, már a testtől távol is fénysebesség körüli sebességgel rendelkeztek, *a gravitációs vonzás erejét nem lehet kiszámítani Newton általános tömegvonzási törvénye alapján.* Általános esetben a nehézkedést az Albert Einstein (1879–1955) által megalkotott általános relativitáselmélet írja le.

5 Hogyan határozták meg a gravitációs állandót?

A G gravitációs állandó a fizika egyik fundamentális állandója. Az $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ képletből:

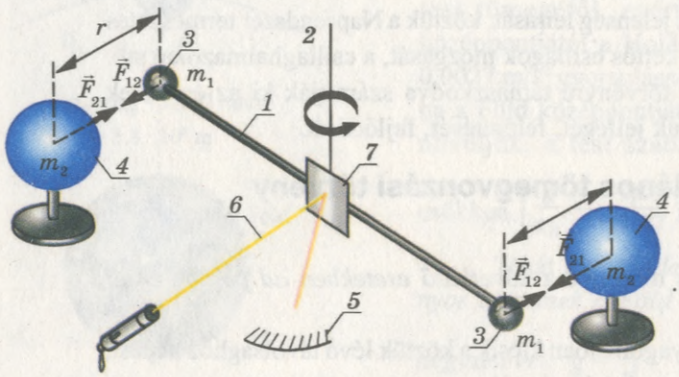
$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}.$$

Ha $m_1 = m_2 = 1$ kg és $r = 1$ m, akkor $\{G\} = \{F\}$, vagyis *a gravitációs állandó számbelileg egyenlő két, egyenként 1 kg tömegű, egymástól 1 m távolságra lévő anyagi pont gravitációs vonzóerejével.* Ez a gravitációs állandó fizikai értelme.

A gravitációs állandót elsőként *Henry Cavendish* angol tudós mérte meg 1798-ban torziós mérleggel (20.6. ábra). Megmérve az ismert m_1 és m_2 tömegű golyók között r távolságon ható gravitációs



20.5. ábra. Henry Cavendish (1731–1810) angol fizikus és kémikus. Néhány évvel C. Coulomb előtt felfedezte az elektromos töltések kölcsönhatásának törvényét. A tudós meghatározta a gravitációs állandót; a Föld tömegét és átlagos sűrűségét



20.6. ábra. A gravitációs állandó meghatározására szolgáló kísérlet vázlata. A hosszú és könnyű *1* rúdon, amit vékony és rugalmas *2* huzalra akasztottak, két, egyenként m_1 tömegű *3* kis gömböt hoztak egyensúlyba. A kis gömbök közelében nagyméretű, m_2 tömegű *4* ólomgolyókat helyeztek el. A gömbök vonzásának következtében a huzal elcsavarodik. Ennek szögmértékét az *5* skálán regisztrálják a *6* fénycsóva alapján, amely a *7* tükörről verődik vissza. A huzal elcsavarodásának szögéből meghatározzák a tömegvonzási erőt

vonzóerőt, Cavendish meghatározta a gravitációs állandó értékét, ami nagyon kis mennyiségnek bizonyult: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

Összegzés

Azt a kölcsönhatást, amely a világegyetem minden testére jellemző és ami kölcsönös vonzásukban nyilvánul meg, gravitációs kölcsönhatásnak nevezik. Magát a kölcsönös vonzást pedig általános tömegvonzásnak vagy gravitációnak.

Az általános tömegvonzás törvénye: bármely két test között kölcsönös vonzóerő hat, amely egyenesen arányos e testek tömegének szorzatával és fordítottan arányos a távolságuk négyzetével: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, ahol $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ a gravitációs állandó.

Az általános tömegvonzás törvénye teljesül: 1) az anyagi pontokra; 2) a gömb alakú testekre, amelyekben az anyag eloszlása gömbszerű; 3) azokra a kis tárgyakra nézve, amelyek egy jóval nagyobb gömb felületén vagy annak közelében helyezkednek el.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen kölcsönhatást nevezünk gravitációs kölcsönhatásnak? Hozzatok fel néhány példát! **2.** Bizonyítsátok be, hogy a gravitációs erő fordítottan arányos a testek közötti távolság négyzetével; egyenesen arányos a kölcsönható testek tömegének szorzatával! **3.** Fogalmazzátok meg, és írjátok le az általános tömegvonzás törvényét! **4.** Mi a gravitációs állandó fizikai értelme? Mennyivel egyenlő? **5.** Ki és hogyan állapította meg a gravitációs állandó értékét? **6.** Mik a határai a tömegvonzási törvény alkalmazásának?

17. gyakorlat

1. Hogyan változik meg két gömb között a kölcsönhatási erő, ha az egyiket egy kétszer nagyobb tömegűre cseréljük?

2. Milyen távolságon egyenlő 0,667 μ N-nal két, egyenként 1 t tömegű gömb között ható vonzóerő?

3. Hányszor több a Föld részéről a műholdra ható erő a földfelszín közelében, mint három földsugárnyi magasságban?

4*. Határozzátok meg a Nap tömegét! Tekintsétek a Föld pályáját $1{,}5 \cdot 10^8$ km sugarú kör alakúnak!

21. §. NEHÉZSÉGI ERŐ

?! Ha kézbe vesszük, majd elengedjük a labdát, akkor mindenképpen leesik. A labda akkor is leesik, ha függőlegesen feldobjuk, vagy, ha nekifutva megpróbáljuk a lehető legmesszebb dobni. A 8. osztály fizika tananyagából tudjátok, hogy a testek földre esése – a testek és a Föld gravitációs kölcsönhatásának eredménye. Ebben a paragrafusban arról az erőről esik szó, amelyik jellemzi az említett kölcsönhatást.

1 Mi a nehézségi erő?

A **nehézségi erő** a testek és a Föld gravitációs kölcsönhatását jellemző erő.

Az általános tömegvonzás törvényének alapján a nehézségi erő F_{neh}, amely minden, a Föld felszínének közelében elhelyezkedő testre hat, az alábbi képlettel számítható ki:

$$F_{neh} = G\frac{mM_F}{r^2} = G\frac{mM_F}{(R_F + h)^2},$$

ahol G a gravitációs állandó; m a test tömege; M_F a Föld tömege; $r = R_F + h$ a távolság a föld középpontjától az adott testig (21.1. ábra).

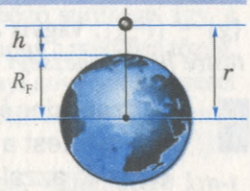
A testre ható nehézségi erő függőlegesen lefelé irányul és támadáspontja az a pont, amit a test *tömegközéppontjának* (*nehézkedési középpontjának*) neveznek.

Általános esetben a test nehézkedési középpontja meghatározható, ha a testet sorban bármely szélső pontján felfüggesztjük (21.2. ábra). A homogén szimmetrikus test esetében a tömegközéppont a szimmetria-középpontban helyezkedik el (21.3. ábra).

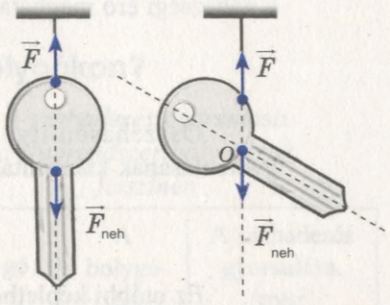
Figyeljétek meg: *a tömegközéppont a testen kívül is elhelyezkedhet*, vagyis nem esik egybe a test egyetlen pontjával sem (21.3. *d* ábra).

2 Mitől függ a szabadesés gyorsulása?

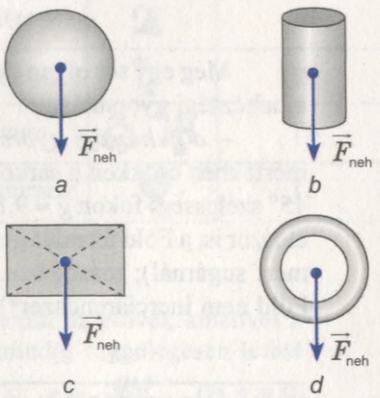
Ha az m tömegű testre csak az $\vec{F}_{neh}$ nehézségi erő hat, akkor ez a test szabadesést végez, olyan gyorsulással mozogva, ami *egyenlő a szabadesés gyorsulásával* ($\vec{a} = \vec{g}$).



21.1. ábra. A Föld középpontjától a testig terjedő r távolság egyenlő a Föld R_F sugarának és a test földfelszín feletti h magasságának összegével



21.2. ábra. A test tömegközéppontjának meghatározása. A cérnaszál $\vec{F}$ feszítőereje kiegyenlíti az $\vec{F}_{neh}$ nehézségi erőt és vele egyazon egyenesen helyezkedik el, ezért a cérna feszítőerejének hatásvonala – ami egyben a nehézségi erő hatásvonala is – a test tömegközéppontjában metszik egymást $\vec{F}_{neh}$



21.3. ábra. Néhány homogén szimmetrikus test tömegközéppontjának elhelyezkedése: *a*) golyó; *b*) henger; *c*) téglalap alakú lemez; *d*) gyűrű

Newton második törvényének megfelelően $g = \frac{F_{neh}}{m}$. Ha $m = 1$ kg, akkor $\{g\} = \{F_{neh}\}$, vagyis *a szabadesés gyorsulása számbelileg egyenlő az 1 kg tömegű testre ható nehézségi erővel.*

A szabadesés gyorsulása vagy nehézségi gyorsulás az a gyorsulás, amire a test a nehézségi erő hatására szert tesz, és amely számbelileg egyenlő azzal az erővel, amellyel a Föld gravitációs ereje az 1 kg tömegű testre hat.

A $g = \frac{F_{neh}}{m}$ képletből következik, hogy: $F_{neh} = mg$. Tehát két kifejezésünk van a nehézségi erő meghatározására:

$$F_{neh} = mg; \quad F_{neh} = G\frac{mM_F}{(R_F + h)^2}.$$

Összehasonlítva a kifejezések jobb oldalait, megkapjuk a szabadesés gyorsulásának kiszámítására szolgáló képletet:

$$g = G\frac{M_F}{(R_F + h)^2}.$$

Ez utóbbi képletből egy sor következtetést lehet levonni.

1. *A nehézségi gyorsulás nem függ a test tömegétől* (ezt a tényt G. Galilei bizonyította).

2. *A nehézségi gyorsulás csökken a test Föld feletti magasságának növelésével*, emellett jelentős változás több tíz, sőt száz km magasban történik (ha 100 km magasra emeljük a testet, a nehézségi gyorsulása 0,3 m/s^2-tel csökken).

3. Ha a test a Föld felszínén ($h = 0$), vagy annak közelében helyezkedik el ($h \ll R_F$), akkor a nehézségi gyorsulását a következő képlettel számítják ki:

$$g = G\frac{M_F}{R_F^2}.$$

Még egy sor olyan tényezőre érdemes odafigyelni, amelyek hatást gyakorolnak a nehézségi gyorsulásra:

– *a nehézségi gyorsulás a hely földrajzi szélességétől is függ*; jelentéktelen mértékben csökken a sarkoktól az egyenlítő felé haladva: a sarkokon $g_s \approx 9{,}83$ m/s^2, 45° szélességi fokon $g \approx 9{,}81$ m/s^2, az egyenlítőn $g_{egy} \approx 9{,}78$ m/s^2. Ennek két oka van: először is, a Föld formája geoid (a Föld egyenlítői sugara 21 km-rel nagyobb a pólusain mért sugárnál); másodszor, a Föld a tengelye körül forog (precízen fogalmazva, a Föld nem inerciarendszer*);

---

* Ha a VR-t a Föld földrajzi pólusához kötjük, ami mozdulatlan a Föld forgástengelyéhez képest, akkor Newton második törvénye a Föld bármely pontjában a következő alakot ölti: $F_{neh} = mg + ma_{cp} \Rightarrow g = \frac{F_{neh} - ma_{cp}}{m}$. Minél közelebb vagyunk az egyenlítőhöz, annál nagyobb az a_{cp}, és ennek megfelelően kisebb a g.

– *a nehézségi gyorsulás egy konkrét helyen eltérhet az adott szélességre jellemző átlagos értéktől.* Az okok – a földkéreg nem homogén felépítése, hegyek és mélyedések előfordulása, valamint a föld méhében található rétegek különböző sűrűsége. Így, a szabadesés gyorsulásának csökkenése gyakran arról tanúskodik, hogy a mélyben tőzeg, kőolaj, földgáz található; a növekedése – érclelőhelyre. Az ásványi anyagok keresését a szabadesés gyorsulásának pontos meghatározása alapján *gravimetrikus felderítésnek* nevezik.

A nehézségi gyorsulás különböző földrajzi szélességeken, valamint 10 km-t meg nem haladó magasságon és a gravitációs anomáliák helyein jelentéktelen mértékben különbözik, ezért a tengerszint felett viszonylag nem nagy magasságban lévő testek mozgásának meghatározásakor úgy tekintjük, hogy a szabadesés gyorsulása állandó és 9,8 m/s²-tel egyenlő; a testek szabadesését egyenletesen gyorsulónak tekintjük.

3 Milyen a szabadesés gyorsulása más bolygókon?

Gravitációs erőnek gyakran azt az erőt nevezik, amely valamely testre az égitest (csillagok, bolygók, holdak, aszteroidák) felszínének közelében hat. Ennek az erőnek a nagyságát a következő képletekkel számítják ki:

$$F_{neh} = G\frac{mM}{(R+h)^2};\ F_{neh} = mg,$$

ahol G a gravitációs állandó; m a test tömege; M az égitest tömege; R az égitest sugara; g a szabadesés gyorsulása h magasságban az égitest felszíne felett (lásd a táblázatot).

A szabadesés gyorsulása a Naprendszer bolygóinak felszínén

Bolygó	A bolygó jele	A szabadesés gyorsulása, m/s²
Merkúr	☿	3,78
Vénusz	♀	8,9
Föld	⊕ ♁	9,81
Mars	♂	3,76
Jupiter	♃	26
Szaturnusz	♄	12
Uránusz	♅	11
Neptunusz	♆	12

! Összegzés

A nehézségi erő – a testek és a Föld gravitációs kölcsönhatását jellemző erő. A testre ható nehézségi erő függőlegesen lefelé irányul és támadáspontja az a pont, amit a test nehézkedési középpontjának (tömegközéppontjának) neveznek. A nehézségi erő nagysága az alábbi képletekkel számítható ki:

$$F_{neh} = G\frac{mM_F}{(R_F+h)^2};\ F_{neh} = mg.$$

A nehézségi gyorsulás számbelileg egyenlő azzal az erővel, amellyel a Föld gravitációs ereje az 1 kg tömegű testre hat; mindig függőlegesen lefelé irányul; számértéke a következő képlettel számítható ki: $g = \frac{GM}{(R+h)^2}$. Ha $h = 0$, akkor $g = \frac{GM}{R^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

A nehézségi gyorsulás nem függ a test tömegétől, viszont függ a test tengerszint feletti magasságától, a hely földrajzi szélességétől (csökken a sarkoktól az egyenlítő felé haladva), a föld méhében elhelyezkedő rétegek sűrűségétől stb.

A test gravitációs kölcsönhatását valamely égitesttel gravitációs erőnek nevezik, azt a gyorsulást pedig, amire a test szert tesz ennek az erőnek a következtében, gravitációs gyorsulásnak vagy a szabadesés gyorsulásának.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiáljuk a nehézségi erőt? Milyen képletekkel számítják ki, és merre irányul? 2. Hol helyezkedik el a szimmetrikus testek tömegközéppontja? 3. Hogyan határozható meg a szabálytalan formájú test tömegközéppontja? 4. Hogyan számítható ki a szabadesés gyorsulása a Föld felszínének közelében? Milyen tényezőktől függ? 5. Hogyan számítható ki a gravitációs erő az égitest felszínének közelében?

18. gyakorlat

1. Határozzátok meg a test tömegét, ha a Mars felszínén erre a testre 7,52 N gravitációs erő hat! Számítsátok ki a nehézségi erőt, ami erre a testre a Föld felszínének közelében hatna!
2. Megmérve a gravitációs állandót, H. Cavendish meg tudta határozni a Föld tömegét, ezután büszkén mondta: „Megmértem a Föld tömegét." Határozzátok meg a Föld tömegét, ismerve a sugarát R_F, a szabadesés gyorsulását a felszínén és a gravitációs állandót!
3. Határozzátok meg a gravitációs gyorsulást a bolygó felszínén, ha tömege kétszer kevesebb a Föld tömegénél, a sugara pedig egyenlő a Föld sugarával!
4. Hányszor kisebb a szabadesés gyorsulása $6R_F$ magasságban a szabadesés tengerszinten mért gyorsulásánál?

Kísérleti feladat

Vágjatok ki kartonpapírból vagy furnérból egy tetszőleges alakú testet, és határozzátok meg a tömegközéppontját (lásd a 21.2. ábrát)! Helyezzétek a testet a tömegközéppontjánál egy tű hegyére vagy golyóstoll betétre. Győződjetek meg arról, hogy egyensúlyban van-e! Írjátok le a kísérlet elvégzésének tervét!

22. §. A TEST MOZGÁSA A NEHÉZSÉGI ERŐ HATÁSÁRA

A függőlegesen fel- vagy ledobott labda mozgáspályája egyenes. Nekifutva, az ember beugrik a vízbe – testének mozgáspályája a parabola szára lesz. Az ágyúból a vízszinteshez képest bizonyos szög alatt kilőtt lövedék ugyancsak a parabola egy részét írja le. Mindezeknek a testeknek mozgása a nehézségi erő hatására megy végbe. Akkor miért különböznek annyira ezek a mozgások? Az ok – különbözőek a kezdőfeltételek. Ebben a paragrafusban megtudjátok, hogyan kell megoldani a test nehézségi erő hatására végzett mozgásáról szóló feladatokat.

1 Egyszerűsítéseket végzünk

A test valódi mozgásának jellege a Föld gravitációs terében meglehetősen bonyolult, leírása túllép az iskolai program keretein. Ezért a feladatok megoldásakor egy sor egyszerűsítést kell elvégezni:

1) a Föld felszínének meghatározott pontjához kötött VR-t inerciálisnak tekintjük;

2) a testek mozgását a Föld felszínének közelében és attól nem nagy (a sugarához képest) távolságban vizsgáljuk. Akkor a földfelszín görbületét és a nehézségi gyorsulás változását figyelmen kívül hagyhatjuk; másképp fogalmazva, a Földet laposnak, a nehézségi gyorsulást pedig állandónak tekintjük;

3) a légellenállást elhanyagoljuk.

Figyeljétek meg: ha elfogadjuk az első két egyszerűsítést, a kapott eredmény nagyon közel áll a valósághoz; az utolsó egyszerűsítés pedig csak abban az estben nem torzítja komolyan az eredményt, ha a test mozgássebessége elég kicsi.

2 Milyen egyenletek írják le a testek mozgását a nehézségi erő hatására?

A nehézségi erő hatására a test egyenletesen gyorsuló mozgást végez $\vec{g}$ gyorsulással. Az ilyen mozgás esetében a sebesség időfüggvény egyenlete: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a test mozgása a $\vec{v}_0$ és a $\vec{g}$ által alkotott síkban megy végbe, ezért a test nehézségi erő hatására végzett mozgásának leírásához elegendő a derékszögű koordináta-rendszer alkalmazása (22.1. ábra).

Az egyszerűség kedvéért bármely bonyolult mozgást több egyszerű mozgásra lehet bontani. A test nehézségi erő hatására végzett mozgását úgy tekintjük, mint két egyszerű független mozgás összeadását:

1) az OX tengely mentén való egyenletes mozgásra (mivel a nehézségi erő vetülete az OX tengelyre nulla), ami a következő egyenletekkel írható le:

$$v_x = v_{0x},\ x = x_0 + v_{0x}t\,; \qquad (1)$$

2) az OY tengely mentén való egyenletesen gyorsuló mozgásra ($\vec{g}$ gyorsulással), ami a következő egyenletekkel írható le:

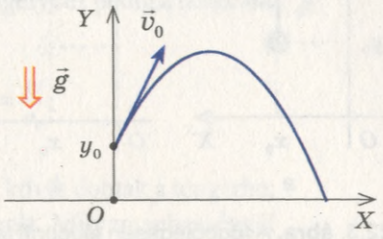
$$v_y = v_{0y} + g_y t,\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}. \qquad (2)$$

Figyeljétek meg: a test mozgásának jellege az OY tengely mentén nem függ attól, rendelkezett-e a test sebességgel a vízszintes mentén (22.2. ábra).

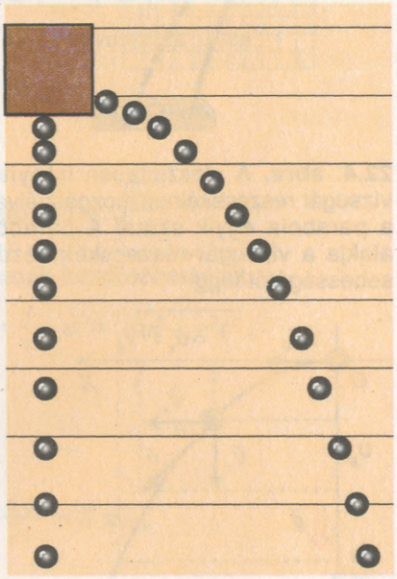
Az (1) és (2) egyenlet elégséges ahhoz, hogy gyakorlatilag bármilyen, a test nehézségi erő hatására végzett mozgásával kapcsolatos feladatot megoldjunk.

3 Hogyan mozog a függőlegesen felfelé vagy lefelé dobott test?

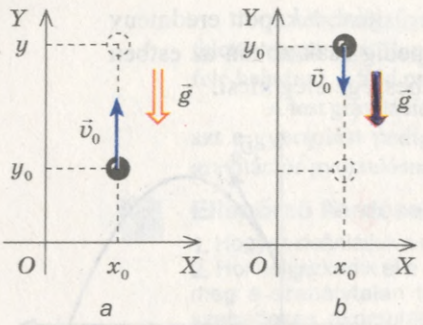
Ha a testet függőlegesen feldobjuk, akkor mozgáspályája az *egyenes egy szakasza* lesz, mivel az OX tengely mentén nem történik mozgás ($v_{0x} = 0$ és $x = x_0$) (lásd a 22.3. ábrát).



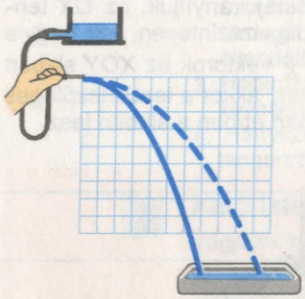
22.1. ábra. A test nehézségi erő hatására végzett mozgásának leírásához elegendő a derékszögű koordináta-rendszer alkalmazása. Ha az OY tengelyt függőlegesen felfelé (vagy lefelé) irányítjuk, az OX tengelyt pedig vízszintesen, úgy, hogy a $\vec{v}_0$ és a $\vec{g}$ vektorok az XOY síkban feküdjenek, akkor a test tetszőleges időpontban ebben a síkban lesz



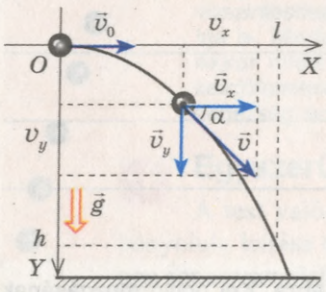
22.2. ábra. Két golyó mozgásának sztroboszkópos fénykép alapján készített ábrája: azonos időben az egyik golyót vízszintesen elhajították, a másik megkezdte függőleges szabadesését. Mindkét golyó egyazon magasságban lesz ugyanazokban az időpontokban, ezért egyszerre érnek földet



22.3. ábra. A függőlegesen eldobott test mozgása: *a*) felfelé; *b*) lefelé. A koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld felszínének egy meghatározott pontja; az *OY* tengely függőlegesen felfelé irányul



22.4. ábra. A vízszintesen irányított vízsugár részecskéinek mozgáspályája a parabola egyik szára. A parabola alakja a vízsugár-részecskék kezdősebességétől függ



22.5. ábra. A vízszintesen eldobott test mozgáspályája a parabola egyik szára. A mozgás *v* sebessége a pálya adott pontjában meghatározható a Pitagorasz-tételből: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, a sebesség α hajlásszögét az *OX* tengelyhez pedig a következő arányból: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

Ha a test kezdősebessége függőlegesen felfelé irányul (22.3. *a* ábra), akkor a választott koordináta-rendszerben $v_{0y} = v_0$, $g_y = -g$, ezért a (2) egyenlet alakja:

$$v_y = v_0 - gt,\ y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Ha a test kezdősebessége függőlegesen felfelé irányul (22.3. *b* ábra), akkor a választott koordináta-rendszerben $v_{0y} = -v_0$, $g_y = -g$, ezért a (2) egyenlet alakja:

$$v_y = -v_0 - gt,\ \ y = y_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

A függőleges mentén való mozgási feladatokkal a 12.§-ban találkoztatok.

4 Hogyan mozog a vízszintesen eldobott test?

Ha a testet vízszintesen dobják el, akkor mozgáspályája a parabola szára lesz (22.4. ábra). Ennek a bizonyítására kivezetjük az $y(x)$ függvény-egyenletet – a mozgáspálya egyenletét.

Magyarázó rajzot készítünk, amelyen feltüntetjük a koordinátatengelyeket, a test kiinduló helyzetét, kezdősebességének és gyorsulásának irányát (22.5. ábra).

A választott koordináta-rendszerben $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, $g_y = g$, ezért az (1) és (2) egyenlet alakja:

$$v_x = v_0,\ x = v_0 t;$$

$$v_y = gt,\ y = \frac{gt^2}{2}.$$

Az $x = v_0 t$ egyenletből kifejezzük a *t*-t: $t = \frac{x}{v_0}$.

A kapott kifejezést behelyettesítve az $y = \frac{gt^2}{2}$ egyenletbe, adódik: $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$, vagy $y = Ax^2$, ahol $A = \frac{g}{2v_0^2}$ állandó mennyiség a konkrét mozgásra nézve. A matematika tananyagából tudjátok, hogy az $y = Ax^2$ függvény grafikonja parabola.

A feladatokban gyakran meg kell határozni a test mozgássebességét az adott t időpontban. Mivel a test sebességét az OX és OY tengelyhez tartozó összetevőire lehet bontani (lásd a 22.5. ábrát), ezért a sebesség nagyságát ki lehet számítani a Pitagorasz-tételből, a sebességvektor α hajlásszögét az OX tengelyhez pedig a tangense meghatározása által:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}.$$

1. feladat. A függőleges, 20 m magas sziklafalról egy követ dobtak a tengerbe; a dobás pillanatában a kő sebességének iránya vízszintes volt. Milyen sebességgel dobták el a követ, ha 16 m-re a sziklától esett a tengerbe? Mekkora a kő sebessége vízbeérésekor? Milyen szög alatt hullt a tengerbe?

Adott:
$h = 20$ m
$l = 16$ m
$g \approx 10$ m/s^2

$v_0 - ?$
$v - ?$
$\alpha - ?$

Megoldás

1) Magyarázó rajzot készítünk. A koordináta-rendszer kezdetét a kő eldobásának helyéhez kötjük, az OY tengelyt függőlegesen lefelé irányítjuk, az OX tengelyt pedig a kő kezdősebességének irányában (lásd a 22.5. ábrát).

2) Az adott esetben $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $x = l$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, $g_y = g$, $y = h$, ezért az (1) és a (2) egyenletek ilyen alakot öltenek:

$$v_x = v_0,\ l = v_0 t;\ v_y = gt,\ h = \frac{gt^2}{2}.$$

3) Az utolsó egyenletből kifejezzük az esés időtartamát: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Ismerve a kő esésének idejét, kiszámítjuk mozgásának kezdősebességét, a beesési sebességet és szöget (α): $l = v_0 t \Rightarrow v_0 = \frac{l}{t}$; $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{gt}{v_0}$.

Kiszámítjuk a keresett mennyiségek értékeit:

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} = \text{s},\ \{t\} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2,\ t = 2\ \text{s};\ v_0 = \frac{16\ \text{m}}{2\ \text{s}} = 8\ \text{m/s};$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}},\ \{v\} = \sqrt{64 + 400} \approx 22,\ v \approx 22\ \text{m/s};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{8} = 2{,}5 \Rightarrow \alpha \approx 68°.$$

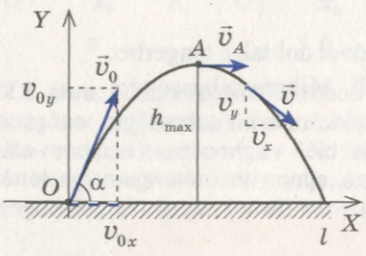
Felelet: a kő kezdősebessége $v_0 = 8$ m/s; sebessége a vízbe csapódás pillanatában $v \approx 22$ m/s; a kő becsapódási szöge $\alpha \approx 68°$ a vízszinteshez képest.

5 Hogyan kell kiszámítani a vízszinteshez képest bizonyos szög alatt eldobott test mozgását?

Áttekintjük annak a testnek a mozgását, amelynek v_0 kezdősebessége α szöget zár be a vízszintessel (22.6. ábra). A kiválasztott koordináta-rendszerben $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $g_y = -g$, $y = h$, ezért az (1) és a (2) egyenletek ilyen alakot öltenek:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t;$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$



22.6. ábra. A vízszinteshez képest bizonyos szög alatt eldobott test mozgása: a koordináta-rendszer kezdőpontja a test eldobásának pontjához kötött; az *OY* tengely függőlegesen lefelé irányul, az *OX* tengely pedig vízszintesen; az *A* pont a test mozgáspályájának legmagasabb pontja; h_{max} a test röppályájának maximális magassága; *l* a röppálya hossza

Ha az $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ egyenletből kifejezzük a *t*-t és behelyettesítjük az utolsó egyenletbe, megkapjuk *a vízszinteshez képest bizonyos szög alatt eldobott test mozgáspályájának egyenletét.* Másodfokú függvényt kapunk: $y(x) = Bx + Ax^2$. Így a *vízszinteshez képest bizonyos szög alatt eldobott test mozgáspályájának alakja parabola.*

Akárcsak a vízszintesen eldobott test esetében, a vízszinteshez képest bizonyos szög alatt eldobott test mozgássebessége tetszőleges időpontban kiszámítható a következő képlettel: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, a sebesség hajlásszöge az *OX* tengelyhez pedig a következő összefüggésből: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

A továbbiakban a vízszinteshez képest bizonyos szög alatt eldobott test mozgásával kapcsolatos feladatok megoldásának áttekintésekor meghatározunk még egy sor, a mozgást jellemző paramétert: *a repülési időt, a maximális emelkedési magasságot, a repülési távolságot.* Ezeket a paramétereket sokszor a gyakorlati feladatok megoldása során kell kiszámítani.

2. feladat. A vízsugár v_0 sebességgel, a vízszintessel α szöget bezárva hagyja el a csövet. Számítsátok ki a víz részecskéinek repülési idejét, a repülési távolságot és az elért maximális emelkedési magasságot!

Adott:
v_0
α
$g \approx 10$ m/s^2

$t - ?$
$h_{max} - ?$
$l - ?$

Megoldás

1) Magyarázó rajzot készítünk: a koordináta-rendszer kezdőpontját a Föld felszínének egy bizonyos pontjához kötjük; az *OY* tengelyt függőlegesen felfelé irányítjuk, az *OX* tengelyt pedig vízszintesen (lásd a 22.6. ábrát).

2) A választott koordináta-rendszerben $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $g_y = -g$, ezért az (1) és a (2) egyenletek ilyen alakot öltenek:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

3) Ahhoz, hogy meghatározzuk a test maximális magasságát, meg kell határozni emelkedésének t_1 idejét. Ezt az időt meg lehet határozni annak ismeretében, hogy a pályája legmagasabb pontjában (az A pontban) a test v sebessége vízszintesen irányul, tehát a vetülete az OY tengelyre nulla lesz: $v_y = 0$. Mivel $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$, adódik:

$$v_0 \sin\alpha - gt_1 = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha = gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Ismerve a test t_1 emelkedési idejét, meghatározzuk a test y koordinátáját az A pontban. Ez lesz a röppálya maximális magassága ($y_A = h_{max}$):

$$y_A = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \text{ tehát:}$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}.$$

A test teljes t mozgásideje kétszer nagyobb a t_1 emelkedési idejénél: $t = 2t_1$, tehát:

$$\boxed{t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}.$$

Az l repülési távolság egyenlő a test x koordinátájával a mozgás befejezésének pillanatában ($l = x$). Mivel $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, az idő pedig $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, ezért $l = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$. A matematika tananyagából tudjuk, hogy $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, tehát:

$$\boxed{l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}.$$

Figyeljétek meg: ha $\alpha = 45°$, akkor $\sin 2\alpha = 1$. Ez a szinusz lehető legnagyobb értéke, tehát a *test leghosszabb röppályája akkor érhető el, ha 45°-os szögben dobják el a vízszinteshez képest.*

Összegzés

Ha a testre a nehézségi erő hat, akkor a mozgását úgy tekintjük, mint két egyszerű független mozgás összeadását: az OX tengely mentén történő egyenletes mozgásként, és az OY tengely mentén való egyenletesen gyorsuló mozgásként ($\vec{g}$ gyorsulással). Ezeknél a mozgásoknál a sebesség és a koordináta időfüggvényének egyenletei ilyen alakúak: $v_x = v_{0x}$, $x = x_0 + v_{0x}t$; $v_y = v_{0y} + g_y t$, $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$.

Ezek az egyenletek elégségesek ahhoz, hogy gyakorlatilag bármilyen, a test nehézségi erő hatására végzett mozgásával kapcsolatos feladatot megoldjunk. A feladatok megoldásához szükséges lépések: 1) magyarázó rajzot készítünk; 2) a rajz felhasználásával a vetületekre felírt egyenletekről áttérünk a modulusokra felírt egyenletekre; 3) a feladat adatainak felhasználásával megoldjuk a kapott egyenletrendszert.

A sebesség nagyságát a pálya bármely pontjában ki lehet számítani Pitagorasz tétele szerint: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, a sebesség α hajlásszögét az OX tengelyhez pedig a következő összefüggésből: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen egyszerűsítéseket fogadunk el a test nehézségi erő hatására történő mozgásáról szóló feladatok megoldásakor? **2.** Írjátok fel általános alakban a nehézségi erő hatására mozgó test mozgásegyenletét! **3.** Milyen a mozgásegyenletek alakja, ha a testet függőlegesen feldobjuk? Ha vízszintesen? Ha szög alatt a vízszinteshez? **4.** Milyen a mozgáspálya alakja, ha a testet függőlegesen feldobjuk? Ha vízszintesen? Ha szög alatt a vízszinteshez? **5.** Hogyan kell meghatározni a test sebességének nagyságát és irányát a pályája tetszőleges pontjában?

19. gyakorlat

A feladatok megoldásakor tekintsétek úgy, hogy $g \approx 10\ \text{m/s}^2$.

1. A test csak a nehézségi erő hatására mozog. A koordináta-rendszert úgy választották ki, hogy az OX tengely vízszintesen irányul, az OY tengely pedig függőlegesen felfelé, a koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld egy meghatározott pontjában van. Írjátok le a test mozgásának jellegét, megfelelő ábrát készítve, ha:

a) $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $v_{0x} = 0$, $v_{0y} < 0$; b) $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $v_{0x} < 0$, $v_{0y} > 0$;

c) $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $v_{0x} > 0$, $v_{0y} = 0$; d) $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $v_{0x} > 0$, $v_{0y} < 0$!

2. Az íjból függőlegesen felfelé kilőtt nyílvessző 6 s elteltével hullt vissza a földre. Határozzátok meg mozgásának kezdősebességét és röppályájának legnagyobb magasságát!

3. A labdát 2 m magasban vízszintesen 5 m/s kezdősebességgel dobták el. Mennyi idő múlva, milyen sebességgel és milyen szögben ér földet? Számítsátok ki a repülési távolságot és a labda elmozdulását is!

4. A golyó 200 m/s kezdősebességgel vízszintesen repült ki a puskacsőből. Eltalálja-e a golyó a lövésztől 100 m távolságra lévő, 10 cm átmérőjű céltáblát, ha középpontja 1 m-rel a lövés vonala alatt van?

5. A vízszinteshez 45°-os szög alatt, 10 m/s kezdősebességgel eldobtak egy kődarabot. Határozzátok meg a kődarab röppályájának maximális magasságát és hosszát!

6*. A játékos 1,2 m magasról, a vízszinteshez képest 45°-os szögben dobja el a labdát. A játékostól 20 m-re és a padlótól 7 m magasan háló van kifeszítve. Átrepül-e a labda a hálón, ha a kezdősebessége 20 m/s?

Kísérleti feladat

Helyezzetek az asztalra egy nehéz golyót és lökjétek meg. Az asztalon való mozgása során a golyó sebessége gyakorlatilag nem változik. Próbáljátok meghatározni stopperóra nélkül. Ezt el lehet végezni, ha engeditek a golyót nyugodtan legurulni az asztalról, akkor a sebességének meghatározásához az asztalon csak vonalzó szükséges. Gondoljátok végig, hogyan lehet ezt elvégezni! Írjátok le a kísérlet tervét és végezzétek is el!

23. §. A FÖLD MŰHOLDJAI. ELSŐ KOZMIKUS SEBESSÉG

I. Newtonnak a nehézségi erő felfedezésének szentelt munkái között egy rajz található, ami hasonlít a 23.1. ábrán lévőre. Mit is jelent? Képzeljétek el, hogy egy meredek falú szikla peremén álltok, mellettetek ágyú és néhány golyó van. Ha egyszerűen lelökjük a golyót a szikláról, egyenes mentén hull le, ha az ágyúból lőjük ki a látóhatár irányában, akkor parabolapályán esik le. Vajon hogyan mozogna a golyó, ha állandóan növelnénk a kezdősebességét?

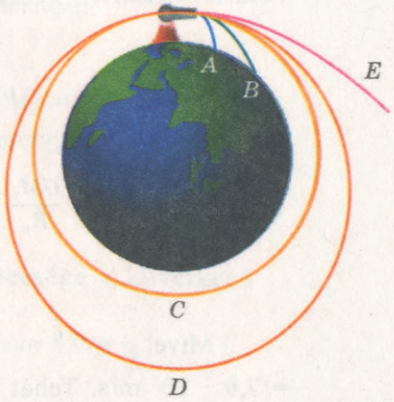
1 Mi az első kozmikus sebesség?

A 22. §-ban, amikor leírtuk a testek mozgását a nehézségi erő hatására, néhány egyszerűsítést fogadtunk el. Emlékeztetőül: 1) Földhöz kötött VR-t inerciálisnak tekintjük; 2) a nehézségi gyorsulást állandónak vesszük, a Földet pedig laposnak;

3) figyelmen kívül hagyjuk a légellenállást. Változtatás nélkül elfogadjuk az egyes és hármas számú egyszerűsítést, azonban számításba vesszük, hogy a Föld gömb alakú, nehézségi gyorsulása pedig a test Föld feletti magasságától függ.

Elvégzünk egy gondolatkísérletet. Képzeljük el, hogy ágyúgolyókat lövünk ki vízszintesen, minden lövéskor növelve a golyó mozgássebességét. Ennek megfelelően a golyó egyre távolabb ér földet. Ha a Földet laposnak képzeljük, akkor ezzel a kísérletet be is fejezhetjük: a továbbiakban semmi érdekes sem történik. De a Föld gömb alakú, ezért minden lövéssel mindinkább eltávolodik a golyótól (lásd a 23.1. ábrát).

Most elképzeljük, hogy olyan nagy sebességet közöltünk a golyóval, hogy körülrepülte a Földet és visszatért a kilövési helyre. A légellenállással nem számolunk, ezért a golyó a kiinduló pontba ugyanolyan sebességgel érkezik meg, mint amilyennel elindult. Mindeközben a golyó nem áll meg, hanem állandó sebességgel tovább mozog, egyre róva a köröket a bolygó körül. Másként fogalmazva, megkapjuk a *Föld műholdját*. Holddá válhat bármely tárgy, ehhez csak megfelelő sebességet kell közölni vele.



23.1. ábra. A test mozgása a nehézségi erő hatására (I. Newton rajza alapján). Az *A* és *B* lövedékek a Földre esnek, a *C* lövedék körpályára kerül, a *D* ellipszis, az *E* lövedék pedig kirepül a nyílt világűrbe.

Azt a sebességet, amit a testtel közölni kell az adott bolygóról való indításakor ahhoz, hogy a bolygó műholdjává váljon, és eközben olyan körpályán mozogjon, amelynek a középpontja egybeesik az adott bolygó középpontjával, **első kozmikus sebességnek** nevezzük.

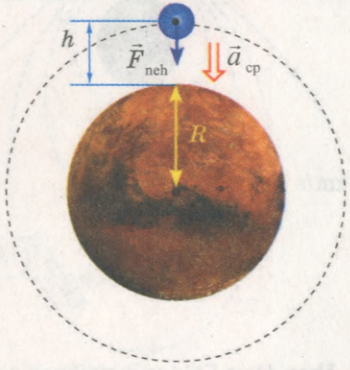
2 Hogyan kell kiszámítani az első kozmikus sebességet?

A bolygó műholdja körvonal mentén mozog, állandó lineáris sebességgel, tehát a bolygó középpontja felé irányuló gyorsulással mozog, amelynek számértéke az alábbi képlettel számítható ki:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h},$$

ahol v a műhold lineáris sebessége; $r = R + h$ a műhold és a bolygó középpontja közötti távolság.

A műhold centripetális gyorsulását az egyetlen rá ható erőtől, a nehézségi erőtől kapja (23.2. ábra): $F_{neh} = G\,\frac{mM}{(R+h)^2}$, ahol G a gravitációs állandó; m a műhold tömege; M a bolygó tömege.



23.2. ábra. A bolygó körül, a felszíne felett h magasságban körpályán mozgó műholdra a bolygó részéről erő hat, ennek eredményeként a műhold centripetális gyorsulásra tett szert; R a bolygó sugara

Newton második törvénye szerint $a_{cp} = \frac{F_{neh}}{m} = \frac{GM}{(R+h)^2}$, így $\frac{v^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2}$, tehát $v^2 = \frac{GM}{R+h}$, amiből

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}. \qquad (1)$$

Az (1) *képlet a műhold sebességének kiszámítására szolgál a bolygó fölött h magasságban.*

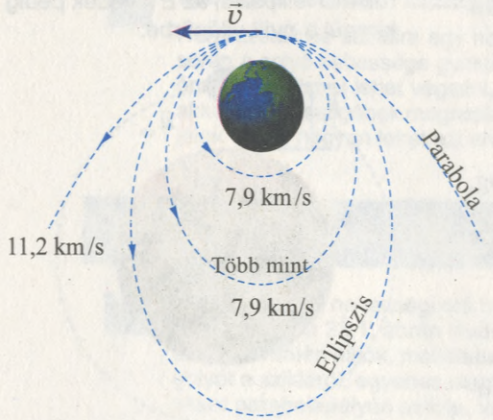
Meghatározzuk az első kozmikus sebesség értékét a Föld közelében. Mivel a Föld közelében $h \approx 0$, ezért az (1) képlet alakja ilyen lesz:

$$v = \sqrt{\frac{GM_F}{R_F}}.$$

Ez a képlet egyszerűsíthető, ha felidézzük, hogy a Föld felszínének közelében $g = \frac{GM_F}{R_F^2}$, amiből $\frac{GM_F}{R_F} = gR_F$. Véglegesen:

$$v = \sqrt{gR_F}.$$

Mivel $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, $R_F = 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}$, ezért $v = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}} = 7{,}9 \cdot 10^3\ \text{m/s}$. Tehát $v = 7{,}9$ km/s az *első kozmikus sebesség a Föld felszínének közelében.* Ilyen sebességet kell vízszintesen közölni a testtel kis magasságon (a Föld sugarához képest) ahhoz, hogy ez a test a Föld műholdjává váljon (23.3. ábra).



23.3. ábra. Ha a Föld műholdjának a sebessége $v = 7{,}9$ km/s (első kozmikus sebesség), akkor körpályán mozog; $7{,}9\ \text{km/s} < v < 11{,}2\ \text{km/s}$ közötti sebesség esetén elliptikus pályán mozog. 11,2 km/h sebességet elérve a Föld műholdja leküzdi annak vonzását és a Nap műholdjává válik

A föld első műholdjáról és az ukrán tudósoknak a világűr meghódításában játszott szerepéről a könyv végén található *Enciklopédiai oldalakon* olvashattok.

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. Számítsátok ki a Föld geostacionárius műholdjának átlagos pályasugarát (a pályát tekintsétek kör alakúnak). (A geostacionárius műholdak szögsebessége megegyezik a Föld forgásának szögsebességével, ezért a földi megfigyelő számára az ilyen holdak helyzete az égbolton változatlan. A megfigyelő úgy látja, mintha hozzá képest állna a műhold. Geostacionárius műholdakat alkalmaznak például a televíziós programok közvetítéséhez.)

Adott:
$R_F = 6{,}4 \cdot 10^6$ m
$g \approx 10$ m/s^2
$T = 24$ h $= 24 \cdot 3600$ s $=$
$= 8{,}64 \cdot 10^4$ s

r –?

A fizikai probléma elemzése, matematikai modell keresése. Mivel a geostacionárius műhold szögsebessége megegyezik a Föld forgásának szögsebességével, ezért a műhold és a Föld periódusideje egyforma ($\omega_1 = \omega_2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T_1 = T_2$).

A műhold sebessége h magasságban a Föld felszíne felett:

$$v = \sqrt{\frac{GM_F}{R_F + h}}, \text{ ahol } R_F + h = r \text{ a pálya sugara.}$$

A Föld felszínének közelében $g = \frac{GM_F}{R_F^2} \Rightarrow GM_F = gR_F^2$, innen:

$$v = \sqrt{\frac{gR_F^2}{r}} = R_F\sqrt{\frac{g}{r}}. \qquad (1)$$

Másrészt, a test mozgásának lineáris sebessége a következő összefüggésben áll a T periódusidővel:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

Megoldás, az eredmények elemzése. Összehasonlítjuk az (1), illetve a (2) egyenlőségek jobb oldalait: $R_F\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$, ebből meghatározzuk az r-t:

$$\frac{R_F^2 g}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow R_F^2 g T^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{R_F^2 g T^2}{4\pi^2}.$$

Véglegesen: $r = \sqrt[3]{\frac{R_F^2 g T^2}{4\pi^2}}$.

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$[r] = \sqrt[3]{\text{m}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2} = \text{m}; \quad \{r\} = \sqrt[3]{\frac{(6{,}4 \cdot 10^6)^2 \cdot 10 \cdot (8{,}64 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot (3{,}14)^2}} \approx 42{,}4 \cdot 10^6;$$

$$r = 42{,}4 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Elemezzük az eredményt: a Föld sugara $6{,}4 \cdot 10^6$ m, a kiszámított pályasugár pedig $42{,}4 \cdot 10^6$ m, ami nagyobb a Föld sugaránál és vele azonos nagyságrendű; tehát az eredmény teljesen valós.

Felelet: A Föld geostacionárius műholdjának pályasugara $r = 42{,}4 \cdot 10^6$ m.

Összegzés

Azt a sebességet, amit a testtel közölni kell az adott bolygóról való indításakor ahhoz, hogy a bolygó műholdjává váljon, és eközben olyan körpályán mozogjon, amelynek a középpontja egybeesik az adott bolygó középpontjával, első kozmikus sebességnek nevezzük.

Az első kozmikus sebességet a bolygó fölötti h magasságban a $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ képlettel lehet kiszámítani. A különböző bolygók számára az első kozmikus sebesség értéke különböző. A Föld közelében ($h = 0$) a v első kozmikus sebesség egyenlő: $v = \sqrt{gR_F} = 7{,}9$ km/s.

Ellenőrző kérdések

1. Miért nem esik vissza a Földre a bizonyos sebességgel vízszintesen eldobott test? **2.** Hogyan definiáljuk az első kozmikus sebességet? **3.** Vezessétek le a Föld felett h magasságban keringő műhold sebességének képletét! **4.** Vezessétek le az első kozmikus sebesség képletét arra a testre nézve, amely a Föld közelében ($h = 0$) kering! Mivel egyenlő ez a sebesség? **5.** Milyen műholdakat nevezünk geostacionáriusoknak? Hol használják őket?

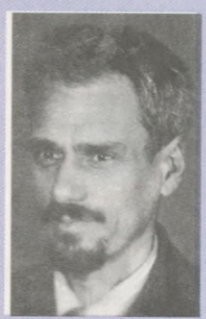
20. gyakorlat

1. Határozzátok meg a szabadesés gyorsulását és a test első kozmikus sebességét a Mars felszínének közelében! A Mars tömegét vegyétek $6{,}5 \cdot 10^{23}$ kg-nak, az átmérőjét pedig 6800 km-nek.

2. A Föld felett mekkora magasságban egyenlő az első kozmikus sebesség 4 km/s-mal?

3. A műhold Föld feletti mozgásának átlagos magassága 1700 km. Határozzátok meg a műhold sebességét és keringési idejét!

4*. Határozzátok meg a Föld első műholdja körpályájának sugarát, ha repülésének 92 napja alatt 1440-szer kerülte meg a Földet!



J. V. Kondratyuk

FIZIKA ÉS TECHNIKA UKRAJNÁBAN

Jurij Vasziljovics Kondratyuk (*Alekszandr Gnatovics Sargej*) (1897–1941) (lásd a fotót) a rakétatechnika egyik úttörője. A későbbi tudós még gimnáziumi tanulmányai során érdeklődni kezdett az űrrepülés iránt. A poltavai gimnáziumban, majd a Pétervári Műszaki Főiskolán tanult.

Az *Azoknak, akik olvasni fogják, hogy építsenek* c. könyvében (1919) J. Kondratyuk bemutatta a négyfokozatú oxigén-hidrogén üzemanyagú rakétájának tervét, leírta a hajtómű égésterét. *A bolygóközi tér meghódítása* c. könyvében pedig (1929) a holdutazást három lépcsőben javasolta megvalósítani, az űrhajó energiaellátására a napenergiát (!) javasolta .

Neil Armstrong amerikai űrhajós, aki elsőként lépett a Hold felszínére, ellátogatott Novoszibirszkbe és egy marék földet vitt magával annak a ház falának a tövéből, ahol Kondratyuk élt. Azt mondta: „Ez a föld nem kevésbé értékes számomra, mint a hold talaja." Az egyik, a Hold meghódításának NASA programjába bevont tudós pedig kijelentette: "Megkerestük azt a kis, észrevétlen könyvecskét, amit Oroszországban adtak ki, rögtön a forradalom után. A szerzője, Jurij Kondratyuk megalapozta és kiszámította a holdutazás tervének energetikai előnyét a következő terv szerint: repülés a Hold körüli pálya elérésére – start a Holdra erről a pályáról – visszatérés a Hold körüli pályára – repülés a Földre." Az amerikai szakemberek javaslatára a holdutazás útvonalát *Kondratyuk útvonalnak* nevezték el.

24. §. A TESTEK DEFORMÁCIÓJA. A DEFORMÁCIÓ FAJTÁI

?! Már tudjátok, ha a testre erő hat, akkor gyorsulást közöl ezzel a testtel. De az erő testre való hatásának van még egy következménye – a *deformáció* (alakváltozás). Ebben a paragrafusban arról lesz szó, mi az alakváltozás, milyen feltételek mellett jön létre, a deformációnak milyen fajtái léteznek, és mikor szenvedik el a testek az alakváltozást.

1 Mi a deformáció?

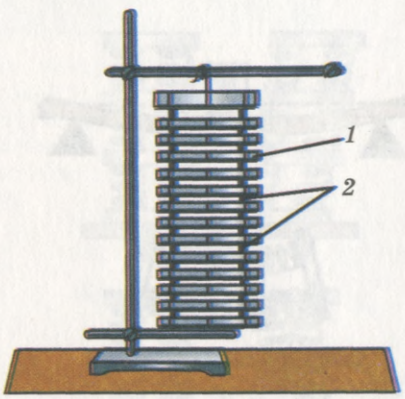
Ha súlyt teszünk a rugóra, hatására a rugó összenyomódik, a hossza rövidebb lesz; ha összepréselünk egy darab gyurmát, megváltozik az alakja; ha meghúzzuk az íj idegét, akkor egyidejűleg megváltozik a mérete és a formája is.

A test alakjának vagy méretének megváltozását **deformációnak** nevezzük.

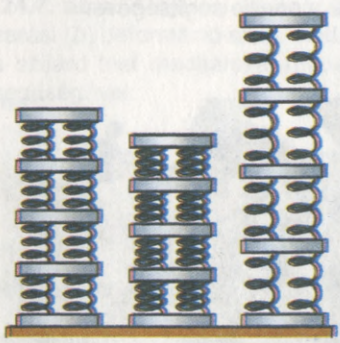
A deformáció kialakulásának az oka abban rejlik, hogy a testre ható erők hatására különböző részeik különbözőképpen mozdulnak el egymáshoz képest. A testek részeinek egymáshoz képest történő elmozdulásának jellege szerint megkülönböztetik a következő deformációkat: *összenyomás, nyújtás, nyírás, hajlítás, csavarás*. A különböző deformációfajták leírásához a *szilárd test mechanikai modelljét* használjuk (24.1. ábra).

Először a szilárd test mechanikai modelljét felülről lenyomjuk a kezünkkel (24.2. *a* ábra). A kéz hatására a felső lemezek lefelé kezdenek mozogni, az alsók gyakorlatilag mozdulatlanok maradnak; az eredmény – a modell megváltoztatja a méreteit, deformálódik (24.2. *b* ábra). Körülbelül ugyanígy mozdulnak el a szilárd test összenyomásakor az erőhatás irányába a molekularétegek, aminek következtében a test méretei lecsökkennek – a test deformálódik. Az ilyen alakváltozást *összenyomási deformációnak* nevezzük. Hasonló alakváltozást szenvednek el az oszlopok, az asztalok és székek lábai, az épületek alapjai stb.

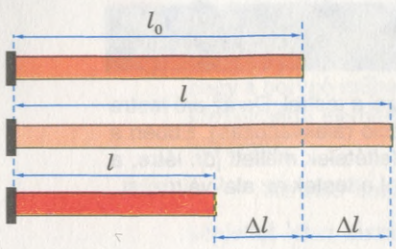
Ha nyújtjuk a testet, akkor a kéz hatására a molekulák távolodni kezdenek egymástól, és a test most is megváltoztatja a méreteit (24.2. *c* ábra). Az ilyen alakváltozást *nyújtásnak* nevezzük. Ilyen alakváltozást szenvednek a sodronykötelek, kötelek, az emelő berendezések láncai, a vagonok összekapcsolására szolgáló kuplungok stb.



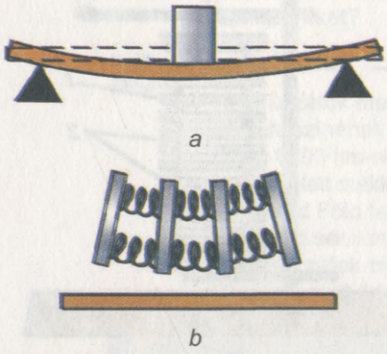
24.1 ábra. A szilárd test mechanikai modellje: *1*) párhuzamos lemezek, amelyek a szilárd test molekularétegeit szimulálják; *2*) rugók, amelyek összekötik a lemezeket és a molekulák között ható erőket szimulálják



24.2. ábra. Az összenyomási (*b*) és nyújtási (*c*) deformáció szemléltetése a szilárd test mechanikai modellje segítségével



24.3. ábra. A rúd összenyomási és nyújtási deformációja: l_0 a rúd kezdeti hossza; l a deformált rúd hossza; Δl a rúd megnyúlása; nyújtás esetében $\Delta l > 0$, összenyomáskor $\Delta l < 0$



24.4. ábra. Hajlítási deformáció: *a*) a súly hatására a vonalzó megváltoztatja az alakját, azaz deformálódik; *b*) a hajlítási deformáció szemléltetése a szilárd test mechanikai modellje segítségével



24.5. ábra. A kerékpár váza vékony üreges fémcsövekből áll, aminek köszönhetően a kerékpár elég könnyű, miközben kellően szilárd marad

A nyújtási és összenyomási deformációnak fizikai mennyiségi jellemzői a *megnyúlás* és a *relatív megnyúlás*.

A Δl **megnyúlás** olyan fizikai mennyiség, ami egyenlő a test hosszának a megváltozásával összenyomási vagy nyújtási deformációja során:

$$\Delta l = l - l_0,$$

ahol l a deformált test hossza; l_0 a test kezdeti hossza (24.3. ábra).

Az ε **relatív megnyúlás** olyan fizikai mennyiség, ami egyenlő a test Δl megnyúlásának a test kezdeti l_0 hosszához mért arányával:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \text{ vagy } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%.$$

2 Milyen deformációk léteznek még?

Ha támasztékra helyezzük a vonalzót és a közepére súlyt teszünk (24.4. *a* ábra), akkor hatására a vonalzó középső részei lefelé mozdulnak, azok a részecskék viszont, amelyek a támasztékon vannak, a helyükön maradnak. Végeredményben a vonalzó *meghajlik* – deformálódik. Ebben az esetben *hajlítási deformációval* van dolgunk (24.4. *b* ábra).

Figyeljétek meg: a *hajlítási deformáció egyszerre nyújtási és összenyomási deformáció.* Valóban, a test lehajló, domború részében a molekularétegek közötti távolság megnő, vagyis a testnek ez a része nyújtást szenvedett el. A test homorú részében a molekularétegek távolsága csökken, a testnek ezt a részét összenyomási deformáció érte. A középső rétegek sem nyújtást, sem összenyomást nem szenvednek el, tehát a szerkezet szilárdságára nincsenek hatással. Éppen ezért általában el szokták távolítani ezt a réteget, a tömör rudakat pedig üreges csövekre cserélik (24.5., 24.6. ábrák).

Függőlegesen elhelyezve a szilárd testet, az alsó részét rögzítjük, a felsőt pedig függőleges irányban megpróbáljuk elmozdítani a kezünkkel (24.7. *a* ábra). A molekularétegek *elcsúsznak* egymáshoz képest, a test megváltoztatja az alakját – ún. *nyírás* történik. Nyírási deformációt szenvednek el például a szögek és csavarok,

amelyek a különböző szerkezetek részeit kapcsolják össze; az anyag, amit elvágunk ollóval.

Ha a test felső részét elfordítjuk úgy, hogy az alsót mozdulatlanul hagyjuk, akkor a molekularétegek elcsúszása nem egyformán történik – minden réteg egy bizonyos szögben elfordul a másikhoz képest (24.7. *b* ábra). Az ilyen deformációt *csavarásnak* nevezzük. Ilyen alakváltozást szenved el minden gép tengelye, csavarok, kulcsok, csavarhúzók stb.



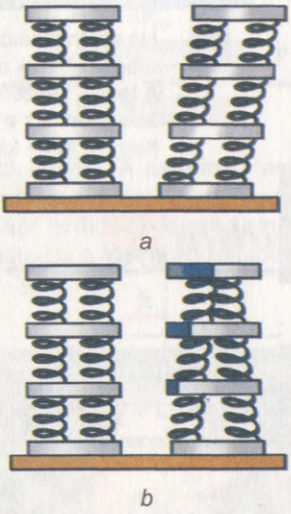
24.6. ábra. A természet az embereket és az állatokat üreges (csöves) csontokkal ajándékozta meg, üregesnek alkotta a gabonafélék szárait, ezzel egyesítette az „anyagtakarékosságot" és a szilárd struktúrát

3 Rugalmas és rugalmatlan deformációk

Fogjatok egy radírt és nyomjátok össze az ujjaitokkal – a radír elhajlik. Azonban, ha megszűnik a nyomás (megszűnik a külső erő hatása), a radír teljesen visszanyeri az alakját, vagyis a deformáltsága megszűnik.

Ha a test az erőhatás megszűnése után teljesen visszanyeri alakját, ilyenkor **rugalmas alakváltozásról beszélünk**.

A szobron dolgozva, a mester valamilyen módon megváltoztatja az agyag alakját. A munka befejeztével a szobor nem nyeri vissza korábbi formáját, vagyis nem válik újra egy darab agyaggá. A pénzverdében a nehéz sajtó deformálja a fémdarabot – érme keletkezik. A sajtó hatásának megszűnését követően az érme továbbra is érme marad – nem alakítja újjá korábbi, fémdarab alakját. Sem az agyag, sem a fém nem „emlékszik" a deformáció előtti alakjára és nem veszi fel újra azt.



24.7. ábra. A nyírási (*a*) és a csavarási (*b*) deformáció szemléltetése a szilárd test mechanikai modellje segítségével

Ha az erőhatáskor létrejött alakváltozás az erőhatás megszűnése után sem múlik el, ilyenkor **maradandó** (**rugalmatlan**) alakváltozásról beszélünk.

! Összegzés

Deformációnak nevezzük a test alakjának vagy térfogatának megváltozását. A deformáció kialakulásának az oka abban rejlik, hogy a testre ható erők hatására különböző részeik különbözőképpen mozdulnak el egymáshoz képest. Az elmozdulás jellege szerint megkülönböztetik a következő deformációkat: összenyomás, nyújtás, nyírás, hajlítás, csavarás.

A nyújtási és összenyomási deformációt olyan fizikai mennyiségekkel szokás jellemezni, mint a megnyúlás: $\Delta l = l - l_0$, vagy a relatív megnyúlás: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$.

Ha az egyes molekularétegek közötti távolság nő, mások között pedig csökken, akkor ez hajlítási deformáció; ha egyes molekularétegek elcsúsznak másokhoz képest,

akkor ez nyírási deformáció; ha a molekularétegek elfordulnak egymáshoz képest, akkor ez csavarási deformáció.

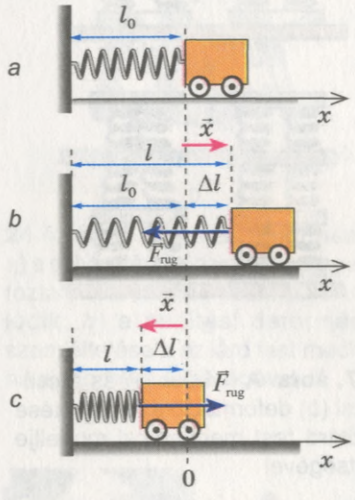
Ha a testre ható erők hatásának megszűnése után a deformációk teljesen eltűnnek, akkor ezek rugalmas deformációk; ha a deformációk megmaradnak, akkor rugalmatlan deformációkról beszélünk.

Ellenőrző kérdések

1. Mi a deformáció? Miért jön létre? **2.** A deformációk mely fajtáit ismeritek? **3.** Milyen feltételek mellett jön létre a nyújtás? Összenyomás? Nyírás? Hajlítás? Csavarás? Hozzatok fel példákat! **4.** Milyen fizikai mennyiségek jellemzik a nyújtási és az összenyomási deformációt? Hogyan definiáljuk őket? **5.** Milyen deformációt neveznek rugalmasnak? Rugalmatlannak? Hozzatok fel példákat!

25. §. RUGALMASSÁGI ERŐ. MECHANIKAI FESZÜLTSÉG. HOOKE TÖRVÉNYE

Ha széthúzzátok az expandert, megfeszítitek az íj idegét, megnyomjátok a labdát vagy meghajlítjátok az ágat, vagyis deformáljátok ezeket a testeket, érzitek az ellenállásukat; a testek részéről a kézre erő kezd hatni, amely ellenállást fejt ki a kezetek hatásával szemben. Ez a paragrafus segít felidézni, hogy mi is ez az erő, milyen természetű és hogyan lehet kiszámítani.



25.1. ábra. Az $\vec{F}_{rug}$ rugalmassági erő minden esetben megpróbálja visszatéríteni a testet a korábbi (deformálatlan) állapotába: *a*) a deformálatlan rugó ($\Delta l = 0$, $F_{rug} = 0$); *b*) a megnyújtott rugó ($\Delta l > 0$, $F_{rug\,x} < 0$, $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{F}_{rug}$); *c*) az összenyomott rugó ($\Delta l < 0$, $F_{rug\,x} > 0$, $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{F}_{rug}$). Itt az $\vec{x}$ a rugó elmozdulásvektora; l_0 a deformálatlan rugó hossza; l a deformált rugó hossza; Δl a rugó megnyúlása

1 Mikor keletkezik rugalmassági erő?

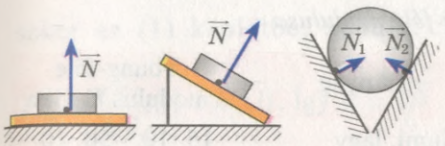
A rugalmas deformáció során mindig létrejön egy olyan erő, amelyik megpróbálja visszaállítani a testnek az alakváltozás előtti állapotát. Ezt az erőt rugalmassági erőnek nevezik (25.1. ábra).

> Azt az erőt, amely a test rugalmas deformációja során jön létre, és a test részeinek (részecskéinek) a deformáció folyamatában történő elmozdulásával ellentétesen irányul, **rugalmassági erőnek** nevezzük.

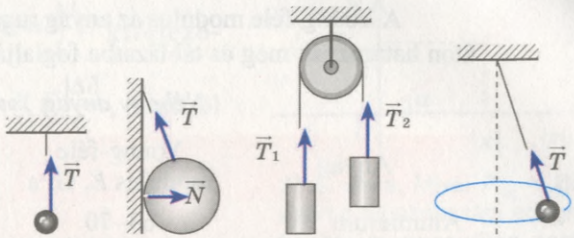
Általában a rugalmassági erőt $\vec{F}_{rug}$ szimbólummal jelölik. Azonban vannak olyan rugalmassági erők is, amelyek jelölésére külön szimbólumot használnak.

Ha a testet támasztékra helyezzük, akkor a támaszték deformálódik (meghajlik). A támaszték deformációja a rugalmassági erő megjelenését eredményezi, ami *merőlegesen hat a testre a támaszték felületéről*. A testre a támaszték részéről ható rugalmassági erőt a *támasz normális reakcióerejének nevezik* és $\vec{N}$ -nel jelölik (25.2. ábra).

Ha a testet felfüggesztik (cérnára, zsinórra), akkor a test hatására a felfüggesztés deformálódik (megnyúlik) és bizonyos rugalmassági erővel kezd hatni a *testre a felfüggesztés mentén*. A függeszték



25.2. ábra. A támaszték $\vec{N}$ normális reakcióereje mindig merőleges a támaszték felületére



25.3. ábra. A függeszték feszítőereje ($\vec{T}$) mindig a függeszték mentén irányul

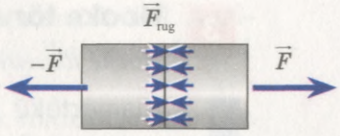
részéről a testre ható rugalmassági erőt a *függeszték feszítőerejének* nevezzük és $\vec{T}$ a jele (25.3.ábra).

2 Mi a mechanikai feszültség?

A deformált test állapotát a mechanikai feszültség nevű fizikai mennyiség jellemzi.

A σ **mechanikai feszültség** a deformált testet jellemző fizikai mennyiség, amely egyenlő a rugalmassági erő F_{rug} és a test S keresztmetszetének arányával (25.4. ábra):

$$\sigma = \frac{F_{rug}}{S}.$$



25.4. ábra. A deformált test tetszőleges metszetében rugalmassági erők ébrednek, amelyek gátolják a test szétszakadását

(A továbbiakban csupán homogén keresztmetszetű testeket, például rudakat fogunk vizsgálni.)

A mechanikai feszültség egysége az SI-ben a **pascal** (1 Pa = 1 N/m²).

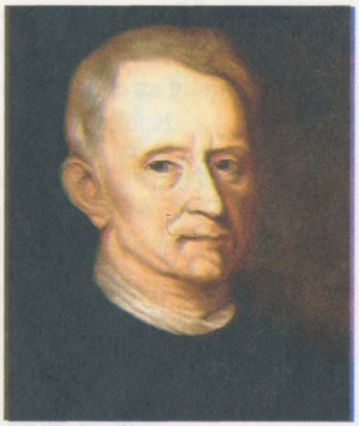
Kísérleti bizonyítást nyert, hogy a mechanikai feszültség a relatív megnyúlástól függ. Ezt az összefüggést **Hooke törvénye** fejezi ki (25.5. ábra):

Kismértékű rugalmas nyújtási, illetve összenyomási deformációk esetében a σ mechanikai feszültség egyenesen arányos a relatív megnyúlással:

$$\sigma = E\,|\varepsilon|,$$

ahol E a *Young-féle modulus* (*rugalmassági modulus*).

Az ε relatív megnyúlás dimenzió nélküli mennyiség, ezért a *Young-féle modulus mértékegysége* az SI-ben a **pascal** (ugyanúgy, mint a mechanikai feszültség egysége).



25.5. ábra. Robert Hooke (1635–1703) angol természettudós, enciklopédista, a kísérleti fizika egyik megalapozója. Az általa feltalált kardántengelyt a modern autóipar is használja, az ugyancsak általa javasolt rugós balansz most is a mechanikus óra fő része

A Young-féle modulus az anyag rugalmassági tulajdonságait jellemzi; kísérleti úton határozzák meg és táblázatba foglalják:

Néhány anyag Young-féle modulusa

Anyag	Young-féle modulus E, GPa	Anyag	Young-féle modulus E, GPa
Alumínium	63–70	Gumi, lágy	$15 \cdot 10^{-3}$–$50 \cdot 10^{-3}$
Beton	15–40	Ezüst	82,7
Kaucsuk	$7{,}9 \cdot 10^{-3}$	Acél (ötvözet)	206
Konstantán	160	Üveg	49–78
Réz (öntött)	82	Celluloid	1,7–1,9
Réz (hengerelt)	108	Temperöntvény	150

3 Hooke törvényének másik megfogalmazása

Hooke törvényének létezik egy másik megfogalmazása is.

Kismértékű rugalmas nyújtási, illetve összenyomási deformációk esetében $\vec{F}_{rug}$ rugalmassági erő jön létre, ami egyenesen arányos a test megnyúlásával, és a test részeinek (részecskéinek) deformáció alatti elmozdulásával ellentétes irányban hat:

$$\vec{F}_{rug} = -k\vec{x},$$

ahol k a test (a rugó*) merevsége; $\vec{x}$ a test végének elmozdulása ($|x| = |\Delta l|$, $\Delta l = l - l_0$ – a test megnyúlása). A " – " jel azt mutatja, hogy a rugalmassági erő mindig az elmozdulással szemben irányul ($\vec{F}_{rug} \uparrow\downarrow \vec{x}$).

Hooke törvénye felírható vetületi egyenletként: $F_{rug} = -kx$, és nagyságukra nézve is: $F_{rug} = k|x| = k|\Delta l|$.

Hooke törvényének következményei

1. *A rugalmassági erő vetületének grafikonja a test megnyúlásának függvényében egy olyan egyenes, amelynek vízszintes tengellyel bezárt hajlásszögének tangense egyenlő a test merevségével* (25.6. ábra).

2. *A test merevsége anyagának rugalmassági tulajdonságaitól és a test geometriai paramétereitől függ.*

Valóban, Hooke törvényét az alábbi alakról:

$$\sigma = E|\varepsilon| \qquad (1)$$

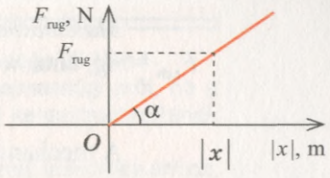
könnyű ilyen alakra hozni:

$$F_{rug} = k|\Delta l|.$$

* A technikában és a fizikai kísérletekben gyakran alkalmaznak spirálrugókat. Nyújtáskor, illetve összenyomáskor benne rugalmassági erők jönnek létre, amelyek szintén Hooke törvényének engedelmeskednek.

Behelyettesítve a $\sigma = \frac{F_{rug}}{S}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ kifejezéseket az (1) képletbe, adódik: $\frac{F_{rug}}{S} = E\frac{|\Delta l|}{l_0}$, amiből $F_{rug} = \frac{ES}{l_0}|\Delta l| = k|\Delta l|$. Így $k = \frac{ES}{l_0}$.

3. *A rugómerevség mértékegysége* az SI-ben a **newton per méter** $\left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$, mivel $k = \frac{F_{rug}}{|x|}$.



25.6. ábra. Mivel $F_{rug} = k|x|$, ezért a rugalmassági erő grafikonja a megnyúlás nagyságának függvényében az F_{rug} és $|x|$ tengelyek metszéspontján áthaladó egyenes; $\text{tg}\,\alpha = \frac{F_{rug}}{|x|} = k$

4 Milyen természetű a rugalmassági erő?

Köztudott, hogy minden test atomokból (molekulákból, ionokból) áll, ez utóbbiak pedig pozitív töltésű magból és negatív töltésű elektronfelhőből. A töltéssel rendelkező részecskék között *elektromágneses vonzó-*, illetve *taszítóerők hatnak*.

Ha a test nem szenved alakváltozást, akkor a részecskék vonzóereje egyenlő a taszítóerejével. Deformáció estén az atomok (molekulák, ionok) kölcsönös elhelyezkedése a testben megváltozik. Ha a közöttük lévő távolság megnő, akkor az elektromágneses vonzóerők nagyobbak lesznek a taszítóerőknél, ennek eredményeként az atomok (molekulák, ionok) kölcsönösen vonzzák egymást. Ha a részecskék közötti távolság csökken, akkor az elektromágneses taszítóerők nőnek meg. Másként fogalmazva, az anyag részecskéi arra törekednek, hogy visszatérjenek egyensúlyi állapotukba.

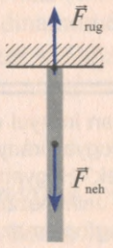
Tehát a *rugalmassági erő az anyagrészecskék elektromágneses kölcsönhatásának megnyilvánulása.*

5 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladatok. A Föld felszíne felett bizonyos magasságban „függő" helikopterről acélsodrony kötelet eresztenek a földre. Milyen lehet a kötél legnagyobb hossza, hogy ne szakadjon el a saját súlya miatt? A maximális mechanikai feszültség, amit az acél elbír (*az acél szakítószilárdsága*), 320 MPa.

Adott:
$\sigma_{max} = 3{,}2 \cdot 10^8$ Pa
$g \approx 10$ m/s^2
$\rho = 7800$ kg/m^3

$l - ?$



A fizikai probléma elemzése. Magyarázó rajzot készítünk. A sodronykötélre két erő hat: a nehézségi erő és a rugalmassági erő. Nyilvánvaló: ha elszakad a kötél, akkor az a legmagasabban elhelyezkedő keresztmetszetében történhet. Mivel a kötél nyugalomban van, ezért nagyságukat tekintve a nehézségi erő egyenlő a rugalmassággal:

$$F_{neh} = F_{rug}. \qquad (1)$$

Matematikai modell keresése, megoldás. Meghatározzuk a nehézségi erőt: $F_{neh} = mg$, ahol $m = \rho V$, és $V = Sl$. Így:

$$F_{neh} = \rho Slg \,. \qquad (2)$$

A mechanikai feszültség meghatározásából $\sigma = \frac{F_{rug}}{S}$ következik, hogy

$$F_{rug} = \sigma S \,. \qquad (3)$$

Behelyettesítjük a (2) és (3) kifejezést az (1) egyenlőségbe:

$$\rho Slg = \sigma S, \text{ innen } l = \frac{\sigma}{\rho g} \,.$$

Az acél sűrűségét a táblázatból keressük ki.

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$[l] = \frac{\text{Pa}}{\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{m}^2 \cdot \text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{kg}} = \text{m} \,;$$

$$\{l\} = \frac{3{,}2 \cdot 10^8}{7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 10} = 4{,}1 \cdot 10^3; \quad l = 4{,}1 \cdot 10^3 \text{ m} = 4{,}1 \text{ km}.$$

Felelet: a sodronykötél legnagyobb hossza $l = 4{,}1$ km.

Összegzés

Azt az erőt, amely a test rugalmas deformációja során jön létre és a test részeinek (részecskéinek) a deformáció folyamatában történő elmozdulásával ellentétesen irányul, rugalmassági erőnek nevezzük. Ez az erő az anyag elektromágneses kölcsönhatásának eredményeként jön létre.

Azt a fizikai mennyiséget, amely a deformált testet jellemzi és egyenlő a rugalmassági erő F_{rug}, valamint a test S keresztmetszetének hányadosával, σ mechanikai feszültségnek nevezzük: $\sigma = \frac{F_{rug}}{S}$.

Hooke törvénye: kismértékű rugalmas nyújtási, illetve összenyomási deformációk esetében a σ mechanikai feszültség egyenesen arányos az $|\varepsilon|$ relatív megnyúlással: $\sigma = E\,|\varepsilon|$, ahol E a Young-féle modulus (rugalmassági modulus), ami az anyag rugalmassági tulajdonságait jellemzi.

Hooke törvénye így is megfogalmazható: kismértékű rugalmas nyújtási, illetve összenyomási deformációk esetén olyan rugalmassági erő jön létre, ami egyenesen arányos a test megnyúlásával és a test részeinek (részecskéinek) deformáció alatti elmozdulásával ellentétes irányban hat: $\vec{F}_{rug} = -k\vec{x}$, ahol k a test merevsége, ami a test anyagától és geometriai méreteitől függ.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiáljuk a rugalmassági erőt? Hogyan irányul ez az erő? **2.** Milyen erőt neveznek a támaszték normális reakcióerejének? Hogyan irányul? Hozzatok fel példákat! **3.** Milyen erőt neveznek a függeszték feszítőerejének? Hogyan irányul? Hozzatok fel példákat! **4.** Mit nevezünk mechanikai feszültségnek? Jellemezzétek a mechanikai feszültséget! **5.** Adjátok meg Hooke törvényének két megfogalmazását és bizonyítsátok be, hogy identikusak egymással! **6.** Mik a határai a Hooke-törvény alkalmazásának (milyen feltételek esetén teljesül)? **7.** Mi jellemzi a Young-féle modulust? Mi a mértékegysége az SI-ben? **8.** Mitől függ a test merevsége? Mi a mértékegysége az SI-ben? **9.** Milyen természetű a rugalmassági erő? Magyarázzátok meg létrejöttének okait!

21. gyakorlat.

1. A gumizsinórra 5 N erő hat. Mekkora a megnyúlása, ha merevsége 25 N/m?
2. Határozzátok meg a huzal tengelyének hosszában ható rugalmassági erőt, ha a huzalban 150 MPa mechanikai feszültség jött létre! A huzal keresztmetszetének sugara 2 mm.
3. Mekkora erővel kell hatni a 3,6 m hosszú és 1 mm^2 keresztmetszetű acéldrótra ahhoz, hogy hossza 2 mm-rel nőjön?
4. A 10 kg tömegű súly hatására az 5 m hosszú drót 1 mm-rel lett hosszabb. Határozzátok meg a Young-féle modulust és a drótban ébredt mechanikai feszültséget! A drót keresztmetszetének területe 2,5 mm^2.

5*. A gumizsinór rugómerevsége 10 N/m. Milyen lesz két ilyen zsinór által alkotott rendszer merevsége, ha sorba kötjük őket? Ha párhuzamosan?

3. SZ. LABORATÓRIUMI MUNKA

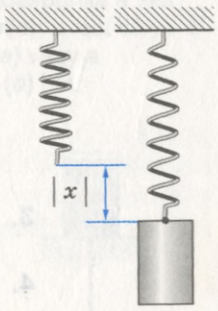
Téma: a rugómerevség meghatározása.
Cél: a dinamométer rugója merevségének meghatározása.
Eszközök: skálával ellátott, de papírral letakart dinamométer, szorítócsavarral és fogókkal ellátott laboratóriumi állvány, 100 g-os súlyok, milliméter beosztású vonalzó.

A MUNKA MENETE

A kísérlet előkészítése

1. Mielőtt elkezditek a munkát, válaszoljatok az alábbi kérdésekre, és oldjátok meg a feladatot!
   1) Mi a rugómerevség? Mi a mértékegysége az SI-ben?
   2) Függ-e a rugalmas deformáció során a rugómerevség a megnyúlásának mértékétől?
   3) Hogyan kell kiszámítani az ismert tömegű testre ható nehézségi erőt?

Feladat. Az m tömegű testet rugóra akasztották, aminek következtében a rugó hossza $|x|$ mértékben megnőtt (lásd az ábrát). Ábrázoljátok a testre ható erőket, határozzátok meg a rugómerevséget!



2. Elemezzétek a feladat megoldása során kapott képletet! Tisztázzátok, milyen fizikai mennyiségeket kell megmérni a laboratóriumi munka elvégzése során, és ehhez milyen műszerekre van szükség!
3. Erősítsétek a dinamométert az állvány fogójába! Jelöljétek meg a dinamométer skálájára erősített papíron a mutató kezdeti helyzetét!

Kísérlet

A mérések eredményeit foglaljátok táblázatba.

1. Akasszatok a dinamométer rugójára egy súlyt! Jelöljétek meg a dinamométer mutatójának állását!
2. Az első súlyhoz sorban egyenként rögzítve a kettes, hármas, négyes súlyt, minden alkalommal jelöljétek meg a dinamométer mutatójának állását!

3. Vegyétek le a dinamométert az állványról! A vonalzó segítségével mérjétek meg a távolságot az első és a második jelzés között, az első és a harmadik között stb.! Ezek a távolságok egyenlők a rugó megnyúlásával megfelelően egy, két, stb. súllyal.

A kísérleti eredmények feldolgozása

1. Számítsátok ki a dinamométer rugómerevségének átlagértékét! Ehhez végezzétek el a következőket!
   1) A méréseredmények alapján rajzoljátok meg a rugalmassági erő grafikonját a megnyúlás függvényében!

   (Figyeljétek meg: a mérések pillanataiban a súlyok nyugalmi állapotban voltak, tehát $F_{rug} = F_{neh}$; súlyok nélkül a rugó deformálatlan állapotban volt, tehát a grafikon átmegy az ($|x| = 0$; $F_{rug} = 0$) ponton; a grafikont úgy kell megrajzolni, hogy az egyenes különböző oldalain kb. azonos számú pont legyen (lásd a 4. §-t).)

   2) Válasszatok ki a grafikonon egy tetszőleges pontot, határozzátok meg az ennek megfelelő F_{rug} erő értékét és a rugó $|x|$ megnyúlását, a $k_{átl} = \frac{F_{rug}}{|x|}$ képlet segítségével számítsátok ki a rugómerevség átlagértékét!
2. Értékeljétek a rugómerevség mérésének relatív és abszolút hibáját! Ehhez végezzétek el a következőket!
   1) Számítsátok ki a rugalmassági erő relatív méréshibáját! Mivel $F_{rug} = mg$, ezért $\varepsilon_F = \varepsilon_m + \varepsilon_g = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g}$. Tekintsétek úgy, hogy $\Delta m = 0{,}002$ kg; $\Delta g = 0{,}02$ m/s^2; $g = 9{,}8$ m/s^2.
   2) Számítsátok ki a rugó megnyúlása mérésének abszolút és relatív hibáját: $\Delta|x| = \sqrt{\Delta x_{műsz}^2 + \Delta x_{rmny}^2}$; $\varepsilon_{|x|} = \frac{\Delta|x|}{|x|}$!
   3) Számítsátok ki a merevség abszolút és relatív méréshibáját! Mivel $k = \frac{F_{rug}}{|x|}$, ezért $\varepsilon_k = \varepsilon_F + \varepsilon_{|x|}$, ennek megfelelően $\Delta k = \varepsilon_k k_{átl}$.
3. Kerekítsétek ki az eredményt, és a rugómerevség méréseredményét írjátok fel $k = k_{átl} \pm \Delta k$ alakban!
4. Töltsétek ki a táblázatot!

A kísérlet sorszáma	A súly tömege m, kg	A rugalmassági erő nagysága $F_{rug} = mg$, N	A rugó megnyúlása $\|x\|$, m	Merevség			
				Átlagérték $k_{átl}$, N/m	Mérési hiba		Méréseredmény $k = k_{átl} \pm \Delta k$, N/m
					relatív ε_k, %	abszolút Δk, N/m	

A kísérlet eredményeinek elemzése

Elemezzétek a kísérletet és a kapott eredményeket! Vonjatok le következtetést, amelyben tüntessétek fel, milyen mennyiséget mértetek, mi a mérés eredménye, mi a mérési hiba oka!

+ Alkotó feladat

Írjátok le a gumi Young-féle modulusának meghatározására szolgáló kísérlet tervét! Milyen fizikai mennyiségek méréseredményeire, és milyen eszközökre van ehhez szükségetek?

26. §. A TEST SÚLYA. A GYORSULÁSSAL MOZGÓ TEST SÚLYA. SÚLYTALANSÁG. TÚLTERHELÉS

?! Jurij Gagarin visszaemlékezéseiből: „Úgy ereztem, hogy valamilyen leküzdhetetlen erő egyre jobban belenyom az ülésbe. Annak ellenére, hogy úgy volt elhelyezve, hogy maximálisan lecsökkentse a testemre nehezedő óriási súly hatását, nehéz volt megmozdítani a kezemet és a lábamat."
Ebben a paragrafusban arról lesz szó, miért alakul ki a túlterhelés és milyen körülmények mellett kerül a test a súlytalanság állapotába.

1 Mi a test súlya?

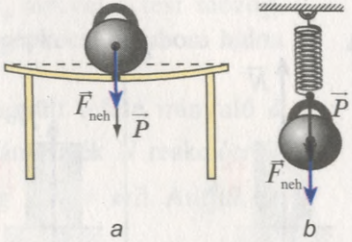
A Föld vonzóerejének eredményeként minden test nyomja, vagy meghajlítja a támasztékot, nyújtja a függesztéket. Azt az erőt, amely jellemzi a testek ilyen hatásait, *súlynak* nevezzük.

A **test** $\vec{P}$ **súlya** olyan rugalmassági erő, amivel a Föld vonzásának következtében a test a vízszintes támasztékra vagy a függőleges függesztékre hat.

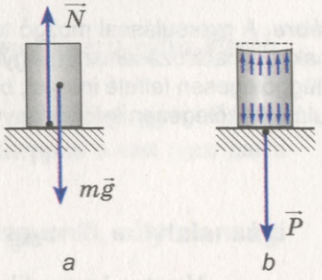
Az SI-ben a súly mértékegysége, akárcsak bármely más erőé, a **newton** (N).

A nehézségi erőtől eltérően, ami a testre hat, a *súly a támasztékra vagy a függesztékre hat* (26.1. ábra). A test súlya és a nehézségi erő természetükben is különbözik. A nehézségi erő gravitációs természetű; a test súlya rugalmassági erő, ezért *a súly elektromágneses természetű*.

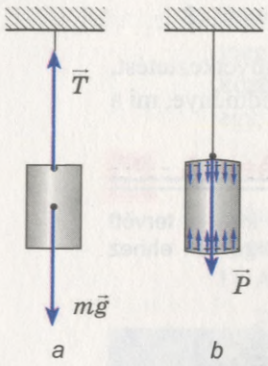
Tisztázzuk, mitől jön létre a test súlya. Ezért megvizsgálunk egy vízszintes támasztékon fekvő testet (26.2. ábra), és egy függőleges függesztékhez rögzített testet (26.3. ábra). Mindkét testre két erő hat: az első esetben az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a támaszték $\vec{N}$ reakcióereje; a második esetben az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a felfüggesztés $\vec{T}$ feszítőereje. Mindkét esetben az erők a test más-más pontjára hatnak és ellenté-



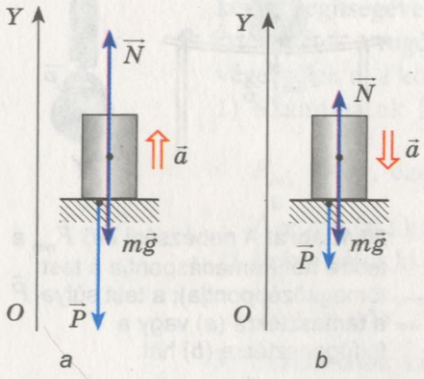
26.1. ábra. A nehézségi erő $\vec{F}_{neh}$ a testre hat (támadáspontja a test tömegközéppontja); a test súlya $\vec{P}$ a támasztékra (*a*) vagy a felfüggesztésre (*b*) hat.



26.2. ábra. Az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a támaszték $\vec{N}$ reakcióerejének hatása összenyomási deformációt okoz (*a*). Ennek eredményeként a test, miközben megpróbál visszatérni nem deformált állapotába, $\vec{P}$ rugalmassági erővel nyomja a támasztékot (*b*)



26.3. ábra. Az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a $\vec{T}$ feszítőerő nyújtási deformációt okoznak (*a*). Ennek eredményeként a test, miközben megpróbál visszatérni nem deformált állapotába, $\vec{P}$ rugalmassági erővel hat a felfüggesztésre (*b*)



26.4. ábra. A gyorsulással mozgó test súlyának meghatározásához: *a*) a gyorsulás függőlegesen felfelé irányul; *b*) a gyorsulás függőlegesen lefelé irányul

tesen irányulnak, ezért deformálják a testet. A deformáció következtében rugalmassági erő keletkezik, ami a támasztékra (függesztékre) hat. Ez az erő a test $\vec{P}$ súlya.

Ha a test nyugalomban van, vagy állandó sebességgel mozog, akkor a nehézségi erő és a támaszték reakcióereje (a felfüggesztés feszítőereje) kompenzálják egymást. Ezek egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erők: $\vec{N} = -m\vec{g}$ $(\vec{T} = -m\vec{g})$. (1)

Newton harmadik törvényének megfelelően az az erő, amellyel a test a támasztékra (függesztékre) hat, nagyságára nézve egyenlő, irányát tekintve pedig ellentétes azzal az erővel, amellyel a támaszték (felfüggesztés) hat a testre: $\vec{P} = -\vec{N}$ $(\vec{P} = -\vec{T})$. (2)

Az (1) és (2) képletekből: $\vec{P} = m\vec{g}$.

Tehát, *ha a test nyugalmi állapotban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, akkor súlya nagyságát tekintve megegyezik a nehézségi erővel és azonos irányú vele.*

2 Milyen feltételek mellett jön létre a túlterhelés?

Tételezzük fel, hogy a test a támasztékon helyezkedik el és vele együtt a Föld gravitációs terében gyorsulással mozog függőlegesen felfelé. A testre a függőleges mentén két erő hat: az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a támaszték $\vec{N}$ reakcióereje. A koordinátarendszert a Földhöz rendeljük és az OY tengelyt függőlegesen felfelé irányítjuk (26.4. *a* ábra). Newton második törvényének megfelelően: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$. Átírjuk ezt az egyenletet az OY irányú vetületi egyenletként:

$$-mg + N = ma \Rightarrow N = mg + ma = m(g + a).$$

Newton harmadik törvényének megfelelően $P = N$. Végezetül:

$$P = m(g + a).$$

Tehát *a függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással mozgó test súlya nagyobb, mint a nyugalomban lévő test súlya.*

Ha az ember függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással mozog, akkor *túlterhelés* éri (*a súlya megnő*). A test súlyának növekedését a *túlterhelési tényező* jellemzi.

A **túlterhelési tényező *n*** a test súlyának növekedését jellemző fizikai mennyiség, amely egyenlő a test *a* gyorsulásának és *g* nehézségi gyorsulásnak hányadosával:

$$n = \frac{a}{g}.$$

Ha a túlterhelés *n*-szeres ($a = ng$), a test súlya $(n + 1)$-szeresére nő.

Túlterhelés éri az űrhajósokat az űrhajó fel-, illetve leszállásakor; a repülőgép pilótáját manőverezés közben; az utast a liftben (az emelkedés megkezdésekor, vagy a leereszkedés befejezésének pillanatában); a bizonyos magasságból ugró embereket és az állatokat a földet érés pillanatában stb. Túlterheléskor nemcsak a test nyomja erősebben a támasztékot, hanem a testrészek is erősebben nyomják egymást. Túlterheléskor az ember látása rövid időre gyengülhet, gyorsabb lesz a szívverése, nehezebbé válik a légzése, ezért a hosszú ideig tartó túlterhelést csak az edzett emberek képesek elviselni.

3 Mikor kerül a test a súlytalanság állapotába?

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a gyorsulás, amivel a test mozog, függőlegesen lefelé irányul (ez történik például, amikor a gépkocsi domború hídon halad, az ejtőernyős ugrásakor stb.).

Legyen a test a támasztékon és mozogjon vele együtt lefelé irányuló $\vec{a}$ gyorsulással. A testre két erő hat: az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a támaszték $\vec{N}$ reakcióereje (lásd a 26.4. *b* ábrát). Newton második törvénye szerint $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$. Átírjuk ezt az egyenletet *OY* irányú vetületi egyenletként:

$$-mg + N = -ma \Rightarrow N = mg - ma = m(g - a).$$

Newton harmadik törvényének megfelelően $P = N$. Végezetül:

$$P = m(g - a).$$

Tehát *a függőlegesen lefelé irányuló gyorsulással mozgó test súlya kisebb, mint a nyugalomban lévő test súlya.*

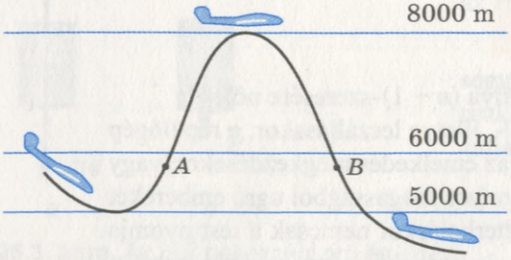
Ha ebben az esetben a test gyorsulása egyenlő a nehézségi gyorsulással ($\vec{a} = \vec{g}$), akkor a test súlya nullával egyenlő, következésképpen a test nem hat a támasztékra.

A testnek azt az állapotát, amikor a súlya nullával egyenlő, **súlytalansági állapotnak** nevezzük.

A súlytalanság állapotában a testre csak a nehézségi erő hat (a test szabadesést végez), és fordítva: *ha a test csak a nehézségi erő hatására mozog, akkor súlytalanság állapotában van.*

A súlytalanság állapotában nemcsak a test nem nyomja a támasztékot, hanem a test egyes részei sem nyomják egymást. Az űrhajós a pályán (jusson eszetekbe: a pályán az űrhajó csupán a nehézségi erő hatására mozog) nem érzi saját testsúlyát, a

kezéből kieresztett test nem esik le. Ezeknek a jelenségeknek az az oka, hogy a nehézségi erő a szabadon eső testtel, annak bármely részével és minden környező testtel azonos gyorsulást közöl.



26.5. ábra. A súlytalanság állapotának imitálása a repülőgép ballisztikus pályán való mozgása során. A súlytalanság a görbe *AB* részén lép fel és 25–35 s-ig tart

A súlytalanság állapotát nem feltétlenül szükséges földkörüli pályán átélni – elég egyszerűen felugrani. Az űrhajósok gyakorlatozásakor azt a tényt használják, hogy a horizonthoz képest bizonyos szögben elhajított test a nehézségi erő hatására parabolapályán mozog. Ha az atmoszféra felső rétegeiben a repülőgépet emelkedő pályára irányítják („elhajítják" bizonyos szögben a horizonthoz képest), majd kikapcsolják a hajtóműveket, akkor a repülőgép parabolapályán való mozgása során minden benne lévő test a súlytalanság állapotában van (26.5. ábra).

4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

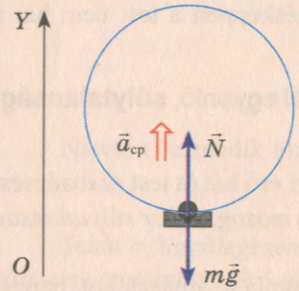
Feladat. A repülőgép „halálbukfencet" hajt végre, függőleges síkban 250 m sugarú körvonalat leírva. Hányszor nagyobb a pilóta súlya a pálya alsó pontjában a nehézségi erőhöz képest, ha a repülőgép sebessége 100 m/s?

Adott:
$r = 250$ m
$v = 100$ m/s
$g \approx 10$ m/s^2

$\frac{P}{F_{neh}} - ?$

A fizikai probléma elemzése. A repülőgép körpályán mozog állandó sebességgel, tehát állandó centripetális gyorsulással rendelkezik.

Magyarázó rajzot készítünk, amin feltüntetjük a pilótára ható erőket és a gyorsulásának irányát. A koordináta-rendszert a Föld felszínének egy meghatározott pontjához rendeljük, az *OY* tengelyt pedig függőlegesen felfelé irányítjuk.



Matematikai modell keresése, megoldás.

Newton második törvényének megfelelően:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{cp}.$$

Átírjuk ez utóbbit az *OY* irányú vetületi egyenletként:

$$-mg + N = ma_{cp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = mg + ma_{cp} = m\,(g + a_{cp}) = m\,(g + v^2/r).$$

Newton harmadik törvényének értelmében:

$$P = N = m\,(g + v^2/r).$$

Tehát: $\frac{P}{F_{neh}} = \frac{m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)}{mg} = \frac{g + \frac{v^2}{r}}{g}$.

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$\left[\frac{P}{F_{neh}}\right] = \frac{m/s^2 + m/s^2}{m/s^2} = 1; \left\{\frac{P}{F_{neh}}\right\} = \frac{10 + 10\,000 : 250}{10} = 5; \frac{P}{F_{neh}} = 5.$$

Az eredmény elemzése. A test súlya ötször nagyobb a nehézségi erőnél, tehát a túlterhelési tényező 4-gyel egyenlő. Ez teljesen valós eredmény.

Felelet: A pálya alsó pontjában a pilóta súlya ötször nagyobb a nehézségi erőnél.

Összegzés

A test súlya olyan rugalmassági erő, amivel a Föld vonzásának következtében a test a vízszintes támasztékra vagy a függőleges függesztékre hat.

Newton harmadik törvényének megfelelően az az erő, amellyel a test a támasztékra (függesztékre) hat, nagyságára nézve egyenlő, irányát tekintve padig ellentétes azzal az erővel, amellyel a támaszték (függeszték) hat a testre: $\vec{P} = -\vec{N}$ ($\vec{P} = -\vec{T}$).

Ha a test nyugalmi állapotban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, akkor súlya értékét tekintve megegyezik a nehézségi erővel és azonos irányú vele: $P = mg$.

Ha a test függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással mozog, akkor a súlya nagyobb, mint a nyugalomban lévő test súlya: $P = m(g + a)$. Ekkor a testet túlterhelés éri.

Ha a test függőlegesen lefelé irányuló gyorsulással mozog, akkor a súlya kisebb, mint a nyugalomban lévő test súlya: $P = m(g - a)$; emellett, ha a test gyorsulása egyenlő a nehézségi gyorsulással ($a = g$), akkor a test súlytalansági állapotban van.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk a test súlyának? **2.** Mi a különbség a test súlya és a nehézségi erő között? **3.** Magyarázzátok meg a test súlyának létrejöttét, ha a test támasztékon vagy függesztéken helyezkedik el! **4.** Mivel egyenlő a test súlya, ha nyugalmi állapotban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez? **5.** Vezessétek ki a függőlegesen felfelé, illetve a függőlegesen lefelé irányuló gyorsulással mozgó test súlyának meghatározására szolgáló képletet! **6.** Mi a túlterhelés? Miért kell figyelembe venni? **7.** Mi a súlytalanság? Milyen feltételek mellett kerül a test a súlytalanság állapotába?

22. gyakorlat

A feladatok megoldása során tekintsétek úgy, hogy $g \approx 10$ m/s^2.

1. Az ember egy 200 g tömegű almát tartva a kezében, leugrik a székről. Mekkora erővel nyomja az alma az ember kezét, miközben az ember még a levegőben van?

2. A liftben egy dinamométer van, amelyre egy 1 kg tömegű testet akasztottak. Milyen lesz a dinamométer állása, ha a lift gyorsulása: a) nulla; b) 5 m/s^2 és függőlegesen lefelé irányul; c) 5 m/s^2 és függőlegesen felfelé irányul?

3. Azonnal a startot követően az űrhajó függőlegesen felfelé irányuló 40 m/s² gyorsulással mozog. Mekkora erővel nyomja a 70 kg tömegű űrhajós az ülést? Mennyi a túlterhelési tényező?
4. Az 5 t tömegű gépkocsi a domború híd felső pontján 36 km/h sebességgel halad át. Mekkora erővel nyomja a gépkocsi ezt a pontot, ha a híd görbületi sugara 100 m? Milyen sebességgel kell haladnia a gépkocsinak, hogy a híd legfelső pontján súlytalanság állapotába kerüljön?
5*. A vízzel telt vödröt függőleges síkban forgatják egy 1 m hosszú zsinegen. Legalább mekkora fordulattal kell forgatni a vödröt ahhoz, hogy a pályájának legfelső pontjában ne ömöljön ki belőle a víz?

27. §. SÚRLÓDÁSI ERŐ

?! *Amontons Guillamue* (1663–1705) francia fizikus a súrlódás szerepéről elmélkedve ezt írta: „Mindannyiunkkal előfordult már, hogy rá kellett lépnünk a csúszós, jeges útra: mennyi erőfeszítésre van szükség ahhoz, hogy elkerüljük az esést, mennyi mókás mozdulatot kell elvégezni azért, hogy talpon maradjunk... Képzeljük el, hogy a súrlódás teljesen eltűnt. Akkor semmilyen test, legyen az sziklatömb méretű, avagy kicsi, mint a homokszemcse soha nem maradna egymáson. Ha nem lenne súrlódás, a Föld egyenetlenségek nélküli gömb lenne, akár a folyadékcsepp." Felidézzük, mi a súrlódási erő, milyen természetű, a súrlódásnak milyen fajtái léteznek.

1 A súrlódási erő milyen fajtái léteznek?

A test tetszőleges mozgása során feltétlenül érintkezésbe kerül a környező mikro- és makro testekkel (a másik test felületével, a folyadék vagy a gáz részecskéivel, amelynek belsejében az adott test mozog). Az ilyen érintkezések során olyan erők jönnek létre, amelyek lelassítják a test mozgását. Ezeket az erőket *súrlódási erőknek* nevezzük.

Súrlódási erőnek $\vec{F}_{súrl}$ nevezzük azt az erőt, amely az egyik testnek a másik felületén való mozgásakor, vagy annak megkísérlésekor keletkezik, vagy akkor, amikor a test cseppfolyós vagy gáznemű közeg belsejében mozog.



27.1. ábra. A hó felületéhez és a levegőhöz képest a síző jobbra mozog, ezért rá az $\vec{F}_{súrl\ 1}$ és az $\vec{F}_{ell}$ közegellenállási erő hat bal felé. A hó a sízőhöz képest balra mozog, a síző részéről a hóra az $\vec{F}_{súrl\ 2}$ erő hat jobb felé

A súrlódási erő mindig az érintkező testek felülete mentén irányul, relatív elmozdulásuk sebességével ellentétesen (27.1. ábra).

A szilárd test felszíne és az őt körülvevő cseppfolyós vagy gáznemű közeg között fellépő súrlódást, *közegellenállásnak*, vagy *nedves* (*viszkózus*) *súrlódásnak* nevezzük. A két érintkező szilárd test felszíne között fellépő súrlódást *száraz súrlódásnak* nevezzük. Háromféle száraz súrlódást különböztetnek meg: *nyugalmi*, *csúszó* és *gördülő súrlódást*.

2 Mi az oka a száraz súrlódás létrejöttének?

Egy erős felbontású nagyító segítségével, két érintkező test felületét vizsgálva óriási számú apró egyenetlenséget (rovátkákat, érdességeket) látunk. Amikor valamely test a másik felületén csúszik vagy csúszni próbál, az érdes felületek egymásba akadnak és deformálódnak. *Rugalmassági erők* jönnek létre a deformáció irányával ellentétesen. Érthető, hogy egyetlen ilyen egyenetlenség nem képes olyan jelentős erőt kifejteni, amely akadályozná a test mozgását, azonban számtalan ilyen egyenetlenség van, ezért az összes rugalmassági erő összege már észrevehető súrlódási erőt hoz létre, ami a test mozgásával, vagy elmozdulási kísérletével szemben hat (27.2. ábra). Ez a súrlódási erő létrejöttének egyik oka.

Van egy másik ok is. Egyes helyeken a testek kiálló részei annyira szorosan nyomódnak egymáshoz, annyira kicsi közöttük a távolság, hogy *molekulák közötti vonzóerő* lép fel, aminek eredményeként egyes kiemelkedések mintha „összeragadnának". Érthető, hogy az ilyen „összeragadás" a teljes mozgás során végbemegy, így gátolja azt.

Mind a rugalmassági erő, mind a molekulák közötti vonzóerő elektromágneses eredetű, ezért a súrlódási erő elektromágneses természetű.



27.2. ábra. Egyik testnek a másik felületén történő mozgásakor vagy az elmozdulásra tett próbálkozások alkalmával a testek felületeinek egyenetlenségei deformálódnak; az emiatt keletkező rugalmassági erők összege létrehozza a súrlódási erőt: $\vec{F}_{súrl} = \Sigma \vec{F}_{rug}$

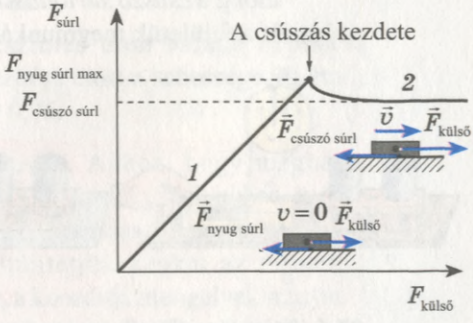
3 Miért nevezik a nyugalmi súrlódási erőt hajtóerőnek?

Nyugalmi vagy tapadási súrlódási erőnek $\vec{F}_{nyug\ súrl}$ nevezzük azt az erőt, ami két test érintkező felületei között hat és gátolja az egyik test másikon való mozgásának létrejöttét.

Ha megpróbáltok elmozdítani egy nehéz könyvet, alig megtolva az ujjatokkal, akkor a könyv nem mozdul el, mert nyugalmi súrlódási erő jön létre, ami kiegyenlíti az általatok befektetett erőt. Minél nagyobb erőt fejtettek ki, annál nagyobb lesz a nyugalmi súrlódási erő. *A nyugalmi súrlódási erő nagyságát tekintve egyenlő, irányát tekintve pedig ellentétes azzal a külső erővel, amely a testek érintkezési felülete mentén hat és megkísérli a test elmozdítását a helyéről* (27.3. ábra):

$$\vec{F}_{nyug\ súrl} = -\vec{F}_{külső}.$$

Nyilvánvaló, hogy minél erősebben nyomják össze az érintkező testek felületét, annál erősebben akadnak össze az egyenetlenségeik. Éppen ezért nehezebb elmozdítani a helyéről a nehéz testet, mint a könnyűt. A nyugalmi súrlódási erő



27.3. ábra. Az $\vec{F}_{nyug\ súrl}$ nyugalmi súrlódási erő nagyságát tekintve egyenlő a testre ható (külső) $\vec{F}_{külső}$ erővel. Amikor az $\vec{F}_{nyug\ súrl\ max}$ nyugalmi súrlódási erő eléri a legnagyobb értékét, a test elmozdul (csúszni kezd)



27.4. ábra. A gépkocsi gumiabroncsa (*a*) és az ember talpa (*b*) az úttal való érintkezés pillanatában a lényeget tekintve hátrafelé próbálnak mozogni. Ennek eredményeként nyugalmi súrlódási erő jön létre, ami előre hat, ez a hajtóerő.

nagyon hasznos: ezért hagynak nyomot a golyóstollak és a ceruzák a papíron, a tárgyak ezért nem csúsznak ki a kézből, nem oldódnak ki a csomók; ez az erő tartja meg a homokszemcsét a homokdombon, a nehéz köveket a domboldalon, a növények gyökerét a talajban. Éppen a nyugalmi súrlódási erő az a *hajtóerő*, ami lehetővé teszi az emberek, állatok, a közlekedési eszközök mozgását (27.4. ábra).

4 Milyen tényezőktől függ a csúszó súrlódási erő?

Miután a testre ható külső erő kiegyenlítődik a maximális nyugalmi súrlódási erővel, a test csúszni kezd. Ebben az esetben *csúszó súrlódási erőről* beszélnek.

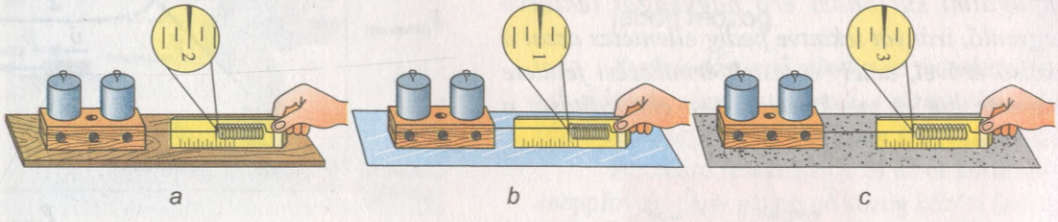
Csúszó súrlódási erőnek $\vec{F}_{\text{csúszó súrl}}$ nevezzük azt az erőt, amely az egyik testnek a másik felületén való vi-szonylagos elmozdulásakor (csúszásakor) keletkezik.

A csúszó súrlódási erő mindig a testek érintkezési felülete mentén hat a testek viszonylagos sebességével ellentétes irányban (lásd a 27.1., 27.3. ábrákat).

Kísérleti bizonyítást nyert, hogy *a csúszó súrlódási erő a testek érintkezési felületeinek tulajdonságaitól függ* (27.5. ábra), *és egyenesen arányos a támaszték* ***normális reakcióerejével*** $\vec{N}$ (***a nyomóerővel***) (27.6. ábra). Ezt az összefüggést a következő alakban lehet felírni:

$$F_{\text{csúszó súrl}} = \mu N,$$

ahol μ a *csúszó súrlódási tényező*, ami különösen az érintkező testek anyagától, valamint a felületük megmunkálásnak minőségétől függ*.

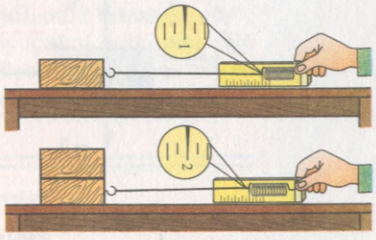


27.5. ábra. Ha változik az érintkező felületek anyaga, megváltozik a csúszó súrlódási erő is. A fahasáb: *a*) deszkán; *b*) üvegen; *c*) dörzspapíron csúszik

* A csúszó súrlódási tényező az *érintkező felületek egymáshoz viszonyított sebességétől* is függ. Kis sebességek esetén ez az összefüggés jelentéktelen, ezért a feladatok megoldásánál nem számolunk vele.

A csúszó súrlódási együtthatót kísérleti úton határozzák meg. Általában a *csúszó súrlódási együttható táblázati értékei az anyagpárokra jellemző átlagértékeket tartalmazzák*:

Anyagok	Csúszó súrlódási tényező μ
Acél a jégen	0,02
Acél az acélon	0,20
Fa a fán	0,25
Papír a fán	0,40
Bőr az öntöttvason	0,56
Gumi a betonon	0,75



27.6. ábra. Ha azt az erőt (nyomóerőt), amely a hasábot az asztal felületéhez nyomja kétszeresére növeljük, akkor a csúszó súrlódási erő is kétszeresére nő

Meg kell jegyezni, hogy: 1) *a nyugalmi súrlódási erő és a csúszó súrlódási erő nem függ az érintkező felületek területétől*, ezért például a korcsolya megélezése nem növeli a súrlódási erőt; 2) *a csúszó súrlódási erő valamivel kisebb a maximális nyugalmi súrlódási erőnél* * (lásd a 27.3. ábrát), ezért a test megrántódik, amikor elmozdul a helyéről, a nehéz tárgyakat pedig nehezebb elmozdítani a helyükről, mint azután húzni.

A csúszó súrlódási erő csökkenthető az érintkező felületek kenésével. A szilárd kenés megváltoztatja a felületek minőségét, a folyékony pedig eltávolítja egymástól az érintkező felületeket, aminek eredményeként *a száraz súrlódást sokkal kisebb nedves súrlódás váltja fel*.

A súrlódás jelentősen csökken, ha az érintkező felületek között szilárd görgőket helyezünk el. A kísérlet azt mutatja, hogy azonos feltételek mellett a *csúszó súrlódási erő több tucatszor nagyobb a gördülő súrlódási erőnél*. Azt javasoljuk, hogy önállóan ismerkedjetek meg részletesebben a gördülő és a nedves súrlódással.

5 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

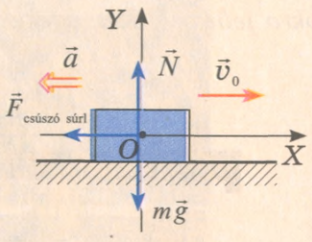
Feladat. Számítsátok ki az egyenes, vízszintes úton haladó gépkocsi féktávolságát és fékezési idejét, ha a fékezés megkezdése előtt a sebessége 90 km/h volt! A guminak a betonon való súrlódási tényezője 0,75.

Adott:
$v = 90$ km/h $=$
$= 25$ m/s
$\mu = 0{,}75$
$g \approx 10$ m/s^2

$s - ?$
$t - ?$

A fizikai probléma elemzése. Ahhoz, hogy meghatározzuk a gépkocsi fékútját és fékezési idejét, tudnunk kell a mozgásának gyorsulását. Kisegítő rajzot készítünk, amelyen feltüntetjük azokat az erőket, amelyek az autóra hatnak, a koordinátatengelyek irányát (a VR-t a Föld egy bizonyos pontjához kötjük), a sebesség és a gyorsulás irányait (mivel a gépkocsi sebessége csökken, ezért a gyorsulás iránya ellentétes a sebesség irányával).

* A feladatok megoldásánál úgy tekintjük, hogy $F_{\text{nyug súrl max}} = F_{\text{csúszó súrl}} = \mu N$.



Matematikai modell keresése, megoldás. Newton második törvényének megfelelően:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{csúszó súrl}} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Az ábra alapján megkeressük az erők vetületeit az OX és OY tengelyre, és leírjuk a csúszó súrlódási erő kiszámítására szolgáló képletet:

$$\begin{cases} OX: -F_{\text{csúszó súrl}} = -ma \text{ (mivel } mg_x = 0;\ N_x = 0), \\ OY: -mg + N = 0 \text{ (mivel } F_{\text{súrl}\,y} = 0;\ a_y = 0), \\ F_{\text{csúszó súrl}} = \mu N. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert, megkeressük az a-t:

$N = mg \Rightarrow F_{\text{csúszó súrl}} = \mu mg \Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g.$

A féktávolság és a fékezési idő meghatározásához az egyenletesen gyorsuló mozgás sebesség és elmozdulás vetületeinek képleteit alkalmazzuk:

$$v_x = v_{0x} + a_x t;\ s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Konkretizáljuk ezeket az egyenleteket: $v_x = 0$; $v_{0x} = v_0$; $a_x = -a$; $s_x = s$, innen $0 = v_0 - at$; $s = \frac{v_0^2}{2a}$. Tehát: $v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$. Annak figyelembevételével, hogy $a = \mu g$, véglegesen: $s = \frac{v_0^2}{2\mu g}$; $t = \frac{v_0}{\mu g}$.

Meghatározzuk a keresett mennyiségek értékeit:

$$[s] = \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{m/s}^2} = \text{m},\ \{s\} = \frac{625}{15} \approx 42,\ s \approx 42 \text{ m};$$

$$t = \frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = \text{s};\ \{t\} = \frac{25}{7{,}5} \approx 3{,}3,\ t \approx 3{,}3 \text{ s}.$$

Felelet: a féktávolság $s \approx 42$ m; a fékezési idő $t \approx 3{,}3$ s.

Összegzés

A súrlódási erő olyan erő, amely az egyik testnek a másik felületén való mozgásakor, illetve annak megkísérlésekor, vagy a test cseppfolyós, illetve gáznemű közegben való mozgásakor jön létre. A súrlódási erő mindig az érintkező testek felülete mentén hat egymáshoz viszonyított elmozdulásuk sebességével ellentétes irányban.

A nyugalmi súrlódási erő olyan erő, ami akkor jön létre, amikor a testre olyan külső erő hat, ami megpróbálja elmozdítani a testet a helyéről. A nyugalmi súrlódási erő nagyságát tekintve egyenlő, irányát tekintve pedig ellentétes a külső erővel: $\vec{F}_{\text{nyug súrl}} = -\vec{F}_{\text{külső}}$.

A csúszó súrlódási erő az egyik testnek a másik felületén való csúszásakor keletkezik. A csúszó súrlódási erő egyenesen arányos a támaszték normális reakcióerejével: $F_{\text{csúszó súrl}} = \mu N$, ahol μ a csúszó súrlódási tényező, ami különösen az érintkező testek anyagától, valamint a felületük megmunkálásának minőségétől függ.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiáljuk a súrlódási erőt? 2. A súrlódási erő milyen fajtáit ismeritek? 3. Milyen körülmények között jön létre a száraz súrlódás? A nedves súrlódás? 4. Mi az oka a csúszó súrlódásnak? Milyen természetű a csúszó súrlódási erő? 5. Melyik erővel egyenlő a nyugalmi súrlódási erő? 6. Miért nevezik a nyugalmi súrlódási erőt hajtóerőnek? 7. Hogyan definiáljuk a csúszó súrlódási erőt? Milyen az iránya, és milyen képlettel számítják ki az értékét? 8. Hogyan csökkenthető a csúszó súrlódási erő?

23. gyakorlat

1. Igaz-e az állítás, miszerint a súrlódás mindig gátolja a mozgást?
2. Miért veszélyes az autóvezetés nedves vagy jeges úton?
3. Soroljatok fel példákat arra, mikor kell a súrlódást növelni; csökkenteni. Hogyan lehet ezt elvégezni?
4. A fahasábot egyenletesen húzzák a vízszintes felületen, 1 N erő kifejtésével. Határozzátok meg a csúszó súrlódási tényezőt, ha a hasáb tömege 200 g!
5. Milyen legnagyobb gyorsulással mozoghat a gépkocsi, ha a gumiabroncs és az aszfalt közötti maximális nyugalmi súrlódási együttható 0,70?

6*. A 60 kg tömegű síző 40 másodperccel a lesiklás befejezését követően állt meg. Határozzátok meg a súrlódási erőt, ha a síző sebessége a lejtő végén 10 m/s volt!

4. SZ. LABORATÓRIUMI MUNKA

Téma: a csúszó súrlódási együttható mérése.

Cél: megmérni a fának a fán való csúszása súrlódási együtthatóját; meggyőződni arról, hogy a csúszó súrlódási együttható nem függ az érintkező testek felületétől.

Eszközök: fahasáb, széles favonalzó, 100 g-os súlyok, dinamométer.

A MUNKA MENETE

A kísérlet előkészítése

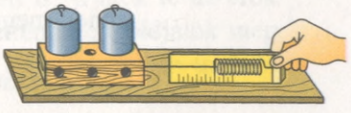
1. Mielőtt elkezditek a munkát, idézzétek fel a válaszokat az alábbi kérdésekre, és oldjátok meg a feladatot!

   1) Mi a súrlódás létrejöttének az oka?

   2) Mitől függ és merre irányul a csúszó súrlódási erő?

   3) Milyen képlettel számítható ki a csúszó súrlódási erő?

Feladat. Az m tömegű hasábot egy dinamométer segítségével egyenletesen és egyenes vonalúan mozgatják az asztal vízszintes felületén (lásd a rajzot). Tüntessétek fel a hasábra ható erőket! Határozzátok meg a csúszó súrlódási tényezőt, ha a hasábra ható erő (a dinamométer állása) egyenlő F-fel!



2. Elemezzétek a feladat megoldása során kapott képletet! Tisztázzátok, milyen fizikai mennyiségeket kell megmérni a laboratóriumi munka elvégzése során, és ehhez milyen műszerekre van szükség!

Kísérlet

A mérések eredményeit foglaljátok táblázatba!

1. Mérjétek meg a hasáb tömegét, felakasztva a dinamométer horgára! Newton harmadik törvényének megfelelően a hasáb súlya nagyságát tekintve megegyezik a támaszték reakcióerejével ($P = N$).
2. Fektessétek a hasábot széles oldallapjával a vízszintesen elhelyezett vonalzóra. A dinamométer segítségével egyenletesen mozgassátok a hasábot. A dinamométer állása alapján határozzátok meg a csúszó súrlódási erőt: $F_{\text{csúszó súrl}} = F_{\text{rug}}$.
3. Ismételjétek meg a kísérletet még háromszor! Helyezzetek sorban először egy, majd két (lásd az ábrát), végül három súlyt a hasábra! Minden kísérletben határozzátok meg a támaszték normális reakcióerejét: $N = P_{\text{hasáb}} + P_{\text{súly}}$.
4. Végezzétek el ugyanazokat a kísérleteket, a keskenyebb oldallapjára fektetve a hasábot!

A kísérlet sorszáma	A hasáb széles oldallapja		A hasáb keskeny oldallapja	
	Csúszó súrlódási erő $F_{\text{csúszó súrl}}$, N	A támaszték normális reakcióereje N, N	Csúszó súrlódási erő $F_{\text{csúszó súrl}}$, N	A támaszték normális reakcióereje N, N

A kísérleti eredmények feldolgozása

1. Számítsátok ki a $\mu_{\text{átl1}}$ csúszó súrlódási tényező átlagértékét a hasáb széles oldalára! Ehhez végezzétek el a következő lépéseket!

   1) A kísérletek alapján ábrázoljátok az $F_{\text{csúszó súrl}}$ csúszó súrlódási erő és az N normális reakcióerő közötti összefüggés grafikonját!
   (Figyeljétek meg: ha a test nem nyomja a támasztékot, akkor $F_{\text{csúszó súrl}} = 0$, ezért a grafikon átmegy az ($N = 0$; $F_{\text{csúszó súrl}} = 0$) ponton; a grafikont úgy kell meghúzni, hogy az egyenes két oldalán nagyjából azonos számú pont legyen)!

   2) Kiválasztva a grafikonon egy tetszőleges pontot, és meghatározva az ennek megfelelő csúszó súrlódási erőt $F_{\text{csúszó súrl}}$, valamint N reakcióerőt, alkalmazzátok a $\mu_{\text{átl1}} = \frac{F_{\text{csúszó súrl}}}{N}$ egyenletet.
2. Hasonlóképpen számítsátok ki a $\mu_{\text{átl2}}$ csúszó súrlódási tényező átlagértékét a hasáb keskeny oldalára!
3. Értékeljétek a csúszó súrlódási tényező értéke mérésének abszolút és relatív hibáját a hasáb széles, illetve keskeny oldalán! Ehhez végezzétek el a következőket!

1) Számítsátok ki a dinamométer rugalmassági ereje méréshibáját: $\Delta F = \Delta N = \sqrt{\Delta F_{\text{műsz}}^2 + \Delta F_{\text{vél}}^2}$; $\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{F_{\min}}$; $\varepsilon = \frac{\Delta N}{N_{\min}}$.

2) Számítsátok ki csúszó súrlódási tényező mérésének abszolút és relatív hibáját: $\varepsilon_\mu = \varepsilon_F + \varepsilon_N$; $\Delta\mu = \varepsilon_\mu \cdot \mu_{\text{átl}}$.

4. Az eredményeket kerekítsétek, a csúszó súrlódási tényező mérésének eredményeit a hasáb széles, illetve keskeny oldala számára a következő alakban: $\mu = \mu_{\text{átl}} \pm \Delta\mu$!

A kísérlet eredményeinek elemzése

Elemezve a kísérlet eredményeit, vonjatok le következtetést, amiben tüntessétek fel, milyen mennyiséget mértetek, mi a mérések eredménye, mi a hiba oka, függ-e a mért mennyiség a hasáb oldalának területétől.

+ Alkotó feladat

Találjatok ki kísérletet, hogyan tudnátok megvizsgálni a csúszó súrlódási tényező és az érintkező anyagok fajtája közötti összefüggést! Végezzétek el a kísérletet, írjátok le az eredményeit, vonjatok le következtetést!

28. §. A TEST MOZGÁSA TÖBB ERŐ HATÁSÁRA

?! A paragrafus tanulmányozása során megismerkedtek a feladatok megoldásának szakaszaival a dinamika témaköréből, áttekintitek néhány kulcsfeladat megoldásának példáját. A paragrafus anyagát gondosan kell feldolgozni, mivel hasonló feladatokkal találkozni fogtok a fizika tananyagának további tanulmányozása során.

1 A dinamika témaköréből származó feladatok megoldásának algoritmusa

1. Figyelmesen olvassátok el a feladat feltételét! Tisztázzátok, milyen erők hatnak a testre, milyen jellegű a mozgása (gyorsulással vagy egyenletesen, egyenes vonalúan mozog)!
2. Készítsetek magyarázó rajzot, amelyen tüntessétek fel a testre ható erőket és a test gyorsulásának irányát!
3. Válasszátok ki a koordináta-rendszert*! A koordinátatengelyek irányát úgy ajánlatos megválasztani, hogy lehetőleg minél több erő irányuljon a tengelyek mentén (ez nem változtatja meg a megoldás eredményét, de jelentősen leegyszerűsíti azt).
4. Írjátok fel Newton második törvényének egyenletét vektoros alakban, valamint a koordinátatengelyekre eső vetületek alakjában is! Írjátok le az erők kiszámítására szolgáló képleteket! A kapott egyenletrendszert oldjátok meg általános alakban az ismeretlen mennyiségre nézve. Ha a feladatban további feltételek is szerepelnek, használjátok fel azokat.
5. Ellenőrizzétek a mértékegységet, és határozzátok meg a keresett mennyiség számértékét! Elemezzétek az eredményt, és írjátok le a feleletet!

* A koordináta-rendszert úgy ábrázoljuk, hogy a koordinátatengelyek metszéspontja egy egyenesen feküdjön a test tömegpontjával. Eközben emlékezni kell arra, hogy ez a pont mozdulatlan a Föld felszínéhez képest.

2 A test csúszása vízszintes felületen

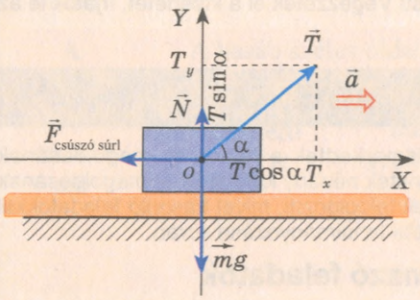
1. feladat. Egy 10 kg tömegű testet 40 N erővel húznak vízszintes felületen. A testhez kötött zsineg a vízszintessel 30°-os szöget zár be. A test gyorsulása 2,5 m/s². Határozzátok meg a test és a felület közötti súrlódási tényezőt!

Adott:
$m = 10$ kg
$T = 40$ N
$\alpha = 30°$
$a = 2{,}5$ m/s²
$g \approx 10$ m/s²

μ – ?

A fizikai probléma elemzése. A testre négy erő hat: az $m\vec{g}$ nehézségi erő, a támaszték $\vec{N}$ normális reakcióereje, a madzag $\vec{T}$ feszítőereje és az $\vec{F}_{\text{csúszó súrl}}$ csúszó súrlódási erő. A test növeli a mozgássebességet, tehát a gyorsulás és a sebesség azonos irányú.

Magyarázó rajzot készítünk, amelyen feltüntetjük a testre ható erőket, a mozgás sebességének és gyorsulásnak irányát.



A koordináta-rendszert a Föld felszínén lévő testhez kötjük, az OY tengelyt függőlegesen felfelé irányítjuk, az OX tengelyt pedig vízszintesen, a test mozgásával megegyező irányban.

Matematikai modell keresése, megoldás. Newton második törvényét vektoros formában írjuk fel: $\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{csúszó súrl}} = m\vec{a}$.

Levetítjük a képletet a koordinátatengelyekre (a $\vec{T}$ feszítőerő nem fekszik a koordinátatengelyen, ezért a vetületének meghatározásához a $\vec{T}$ végpontjaiból merőlegeseket bocsátunk az OX és OY tengelyre: $T_x = T\cos\alpha$; $T_y = T\sin\alpha$) és felírjuk a súrlódási erőre vonatkozó kifejezést:

$$\begin{cases} OX\text{: } T\cos\alpha - F_{\text{csúszó súrl}} = ma \text{ (mivel } N_x = 0;\ mg_x = 0), \\ OY\text{: } T\sin\alpha + N - mg = 0 \text{ (mivel } F_{\text{csúszó súrl}\,y} = 0), \\ F_{\text{csúszó súrl}} = \mu N. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszert, meghatározzuk a μ -t:

$N = mg - T\sin\alpha \Rightarrow F_{\text{csúszó súrl}} = \mu(mg - T\sin\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow T\cos\alpha - \mu(mg - T\sin\alpha) = ma \Rightarrow \mu = \frac{T\cos\alpha - ma}{mg - T\sin\alpha}.$$

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$$[\mu] = \frac{\text{N} - \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2 - \text{N}} = \frac{\text{N}}{\text{N}} = 1; \quad \{\mu\} = \frac{40\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 25}{100 - 40:2} = 0{,}12; \quad \mu = 0{,}12.$$

Felelet: a csúszó súrlódási tényező $\mu = 0{,}12$.

3 A test mozgása ferde síkon

2. feladat. A 4 t tömegű gépkocsi emelkedőn halad, lassuló mozgást végezve. Számítsátok ki a gépkocsi húzóerejét, ha a lejtő hajlásszöge 0,02, a közegellenállási tényező pedig 0,04! A gépkocsi gyorsulása állandó, 0,15 m/s^2.

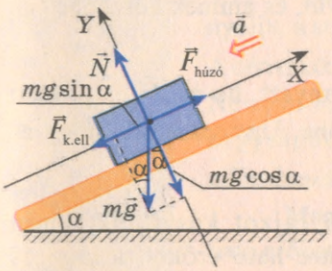
Figyeljétek meg: a feladatban két, számotokra új kifejezés szerepel: a dőlésszög és a közegellenállási tényező. Ezek sok fizikai feladatban előfordulnak.

A *hajlásszög* az úttest vízszintessel bezárt szögének szinusza. Ha a dőlésszög kicsi (kevesebb, mint 0,1), akkor cos $\alpha \approx 1$ (a kis szögekre nézve sin $\alpha \approx \alpha$, ezért néha a hajlásszöget α-val jelölik).

A *közegellenállási tényező* a súrlódás minden fajtáját beszámítja (ebben az esetben a kerekek gördülő súrlódását az úttesten, a csúszó súrlódást a tengelyekben). A közegellenállási tényezőt μ-vel jelölik; az $F_{\text{k.ell}}$ közegellenállási erő a test mozgásával ellentett irányú és ezzel a képlettel számítható ki: $F_{\text{k.ell}} = \mu N$.

Adott:
$m = 4 \cdot 10^3$ kg
sin $\alpha = 0{,}02$
$\mu = 0{,}04$
$a = 0{,}15$ m/s^2
$g \approx 10$ m/s^2

$F_{\text{húzó}} - ?$



A fizikai probléma elemzése. A testre négy erő hat: az $m\vec{g}$ nehézségi erő, a támaszték $\vec{N}$ normális reakcióereje, az $\vec{F}_{\text{húzó}}$ húzóerő és az $\vec{F}_{\text{k.ell}}$ közegellenállási erő.

A test csökkenti a sebességét, ezért mozgásának gyorsulása a mozgásával szemben irányul.

Magyarázó rajzot készítünk, amin feltüntetjük a testre ható erőket, a mozgás sebességét és gyorsulását. A koordináta-rendszert a Föld felületén lévő testhez rögzítjük, az OY tengelyt merőlegesen az út felszínére állítjuk, az OX tengelyt az út mentén (a tengelyek ilyen megválasztásakor csak egy erő ($m\vec{g}$) nem fekszik a koordinátatengelyeken).

Matematikai modell keresése, megoldás. Newton második törvényét vektoros formában írjuk fel:

$$\vec{F}_{\text{húzó}} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{k.ell}} = m\vec{a}.$$

Levetítjük a képletet a koordinátatengelyekre (az $m\vec{g}$ nehézségi erő nem fekszik a koordinátatengelyen, ezért a vetületének meghatározásához a végpontjaiból merőlegeseket bocsátunk az OX és OY tengelyre: $mg_x = -mg \sin\alpha$; $mg_y = -mg \cos\alpha$) és kifejezzük az $F_{\text{k.ell}}$-t:

$$\begin{cases} OX\text{: } F_{\text{húzó}} - F_{\text{k.ell}} - mg\sin\alpha = -ma, \\ OY\text{: } N - mg\cos\alpha = 0, \\ F_{\text{k.ell}} = \mu N. \end{cases}$$

A kapott egyenletrendszert megoldva megkapjuk az $F_{\text{húzó}}$-t:

$$N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_{\text{k.ell}} = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\text{húzó}} - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = -ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\text{húzó}} = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha - ma = m(\mu g\cos\alpha + g\sin\alpha - a).$$

Meghatározzuk a keresett mennyiség értékét:

$[F_{\text{húzó}}] = \text{kg}(\text{m/s}^2 + \text{m/s}^2 + \text{m/s}^2) = \text{N};$

$\{F_{\text{húzó}}\} = 4 \cdot 10^3 \cdot (0{,}04 \cdot 10 + 10 \cdot 0{,}02 - 0{,}15) = 1{,}8 \cdot 10^3;$

$F_{\text{húzó}} = 1{,}8 \cdot 10^3\ \text{N} = 1{,}8\ \text{kN}.$

Felelet: a gépkocsi húzóereje $F_{\text{húzó}} = 1{,}8$ kN.

4 Körmozgás

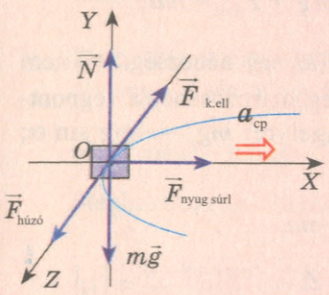
3. feladat. A vízszintes úton a gépkocsi 45 m sugarú körön elfordul. Milyen lehet a legnagyobb sebessége, hogy még bevegye a kanyart (ne sodródjon ki a kanyarban)? A gumi aszfalton való csúszó súrlódási tényezője 0,5.

Adott:
$r = 45$ m
$\mu = 0{,}5$
$g \approx 10\ \text{m/s}^2$

$v_{\max} - ?$

A fizikai probléma elemzése. A gépkocsi körvonal mentén mozog, tehát centripetális gyorsulása van. A gépkocsira öt erő hat: az $m\vec{g}$ nehézségi erő, a támaszték $\vec{N}$ normális reakcióereje, az $\vec{F}_{\text{húzó}}$ húzóerő és az $\vec{F}_{\text{k.ell}}$ ellenállási erő, valamint az $\vec{F}_{\text{nyug súrl}}$ nyugalmi súrlódási erő, amely a körvonal középpontja felé irányul, és aminek köszönhetően a gépkocsi be tud fordulni.

A gépkocsi akkor nem tudja bevenni a kanyart, ha az $\vec{F}_{\text{nyug súrl}}$ eléri maximális értékét és átmegy csúszó súrlódási erőbe. Úgy tekintjük, hogy az $\vec{F}_{\text{nyug súrl max}} = \mu N$, ahol μ a csúszó súrlódási tényező.



Magyarázó rajzot készítünk, amin feltüntetjük a testre ható erőket, a mozgás sebességét és gyorsulását. A koordinátarendszert a Föld felületén lévő testhez kötjük, az OY tengelyt merőlegesen az út felszínére állítjuk, az OX tengelyt a körvonal középpontja felé, az OZ tengelyt pedig a mozgás irányában helyezzük el.

Matematikai modell keresése, megoldás. Newton második törvényét vektoros formában írjuk fel:

$$\vec{F}_{\text{húzó}} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{k.ell}} + \vec{F}_{\text{nyug súrl}} = m\vec{a}_{\text{cp}}.$$

Az egyenletet leképezzük a koordinátatengelyekre; felírjuk az $F_{\text{nyug súrl max}}$-ra vonatkozó kifejezést, illetve az a_{cp}-re vonatkozó kifejezést:

$$\begin{cases} OX: \ F_{\text{nyug súrl}} = ma_{cp}, \\ OY: \ N - mg = 0, \\ OZ: \ F_{\text{húzó}} - F_{\text{k.ell}} = 0, \\ F_{\text{nyug súrl max}} = \mu N, \\ a_{cp} = \dfrac{v^2}{r}. \end{cases}$$

Megoldjuk a kapott lineáris egyenletrendszert a v-re nézve:

$$N = mg \Rightarrow F_{\text{nyug súrl max}} = \mu mg \Rightarrow \mu\ mg \Rightarrow ma_{cp} \Rightarrow \mu g = a_{cp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu g = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu g r}\ .$$

Meghatározzuk a keresett kifejezés értékét:

$$[v] = \sqrt{\text{m/s}^2 \cdot \text{m}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}; \ \{v\} = \sqrt{0{,}5 \cdot 45 \cdot 10} = 15; \ v = 15 \text{ m/s}.$$

Felelet: a gépkocsi legnagyobb sebessége $v_{max} = 15$ m/s.

5 Összekapcsolt rendszerek mozgása

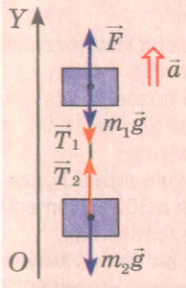
4. feladat. Két egyforma 1, illetve 2 kg súly erős, nem nyúló cérnával van összekötve. Az 1 kg-os súlyt 45 N erővel függőlegesen felfelé húzzák. Határozzátok meg a súlyok gyorsulását és a cérna feszítőerejét!

Adott:
$m_1 = 1$ kg
$m_2 = 2$ kg
$F = 45$ N
$g \approx 10$ m/s^2

$a - ?$
$T - ?$

A fizikai probléma elemzése. Mivel a cérna erős és nem nyúlik, a súlyok egységes egészként mozognak $\vec{a}$ gyorsulással. A cérna közvetítésével a súlyok kölcsönhatnak, $\vec{T}_1$ és $\vec{T}_2$ erővel. Newton harmadik törvényének megfelelően ezek az erők nagyságukat tekintve egyenlők, irányukat tekintve pedig ellentétesek ($\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$).

Magyarázó rajzot készítünk, feltüntetjük az egyes súlyra ható erőket és a súlyok mozgásának gyorsulását. Az OY tengelyt függőlegesen felfelé irányítjuk.



Matematikai modell keresése, megoldás. Minden súlyra felírjuk Newton második törvényét vektoros, illetve az OY tengelyre eső vetület alakjában:

$$\begin{cases} \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}, \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - m_1 g - T_1 = m_1 a, \\ m_2 g + T_2 = m_2 a; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F - m_1 g - T = m_1 a, \\ -m_2 g + T = m_2 a; \end{cases} \Rightarrow \text{(mivel } T_1 = T_2 = T\text{)}.$$

Az egyenlő együtthatók módszerével megoldjuk a rendszert:

$$F-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F}{m_1+m_2}-g\,.$$

A cérna feszítőerejét a rendszer második egyenletéből határozzuk meg: $T=m_2\,(a+g)$. Meghatározzuk a keresett mennyiségek értékét:

$$[a]=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg+kg}}+\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}=\frac{\mathrm{kg\cdot m/s^2}}{\mathrm{kg}}+\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}},\quad \{a\}=\frac{45}{1+2}-10=5,\quad a=5\ \mathrm{m/s^2};$$

$$[T]=\mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}+\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)=\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}=\mathrm{N},\quad \{T\}=2(5+10)=30,\quad T=30\ \mathrm{N}.$$

Felelet: a testek $a=5\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással mozognak, a cérna feszítőereje $T=30$ N.

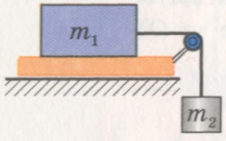
Összegzés helyett

Megismerkedtetek néhány, a dinamika témaköréhez tartozó típusfeladat megoldásával. Természetesen a tankönyv keretein belül lehetetlen minden típusú feladat áttekintése, de ez felesleges is. Az a fő, hogy rendelkeztek a megoldás algoritmusával és az ezzel való munka példáival. A többi rajtatok múlik.

Tehát, bármely feladat megoldásakor mindenekelőtt készítsetek magyarázó rajzot, tüntessétek fel az erőket, írjátok fel Newton második törvényének egyenletét, válasszátok meg a vonatkoztatási rendszert, keressétek meg a vetületeket. Természetesen tudni kell azt is, merrefelé hatnak az erők, mikor jönnek létre, és milyen képletekkel lehet meghatározni őket. A továbbiakban, még ha nem is látjátok át azonnal teljesen a feladat megoldásának menetét, nincs semmi baj. Mindenképpen találtok egy olyan mennyiséget, amelynek az ismerete segít megtalálni a megoldás menetét. Úgy is fogalmazhatunk: „Ha nem tudod, hogyan kell megoldani a feladatot, láss hozzá a megoldásához." Nem kell félni egy hibás lépéstől. Nem nyer az, aki nem tud veszíteni. Mindenki képes megtanulni a fizikai feladatok megoldását, ehhez csak az kell, hogy nekifogjatok!

24. gyakorlat

1. A szánhúzó kutyák állandó, 150 N erővel kezdik húzni a havon álló, 100 kg tömegű szánt. Mennyi idő alatt teszi meg a szán útjának első 200 méterét? Tekintsétek úgy, hogy a szántalp és a hó súrlódási tényezője 0,05.



2. Az $m_1 = 1$ kg tömegű test vízszintes felületen csúszik egy $m_2 = 250$ g tömegű test hatására (lásd az ábrát). Az adott testrendszer $1{,}5\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással mozog. Határozzátok meg a test és a felület közötti súrlódási tényezőt!

3. A szánkó egy 10 m hosszú dombról 2 másodperc alatt csúszik le. Határozzátok meg a lejtő hajlásszögét, ha a szántalp és a hó súrlódási tényezője 0,02!

4. A 3 t tömegű gépkocsi felfelé halad az emelkedőn, 3000 N húzóerőt kifejtve. Milyen gyorsulással mozog a gépkocsi, ha a közegellenállási tényező 0,04, a lejtő hajlásszöge pedig 0,03?

5. A munkás a csillét a vízszintessel 45°-os szöget bezáró lefelé irányuló erővel húzza. Milyen legkisebb erőt kell kifejtenie a munkásnak, hogy elmozdítsa a 300 kg tömegű csillét a helyéről, ha a közegellenállási tényező 0,01? A csille vízszintesen áll.

6. Az 50 cm hosszú cérnára felfüggesztett golyó vízszintes síkban forog. Milyen sebességgel mozog a golyó, ha a cérna kitérési szöge a függőlegeshez képest 60°?

29. §. A TESTEK EGYENSÚLYA. AZ ERŐNYOMATÉK. A FORGÁSTENGELLYEL RENDELKEZŐ TESTEK EGYENSÚLYÁNAK FELTÉTELE

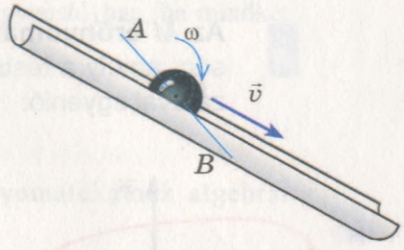
?! Képzeljétek el, hogy el kell érnetek a felső polcon lévő könyvet. Odahúztok egy széket, lábujjhegyre álltok, előrehajoltok és... elveszítitek az egyensúlyotokat. Ebben a paragrafusban arról lesz szó, mi az egyensúly a fizika szemszögéből, és milyen feltételek mellett van egyensúlyban a valós tárgy (nem pedig a modellje – az anyagi pont).

1 Mi az egyensúly?

A test egyensúlya a test mozgásállapotának vagy nyugalmi állapotának megőrzése az idő múlásával.

Mit jelent a *mozgásállapot megőrzése*?

Ha a test csak haladó mozgást végez, akkor a mozgásállapotának megőrzése azt jelenti, hogy a test haladó mozgásának a sebessége változatlan marad. A valós test a haladó mozgáson kívül forgó mozgást is végezhet egy bizonyos forgástengelyhez viszonyítva. Ha a homogén golyót ferde csatornába helyezzük, akkor gurulása közben egyidejűleg haladó és forgó mozgást végez (29.1. ábra). A golyó *megőrzi a mozgásállapotát, azaz egyensúlyban marad, ha a haladó és a forgó mozgásának sebessége változatlan marad.*



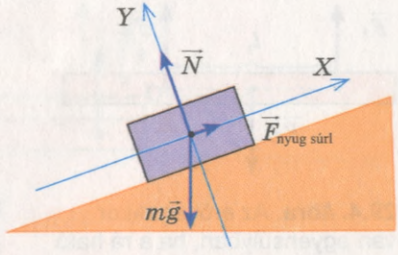
29.1. ábra. A ferde csatornában leguruló golyó mozgása összetett. Két egyszerű mozgásra bontható: bizonyos ω szögsebességű forgóra az *AB* tengelyhez képest és $\vec{v}$ sebességű haladóra, ami egyenlő a golyó *AB* egyenesen fekvő pontjainak mozgássebességével

2 A test egyensúlyának feltétele forgás hiányában

Áttekintjük azt a helyzetet, amikor a test valamilyen oknál fogva nem képes forogni. Ebben az esetben a test csak haladó mozgást végez. A tehetetlenségi törvénynek *megfelelően a haladó mozgást végző test megőrzi egyenletes mozgássebességét, ha a testre ható erők eredője nullával egyenlő.* A test egyensúlyának ez a feltétele így néz ki vektoros alakban:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0.$$

Legyen egy kis test nyugalomban egy ferde lejtőn (29.2. ábra). Ekkor három erő hat rá: az $m\vec{g}$ nehézségi erő, a támaszték $\vec{N}$ reakcióereje és az $\vec{F}_{\text{nyug súrl}}$ nyugalmi súrlódási erő. Nyilvánvaló: ha növeljük a lejtő hajlásszögét, akkor a nyugalmi súrlódási erő növekedni fog és végül eléri legnagyobb értékét (ebben a pillanatban $F_{\text{nyug.súrl}} = \mu N$). Ebben az esetben a test egyensúlyi állapotban van (nyugalomban



29.2. ábra. A ferde lejtőn elhelyezett test egyensúlyban (nyugalmi állapotban) van, mivel a rá ható erők kiegyenlítik egymást

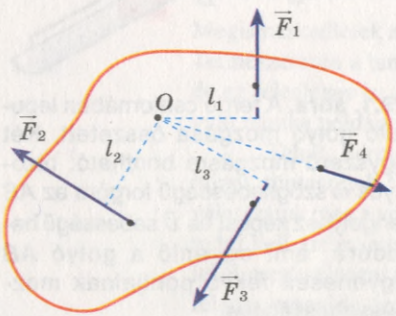
marad) addig, amíg a rá ható erők kiegyenlítik egymást: $\vec{F}_{\text{nyug súrl}} + m\vec{g} + \vec{N} = 0$. A hajlásszög további növelésekor a testre ható erők eredője már nem marad nulla és a test egyenletesen gyorsulva, mozogni kezd – egyensúlyi állapota megbomlik.

3 Erőnyomaték. A nyomatékszabály

Most megvizsgálunk egy olyan szilárd testet, amely nem képes haladó mozgást végezni, csupán egy mozdulatlan tengelyhez képest forogni (29.3. ábra). Ha a haladó mozgást végző test sebességváltozásának a rá ható erő az oka, akkor a *forgó mozgás sebességváltozásának az erőnyomaték az oka.*

Az M **erőnyomaték** (vagy forgatónyomaték) olyan fizikai mennyiség, amely a testre ható F erő nagyságának és az erőkarnak a szorzatával egyenlő:

$$M = Fl.$$



29.3. ábra. A test forgó mozgást végezhet az O ponton át a rajz síkjára bocsátott mozdulatlan tengely körül. A testre négy erő hat: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$. Az F_1 erő karja az l_1 szakasz; az F_2 erő karja az l_2 szakasz; az F_3 erő karja az l_3 szakasz; az F_4 erő karja pedig az l_4 szakasz

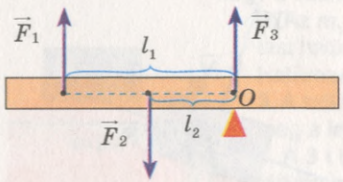
Az erőnyomaték egysége az SI-ben **newton-méter** (N · m).

Emlékeztetünk arra, hogy *az l erőkar a forgástengely és az erő hatásvonala közötti legkisebb távolság* (lásd a 29.3. ábrát).

A rajzon az F_1 erő az *óramutató járásával ellenkező irányban* fordítja el a testet. Az ilyen erők nyomatékát *pozitívnak* tekintik. Az F_2 és F_3 erők az *óramutató járásának irányában* fordítják el a testet. Az ilyen erők nyomatékát *negatívnak* tekintik. Az F_4 erő nyomatéka nulla és nem képes megváltoztatni a test forgó mozgásának sebességét. Általános esetben, ha a testre ható eredő erő forgatónyomatékának összege nulla, akkor a test nem változtatja meg forgó mozgásának sebességét és rögzített forgástengely mellett egyensúlyban lesz. Tehát az **erőnyomaték szabály**:

A rögzített forgástengellyel rendelkező test egyensúlyban van, ha a tengelyhez képest az összes rá ható erő nyomatékának algebrai összege nulla:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_N = 0.$$



29.4. ábra. Az erőkar akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők nyomatékainak összege nulla:
$M_1 + M_2 + M_3 = 0$, ahol $M_1 = -F_1 l_1$; $M_2 = F_2 l_2$; $M_3 = 0$

Például a vékony, súlytalannak tekinthető rúdra (erőkarra) három erő hat: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ és $\vec{F}_3$ (29.4. ábra). A kar egyensúlyban lesz, ha $M_1 + M_2 + M_3 = 0$. Eközben

$M_1 = -F_1 l_1$ (mivel az $\vec{F}_1$ erő az óramutató járásának irányában forgatja el a kart), $M_2 = F_2 l_2$ (mivel az $\vec{F}_2$ erő az óramutató járásával ellentétes irányában forgatja el a kart), $M_3 = 0$ (mivel $l_3 = 0$).

4 A test egyensúlya általános esetben

A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy a test egyidejűleg *végezhet* haladó és forgó mozgást (idézzétek fel a fent említett példát a golyó mozgásáról a ferde csatornában). Valójában számtalan ilyen példa van: a kanyarodó gépkocsi, a falhoz támasztott létra stb.

Ha a test képes haladó mozgást végezni és ezzel együtt egy bizonyos tengely körül forgó mozgást végezni, akkor ez a test akkor lesz egyensúlyban, ha mindkét egyensúlyi feltétel teljesül:

1) a testre ható erők eredője nulla:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0;$$

2) a rá ható erők (tengelyhez viszonyított) nyomatékainak algebrai összege nulla:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = 0.$$

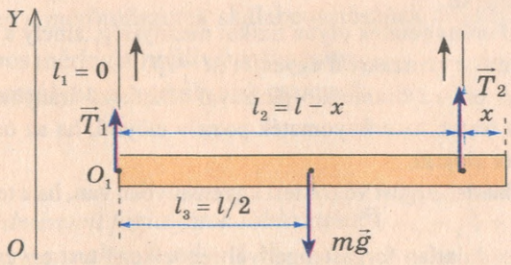
5 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. Egy homogén tömegeloszlású, 10 m hosszú és 900 kg tömegű síndarabot két párhuzamos sodronykötél segítségével emelnek fel. Számítsátok ki a sodronykötelek feszítőerejét, ha az egyiket a sín végén, a másikat a másik végétől 1 m távolságban rögzítik.

Adott:
$l = 10$ m
$m = 900$ kg
$x = 1$ m
$g \approx 10$ m/s^2

$T_1 - ?$
$T_2 - ?$

A fizikai probléma elemzése. Magyarázó rajzot készítünk, amelyen feltüntetjük a sínre ható erőket (az $m\vec{g}$ nehézségi erőt és a kötelekre ható $\vec{T}_1$ és $\vec{T}_2$ feszítőerőket), a megfelelő (l_1, l_2, l_3) erőkarokat, valamint az OY tengelyt, amit függőlegesen felfelé irányítunk.



A sín forgástengelyéül azt a tengelyt választjuk, amelyik áthalad az O_1 ponton és merőleges az ábra síkjára (ez a pont a kényelmi szempontok alapján tetszőlegesen megválasztható).

Matematikai modell keresése, megoldás. Felírjuk a test egyensúlyának két feltételét: $\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = 0, \\ M_1 + M_2 + M_3 = 0. \end{cases}$

Itt $M_1 = 0$ (mivel $l_1 = 0$), $M_2 = T_2(l - x)$ (a $\vec{T}_2$ erő az erőkart az óramutató járásával ellenkező irányban fordítja el); $M_3 = -mg\frac{l}{2}$ (az $m\vec{g}$ erő az óramutató járásának irányában fordítja el az erőkart).

Felírva az első vektoregyenlet OY irányú vetületi egyenletét és behelyettesítve az erőnyomatékok kifejezéseit a nyomaték szabályába, lineáris egyenletrendszert kapunk: $\begin{cases} T_1 + T_2 + mg = 0, \\ T_2(l - x) - mg\frac{1}{2} = 0. \end{cases}$

A második egyenletből meghatározzuk a T_2-t:

$$T_2(l - x) = mg\frac{1}{2} \Rightarrow T_2 = \frac{mgl}{2(l - x)}.$$

Az első egyenletből meghatározzuk a T_1-t: $T_1 = mg - T_2$.

Meghatározzuk a keresett mennyiségeket:

$$[T_1] = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \text{N} = \text{N}, \quad \{T_1\} = 900 \cdot 10 - 5000 = 4000, \quad T_1 = 4000 \text{ N} = 4 \text{ kN};$$

$$[T_2] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = \text{N}, \quad \{T_2\} = \frac{900 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 9} = 5000, \quad T_2 = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}.$$

Az eredmény elemzése. Az első sodronykötél a sínre kisebb erővel hat, mivel ez az erő a test súlypontjától távol hat. Az eredmény valós.

Felelet: a kötelek feszítőereje $T_1 = 4$ kN; $T_2 = 5$ kN.

Összegzés

A test egyensúlya a test mozgásállapotának vagy nyugalmi állapotának a megőrzése az idő múlásával. A test egyensúlyban van, ha a haladó és a forgó mozgásának sebessége változatlan marad.

Az M erőnyomaték olyan fizikai mennyiség, amely a testre ható F erő nagyságának és az erőkarnak a szorzatával egyenlő: $M = Fl$.

Ha az erő az óramutató járásával ellenkező irányban forgatja, vagy megpróbálja elfordítani a testet, az erőnyomaték pozitív előjelű, ha az óramutató járásának irányában, akkor negatív előjelű.

A haladó mozgást végző test egyensúlyban van, ha a testre ható erők eredője nullával egyenlő: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$.

A mozdulatlan forgástengellyel rendelkező test egyensúlyban van, ha a tengelyhez képest a rá ható erők nyomatékainak algebrai összege nulla: $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = 0$.

Ha a test képes egyidejűleg haladó és bizonyos tengely körül forgó mozgást végezni, akkor ez a test akkor lesz egyensúlyban, ha mindkét egyensúlyi feltétel teljesül.

Ellenőrző kérdések

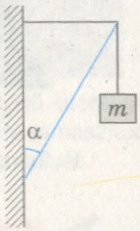
1. Mit nevezünk a testek egyensúlyának? **2.** Milyen feltételek esetén lesz a rögzített tengelyű test egyensúlyban? **3.** Mit nevezünk erőkarnak? **4.** Hogyan definiáljuk a forgatónyomatékot (erőnyomatékot)? Mi a forgatónyomaték SI mértékegysége? **5.** Fogalmazzátok meg az erőnyomaték szabályt! **6.** Milyen feltételek teljesülése esetén marad nyugalomban az a test, amely mind haladó, mind forgó mozgásra képes?

25. gyakorlat

1. A 10 kg tömegű deszka a hosszának $\frac{1}{4}$-ed részénél van alátámasztva. Milyen erőt kell kifejteni merőlegesen a rövid végére ahhoz, hogy a deszkát egyensúlyban tartsuk?

2. A 10 kg tömegű és 40 cm hosszú rúd végeire egy 40, illetve egy 10 kg tömegű súlyt akasztottak. Hol kell alátámasztani a rudat ahhoz, hogy egyensúlyban legyen?

3*. Két súlytalan rúd zsanérkötéssel van összekapcsolva egymással és a fallal (lásd az ábrát). Határozzátok meg a rudakban fellépő rugalmassági erőket, ha a rögzített súly tömege 4 kg, $\alpha = 30°$!



4*. A létra egy sima függőleges falhoz támaszkodik. A létra lábai és a padló közötti súrlódási tényező 0,4. Milyen maximális szöget zárhat be a létra a fallal? A létra súlypontja a hosszának a felénél van.

5. SZ. LABORATÓRIUMI MUNKA

Téma: a test egyensúlyi helyzetének tanulmányozása, ha több erő hat rá.
Cél: annak a tisztázása, milyen feltételek mellett van egyensúlyban a rögzített forgástengelyű test.
Eszközök: karos mérleg, szorítócsavarral és fogóval ellátott laboratóriumi állvány, 100 g-os súlyok, dinamométer, vonalzó.

A MUNKA MENETE

A kísérlet előkészítése

1. Mielőtt elkezditek a munkát, idézzétek fel a válaszokat az alábbi kérdésekre.
1) Mit nevezünk erőkarnak?
2) Hogyan kell meghatározni az erőnyomatékot? Mi az egysége az SI rendszerben?
3) Milyen feltételek mellett lesz a test egyensúlyban?

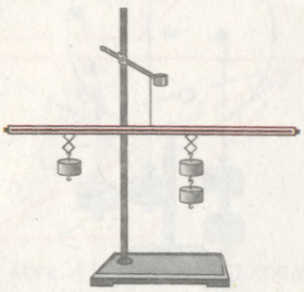
2. Határozzátok meg a mérőműszerek skálabeosztásának értékét!

3. Rögzítsétek a karos mérleget az állvány fogójába, és hozzátok egyensúlyba a szabályozó csavarok segítségével!

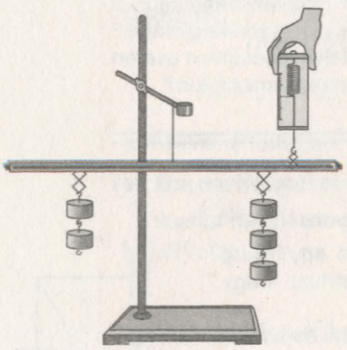
Kísérlet

A mérések eredményeit foglaljátok táblázatba! Tekintsétek úgy, hogy egy nehezék súlya 1 N.

1. A forgástengely egyik oldalán akasszatok fel egy súlyt, a másikon pedig kettőt. A súlyok eltolásával hozzátok egyensúlyba a mérleget (lásd az ábrát)!



1. ábra



2. ábra

2. Mérjétek meg az F_1 és F_2 erőknek megfelelő l_1 és l_2 karok hosszát! Vegyétek le a súlyokat a mérlegről!

3. Akasszatok a mérleg forgástengelyétől balra, egy bizonyos távolságra egymástól két súlyt. Dinamométer segítségével határozzátok meg, milyen F_3 erőt kell kifejteni a forgástengelytől jobbra fekvő pontban ahhoz, hogy a mérleg egyensúlyban legyen (2. ábra). Határozzátok meg a mérlegre ható erők l_1, l_2, l_3 karjait!

4. A forgástengelytől jobbra akasszatok fel három súlyt, balra pedig kettőt. Mérjétek meg dinamométerrel azt az F_3 erőt, amit a forgástengelytől jobbra fekvő pontban kell kifejteni ahhoz, hogy a mérleg egyensúlyban legyen (2. ábra)! Határozzátok meg a mérlegre ható erők l_1, l_2, l_3 karjait!

A kísérlet eredményeinek feldolgozása

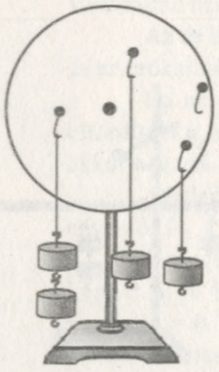
A mérések eredményeit foglaljátok táblázatba!

Minden kísérlet esetén:

1) számítsátok ki a mérlegre ható erők nyomatékát;

2) határozzátok meg a mérlegre ható erők nyomatékainak összegét.

A kísérlet sorszáma	Erő, F_1, N	Az F_1 erő l_1 karja, m	Az F_1 erő M_1 nyomatéka, N·m	Erő, F_2, N	Az F_2 erő l_2 karja, m	Az F_2 erő M_2 nyomatéka, N·m	Erő, F_3, N	Az F_3 erő l_3 karja, m	Az F_3 erő M_3 nyomatéka, N·m	Az erőnyomatékok összege $M_1+M_2+M_3$, N · m



3. ábra

A kísérlet eredményeinek elemzése

Elemezzétek a kísérletet és eredményeit! Vonjatok le következtetést, amelyben tüntessétek fel, milyen mennyiséget mértetek, milyen feltételek mellett van egyensúlyban a rögzített forgástengelyű test, véleményetek szerint melyik mennyiség mérése adja a legnagyobb hibát.

+ Alkotó feladat

Ellenőrizzétek a rögzített forgástengelyű test egyensúlyának feltételét az alábbi kísérletben! Az állvány fogójában rögzített tengelyen helyezzetek el egy szabadon forgó korongot. A korongra tetszőleges rendben függesszetek súlyokat (3. ábra). Írjátok össze a szükséges mérőeszközök listáját, és állítsátok össze a kísérlet lebonyolításának tervét! Végezzétek el a kísérletet! Írjátok le az eredményeket, és vonjatok le következtetést!

30.§. TÖMEGKÖZÉPPONT. A TESTEK EGYENSÚLYÁNAK FAJTÁI

?! Minden bizonnyal gyerekkorotokban volt „fizikai" játékotok. Sokan még most is csodálkoznak azon, bárhogy is forgatjuk a keljfeljancsit, csodálatraméltó kitartással újra és újra visszatér függőleges helyzetébe. Azon is álmélkodunk, hogy miért kapaszkodik a sas biztosan a csőre végével (30.1. ábra), miért állnak egyes kisautók újra a kerekükre bármilyen „balesetet" követően stb. Az ilyen játékok titkait megfejthetitek, ha megtanuljátok a paragrafus anyagát.



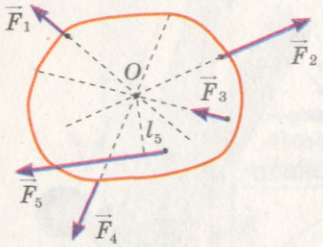
30.1. ábra. Kismértékű kitérésnél a sasfigura a csőrére támaszkodva megőrzi az egyensúlyát

1 Hogyan határozható meg a test tömegközéppontja?

A test **tömegközéppontjának** nevezzük azoknak az egyeneseknek a metszéspontját, amelyek mentén azok az erők irányulnak, amelyek kizárólag haladó mozgást biztosítanak a testnek (30.2. ábra).

Ha a testek méretei kicsik a Föld sugarához képest, akkor az ilyen test tömegközéppontja megegyezik a nehézségi erő támadáspontjával (a test súlypontjával).

A szimmetrikus alakzatok tömegközéppontja a mértani középpontjukban van; a háromszög tömegközéppontja a súlyvonalainak metszéspontjában fekszik.

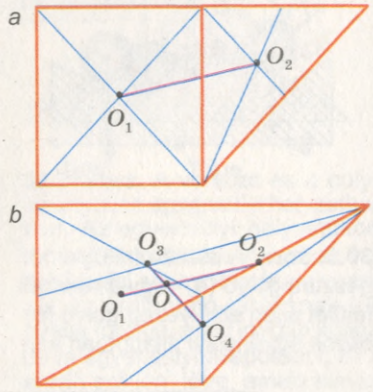


30.2. ábra. Az $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ és $\vec{F}_4$ erők kizárólag a test haladó mozgását váltják ki; ezeknek az erőknek a hatásvonalai a test tömegközéppontjában (O_1) metszik egymást. Az $\vec{F}_5$ erő a haladó mozgáson kívül a test forgó mozgását is kiváltja

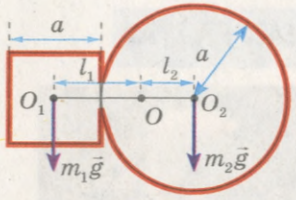
2 A lapos testek tömegközéppontjának meghatározására szolgáló néhány módszer

A tömegközéppont meghatározására több módszer is létezik. A kísérleti módszerrel már találkoztatok (lásd a *Kísérleti feladatot* a 21.§-ban). Most a *mértani és az analitikus módszerrel* fogunk megismerkedni.

A *mértani módszert* akkor alkalmazzák, amikor az *alakzatot kétféleképpen lehet két olyan alakzatra bontani*, amelyeknek könnyű meghatározni a tömegközéppontjukat. Például ahhoz, hogy meghatározzuk a 30.3. ábrán látható lapos alakzat tömegközéppontjának helyzetét, előbb egy négyzetre és egy háromszögre bontjuk fel (30.3. *a* ábra), és meghatározzuk ezek tömegközéppontját (O_1 és O_2 pontok). Ezután a vizsgált alakzatot két háromszögre bontjuk (30.3. *b* ábra), és meghatározzuk a tömegközéppontjaikat (O_3 és O_4 pontok). A vizsgált test tömegközéppontja az O_1O_2 és O_3O_4 egyenesek metszéspontja.



30.3. ábra. A lapos alakzat tömegközépponjának meghatározása mértani módszerrel



30.4. ábra. A lapos alakzat tömegközéppontjának meghatározása analitikus módszerrel

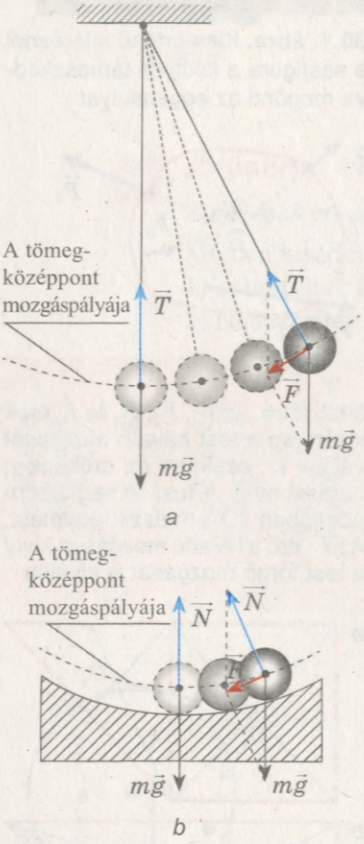
Az *analitikus módszer* a leginkább univerzális, de gyakran bonyolult matematikai számításokat igényel*. Ezzel a módszerrel a homogén lemez súlypontja meghatározásának példáján ismerkedünk meg (30.4. ábra).

Az adott lemezt két szimmetrikus alakzatra bonthatjuk (négyzet és körlap), amelyeknek ismert a tömegközéppontjuk (O_1 és O_2 pontok). A lemez tömegközéppontja az O_1O_2 egyenes egy bizonyos O pontjában helyezkedik el. Ha képzeletben felfüggesztenénk ebben a pontban, akkor a lemez nem fog forogni, mivel mind a cérna feszítőerejének, mind pedig a nehézségi erőnek a hatásvonala a lemez tömegközéppontján halad át.

Feltüntetjük a lemez részeire ható $m_1\vec{g}$ és $m_2\vec{g}$ erőket, amelyek a lemez részeire hatnak, valamint ezen erők l_1 és l_2 karjait. A lemez nem fordul el, tehát az erőnyomatékok összege az O ponthoz viszonyítva nulla: $m_1gl_1 - m_2gl_2=0 \Rightarrow m_1l_1 = m_2l_2$. Emellett $m_1 = \rho V_1 = \rho S_1 d = \rho a^2 d$ és $m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 d = \rho \pi a^2 d$, ahol ρ a lemez anyagána sűrűsége, d a vastagsága; $S_1 = a^2$ a négyzet területe; $S_2 = \pi a^2$ a körlap területe.

Tehát az $m_1l_1 = m_2l_2$ kifejezés felírható $\rho a^2 dl_1 = \rho \pi a^2 dl_2$ alakban; $\rho a^2 d$-vel való egyszerűsítés után adódik: $l_1 = \pi l_2$. Azonban az ábrán látható, hogy $l_1 + l_2 = \frac{a}{2} + a = 1{,}5a$. Tehát $\pi l_2 + l_2 = 1{,}5a \Rightarrow$

$\Rightarrow l_2 = \frac{1{,}5a}{(\pi+1)} \approx 0{,}36a$. Így a lemez tömegközéppontja – az O pont – $\approx 0{,}36a$ távolságra helyezkedik el a kör középpontjától.



30.5. ábra. A cérnán felfüggesztett golyó (*a*) vagy a homorú felület alján elhelyezett golyó (*b*) biztos egyensúlyi állapotban van

3 Milyen fajtái vannak az egyensúlynak?

Megkülönböztetik a *stabil* (biztos), *instabil* (bizonytalan) és *indifferens* (közömbös) egyensúlyi helyzeteket.

A test egyensúlyi helyzetét ***biztosnak*** nevezik, *ha az egyensúlyi helyzetéből való tetszőleges kismértékű kimozdulását követően a magára hagyott test visszatér a kiinduló helyzetébe.*

Biztos egyensúlyi helyzetben van például a cérnára függesztett golyó (30.5. *a* ábra), vagy a homorú felület alján elhelyezett golyó (30.5. *b* ábra). Figyeljétek meg:

* Az analitikus módszert alkalmazzák műszaki berendezések és épületek tömegközéppontjának meghatározására. Ezekben az esetekben a módszer felsőbb matematikai ismereteket igényel (differenciál- és integrálszámítást).

stabil egyensúlyi helyzetben a test tömegközéppontja a lehetséges legközelebbi helyzetek közül a legalacsonyabban fekvőt foglalja el, a test kimozdításakor $\vec{F}$ eredő erő lép fel, ami visszatéríti a testet kiinduló helyzetébe.

Az asztal lapján elhelyezett keljfeljancsi szintén biztos egyensúlyi állapotban van (30.6. ábra). Kimozdításakor az eredő erő nulla lesz, azonban a nehézségi erő nyomatéka eltér a zérótól, aminek eredményeként a keljfeljancsi hintázni kezd és visszatér kiinduló helyzetébe. Eközben a tömegközéppont a legalacsonyabb helyzetet foglalja el a lehető legközelebbi helyzetek közül.

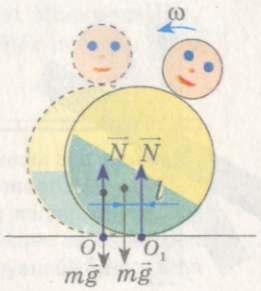
Általános esetben a test stabil egyensúlyi helyzetben van, ha a test bármely kismértékű kimozdításakor ebből a helyzetből, a testre ható erők eredője, vagy az erők nyomatéka megpróbálják visszatéríteni a testet egyensúlyi helyzetébe.

*A test egyensúlyát **bizonytalannak** nevezik, ha az egyensúlyi helyzetéből való bármely kismértékű kimozdításakor a magára hagyott test még inkább kitér kezdeti helyzetéből* (30.7. ábra).

Instabil egyensúly állapotában a test egyensúlyi helyzetéből való bármilyen kismértékű kimozdulásakor a testre ható erők eredője, vagy ezen erők nyomatéka megpróbálják még inkább kitéríteni a testet.

*A test egyensúlyi helyzetét **közömbösnek** nevezzük, ha a test egyensúlyi helyzetéből való bármilyen kis kitérítésekor a magára hagyott test új helyzetében marad.*

Az indifferens egyensúlyi állapotban lévő test kitérítésekor ebből a helyzetből a testre ható erők kiegyensúlyozottak maradnak, az erők nyomatékának összege pedig nulla (30.8. ábra).



30.6. ábra. A nem homogén tömegeloszlású golyó stabil egyensúlyi állapotban van. A golyó egyensúlyi helyzetéből való kimozdításakor a nehézségi erő nyomatéka visszatéríti őt a kiinduló helyzetébe

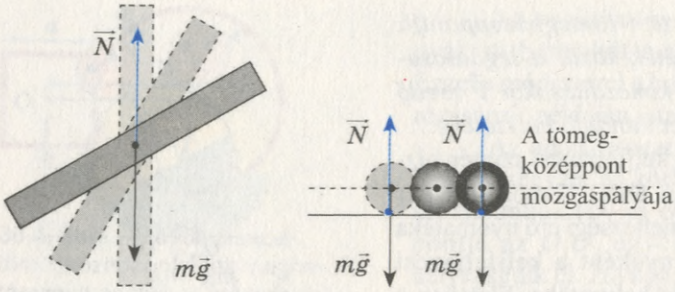


30.7. ábra. A vonalzó és a golyó bizonytalan egyensúlyi helyzetben van. Az egyensúlyi helyzetükből történő elmozdításukkor: a) az $m\vec{g}$ nehézségi erő nyomatéka a vonalzót az óramutató járásának irányába fordítja, mind jobban kimozdítva egyensúlyi állapotából; b) $\vec{F}$ eredő erő jön létre, amely kimozdítja a golyót a kiinduló helyzetéből. A tömegközéppont a legközelebbi lehetséges helyzetek közül a legmagasabbat foglalja el

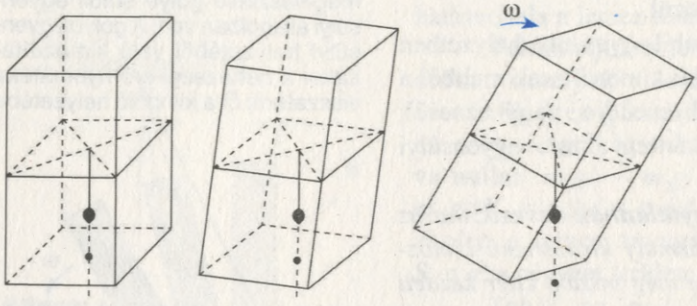
4 Mikor van egyensúlyban a vízszintes síkra támaszkodó test?

A gyakorlatban a testeket gyakran találjuk olyan egyensúlyi helyzetben, amikor azok néhány pontra vagy felületre támaszkodnak: az ember két lábára nehezedve jár a földön, az asztal és a szék négy lábra támaszkodik, a gépkocsi négy vagy hat kerékre, az épület pedig az alapra.

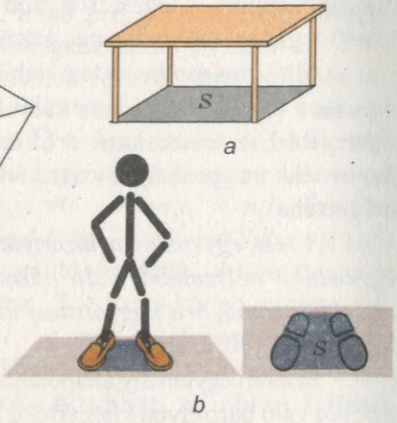
A vízszintes síkra támaszkodó test akkor van biztos egyensúlyi állapotban, ha a test tömegközéppontján át húzott függőleges egyenes a támaszték területén belül megy



30.8. ábra. A vonalzó és a homogén tömegeloszlású golyó közömbös egyensúlyi állapotban van. A tömegközéppont a legközelebbi lehetséges helyzetek közül azonos vízszintes helyzetet foglal el



30.9.ábra. *a*), *b*) a vízszintes felületre támaszkodó test biztos egyensúlyi állapotban van; c) a test feldől



30.10. ábra. Támaszték: a) asztal, b) ember

át (30.9. *a*, *b* ábra). Ha ez a vonal a támaszték területén kívül halad át, a test egyensúlyi állapota megbomlik, és a test ledől (30.9. *c* ábra).

Nyilvánvaló, hogy minél lejjebb helyezkedik el a test nehézkedési pontja és minél nagyobb a támaszfelület, annál stabilabb lesz ez a test. Éppen ezért szélesek és masszívak a gépek alapjai, a versenyautók nagyon alacsonyak, az emberek és az állatok a biztos állapot felvétele érdekében szétterpesztik és kissé behajlítják a lábaikat.

Figyeljétek meg: támasztófelületnek tekintik annak az alakzatnak a területét, amely magába foglalja a támaszkodó test által határolt valamennyi pontot (30.10. ábra).

Összegzés

A test tömegközéppontjának azoknak az egyeneseknek a metszéspontját nevezik, amelyek mentén azok az erők irányulnak, amelyek a testnek kizárólag a haladó mozgását váltják ki.

Megkülönböztetik a testek stabil (biztos), instabil (bizonytalan) és indifferens (közömbös) egyensúlyi helyzeteit. Az egyensúlyi helyzetéből kismértékben kimozdított test biztos egyensúlyi állapot esetén visszatér kiinduló helyzetébe; bizonytalan egyensúly esetében még inkább kitér kiinduló helyzetéből; közömbös egyensúly esetében pedig új helyzetében marad.

A vízszintes felületre támaszkodó test stabil egyensúlyi állapotban van, ha a test tömegközéppontján átmenő merőleges egyenes a támaszték területén belül halad át.

Ellenőrző kérdések

1. Adjátok meg a tömegközéppont meghatározását! **2.** Hol helyezkedik el a szabályos síkmértani alakzatok tömegközéppontja? **3.** A tömegközéppont meghatározásának milyen módszereit ismeritek? Ismertessétek azokat! **4.** A testek milyen egyensúlyi állapotát nevezik biztosnak? Bizonytalannak? Közömbösnek? Ezekben az esetekben hol helyezkedik el a test tömegközéppontja? **5.** Mikor van biztos egyensúlyi állapotban a vízszintes síkra támaszkodó test?

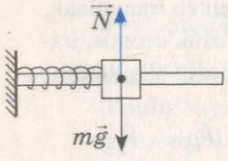
26. gyakorlat

1. Milyen egyensúlyi helyzetekben vannak az 1–3. ábrán látható testek? Válaszotokat indokoljátok!

2. Ha az ember nehéz súlyt visz a vállán, akkor előrehajol, ha pedig maga előtt viszi, hátrahajlik. Miért?

3. A fémrúd egyik fele rézből, a másik alumíniumból készült (4. ábra). Határozzátok meg a rúd tömegközéppontjának a helyét, ha a hossza 10 cm!

4*. Határozzátok meg az 5. ábrán látható lapos alakzat tömegközéppontjának a helyzetét, ha a nagyobb körvonal sugara 8 cm!



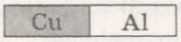
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

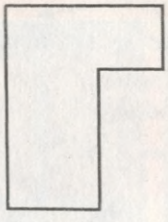


5. ábra

Kísérleti feladat

1. Vágjátok ki kemény kartonpapírból a 6. ábrán látható alakzatot! Határozzátok meg a tömegközéppontját kísérleti úton, mértani, illetve analitikus módszerrel! Szerintetek melyik módszer adja a legpontosabb eredményt?

2. Két villát akasszatok össze, rögzítsétek a gyufaszál egyik végén, a gyufaszál másik végét pedig helyezzétek el egy körző hegyes végén, ahogy a 7. ábrán látható. Magyarázzátok meg a megfigyelt jelenséget!



6. ábra



7. ábra

A 2. FEJEZET ÖSSZEGZÉSE

1. A 2. fejezet tanulmányozása során megismerkedtetek a *klasszikus mechanika alapfogalmaival és törvényeivel*, megtudtátok, mit tanulmányoz.

A **dinamika** a mechanikának az a fejezete, amely a testek kölcsönhatásának mennyiségi leírásán alapul és mozgásuk jellegzetességeit határozza meg.

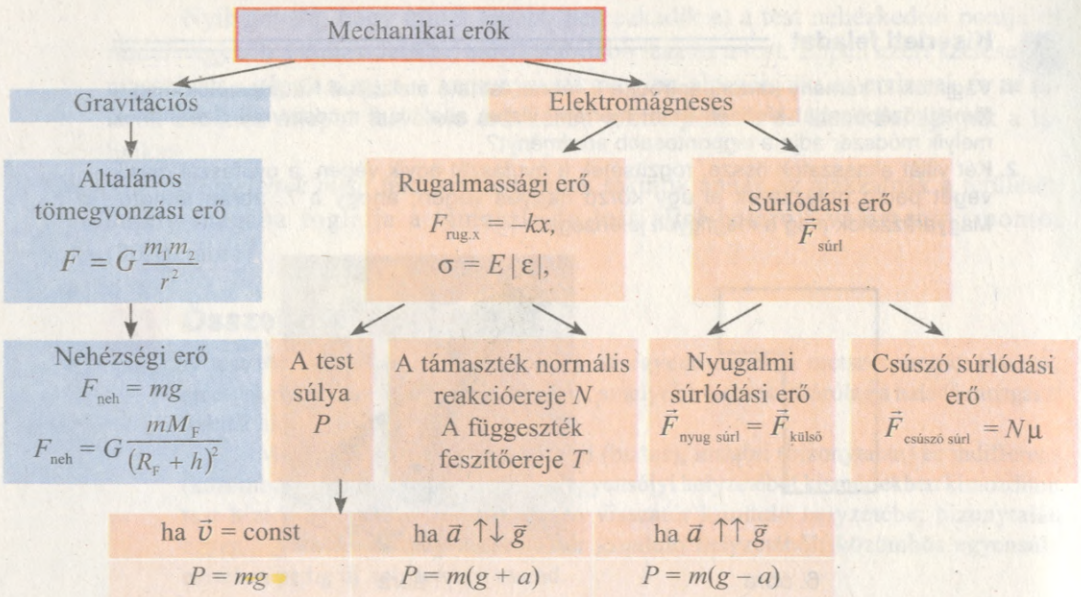
2. Tudatosítottátok a dinamika fontos fogalmainak a lényegét, közöttük az *inerciális vonatkoztatási rendszerét*.

Az **inercirendszer** olyan vonatkoztatási rendszer, amelyhez képest az izolált test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását.

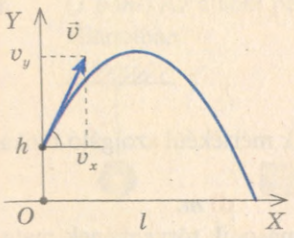
3. Megismerkedtetek a dinamika legfontosabb törvényeivel – *Newton törvényeivel*:

Newton első törvénye	Newton második törvénye	Newton harmadik törvénye
Léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekhez képest a test megőrzi nyugalmi állapotát vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, ha erre a testre nem hatnak más testek, vagy hatásuk kiegyenlítődik	A test gyorsulása egyenesen arányos a testre ható erővel és fordítottan arányos a tömegével: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	A testek olyan erőkkel lépnek kölcsönhatásba, amelyek azonos egyenes mentén irányulnak, modulusuk azonos, irányuk pedig ellentétes: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

4. Elmélyítettétek tudásotokat a *különböző mechanikai erőkről*.



5. Tanulmányoztátok a *test mozgását a nehézségi erő hatására.*

A test mozgáspályája	A testre ható erő	A test gyorsulása	A test mozgásse-bessége	A test koordinátája bizonyos időpontban
Parabola 	$\vec{F} = m\vec{g}$ $F_{\text{neh}\,x} = 0$ $F_{\text{neh}\,y} = mg_y$	$\vec{a} = \vec{g}$ $a_x = g_x = 0$	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ $v_x = v_{0x}$ $v_y = v_{0y} + g_y t$	$x = x_0 + v_{0x}t$ $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$

6. Az általános tömegvonzási törvény alapján kiszámítottátok az *első kozmikus sebességet a Földön*: $v = \sqrt{\frac{GM_F}{R_F + h}}$, amely

$h = 0$ esetében: $v = \sqrt{\frac{GM_F}{R_F}} = \sqrt{gR_F} \approx 8\left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$.

7. Tanulmányoztátok a *testek egyensúlyának feltételeit*, megismerkedtetek az *egyensúly különböző fajtáival.*

A test egyensúlyának feltételei	
ha nincs forgás	rögzített forgástengely esetében
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$	$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$, ahol $M = Fl$
Általános esetben a feladatok megoldásánál *mindkét feltételt* alkalmazni kell, tetszőlegesen megválasztva a forgástengelyt.	

A test egyensúlyának feltételei

Biztos egyensúly
A test egyensúlyi állapotából történő kimozdításakor az eredő erő vagy az erőnyomaték visszatéríti a testet kiinduló állapotába

Bizonytalan egyensúly
A test egyensúlyi állapotából történő kimozdításakor az eredő erő vagy az erőnyomaték még inkább kitéríti a testet az egyensúlyi helyzetéből

Közömbös egyensúlyi helyzet
A test egyensúlyi állapotából történő kimozdításakor az eredő erő vagy az erőnyomaték nullával marad egyenlő; a test megmarad kimozdítás utáni állapotában

ÖNELLENŐRZÉSRE SZOLGÁLÓ FELADATOK A *DINAMIKA* CÍMŰ FEJEZETHEZ

1. rész. Newton törvényei. Gravitációs erők

Az 1–6. feladatok csak egy helyes választ tartalmaznak.

1. (*1 pont*) Melyik testhez kötnétek a vonatkoztatási rendszert, hogy ne legyen inerciális (a Földhöz kötött VR-t tekintsétek inerciálisnak)?

a) az autó egyenletesen halad;
b) a kislány állandó sebességgel fut;
c) a vonat felveszi a sebességet;
d) a kutya az út szélén ül.

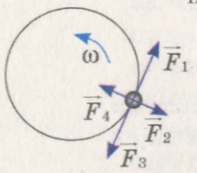
2. (*1 pont*) Milyen betűvel jelzik a test tehetetlenségének mértékéül szolgáló fizikai mennyiséget?

a) a; **b)** F; **c)** v; **d)** m.

3. (*1 pont*) Az alábbi képletek közül melyik Newton második törvényének matematikai felírása?

a) $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$; **b)** $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$; **c)** $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$; **d)** $\vec{F} = m\vec{g}$.

4. (*2 pont*) A test egyenletes körmozgást végez (1. ábra). Melyik esetben helyes a rá ható eredő erő jelölése?



1. ábra

a) $\vec{F}_1$; **b)** $\vec{F}_2$; **c)** $\vec{F}_3$; **d)** $\vec{F}_4$.

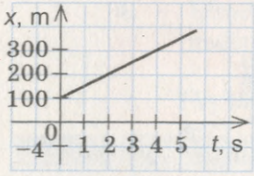
5. (*2 pont*) A 4 kg tömegű test az OX tengely mentén mozog, eközben koordinátája az $x = 0{,}5 + 2t + 5t^2$ képlet szerint változik. Mennyi a testre ható erő nagysága?

a) 2 N; **b)** 8 N; c) 20 N; **d)** 40 N.

6. (*2 pont*) Két kölcsönösen merőleges 6, illetve 8 N nagyságú erő hatására a test 2 m/s² gyorsulással mozog. Mennyi a test tömege?

a) 1 kg; **b)** 5 kg; **c)** 7 kg; **d)** 20 kg.

7. (*3 pont*) Az ágyú a vízszintessel bizonyos szöget bezárva kilőtt néhány lövedéket; az elsőt 60°-os; a másodikat 30°-os; a harmadikat 45°-os szögben. Hogyan csapódnak be ezek a lövedékek egy vízszintes egyenes mentén? Melyiknek lesz a legnagyobb az emelkedési magassága?

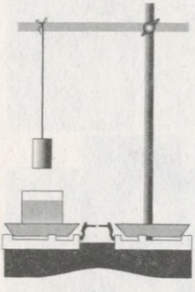


2. ábra

8. (*3 pont*) A vízszintesen szálló repülőgépből ledobtak egy csomagot. A 2. ábra az $x(t)$ függvény grafikonját szemlélteti. Határozzátok meg a teher sebességének nagyságát és irányát 5 másodperccel az esés megkezdését követően!

9. (*4 pont*) Határozzátok meg a 20 kg tömegű testre ható nehézségi erőt, ha ezt a testet a Föld felszíne felett negyed földsugárral megegyező magasságba emelik! Határozzátok meg az első kozmikus sebességet ebben a magasságban!

10. (*5 pont*) Megbomlik-e a mérleg egyensúlyi állapota (3. ábra), ha a cérnát meghosszabbítjuk úgy, hogy a súly teljesen a vízbe merüljön, de ne érje el az edény alját? Ha elvágjuk a cérnát és így a súly az edény aljára kerül?


3. ábra

Válaszaitokat hasonlítsátok össze a könyv végén található megoldásokkal. Jelöljétek meg a helyes válaszokat, és számoljátok össze a megszerzett pontokat. Az eredményt osszátok el hárommal. Az így kapott szám megfelel a tanulmányi eredményeteknek.

2. rész. Elektromágneses erők. A test mozgása több erő hatására

Az 1–6. feladatok csak egy helyes választ tartalmaznak.

1. (*1 pont*) Mi a jele a test relatív megnyúlásának?

a) Δl; **b)** ε; **c)** μ; **d)** σ.

2. (*1 pont*) Az alábbi képletek közül melyik fejezi ki matematikailag Hooke törvényét?

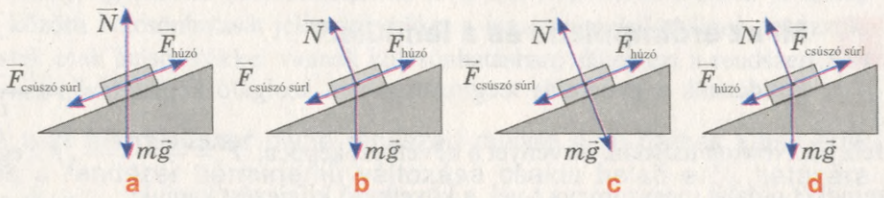
a) $a = \frac{F}{m}$; **b)** $\sigma = E\varepsilon$; **c)** $F = \mu N$; **d)** $\sigma = \frac{F}{S}$.

3. (*1 pont*) Az alábbi példák melyikében (4. ábra) van a test bizonytalan egyensúlyi állapotban?



4. ábra

4. (*2 pont*) A testet lejtőn húzzák felfelé (5. ábra). Melyik esetben vannak helyesen feltüntetve a testre ható erők?



5. ábra

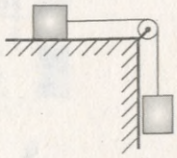
5. (*2 pont*) A lift padlóján egy 20 kg tömegű bőrönd van. A lift 2 m/s² gyorsulással kezd felfelé mozogni. Mennyivel egyenlő a bőrönd súlya?

a) 20 N; **b)** 160 N; **c)** 200 N; **d)** 240 N.

6. (*2 pont*) A rugó 2 cm-es megnyúlásának következtében 3 N rugalmassági erő ébredt benne. A rugó mekkora megnyúlása mellett lesz a rugalmassági erő 15 N?

a) 2,5 cm; **b)** 5 cm; **c)** 10 cm; **d)** 22,5 cm.

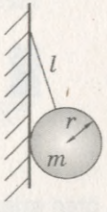
7. (*3 pont*) A kezdősebességgel nem rendelkező test lecsúszik a lejtőn. A hajlásszög a vízszinteshez 30°, a lejtő hossza 2 m. Mekkora gyorsulással mozog a test, ha a csúszó súrlódási tényező 0,3? Mennyi ideig tart a csúszás?



6. ábra

8. (*3 pont*) Az 500 g tömegű hasáb a hozzá kapcsolt 150 g tömegű súly hatására a mozgása kezdetétől számítva 80 cm utat 2 s alatt tett meg (6. ábra). Számítsátok ki a csúszó súrlódási tényezőt!

9. (*4 pont*) Az m tömegű és r sugarú golyó l hosszúságú zsinegen lóg, amit a sima falhoz rögzítettek (7. ábra). Határozzátok meg azt az erőt, amellyel a golyó nyomja a falat!



7. ábra

10. (*5 pont*) Mekkora maximális sebességgel haladhat a motorkerékpáros a 40 m sugarú kanyarban, ha a súrlódási tényező a kerék és az út között 0,6? Eközben milyen szögben dől be a motorkerékpár?

Válaszaitokat hasonlítsátok össze a könyv végén található megoldásokkal. Jelöljétek meg a helyes válaszokat, és számoljátok össze a megszerzett pontokat. Az eredményt osszátok el hárommal. Az így kapott szám megfelel a tanulmányi eredményeteknek.

3. FEJEZET. MEGMARADÁSI TÖRVÉNYEK A MECHANIKÁBAN

31. §. AZ IMPULZUSMEGMARADÁS TÖRVÉNYE

?! Newton törvényei sok mozgással és kölcsönhatással kapcsolatos feladat megoldásához nyújtanak segítséget. A gyakorlatban ugyanakkor sokszor problematikus megmérni vagy elemezni a testre ható erőket. Például hogyan számíthatók ki a testek ütközésekor létrejövő erők, hiszen az ütközés során változik a testek merevsége, valamint a súrlódási együttható is. Vagy hogyan határozhatók meg a robbanás során ható erők? Ezenkívül a számításokhoz tudnunk kell a testek kölcsönhatásának idejét is, amit esetenként szintén nehézséget okoz megmérnünk.
Ebből következik, hogy sok feladat megoldása egyszerűbb lesz, ha a megmaradás törvényeit – az impulzusmegmaradás és az energiamegmaradás törvényeit – használjuk az eredmény meghatározásához. Ezek a törvények egyenes következményei Newton törvényeinek, viszont azoktól függetlenül voltak felfedezve. Ezek nemcsak a mechanika, de a fizika leguniverzálisabb és legáltalánosabb törvényei is. A következő paragrafusban az *impulzusmegmaradás törvényével* ismerkedhettek meg.

1 Mi az erőimpulzus és a lendület?

Felidézzük a gyorsulás meghatározására szolgáló képletet: $\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$ és felírjuk Newton második törvényét a következőképpen: $\vec{F} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{t}$. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva t-vel, a következő kifejezést kapjuk:

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0. \qquad (1)$$

Az $\vec{F}t$ szorzatot *erőimpulzusnak* (*erőlökésnek*) nevezzük. Ez a mennyiség egyidejűleg meghatározza az erőt és annak azon hatásidejét, mely alatt az m tömegű test sebessége $\vec{v}_0$-ról $\vec{v}$-re változik.

Az erőimpulzus olyan fizikai vektormennyiség, mely az erő és annak hatásideje szorzatával egyenlő: $\vec{F}t$.

Az erőimpulzus mértékegysége az SI-ben **newton-másodperc** (N · s).

Az 1. egyenlet jobb oldalán az $m\vec{v}$ mennyiség változását láthatjuk. Ezt a mennyiséget *lendületnek* vagy *mozgásmennyiségnek* nevezzük.

A lendület vagy mozgásmennyiség ($\vec{p}$) olyan fizikai vektormennyiség, mely a test m tömegének és a tömeg mozgássebességének $\vec{v}$ a szorzatával egyenlő:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

A test impulzusának mértékegysége az SI-ben a **kilogramm-méter per másodperc** (kg · m/s).

Az erőimpulzustól eltérően a lendület függ a vonatkoztatási rendszertől, mivel a *vonatkoztatási rendszer kiválasztásától* függ a test mozgássebessége.

Az erőimpulzus és a lendület felhasználásával *Newton második* törvényét a következőképpen írhatjuk fel:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t, \text{ vagy } \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}t,$$

vagyis a test lendületváltozása egyenlő az adott testre ható erő impulzusával.

A fenti képletek segítségével Newton második törvényét a következő formában írhatjuk fel:

$$\vec{F} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t}.$$

A mechanika fejlődése bebizonyította, hogy Newton lendületen keresztül felírt második törvénye* sokkal általánosabb, mint az $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ alakú, mivel az előbbi törvény lehetőséget nyújt a változó tömegű testek mozgásának leírására is, mint amilyen például az űrhajó.

2 Milyen feltételekkel lehet zártnak tekinteni egy testrendszert?

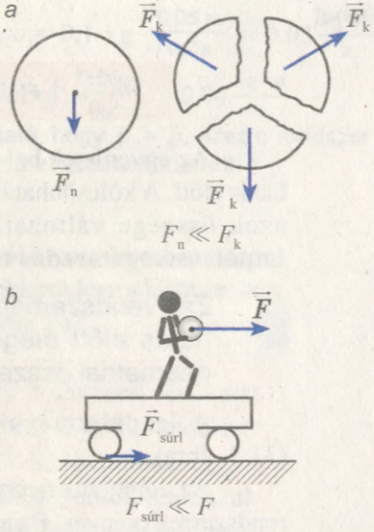
Néhány, egymással kölcsönhatásban lévő test *testrendszert alkot.* A testek egymás közötti kölcsönhatását jellemző erőket a *rendszer belső erőinek* nevezzük. Ha a testek csak belső erőkkel vannak kölcsönhatásban, akkor ezt a rendszert *zárt rendszernek* nevezzük.

A zárt testrendszer olyan rendszer, melyre nem hatnak külső erők és a rendszer bárminemű változása csakis belső erők hatására történik.

Földünkön nem találhatók zárt rendszerek: a Föld felszínén minden testre hat a nehézségi erő, bármilyen mozgást súrlódási erő kísér. A gyakorlatban ezért a testrendszert csak akkor tekintjük zártnak, ha a rendszerre ható külső erők egyenlők, illetve kisebbek a rendszerben ható belső erőknél.

Például az ágyúgolyó felrobbanásakor a szilánkokra ható külső erők (nehézségi és ellenállási) nagyságrendekkel kisebbek a repeszdarabok között ható $\vec{F}_k$ kölcsönhatási erőnél (31.1. *a* ábra), ezért a repeszdarabok alkotta rendszert zártnak tekinthetjük.

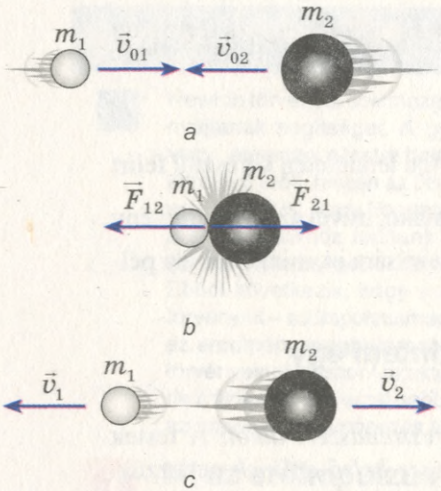
Ha egy könnyen mozgó kiskocsin az ember $\vec{F}$ erővel egy testet tol el magától (31.1. *b* ábra), akkor a „kiskocsi + ember + súly" testrendszer zártnak tekinthető, mivel a nehézségi erőt a támaszték reakcióereje ellensúlyozza, a kocsi gördülő súrlódási ereje pedig elhanyagolható.



31.1. ábra Ha a rendszerre ható külső erőket a rendszerben ható belső erők semlegesítik vagy jóval kisebbek azoknál, a rendszert zártnak tekintjük

* A mozgás második axiómáját I. Newton éppen a lendületen keresztül fogalmazta meg.

Ha az ember a földön állva próbál ellökni magától egy súlyt, akkor az „ember + súly" rendszer nem tekinthető zártnak, mivel a súrlódási erő nagyságrendje megegyezik a súly és az ember kölcsönhatási erejével.



31.2. ábra Az impulzusmegmaradás törvényének bemutatása két testből álló zárt rendszerben: *a*) a testek helyzete kölcsönhatás előtt, *b*) a kölcsönhatás pillanata, *c*) a kölcsönhatás utáni pillanat

3 Az impulzus (lendület)-megmaradás törvénye

Megvizsgáljuk két, m_1 és m_2 tömegű, zárt rendszert alkotó $\vec{v}_{01}$ és $\vec{v}_{02}$ sebességgel mozgó test kölcsönhatását (31.2. *a* ábra).

A t időn át tartó kölcsönhatás eredményeként mindkét test megváltoztatja sebességét. Mivel zárt rendszerről van szó, ezért a sebesség megváltoztatásáért a testek között ható $\vec{F}_{12}$, illetve $\vec{F}_{21}$ belső erő a felelős (31.2. *b* ábra). Tételezzük fel, hogy a kölcsönhatás eredményeként a testek sebessége $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ lett (31.2. *c* ábra). A testekre vonatkoztatva felírjuk Newton második törvényét:

$$m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{01} = \vec{F}_{12}t;\ m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{02} = \vec{F}_{21}t.$$

A testek kölcsönhatásának t ideje mindkét testre azonos, a kölcsönhatás ereje Newton harmadik törvénye szerint abszolút értékét tekintve azonos, de ellentétes irányú: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Tehát: $m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{01} = -(m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{02})$. Átalakítás után azt kapjuk, hogy:

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \text{ vagy } \vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Az egyenletek bal oldalán a testek impulzusainak összege található a kölcsönhatás előtt. A kölcsönhatás alkalmával az egyes testek impulzusa megváltozott, viszont azok összege változatlan maradt, vagyis *megmaradt* az összimpulzus. Az **impulzusmegmaradás törvényét** a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

Zárt rendszerben a testek impulzusainak geometriai összege kölcsönhatás előtt megegyezik a testek kölcsönhatás utáni impulzusainak geometriai összegével.

A lendületmegmaradás törvényéről kísérletileg is meggyőződhetünk. (31.3. ábra).

Az impulzusmegmaradás törvénye tetszőleges számú testet tartalmazó zárt rendszerre érvényes. Ez a fizika egyik általános alaptörvénye. Ezért általános esetben az *impulzusmegmaradás matematikai alakban* a következőképpen írható fel:

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} + \ldots + m_n\vec{v}_{0n} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n;$$
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \text{const},$$

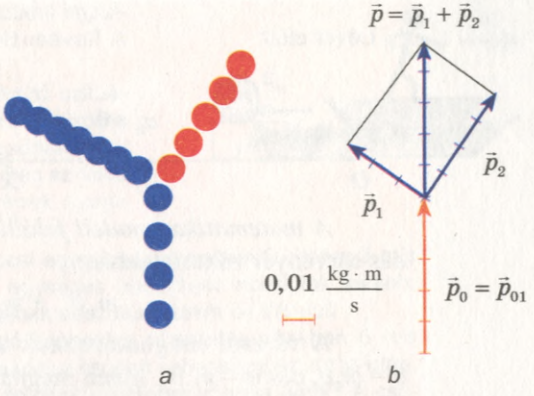
ahol m_i a rendszert alkotó testek tömege, $\vec{v}_{0i}$ a rendszer testeinek kölcsönhatás előtti sebessége, $\vec{v}_i$ a testek kölcsönhatás utáni sebessége, n a kölcsönható testek száma, $\vec{p}_i$ a testek lendülete egy adott pillanatban.

Az impulzusmegmaradás törvényével állandóan találkozunk a természetben, a technikában, otthonunkban. Ezzel a törvénnyel magyarázható a fegyverek visszarúgása, a sportszereknél a futópad mozgása, a csónak mozgása a benne ülő személy elmozdulásakor stb.

Jegyezzétek meg:

a) a lendületmegmaradás törvénye csak zárt rendszerekre érvényes, ezért mielőtt a feladatok megoldásához felhasználnánk azt, határozzuk meg, tényleg zárt rendszerrel állunk szemben;

b) ha a rendszerre külső erők hatnak, melyek hatása nem egyenlítődik ki, vagy nem hagyhatjuk figyelmen kívül, akkor a rendszer összimpulzusa megváltozik – ez a változás a külső erők összimpulzusával egyenlő: $\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}t$.



31.3. ábra. Az impulzusmegmaradás törvényének a bemutatása két, egyenként 100 g-os golyó esetében. A vörös golyó az ütközésig nyugalomban volt: *a*) a golyók mozgásának sztroboszkópos felvétele az ütközés előtt és után, (lépték 1 : 20), a felvillanások közötti idő 0,2 s; *b*) a golyók impulzusának vektordiagramja. A golyók ütközésének pillanatáig a rendszer $\vec{p}_0$ impulzusa a kék golyó $\vec{p}_{01}$ impulzusával volt egyenlő: $\vec{p}_0 = \vec{p}_{01}$,

$p_{01} = m_1 v_{01} = 0{,}1 \text{ kg} \cdot \frac{0{,}1 \text{ m}}{0{,}2 \text{ s}} = 0{,}05 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

Az ütközés után mindkét golyó impulzusa megváltozott, az összimpulzusuk: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$,

ahol $p_1 = m_1 v_1 = 0{,}1 \text{ kg} \cdot \frac{0{,}06 \text{ m}}{0{,}2 \text{ s}} = 0{,}03 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$,

$p_2 = m_2 v_2 = 0{,}1 \text{kg} \cdot \frac{0{,}08 \text{ m}}{0{,}2 \text{ s}} = 0{,}04 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

A rajzról látható, hogy $\vec{p}_0 = \vec{p}$, azaz a rendszer összimpulzusa változatlan maradt

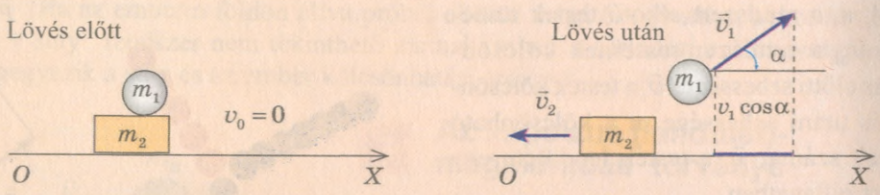
4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A puha vízszintes talajon elhelyezett ágyúból a vízszinteshez képest 60°-os szögben 100 km/h sebességgel repül ki a lövedék. Mekkora lesz a kilövés után az ágyú sebessége, ha a lövedék tömege 20 kg, az ágyúé pedig 2 t?

Adva:
$\alpha = 60°$
$v_1 = 100$ m/s
$m_1 = 20$ kg
$m_2 = 2000$ kg
$v_{01} = v_{02} = 0$

$v_2 - ?$

A fizikai probléma elemzése. Az ágyú + lövedék rendszert zártnak tekinthetjük, mivel a súrlódási erő nagyságrendekkel kisebb a kilövéskor létrejövő erőknél. Kiválasztunk egy, a Föld felszínével összekötött vonatkoztatási pontot. Készítünk egy sematikus rajzot, melyen feltüntetjük a sebességek irányát a kölcsönhatás előtt és után, valamint az *OX* tengely irányát (a Földhöz viszonyítva függőleges irányban az ágyú nem mozog – a Földdel együtt tesz szert impulzusra, ezért elég az *OX* tengelyt feltüntetni).



A matematikai modell felállítása, megoldás. Felírjuk a lendületmegmaradás törvényét vektoralakban:

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

A rajzról meghatározzuk a sebességek OX tengelyre eső vetületeit: $0 = m_1v_1\cos\alpha - m_2v_2$. Innen meghatározzuk a v_2-t:

$$m_2v_2 = m_1v_1\cos\alpha \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1\cos\alpha}{m_2}.$$

Kiszámítjuk a keresett mennyiség értékét:

$$[v_2] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{c}}; \quad \{v_2\} = \frac{20 \cdot 100 \cdot 0{,}5}{2000} = 0{,}5; \quad v_2 = 0{,}5 \text{ m/s}.$$

Felelet: az ágyú sebessége a lövés után $v_2 = 0{,}5$ m/s.

Összegzés

Az erőimpulzus olyan fizikai vektormennyiség, amely az erő $\vec{F}$ és az erőhatáshoz szükséges idő t szorzatával egyenlő: $\vec{F}t$.

A lendület olyan $\vec{p}$ fizikai vektormennyiség, amely a test tömegének m és a test sebességének $\vec{v}$ szorzatával egyenlő: $\vec{p} = m\vec{v}$.

A test lendületváltozása egyenlő az erőimpulzussal: $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t$.

A testrendszert zártnak nevezzük, ha nem hat rájuk külső erő. A testrendszert zártnak tekinthetjük, ha a rájuk ható külső erőket kiegyenlítik a belső erők, illetve azok jelentősen kisebbek. Zárt testrendszerben érvényesül a lendületmegmaradás törvénye: zárt rendszerben kölcsönhatás előtt a testek impulzusának geometriai összege megegyezik a testek kölcsönhatása utáni impulzusuk geometriai összegével.

$$m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} + \ldots + m_n\vec{v}_{0n} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n.$$

Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk lendületen? Mik a mértékegységei? **2.** Mit értünk erőimpulzuson vagy erőlökésen? Mik a mértékegységei? **3.** Fogalmazzátok meg Newton második törvényét, a lendület és az erőimpulzus fogalmak felhasználásával! **4.** Milyen rendszert mondhatunk zártnak? Mondjatok példákat! **5.** Milyen erőket nevezünk a rendszer belső erőinek? **6.** Fogalmazzátok meg a lendületmegmaradás törvényét! **7.** Bizonyítsátok be két testre a lendületmegmaradás törvényét!

27. gyakorlat

1. A labdarúgó a pályán a labdát a talajhoz viszonyítva 4 m/sec sebességgel vezeti. Határozzátok meg a labda impulzusát: a) a Föld felszínéhez viszonyítva; b) a labdával szembe 5 m/s sebességgel futó focistához viszonyítva, c) a labdát vezető játékoshoz viszonyítva! A labda tömegét adjátok meg önállóan.



2. Hasonlítsátok össze 100 méteres síkfutás közbeni impulzusotokat a lőfegyverből kilőtt golyó impulzusával! A szükséges adatokat adjátok meg önállóan.
3. Bizonyára többen találkoztatok már a következő szituációval: az ember felállt a csónakban és még mielőtt kikötne a csónak, előre lép. Ennek következtében a csónak megindul hátrafelé (lásd az ábrát). Magyarázzátok meg az adott jelenséget a lendületmegmaradás törvényének szemszögéből (az ábrán).
4. Két könnyen mozgó, 2 és 6 kg tömegű kiskocsi egymással szemben 2, illetve 3 m/s sebességgel mozog. Ütközés után a kocsik egységes egészként mozogtak tovább. Határozzátok meg a kocsik mozgássebességének abszolút értékét és irányát!
5. A 150 kg tömegű, 2 m/s sebességgel mozgó csónakból vízszintes irányban 6 m/s sebességgel kiugrik egy 50 kg tömegű fiú. Mekkora a csónak sebessége az ugrás után, ha a fiú a csónak hátuljából annak mozgásirányával ellentétes irányba ugrik? A csónak orrából a mozgásirányba ugrik? A fiú sebessége mindkét esetben a vízszintessel 45°-os szöget zár be.
6. A 10 m/s sebességgel mozgó *A* biliárdgolyó ütközött a nyugalomban lévő, hasonló tömegű *B* golyóval (lásd a 31.3. ábrát). Határozzátok meg a golyók sebességét az ütközés után, ha az *A* golyó sebessége az ütközés előtti mozgásirányával 30°-os szöget zár be, a *B* golyó sebessége és az *A* golyó ütközés előtti mozgásiránya közötti szög pedig 60°-os!
7*. A 70 kg tömegű ember a csónak farából átmegy a csónak orrába. A parthoz viszonyítva mekkora távolságra és milyen irányban mozdul el a csónak, ha tömege 130 kg, hossza pedig 4 m? Az ember és a csónak mozgását egyenletesnek vehetjük.

32. §. REAKTÍV MOZGÁS. RAKÉTÁK

?! Minek köszönhetően mozoghatnak az emberek, gépkocsik, vonatok, állatok? Miért tudnak repülni a vitorlázórepülők, madarak, lepkék? Miért úsznak a halak, hajók, tengeralattjárók? A válasz nagyon egyszerű: a felsorolt testek mindegyike azért mozog, mert valamitől elrugaszkodik: az emberek, állatok, gépkocsik, vonatok – a földtől, a vitorlázórepülők, madarak, lepkék – a levegőtől, a halak, hajók – a víztől. De mi a helyzet az űrhajókkal? Ahhoz, hogy megmozduljon, illetve megváltoztassa sebességét, valamitől szintén el kell rugaszkodnia, viszont az űrben nincs erre lehetőség. Ugyanakkor az űrhajók repülnek az űrben, manővereznek, visszatérnek a Földre. Mitől is rugaszkodnak el? A következőkben kiderítjük.

1 Milyen mozgást neveznek reaktív mozgásnak?

Elvégzünk egy egyszerű kísérletet. Felfújunk egy lufit, és anélkül, hogy bekötnénk a száját, elengedjük. A lufi repülni kezd, és addig mozog, míg a nyílásán keresztül áramlik kifelé a levegő. Ebben az esetben az úgynevezett *reaktív mozgással* van dolgunk.

A reaktív mozgás olyan mozgás, mely akkor jön létre, mikor a test egy része bizonyos sebességgel elhagyja a testet.

A reaktív mozgás alapja a lendületmegmaradás törvénye. Visszatérünk a lufival végzett kísérlethez. Ha a lufi nyílását befogjuk, a lufi nyugalomban marad és a lufi + levegő rendszer impulzusa: $\vec{p}_{0\,lu} + \vec{p}_{0\,le} = 0$. Ha a nyílást szabaddá tesszük, a levegő nagy sebességgel áramlik ki, és ezáltal impulzusra tesz szert: $\vec{p}_{le} = m_{le}\vec{v}_{le}$.

A lufi szintén impulzust kap: $\vec{p}_{lu} = m_{lu}\vec{v}_{lu}$, melynek iránya ellentétes a levegő impulzusának irányával.

Az impulzusmegmaradás törvénye szerint a lufi + levegő rendszer összimpulzusa állandó marad és 0-val egyenlő: $m_{le}\vec{v}_{le} + m_{lu}\vec{v}_{lu} = 0$. Tehát a lufi mozgási sebessége:

$$\vec{v}_{lu} = -\frac{m_{le}}{m_{lu}}\vec{v}_{le}.$$

A „–” előjel arról árulkodik, hogy a lufi a levegő irányával ellentétes irányban mozog.

Megvizsgáljuk annak a gépfegyvernek visszarúgását, amely másodpercenként n számú lövést ad le. A lövedék tömege m_1, sebessége a cső elhagyásakor pedig $\vec{v}$. A lövedékek impulzusának másodpercenkénti változása (az impulzusváltozás gyorsasága) $nm_1\vec{v}$. A lövedékre ható $\vec{F}$ erő a lövedék impulzusváltozásának gyorsaságával egyenlő:

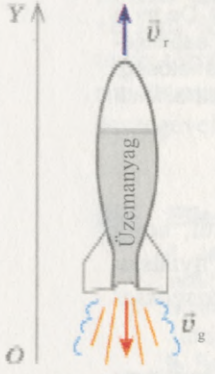
$$\vec{F} = nm_1\vec{v}.$$

Newton harmadik törvénye alapján ugyanekkora, de ellentétes irányú erő hat a gépfegyverre is. Tehát lövés közben a gépfegyverre állandó erő hat, melyet a fegyver tüzelési gyorsasága, a lövedékek tömege és sebessége határoz meg.

Hasonlóképpen jön létre az űrhajó *reaktív ereje*, mikor a rakétatestből gáz áramlik ki.

2 A rakéta reaktív mozgása

A **rakéta** egy olyan repülő eszköz, mely a térben a saját tömege egy részének leválása során keletkező reaktív (visszaható) erő segítségével végez mozgást.



32.1. ábra. Az impulzusmegmaradás törvényének felhasználása a rakéta mozgásának leírásához ($\vec{v}_r$ a rakétatest mozgási sebessége, $\vec{v}_g$ a kiáramló gáz sebessége)

A rakéta leváló része (munkaközeg) az a kiáramló forró gázsugár, mely az üzemanyag elégésekor keletkezik. Mikor a gázsugár óriási sebességgel elhagyja a testet, a rakéta jelentős impulzust kap, mely a kiáramló gázsugárral ellentétes irányban hat.

Feltételezzünk egy valószínűtlen esetet: a kilövés pillanatában a rakéta összes üzemanyaga egyszerre ég el. Mivel az indulásig a rakéta nyugalomban van, ezért az impulzusmegmaradás törvénye a következőképpen nézne ki: $0 = m_g\vec{v}_g + m_r\vec{v}_r$. Irányítsuk az OY tengelyt a rakéta mozgásirányába (32.1. ábra), és a vektoregyenletet képezzük le erre a tengelyre, a következőket kapjuk: $0 = -m_g v_g + m_r v_r$, ahonnan:

$$v_r = \frac{m_g}{m_r}v_g.$$

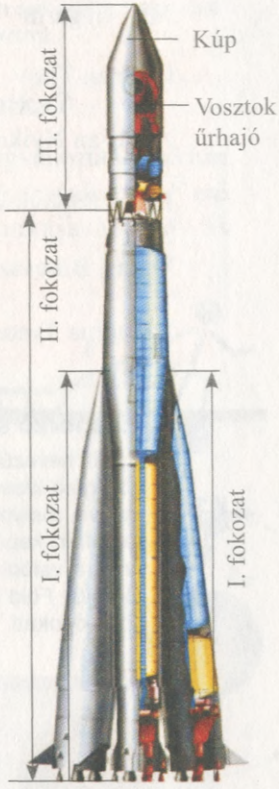
Ha feltételezzük, hogy az üzemanyag tömege 4-szerese a rakétatest tömegének $\left(\frac{m_g}{m_r} = 4\right)$, a visszaható gázsugár sebessége $v_g = 2$ km/s (megközelítőleg ilyen sebességgel hagyja el a forró gáz a rakéta fúvókáit), megkapjuk a rakéta sebességét: $v_r = 4\,v_g = 8$ km/s.

Tehát ha a rakéta üzemanyaga egy pillanat alatt elégne, a felvett sebessége elegendő lenne ahhoz, hogy a rakéta földkörüli pályára álljon (az első kozmikus sebesség a földfelszín közelében 7,9 km/s). A valóságban az üzemanyag fokozatosan ég el és a számítások azt mutatják, hogy ebben az esetben az üzemanyag tömege a rakéta tömegének 50-szerese kell hogy legyen. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a rakéta mozgását a Föld nehézségi ereje és a légellenállás is jelentősen befolyásolja, azt az eredményt kapjuk, hogy az üzemanyag tömege 200-szorosan haladja meg a rakétatest tömegét. Viszont ezt technikailag lehetetlen megvalósítani.

Még *Konsztantin Eduardovics Ciolkovszkij* (1857–1935) orosz–szovjet tudós bebizonyította, hogy az egylépcsős rakéta nem képes elhagyni a Föld légterét és a *Rakéta vonatok* c. munkájában a többlépcsős rakéta elvét is lefektette. Az ilyen rakétákban a kiürült üzemanyagtartály (fokozat) leválik a rakéta testéről, és a súrlódás hatására elég az atmoszférában. Az egyre kisebb tömegű rakéta egyre nagyobb sebességre tud felgyorsulni.

A 32.2. ábrán a háromlépcsős *Vosztok* rakétahordozó látható, mely négy oldalsó blokkból (I. fokozat) áll, melyek a központi blokkot (II. fokozat) fogják közre. Maga az űrhajó a III. fokozatban helyezkedik el, közvetlen az áramvonalas kúp alakú burkolat alatt, amely megvédi az aerodinamikus erőhatásoktól repülés közben az atmoszféra sűrűbb rétegeiben. Minden egység saját hajtóművel rendelkezik.

1961. április 12-én a *Vosztok* rakétahordozó Föld körüli pályára állította a *Vosztok* űrhajót *Jurij Gagarinnal*, a világ első űrhajósával a fedélzetén (32.3. ábra).



32.2. ábra A háromlépcsős *Vosztok* rakétahordozó



32.3. ábra. Jurij Olekszijovics Gagarin (1934–1968) szovjet űrhajós a világon elsőként hajtott végre űrutazást (1961. április 12-én)

Elsőként a *Vosztok* űrhajókon hajtott végre az ember űrutazást:

Űrhajósok	Az űrutazás dátuma, időtartama	
Jurij Gagarin	1961. április 12;	1 óra 48 perc
German Titov	1961. augusztus 6–7;	25 óra 18 perc
Andrijan Nyikolajev	1962. augusztus 11–15;	94 óra 22 perc
Pavlo Popovics	1962. augusztus 12–15;	70 óra 57 perc
Valerij Bikovszkij	1963. június 14–19;	119 óra 6 perc
Valentina Tyereskova	1963. június 16–19;	70 óra 50 perc

? Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk reaktív mozgásnak? **2.** Mondjátok el a reaktív mozgás megfigyelésére szolgáló kísérleteket! **3.** Írjátok le az impulzusmegmaradás törvényét arra a rakétára nézve, melynek a feltételezés szerint összes üzemanyaga az indulás pillanatában ég el! Miért kapunk ebben az esetben a rakéta sebességére jóval nagyobb eredményt, mint a valódi rakéta sebessége esetén? **4.** Miért használnak többlépcsős rakétát az űrhajók Föld körüli pályára juttatásához? **5.** Soroljátok fel a *Vosztok* űrhajókon repült űrhajósokat!

FIZIKA ÉS TECHNIKA UKRAJNÁBAN



O. M. Guz

Az Ukrán Tudományos Akadémia Sz. P. Timosenkó nevét viselő mechanikai intézete (Kijev)

Az 1918-ban alapított intézet napjainkban a mechanika terén Ukrajna legnagyobb világhírű kutatóközpontja. 1993-ban vette fel első igazgatójának, *Sztepan Prokopovics Timosenkónaka* nevét.

Tudományos kutatásaiknak főbb irányai: a kompozit és heterogén közegek mechanikája, a szerkezetek és anyagainak összekötő mezői, a rombolás és ellenállóság mechanikája, a mechanikai rendszerek dinamikája és szilárdsága.

Az intézmény tudósainak kísérleti és elméleti eredményeit az űrhajózás, a repülés, a hajóépítés és az ipar egyéb területén hasznosítják. Az itt elért eredményeket felhasználják vezető ukrán és más országok tudományos kutatóintézeteiben és konstrukciós tervező intézményeiben.

Az intézetben jöttek létre a mechanika világhírű iskolái, egyebek közt a Krilov – Bogoljubov – Mitropolszkij féle nemlineáris rezgések, Guz iskolája.

1976-tól a főiskolát az UTA akadémikusa, *Olekszandr Mikolajovics Guz* vezeti, aki több ország tudományos akadémiájának tagja, többszörös állami és akadémiai díj kitüntetettje (1979, 1983, 1985), az Európai Tudományos Akadémia Pascal érmének (2007) tulajdonosa.

33. §. MECHANIKAI MUNKA. TELJESÍTMÉNY

?! A mechanikai munka fogalmával már megismerkedtetek a 8. osztályos fizika anyagából. Bizonyára már észrevettétek, hogy ebben a tanévben gyakran találkoztok számotokra ismerős kifejezésekkel, melyeket nemcsak megismétlünk, hanem sok újat is megtudtok róluk. A következő paragrafusban is újdonságokkal fogtok találkozni.

1 Hogyan határozható meg a mechanikai munka?

Mechanikai munkavégzés történik, ha a test erő hatására megváltoztatja a térben a helyzetét (elmozdul). Tehát *a munka az erő hatásának térbeli jellemzője*. Az $\vec{F}$ erő és az $\vec{s}$ elmozdulás vektormennyiség, ezért az erő munkája az erő- és elmozdulásvektorok kölcsönös elhelyezkedésétől függ.

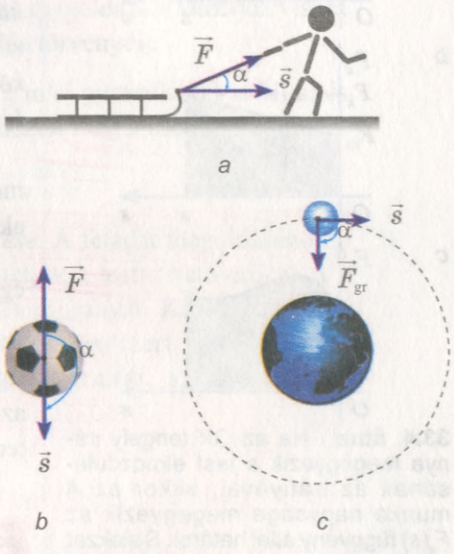
A mechanikai munka (az erő munkája) olyan fizikai mennyiség, amely az $\vec{F}$ erő és az ezen erő hatására történő s elmozdulás abszolút értékének, valamint az erő- és elmozdulásvektorok által bezárt szög koszinuszának szorzatával egyenlő.

$$A = Fs\cos\alpha.$$

A munka mértékegysége az SI-ben *a* **joule (J)**. 1 J *az a munka, melyet* 1 N *erő végez a test* 1 m*-nyi távolságra történő elmozdításával az erő hatásának irányába* (1 J = 1 N · m).

A testre ható erő munkája *skaláris* mennyiség, viszont lehet *pozitív, negatív előjelű, illetve nulla, attól függően, hogy a test mozgásirányához képest melyik irányba hat az erő* (33.1. ábra).

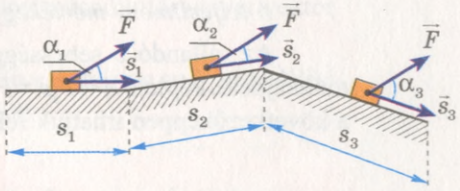
Ha a test mozgása közben az erővektor és az elmozdulásvektor közötti szög változik, akkor az erő összmunkája a különböző szakaszokon végzett munkák összegéből tevődik össze (33.2. ábra).



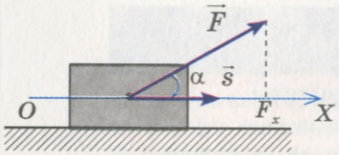
33.1. ábra. Az $\vec{F}$ erő és az $\vec{s}$ elmozdulás vektorai közötti α szög nagyságától függően az erő munkája lehet: *a*) pozitív, ha $0 \leqslant \alpha < 90°$ ($\cos\alpha > 0$); *b*) negatív, ha $90° < \alpha \leqslant 180°$ ($\cos\alpha < 0$); *c*) nulla, ha $\alpha = 90°$ ($\cos\alpha = 0$).

2 Mi az erő munkájának geometriai értelme?

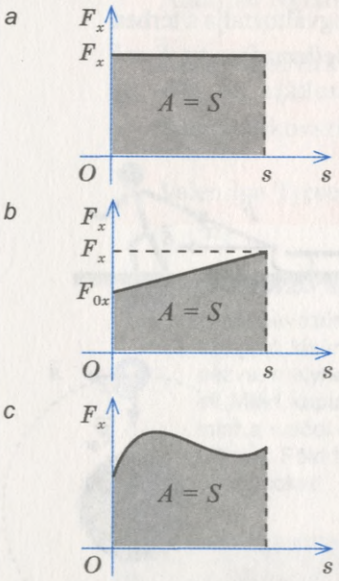
Legyen a mozgásiránnyal α szöget bezáró erő állandó. Az OX koordinátatengelyt a test



33.2. ábra. A munka additív mennyiség, vagyis az erő munkája összeadható: $A = A_1 + A_2 + A_3 = Fs_1\cos\alpha_1 + Fs_2\cos\alpha_2 + Fs_3\cos\alpha_3$



33.3. ábra. Az erő munkája az erő mozgásirányba mutató tengelyre leképzett vetületének és az elmozdulásnak a szorzatával egyenlő: $A = F_x s$.



33.4. ábra. Ha az *OX* tengely iránya megegyezik a test elmozdulásának az irányával, akkor az *A* munka nagysága megegyezik az $F_x(s)$ függvény által határolt *S* alakzat területének számértékével

mozgásának az irányába helyezzük (33.3. ábra). Az ábrán látható, hogy $F \cos \alpha = F_x$, tehát $A = F_x s$, vagyis az *erő munkája az erő elmozdulás irányú vetületének és a test ezen erő által történt elmozdulása abszolút értékének szorzatával egyenlő.*

Feltételezzük, hogy a testre a mozgása egész ideje alatt állandó erő hat. Ebben az esetben az $F_x(s)$ – az erő-elmozdulás függvény – grafikonja az elmozdulás irányával párhuzamos egyenes (33.4. *a* ábra). Az ábrán látható, hogy az erő vetületének és az elmozdulásnak a szorzata megegyezik az $F_x(s)$ függvény grafikonja alatti téglalap *S* területével. Ebben nyilvánul meg ***az erő munkájának geometriai értelme***: *az erő munkája számszerűleg az erő vetülete és az elmozdulás abszolút értéke közti összefüggés grafikonja által határolt alakzat területével egyenlő.*

Ez a kijelentés érvényes a változó erőre is. Ha a mozgás ideje alatt az erő vetülete lineárisan változik, akkor az erő munkája számszerűleg a trapéz területével egyenlő (33.4. *b* ábra): $A = \frac{F_{0x} + F_x}{2} s$, ahol F_{0x} az erő vetülete a megfigyelés elején, F_x az erő vetülete a megfigyelés végén. Bármely $F_x(s)$ függvény esetén a munka az $F_x(s)$ függvény grafikonja alatti görbe vonalú trapéz területével egyenlő (33.4. *c* ábra).

3 Mi a teljesítmény?

A munkavégzés gyorsaságát jellemző fizikai mennyiséget **teljesítménynek** nevezzük (jele ***P***). A teljesítmény az *A* munka és az adott munka elvégzéséhez szükséges *t* idő hányadosával egyenlő:

$$P = \frac{A}{t}.$$

A teljesítmény mértékegysége az SI-ben a **watt** * ($1\ \text{W} = 1\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$).

Az állandó v sebességgel mozgó test $s = vt$ elmozdulása esetén a vonóerő munkájának képlete $A = F_x s = F_x vt$ alakban adható meg. Ekkor a teljesítmény képletét a következőképpen írhatjuk fel:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F_x vt}{t} = F_x v.$$

* A teljesítményt mértékegységeként *James Watt* (1736–1819) *a lóerőt* vezette be, mely néhol még ma is használatos: 1 LE = 746 W.

A fenti képlet változó mozgás esetében is érvényes: abban az esetben P pillanatnyi teljesítmény, az erő F_x tengelyre eső adott pillanatbeli vetülete, v a test pillanatnyi sebessége.

Az adott képlet alapján állíthatjuk: állandó motorteljesítmény esetén, minél nagyobb a forgási sebessége, annál kisebb húzóerőt tud kifejteni. Például ha a gépkocsi lejtőn felfelé halad és nagyobb húzóerőre van szükség, a vezető alacsonyabb sebességre kapcsol, és viszont: a vízszintes útszakaszon a gépkocsivezető nagyobb sebességgel közlekedik.

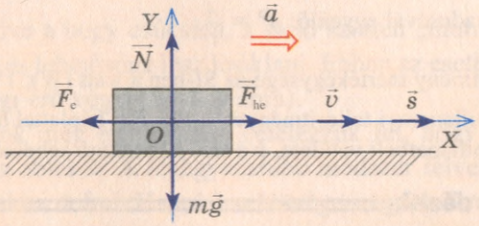
4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Hogy meghatározzuk a mechanikai munkát és teljesítményt, ismernünk kell a testre ható erőt, a test elmozdulását és mozgásidejét. Ezért a munka és a teljesítmény meghatározását a kinematika és a dinamika feladatainak megoldására vezetjük vissza (amennyiben nem használjuk fel az energiamegmaradás törvényét).

Feladat. A 2 tonna tömegű gépkocsi helyből 2 m/s² gyorsulással indul el és vízszintes útszakaszon 20 m/s sebességet ér el. Határozzuk meg a motor húzóerejét, ha a mozgás ellenállási együtthatója 0,01!

Adva:
$m = 2 \cdot 10^3$ kg
$v_0 = 0$
$a = 2$ m/s²
$v = 20$ m/s
$\mu = 0{,}01$
$A - ?$

A fizikai probléma elemzése. A feladat megoldásához rajzot készítünk, melyen feltüntetjük a testre ható erőket, a test gyorsulásának és sebességének irányát. Kiválasztjuk a földfelszínhez rögzített koordináta-rendszert, ahol az OX tengely az autó mozgásirányába mutat, az OY pedig merőlegesen fölfelé.



A matematikai modell felállítása, megoldás

1) A munka meghatározása szerint: $A = F_{he} s \cos \alpha$. (1)

2) Az F_{he} húzóerő meghatározásához felírjuk Newton második törvényét vektor alakban: $\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_e = m\vec{a}$.

Az erőt és gyorsulást a koordinátatengelyekre vetítve és felírva az F_e ellenállási erő képletét, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} OX: F_{he} - F_e = ma, \\ OY: N - mg = 0, \\ F_e = \mu N. \end{cases}$$

Megoldva a kapott rendszert, megkapjuk a húzóerőt: $N = mg \Rightarrow F_e = \mu mg \Rightarrow F_{he} = m(\mu g + a)$. (2)

3) Az s elmozdulás meghatározásához használjuk az $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$ képletet. Mivel

$s_x = s$, $v_x = v$, $v_{0x} = 0$, $a_x = a$, ezért $s = \frac{v^2}{2a}$. (3)

4) Az erő- és elmozdulásvektorok által bezárt α szög nulla, ezért

$\cos\alpha = \cos 0 = 1$. (4)

Behelyettesítve a (2), (3) és (4) kifejezéseket az (1) képletbe, a következőt kapjuk:

$$A = m(\mu g + a)\frac{v^2}{2a}.$$

Kiszámítjuk a keresett mennyiség értékét:

$$[A] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}{\text{m/s}^2} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J};$$

$$\{A\} = 2 \cdot 10^3 (0{,}1 + 2)\frac{400}{4} = 4{,}2 \cdot 10^5; \quad A = 4{,}2 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Felelet: a motor húzóerejének munkája $A = 4{,}2 \cdot 10^5$ J.

Összegzés

A mechanikai munka A (az erő munkája) olyan fizikai mennyiség, mely az F erő és az erő által előidézett s elmozdulás abszolút értékének, valamint az erő és elmozdulás vektorai közötti α szög koszinuszának szorzatával egyenlő: $A = Fs\cos\alpha$.

A munka mértékegysége az SI-ben a joul (J), $1\text{ J} = 1\text{ N} \cdot \text{m}$.

Az erő által végzett munka értéke megegyezik az $F_x(s)$ függvény grafikonja alatti alakzat területének számértékével, ahol az $F_x(s)$ függvény az erő vetülete és az elmozdulás abszolút értéke közötti összefüggést fejezi ki.

A munkavégzés gyorsaságát jellemző fizikai mennyiséget teljesítménynek nevezzük (jele P). A teljesítmény az A munka és az adott munka elvégzéséhez szükséges t idő hányadosával egyenlő: $P = \frac{A}{t}$.

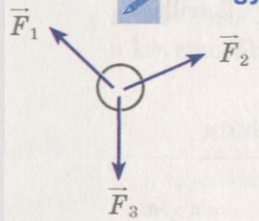
A teljesítmény mértékegysége az SI-ben a watt (W); $1\text{W} = 1\frac{\text{J}}{\text{s}}$.

Az erő pillanatnyi teljesítményét a $P = F_x v$ képlettel határozhatjuk meg, ahol F_x az erő adott pillanatbeli vetülete, v a test pillanatnyi sebessége.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiáljuk a mechanikai munkát? Mi a mértékegysége az SI-ben? **2.** Mi a joul (J)? **3.** Az erő által végzett munka milyen esetben pozitív? Negatív? Egyenlő nullával? **4.** Mi az erő által végzett munka geometriai értelmezése? **5.** Mi a teljesítmény? Mértékegysége az SI-ben? **6.** Hogyan határozható meg az erő pillanatnyi teljesítménye?

28. gyakorlat



1. Hozzatok fel olyan, a könyvben nem említett példákat, amikor a testre ható erő pozitív munkát végez, negatív munkát végez, nem végez munkát!

2. A rajzon a testre ható erőket ábrázoltuk. Rajzoljátok át az ábrát a füzetbe, és jelöljétek meg a test sebességének irányát, ha

a) $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $A_3 = 0$; b) $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$; c) $A_1 = 0$, $A_2 < 0$, $A_3 > 0$!

3. Mekkora munkavégzéssel jár egy 10 kg tömegű test 1,2 m/s² gyorsulással történő felemelése 5 m magasba?
4. A szánhúzó kutyák 980 kJ munkát végeztek 10 km hosszú vízszintes útszakaszon. A súrlódási együtthatót 0,02-nak véve, egyenletes mozgást feltételezve, határozzátok meg a szán tömegét!
5. Az 5 m/s sebességgel mozgó korcsolyázó 3 s alatt áll meg. Határozzátok meg a súrlódási erő által végzett munkát, ha tömege 50 kg, a korcsolya súrlódási együtthatója pedig 0,15!
6. A 30 N erővel megfeszített hűtőventilátor ékszíja 40 m/perc sebességgel mozog. Számítsátok ki az ékszíj teljesítmény-átvitelét!

34. §. MECHANIKAI ENERGIA. MOZGÁSI ENERGIA

?! Mikor a test (az erő) munkát végez, megváltozik annak mechanikai állapota. Például esés közben változik a labda állapota: a Földhöz viszonyított távolsága csökken, a földbe csapódáskor megáll – megváltozik mozgásállapota. A fizika tananyagából már tudjátok, hogy az anyag mozgásának és kölcsönhatásának mértéke az *energia*, ezért a mechanikai munka fogalma szorosan összefügg a mechanikai energia fogalmával. Az alábbiakban felidézzük a mozgási energia fogalmát és megkapjuk a meghatározásához szükséges képletet.

1 Mikor mondjuk, hogy a testnek energiája van?

Megvizsgáljuk, hogyan lehet megváltoztatni a test fizikai állapotát, hogy képes legyen a munkavégzésre. A mechanikus óra a legegyszerűbb szerkezet, amely „munkát halmoz fel" (34.1. *a* ábra). Működéséhez az órát fel kell húzni, azaz meg kell feszíteni a rúgóját. A rugalmassági erő hatására széttekeredve, a rugó munkát végez, pontosabban a munkát a rugó rugalmassági ereje végzi.



34.1. ábra. Az óra deformált rugója (*a*) és a föld fölé emelt test (*b*) munkavégzésre képes, vagyis energiával rendelkezik

Felkapaszkodva a hegy csúcsára, a síelő szintén „munkatartalékot" hoz létre és lehetősége lesz lesiklani. Ebben az esetben a munkát a nehézségi erő végzi (34.1. *b* ábra).

Megvizsgálunk még egy példát. Tételezzük fel, hogy be kell törni az égő ház ablakát. A legegyszerűbb módszer felvenni egy követ és az ablakba dobni. Ha a kő sebessége megfelelő, betöri az üveget, más szóval munkát végez.

A fenti példák arról tanúskodnak, hogy a deformált rugó, a földfelszín fölé emelt test, a kő, melyek sebességgel rendelkeznek, képesek munkavégzésre. Ha a test vagy testek rendszere munkavégzésre képes, azt mondjuk rájuk, hogy *energiával rendelkeznek* (*energia* = munkavégzés görög szóból).

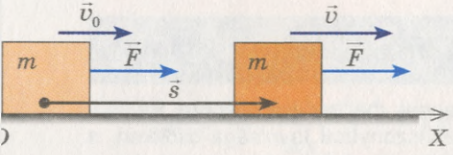
Mechanikai energia (W) a test vagy az egymással kölcsönhatásban lévő testek munkavégző képességét jellemző fizikai mennyiség.

A munkához hasonlóan *az energia mértékegysége* az *SI-ben* a **joul** (J).

Mechanikai munka végzése közben a test energiája változik, tehát *a mechanikai munka a test energiaváltozásának mértéke.*

2 Hogyan határozható meg a mozgási energia?

A mechanikában kétfajta energia létezik: *mozgási* (*kinetikus*) és *helyzeti* (*potenciális*). A mozgási energia a test mozgásához kötődik. Erről az energiafajtáról beszéltünk abban a példában, amelyben a repülő kő széttöri az ablaküveget. A mozgó víz turbinákat képes meghajtani, a kalapács szöget verhet be, a szél fákat csavar ki. A felsorolt esetekben a mechanikai munkavégzés a mozgási energia csökkenését eredményezte. Ez fordítva is igaz: ha egy testen munkát végeznek, úgy megnövekszik annak mozgási energiája.



4.2. ábra. A mozgási energia képletének levezetéséhez

Megvizsgálunk egy m tömegű testet, melynek sebessége $\vec{v}_0$-ról $\vec{v}$-re növekszik. Legyen $\vec{F}$ a testre ható erők eredője (34.2. ábra).

Meghatározzuk az eredő erő által végzett munkát.

A munka meghatározása szerint $A = Fs \cos \alpha$. Newton második törvénye alapján $F = ma$. Mivel az $\vec{F}$ egyenletesen ható erő állandó, ezért a test egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez, tehát $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$. Az erő és elmozdulásvektorok közötti α szög nulla, azaz $\cos \alpha = 1$.

Behelyettesítve a munka képletébe az F, s és $\cos \alpha$ kifejezéseit, a következőket kapjuk: $A = ma\frac{v^2 - v_0^2}{2a} = m\frac{v^2 - v_0^2}{2}$ vagy

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \qquad (1)$$

Ebből láthatjuk, hogy az erő által végzett munka az $\frac{mv^2}{2}$ kifejezéssel egyenlő.

A munka a test energiaváltozásának mértéke, ezért az $\frac{mv^2}{2}$ kifejezést az *egyenletes** *mozgást végző test mozgási (kinetikus) energiájának nevezzük* (*kinetikos* – mozgató, latin szóból).

A mozgási energia (W_m) a mozgó testet jellemző fizikai mennyiség, amely a test tömegének és sebessége négyzetének félszorzatával egyenlő:

$$W_m = \frac{mv^2}{2}.$$

Jegyezzétek meg: a mozgási energia a test mozgási sebességétől (tehát a vonatkoztatási rendszertől) függ.

* Ha a test nemcsak mozog, hanem forog is, akkor a test mozgási energiáján kívül a *forgó mozgás kinetikus energiájával* is rendelkezik. Ha a testet anyagi pontnak vesszük, akkor a forgásából származó mozgási energiája elhanyagolható.

A mozgási energia fogalmának megismerése után az (1) képletet a következőképpen írhatjuk fel: $A = W_m - W_{m0} = \Delta W_m$.

Ez a kifejezés a **mozgási energiáról szóló** tétel *matematikai képlete*.

A testre ható erők eredőjének munkája egyenlő a test mozgási energiájának a változásával:

$$A = W_m - W_{m0} = \Delta W_m.$$

Ha a kezdeti pillanatban a test mozdulatlan ($v_0 = 0$) vagyis $W_{m0} = 0$, a mozgási energiáról szóló tételt a következő képlettel fejezhetjük ki:

$$A = W_m = \frac{mv^2}{2}.$$

A v sebességgel mozgó test mozgási energiája egyenlő azzal a munkával, amit az erő fejt ki, hogy a test nyugalmi állapotból elérje a kívánt v sebességet.

Összegzés

A mechanikai energia (W) a test vagy az egymással kölcsönhatásban lévő testek munkavégző képességét jellemző fizikai mennyiség.

A munkához hasonlóan az energia mértékegysége az SI-ben a joul (J).

A mozgási energia (W) a mozgó testet jellemző fizikai mennyiség, amely a test tömegének és sebessége négyzetének félszorzatával egyenlő: $W_m = \frac{mv^2}{2}$.

A v sebességgel mozgó test mozgási energiája egyenlő azzal a munkával, amit a testre ható erő fejt ki, amikor nyugalmi állapotából v sebességre gyorsítja azt: $A = W_m$.

A mozgási energia tétele: a testre ható összes erő munkája megegyezik a test mozgási energiájának változásával: $A = W_m - W_{m0} = \Delta W_m$.

Ellenőrző kérdések

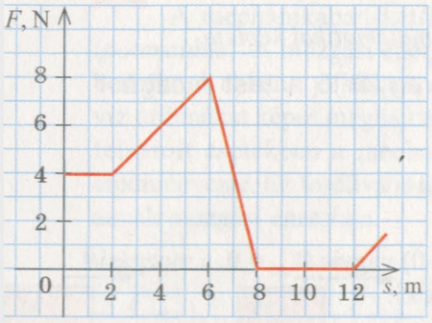
1. Mit jelent „a test (testrendszer) energiával rendelkezik" kifejezés? **2.** Mi az energia mértékegysége az SI-ben? **3.** Hozzatok fel példát annak bizonyítására, hogy munkavégzés közben változik az energia! **4.** Hogyan definiáljuk a test mozgási energiáját? **5.** Fogalmazzátok meg a mozgási energiáról szóló tételt! **6.** Változatlan maradhat-e a test mozgási energiája, ha a testre ható erők eredője nem nulla? **7.** Mi a mozgási energia fizikai értelmezése?

29. gyakorlat

1. A bolygóközi űrutazások alkalmával fennáll annak az esélye, hogy az űrhajó nagy sebességű, de kis méretű meteoritokkal ütközik. Határozzátok meg az 1 kg tömegű és 60 km/s sebességű mikrometeorit mozgási energiáját!

2. Az 1 t tömegű autó sebessége 10 m/s-ról 20 m/s-ra növekedett. Határozzátok meg a gépkocsira ható erők eredőjének munkáját!

3. A v sebességgel repülő rakéta kétszeresére növelte sebességét. Az üzemanyag elégésének eredményeként tömege a kezdetihez képest a felére csökkent. Hányszorosára változott eközben a rakéta mozgási energiája?



4. Egy 10 g tömegű golyó sebessége 400 m/s. Mekkora sebességgel folytatja a golyó a mozgást egy 5 cm vastag deszka átütése után, ha a deszka ellenállási ereje 12 kN?

5. Az 5 kg-os nyugalomban lévő testre, annak további mozgási irányával megegyező irányú erő hat. Az erő nagysága és a test által megtett út közötti összefüggést szemléltető grafikon az ábrán látható. Határozzátok meg a test mozgási energiáját s út megtétele után, ha: a) $s = 2$ m, b) $s = 5$ m, c) $s = 10$ m!

6*. A 10 g tömegű golyót a vízszinteshez képest bizonyos szög alatt 600 m/s kezdeti sebességgel lőtték ki. Mekkora ez a szög, ha a golyó mozgási energiája a mozgáspálya legfelsőbb pontján 450 J?

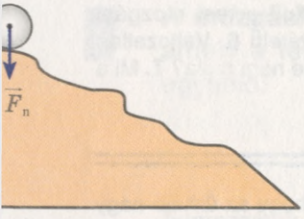
35. §. HELYZETI ENERGIA

?! A Föld felszíne fölé emelt nehéz kalapács nem rendelkezik mozgási energiával, mivel mozgássebessége nulla. Viszont ha elengedik a kalapácsot, az munkát végez, például beveri a földbe a karót. A megfeszített íjnak sincs mozgási energiája, viszont elengedve, az alakját visszanyerő íj sebességet kölcsönöz a nyílvesszőnek, vagyis munkát végez. A Föld fölé emelt és a deformált test is képes munkavégzésre, azaz van energiája. Milyen típusú energia ez és hogyan kell meghatározni?

1 Mikor rendelkezik a test helyzeti energiával?

Bármely mozgásban lévő test képes munkavégzésre, mivel van mozgási energiája, vagyis „élő ereje", ahogyan régen nevezték. Van a mechanikai energiának még egy fajtája, régi kifejezéssel élve „holt erő", amely a test más testekkel való kölcsönhatása után jön létre. Ezt az energiát *helyzeti (potenciális) energiának* nevezik (*potentia* – erő, lehetőség latin szóból).

Helyzeti energiának nevezzük (W_h) a test más testekkel való kölcsönhatását vagy az adott test egyes részei kölcsönhatásából adódó energiát.



5.1. ábra. A bizonyos magasságra felemelt golyó helyzeti energiával rendelkezik: ha elengedik a golyót, a nehézségi erő hatására mozogni kezd és munkát végez

Az egyenetlen lejtő tetején elhelyezett golyó (35.1. ábra) helyzeti energiával rendelkezik, mert ha elengedik, a Földdel kölcsönhatásba lépve mozogni kezd és a rá ható nehézségi erő munkát végez. Hogyan lehet meghatározni ezt a munkát, hiszen a mozgás egész ideje alatt a mozgásirány és a nehézségi erő iránya közötti szög állandóan változik? Ez nem is annyira bonyolult, mint amennyire első hallásra tűnik. A nehézségi erőnek van egy csodálatos tulajdonsága – az általa végzett munka nem függ a mozgáspálya formájától. A fizikában azokat az erőket, mely erők által elvégzett munka nem függ a mozgáspályától, *konzervatív, illetve potenciális erőknek* hívják (*conservare* – védeni, óvni latin szóból).

2 Hogyan számítható ki a felemelt test helyzeti energiája?

Bebizonyítjuk a nehézségi erőről, hogy konzervatív erő. Ehhez képzeletben az m tömegű golyót különböző mozgáspályákon K helyzetből B helyzetbe mozdítjuk el.

1. eset. Legyen a mozgáspálya lépcsőzetes (35.2. *a* ábra): a golyó h_0 magasságból h magasságig esik, majd vízszintesen mozog tovább. Kiszámítjuk a nehézségi erő által végzett munkát. Mivel a munka additív (összeadható) mennyiség, tehát $A = A_{KC} + A_{CB}$. A munka meghatározásából $A_{KC} = Fs_{KC}\cos\alpha$. Mivel $F = mg$, $s_{KC} = h_0 - h$, $\alpha = 0$ ($\cos\alpha = 1$), innen $A_{KC} = mg(h_0 - h)$.

A CB szakaszon a nehézségi erő merőleges az elmozdulás irányára, tehát nem végez munkát ($A_{CB} = 0$), így a következőket kapjuk:

$$A = mg(h_0 - h) + 0 = mgh_0 - mgh = -(mgh - mgh_0).$$

2. eset. Mozogjon a golyó K pontból B pontba az egyenes lejtőn (35.2. *b* ábra). A nehézségi erő által végzett munka ebben az esetben:

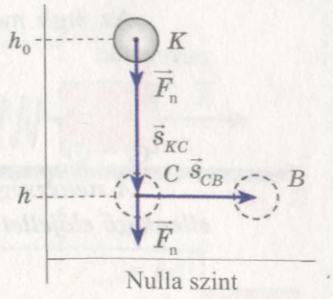
$$A = mgs_{KB}\cos\alpha = mg(h_0 - h) = mgh_0 - mgh =$$

$$= -(mgh - mgh_0).$$

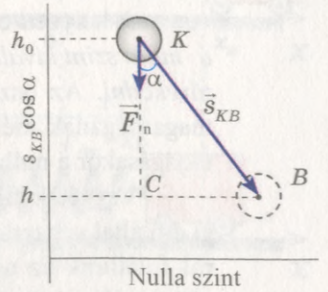
3. eset. Feltételezzük, hogy a golyó K pontból B pontba szabálytalan mozgáspályán mozog. (35.2. *c* ábra). Hogy kifejezzük a nehézségi erő munkáját, a mozgáspályát n számú szakaszra osztjuk. Ha a kapott szakaszok eléggé kicsik, akkor a rajtuk történő mozgást egyenes vonalúnak tekinthetjük. Meghatározzuk a nehézségi erő által végzett teljes munkát: $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n =$ $= mg(h_0 - h_1) + mg(h_1 - h_2) + \ldots + mg(h_{n-1} - h) =$ $= mg(h_0 - h_1 + h_1 - h_2 + \ldots + h_{n-1} - h)$. Egyszerűsítés után:

$$A = mgh_0 - mgh = -(mgh - mgh_0).$$

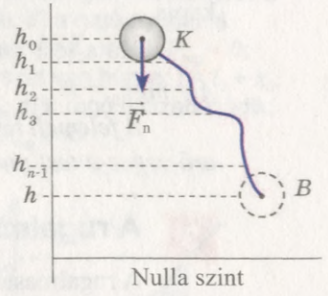
Mind a három esetben ugyanazt az eredményt kaptuk, vagyis a *nehézségi erő által végzett munka nem a mozgáspálya alakjától, hanem csak a test kezdeti és végső helyzetétől függ*, azaz a nehézségi erő konzervatív erő.



a



b



c

35.2. ábra. A test K pontból B pontba való elmozdulásakor a nehézségi erő munkáját, függetlenül a mozgáspálya formájától, a következő képlet segítségével számítjuk ki: $A = mgh_0 - mgh$, ahol h_0 a test kezdeti magassága a választott nulla szinthez képest, h a testnek a megfigyelés végén elért magassága

Az *mgh* mennyiséget a felemelt test *helyzeti* (potenciális) *energiájának* nevezzük:

$$W_h = mgh^*$$

A nehézségi erő munkája egyenlő a test helyzeti energiája változásának ellenkező előjellel vett értékével:

$$A = -(mgh - mgh_0) = -(W_h - W_{h0}) = -\Delta W_h$$

A helyzeti energia függ a magasságtól, *tehát a felemelt test helyzeti energiája a nulla szint kiválasztásától függ. A nulla szint kiválasztásánál a célszerűségre kell törekedni.* Az osztályban a padló felszínét választjuk nulla szintnek, a hegyek magasságának mérésekor a tengerszint szerinti 0 magasságot választjuk, az inga mozgásakor a nulla szint az inga nyugalmi állapota.

Vegyétek figyelembe, hogy a potenciális energia változása, azaz a nehézségi erő által végzett munka nem függ a nulla szint kiválasztásától. Valóban, ha a székről felállunk az asztalra és az összes tanuló feladatul kapja a potenciális energiánk változásának kiszámítását, akkor függetlenül a nulla pont kiválasztásától, amely lehet a padló, a szék, az asztal, a plafon, minden tanuló ugyanazt az eredményt kapja.

Ha a test a nehézségi erő hatására a nulla szintre mozdult el ($h = 0$), akkor $A = mgh_0 = W_{h0}$.

A felemelt test helyzeti energiája egyenlő azzal a munkával, amelyet a nehézségi erő végez a test nulla szintre való juttatásakor.

3 A rugalmasan deformált test helyzeti energiája

A rugalmasan deformált test egyes részei rugalmassági erővel hatnak egymásra. Ha a külső hatások kizárásával a test visszakerül eredeti, alakváltozás előtti állapotába, akkor a rugalmassági erők mechanikai munkát végeznek. Kijelenthetjük tehát, *hogy a rugalmasan deformált test helyzeti energiával rendelkezik.*

Tételezzük fel, hogy van egy rugalmasan deformált testünk, egy széthúzott rugó (35.3. *a*, *b* ábra), melynek a nyugalmi állapotához képest a megnyúlása x_0. Ha elengedjük a rugót, az munkát végez (elmozdítja a kocsit), és x értékre csökkent a megnyúlása (35.3. *c* ábra). Meghatározzuk a rugalmassági erő által végzett munkát.

---

* Ez a képlet csak a *földfelszín közelében* lévő testek helyzeti energiájának a meghatározására érvényes, ahol g nem függ h-tól. Általános esetben a felemelt test helyzeti energiáját a $W_h = -G\frac{mM_F}{R_F + h}$ képlettel határozzák meg, nulla szintnek pedig a Föld felszínétől végtelen távolságra lévő pontot vesznek.

A munka meghatározása szerint:

$$A = F_{rug} s \cos \alpha, \qquad (1)$$

ahol $s = x_0 - x$ és $\cos \alpha = 1$, mivel a mozgásirány és az erő hatásvonalának iránya közötti szög nulla (lásd a 35.3. *b*, *c* ábrát). A rugalmassági erő abszolút értékét Hook törvényének a felhasználásával kaphatjuk meg: $F_{rug} = kx$. Viszont a mi esetünkben a rugalmassági erő függ a rugó megnyúlásától ($F_{rug} \sim x$) (35.4. ábra), ezért meghatározzuk a rugalmassági erő középértékét:

$$F_{rug.k} = \frac{F_{rug\,0} + F_{rug}}{2} = \frac{kx_0 + kx}{2} = \frac{k}{2}(x_0 + x).$$

Az $F_{rug.k}$, s és $\cos \alpha$ kifejezéseit behelyettesítve az (1) képletbe, a következőt kapjuk:

$$A = \frac{k}{2}(x_0 + x)(x_0 - x) = \frac{k}{2}(x_0^2 - x^2) = \left(\frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right).$$

Tehát: $A = -\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}\right)$.

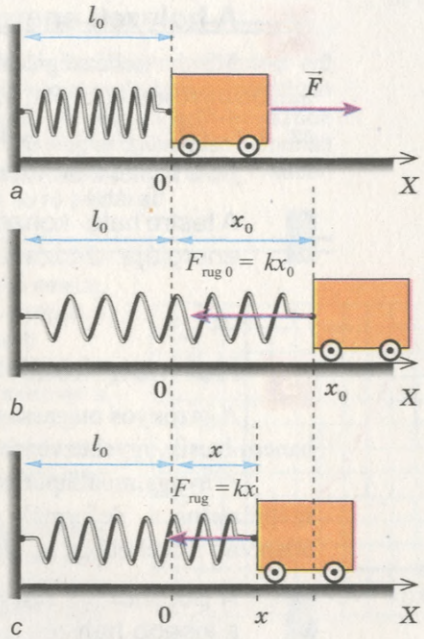
Láthatjuk, hogy ebben az esetben a rugalmassági erő munkája csak a test kezdeti és végső helyzetétől függ, vagyis *a rugalmassági erő is konzervatív erő.*

A $\frac{kx^2}{2}$ mennyiséget a *rugalmasan deformált test helyzeti energiájának* nevezik:

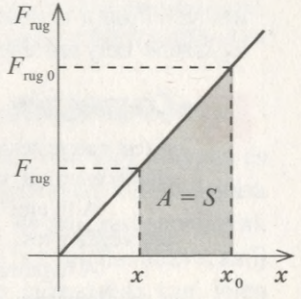
$$W_h = \frac{kx^2}{2}.$$

A rugalmassági erő által végzett munka egyenlő a test helyzeti energiája változásának ellentétes előjellel vett értékével:

$$A = -\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}\right) = -(W_h - W_{h0}) = -\Delta W_h.$$



35.3 ábra A rugalmasan deformált test helyzeti energiája képletének a kivezetése: *a*) a rugó nyugalmi állapotában: $l = l_0$, x = 0, $F_{rug} = 0$; *b*) a rúgó szét van húzva: $l = l_0 + x_0$, $F_{rug\,0} = kx_0$; *c*) a rugó összehúzódik: $l = l_0 + x$, $F_{rug} = kx$



35.4. ábra. A rugalmassági erő és megnyúlása közötti összefüggés grafikonja

Ha a rugalmassági erő munkája során a test visszanyeri eredeti formáját, akkor

$x = 0$ és $A = \frac{kx_0^2}{2} = W_{h0}$.

A rugalmasan deformált test helyzeti energiája egyenlő azzal a munkával, melyet a rugalmassági erő végez, miközben visszaállítja a testet kezdeti, nem deformált állapotába.

4 A helyzeti energiáról szóló tétel

Mind a nehézségi, mind a rugalmassági erő konzervatív erő. Mint ahogy már megbizonyosodtunk róla, az általuk végzett munkát minden esetben kiszámíthatjuk az $A = -(W_h - W_{h0}) = -\Delta W_h$ képlet segítségével.

Ez a képlet a **helyzeti energia tételének** felírása a *matematika nyelvén.*

A testre ható konzervatív erők által végzett munka egyenlő a test helyzeti energiája változásának ellentétes előjellel vett értékével:

$$A = -(W_h - W_{h0}) = -\Delta W_h.$$

5 Hol mutatkozik a potenciális energia minimum elve?

A bizonyos magasságba felemelt és magára hagyott kő sohasem repül feljebb, hanem leesik, igyekezve elérni a legkisebb helyzeti energiatartalom állapotát.

A nyugalmi állapotban lévő rugó magától sohasem fog összenyomódni, illetve széthúzódni, a deformált viszont mindig igyekszik felvenni kezdeti (terheletlen) állapotát, mivel ebben az állapotban rendelkezik a legkisebb helyzeti energiával.

A potenciális energia minimum elve:
a kisebb helyzeti energiával rendelkező állapot energetikailag célszerűbb. Bármely zárt rendszer arra törekszik, hogy a legkisebb helyzeti energiával rendelkező állapotba kerüljön.

Emlékezzetek vissza a testek egyensúlyának különböző típusaira (lásd a 30. §-ban). Megfigyelhettük azt a tényt, hogy a test tömegközéppontja a *stabil egyensúly* állapotában a lehető legalacsonyabb pozíciót foglalja el, mivel ebben az esetben lesz a helyzeti energiája minimális (lásd a 30.5., 30.6. ábrákat). Viszont *instabil egyensúly* esetében a tömegközéppont az összes lehetséges közül a legfelső pozícióban lesz és amint a test legkisebb mértékben is kibillen egyensúlyi állapotából, rögtön a legkisebb helyzeti energiával rendelkező állapot felé igyekszik (lásd a 30.7. ábrát).

! Összegzés

A test más testekkel való kölcsönhatását, vagy az adott test egyes részei kölcsönhatásából adódó energiát, helyzeti energiának nevezzük.

A felemelt test helyzeti energiája egyenlő azzal a munkával, amelyet a nehézségi erő végez a test nulla szintre való juttatásakor: $W_h = mgh$.

A rugalmasan deformált test helyzeti energiája egyenlő azzal a munkával, melyet a rugalmassági erő végez, *miközben* visszaállítva a testet kezdeti, nem deformált állapotába: $W_h = \frac{kx^2}{2}$.

A rugalmassági és nehézségi erőket konzervatív erőknek nevezzük, mert az általuk végzett munka nem függ a mozgáspálya alakjától.

A konzervatív erőkre érvényes a helyzeti energia tétele: a testre ható konzervatív erők által végzett munka egyenlő a test helyzeti energiája változásának ellentétes előjellel vett értékével: $A = -\Delta W_h$.

A kisebb helyzeti energiával rendelkező állapot energetikailag célszerűbb.

Bármely zárt rendszer arra törekszik, hogy a legkisebb helyzeti energiával rendelkező állapotba kerüljön.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan definiáljuk a helyzeti energiát? **2.** Bizonyítsátok be, hogy a nehézségi erő által végzett munka nem függ a mozgáspályától! **3.** Melyik képlet segítségével számítható ki a Föld felszíne fölé emelt test helyzeti energiája? **4.** Milyen erőt neveznek konzervatívnak? **5.** Melyik képlet segítségével határozható meg a rugalmasan deformált test helyzeti energiája? **6.** Fogalmazzátok meg a helyzeti energiáról szóló tételt! **7.** Miben rejlik a helyzeti energia minimumának elve? Hozzatok fel rá példákat!

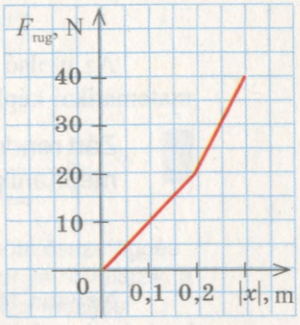
30. gyakorlat

1. A munkás a 15 kg-os homokkal teli vödröt 6 m magasba emelte, majd visszaengedte. Végzett-e munkát ebben az esetben a nehézségi erő? Ha igen, számítsátok ki annak értékét!

2. Az 1 kg tömegű test 20 J helyzeti energiával rendelkezik. A Földtől mekkora távolságra van a test, ha a nulla szintnek a földfelszínt tekintjük?

3. A rugó 2 cm-re történő nyújtásakor 1 J munkavégzés történt. Mekkora munkát kell elvégezni ahhoz, hogy a rugó még 2 cm-re megnyúljon?

4*. A rajz a rugó rugalmassági ereje és a nyújtás mértéke $F_{rug}(|x|)$ közötti összefüggést szemlélteti. Határozzátok meg annak a munkának a nagyságát, amely a rugó 0,3 m-nyire való összenyomásához szükséges! Mekkora helyzeti energiával rendelkezik a rugó 0,2 m-nyire való nyújtása esetén?



36. §. A MECHANIKAI ENERGIA MEGMARADÁSÁNAK TÖRVÉNYE

Az energia megmaradásának törvényét a fizikában elsőként két német fizikus, *Julius Robert Mayer* (1814–1878) és *Hermann Ludwig Helmholtz* (1821–1894) alkalmazta. Elméletük, melyet először sokan szkeptikusan fogadtak, a gyakorlati feladatok megoldásában annyira kézenfekvő volt, hogy hamarosan a fizika minden ágában felhasználásra került. Az alábbiakban megismerkedtek az energiamegmaradás törvényével a mechanikában és meggyőződhettek róla, hogy a felhasználásával mennyire egyszerűsödik a feladatok megoldása.

1 A teljes mechanikai energia megmaradásának törvénye

A testek, illetve azok rendszere gyakran rendelkeznek egyidejűleg helyzeti és mozgási energiával is. Például a repülőgép repülés közben a Földdel való kölcsönhatása által rendelkezik helyzeti energiával, mozgásából kifolyólag pedig mozgási energiával. Az „íj – nyílvessző" rendszernek a lövés pillanatában, mivel a húr fel van húzva, az íj pedig megfeszül, helyzeti energiája van, de mivel a rendszer mozgásban van, jelen van a mozgási energia is. A felsoroltak alapján tehát célszerű bevezetni a *teljes mechanikai energia* fogalmát.

A testrendszer **teljes mechanikai energiája** egyenlő a rendszer helyzeti és mozgási energiájának összegével:

$$W = W_h + W_m.$$

A testrendszer teljes mechanikai energiája a testek, illetve azok részei kölcsönös elhelyezkedésének és azok sebességének a segítségével határozható meg.

Megvizsgálunk egy zárt rendszert, melyben a testek csak konzervatív (nehézségi és rugalmassági) erők segítségével hatnak egymásra. A helyzeti energia tétele szerint az említett erők által végzett munka egyenlő a rendszer helyzeti energiaváltozásának ellenkező előjellel vett értékével: $A = -(W_h - W_{h0})$. (1)

A mozgási energia tételéből *ugyanez a munka* a következő képlet segítségével is meghatározható: $A = -W_m - W_{m0}$. (2)

Összehasonlítva az (1) és (2) kifejezések jobb oldalait, a következőt kapjuk:

$$-(W_h - W_{h0}) = W_m - W_{m0}, \text{ illetve } W_{m0} + W_{h0} = W_m + W_h.$$

Az utolsó kifejezés a **teljes mechanikai energiamegmaradás törvényének** matematikai képlete.

Zárt rendszerben a csak konzervatív erőkkel egymásra ható testek teljes mechanikai energiája változatlan marad:

$$W_{m0} + W_{h0} = W_m + W_h.$$

Newton törvényeiből (melyek csak a makrotestek mozgásának és kölcsönhatásának a leírására érvényesek) következő teljes mechanikai energiamegmaradás törvénye szélesebb körben használható: a teljes mechanikai energia a mikrorészecskék esetében is változatlan marad, amire Newton törvényei már nem érvényesek.

2 A helyzeti és mozgási energia kölcsönös átalakulása a mechanikai folyamatokban

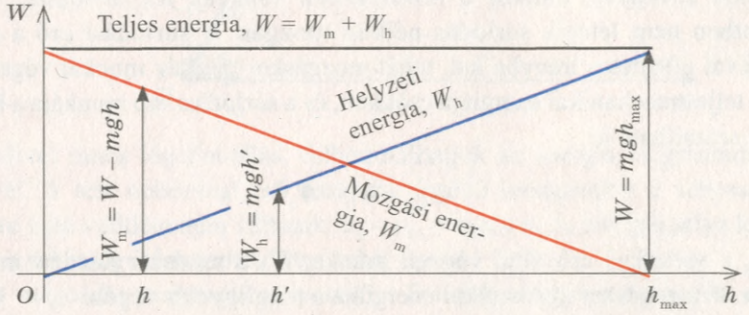
A mozgási és helyzeti energia összegének az állandósága arról tanúskodik, hogy *amennyiben a zárt testrendszerben csak konzervatív erők hatására történik munkavégzés, úgy amilyen mértékben csökken a rendszer helyzeti, ugyanakkora mértékben növekszik a mozgási energiája, és fordítva.* Vagyis a munkavégzés folyamán *energiaátalakulás* megy végbe.

Dobjunk fel egy rugalmas testet, például labdát, függőlegesen fölfelé. A felfelé irányuló mozgás közben csökken a labda sebessége, tehát csökken a mozgási energiája is ($W_m = \frac{mv^2}{2}$), a helyzeti energiája viszont növekszik, mivel növekszik a magassága a földfelszínhez képest ($W_h = mgh$). Elérve egy bizonyos h_{max} magasságot, a labda egy pillanatra megáll, majd a nehézségi erő hatására lefelé kezd mozogni. Amennyiben az eséskor nem hat a labdára légellenállás, *ugyanolyan* sebességgel éri el a Föld felszínét, amekkora a Földtől való kiindulási sebessége volt. Az ütközés pillanatában a labda *teljes* mozgási energiája a deformálódó testek (a labda és a Föld) helyzeti energiájává alakul át. Ha a deformáció rugalmas, akkor a rendszer *teljes* helyzeti energiája a labda mozgási energiájává alakul, mialatt a labda mozgásának sebessége a Föld felszínére merőleges irányú lesz. Ezek után a mozgás az előzőhöz hasonlóan megismétlődik.

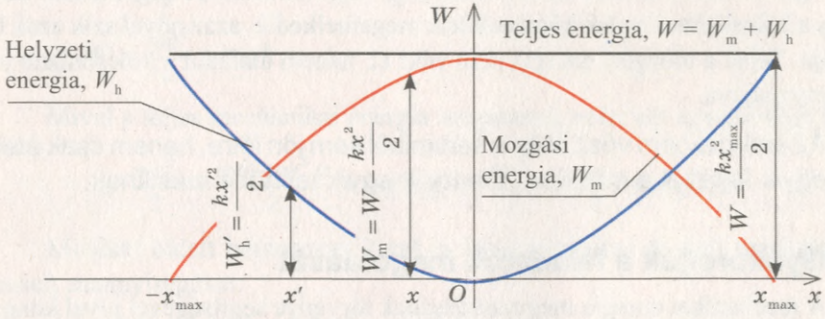
Súrlódás nélkül csak a Föld nehézségi erejének hatására mozgó test kétféle mechanikai energiájának átalakulását a $W_h(h)$, $W_m(h)$, $W(h)$ függvények grafikonjai

segítségével szemléltethetjük (36.1. ábra). Figyeljétek meg, hogy az adott esetben a helyzeti és mozgási energia egyenesen arányos a magassággal, a teljes energia pedig változatlan.

Hasonlóképpen szemléltethetjük grafikonokkal az energiaátalakulást a „test–rugó" rendszerben (36.2. ábra).



36.1. ábra. A Föld felszínéhez közeli test energiája és magassága közötti összefüggés grafikonja. A magasság 0-tól h_{max}-ig történő változásakor a helyzeti energia növekszik, a mozgási pedig csökken. Amikor a test magassága h_{max}-ról 0-ra változik, a mozgási energia növekszik, a helyzeti viszont csökken. A teljes energia változatlan marad



36.2. ábra. A „test–rugó" rendszer energiája és a rugó alakváltozása közötti összefüggés grafikonja. A rugó alakváltozásának növekedésével (a rugót 0-tól x_{max}-ig húzzuk szét, illetve 0-tól x_{max}-ig nyomjuk össze) növekszik annak helyzeti energiája, a mozgási energiája viszont csökken. A deformáció csökkenésekor növekszik a rugó mozgási energiája és csökken a helyzeti energia mértéke. A teljes mechanikai energia ebben az esetben is változatlan marad

3 Megmarad-e az energia, ha a rendszerben súrlódás lép fel?

A teljes mechanikai energia megmaradásának törvénye a helyzeti energia mozgási energiává való átalakulását és e jelenség fordított irányban történő lezajlását tanulmányozza. Eközben a teljes mechanikai energia változatlan marad.

A mechanikai energia átalakulásával lépten-nyomon találkozhatunk. A hegyről lezuhanó kő helyzeti energiája annak mozgási energiájává alakul át. A magasugró mozgási energiája ugrás közben helyzetivé alakul, majd újra mozgási energia lesz

belőle. Vajon megmarad-e eközben a teljes mechanikai energia? A lezuhanó kő ugyanolyan magasra pattan vissza, mint ahonnan leesett? Az atléta sebessége ugyanolyan-e a földetérés után, mint amekkora az elrugaszkodás pillanatában volt? A tapasztalat azt mutatja, hogy mindkét esetben nemleges a válasz. Arról van szó ugyanis, hogy *a teljes mechanikai energia megmaradásának törvénye csakis azokra az esetekre érvényes, amikor a rendszerben nem lép fel súrlódás.* Viszont a természetben nem létezik súrlódás nélküli mozgás. A súrlódási erő a test mozgásirányával ellentétes irányba hat, tehát mozgáskor negatív munkát végez. Ezért a rendszer teljes mechanikai energiája csökken, és a súrlódási erő munkája a következő képlettel számítható ki:

$$A_{súrl} = W_0 - W,$$

ahol $A_{súrl}$ a súrlódási erő által végzett munka, W_0 a rendszer kezdeti mechanikai energiája, W a rendszer mechanikai energiája a megfigyelés végén.

Energiaveszteség a test földdel való nem rugalmas ütközésekor is megfigyelhető. Amikor a kő földet ér, a kőben rugalmatlan alakváltozás történik, elveszíti teljes mozgási energiáját és megáll. Ez azt jelentené, hogy a súrlódás jelenléte, illetve a rugalmatlan deformáció esetén a teljes energia nyomtalanul elvész? A látszat szerint igen. Viszont a mérések azt mutatják, hogy súrlódás és rugalmatlan ütközés során is a kölcsönható testek hőmérséklete megemelkedik, azaz növekszik azok belső energiája. Tehát a mozgási energia nem vész el, hanem átalakul a kölcsönható testek belső energiájává.

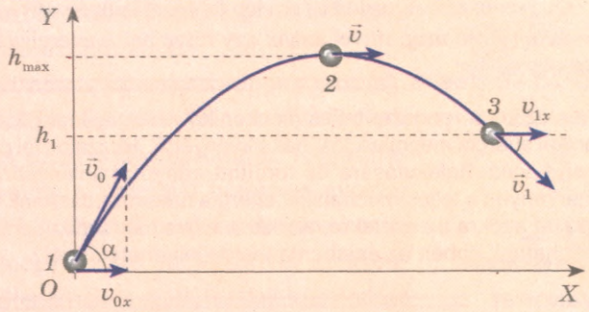
Az energia nem vész el és a semmiből sem jön létre, hanem csak átalakul egyik fajtából a másikba, átadódik egyik testtől a másiknak.

4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

A mechanikai energia megmaradásának törvénye segítségével jóval könnyebb a mozgási mennyiségek meghatározása, mint a kinematika egyenleteinek és Newton dinamikai törvényeinek a felhasználásával.

Feladat. A testet a vízszinteshez képest α szögben és v_0 sebességgel dobták el. Határozzuk meg a test által elérhető h_{max} legnagyobb magasságot és a h ($h_1 < h_{max}$) magasságban elért v_1 sebességének abszolút értékét. A légellenállást figyelmen kívül hagyjuk.

Adva: v_0 α $h_0 = 0$ h_1 g	*A fizikai probléma elemzése.* A megoldáshoz magyarázó rajzot készítünk, melyen feltüntetjük a test helyzetét és sebességének irányát: 1) a test mozgásának kezdetén; 2) a h_{max} maximális magasságban; 3) valamely h_1 magasságban.
$h_{max} - ?$ $v_1 - ?$	



Mivel nincs légellenállás, felhasználhatjuk az energia megmaradásának törvényét. A test nehézségi erő hatására történő mozgásakor a sebesség OX tengelyre való vetülete nem változik: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$. A mozgáspálya legfelső pontján a sebesség iránya vízszintes, tehát $v_x = v$.

A megoldás matematikai modellje. Felírjuk a teljes mechanikai energia képletét a mozgás bármely pillanatára:

1) $W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv_0^2}{2}$;

2) $W = \frac{mv^2}{2} + mgh_{max} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + mgh_{max}$;

3) $W = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1$.

Mivel a teljes mechanikai energia megmarad, ezért két egyenletünk lesz:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + mgh_{max}; \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Mindkét oldalt beszorozva 2-vel és leegyszerűsítve m-mel, megkapjuk a keresett mennyiségeket:

$$v_0^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + 2gh_{max} \Rightarrow 2gh_{max} = v_0^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2(1 - \cos^2 \alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

$$v_0^2 = v_1^2 + 2gh_1 \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2gh_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}.$$

Felelet: a test maximális magassága: $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$; sebességének értéke h_1 magasságban: $h_1 < h_{max}$: $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_1}$.

Összegzés

A testrendszer teljes mechanikai energiája a rendszer helyzeti és mozgási energiájának összegével egyenlő: $W = W_m + W_h$.

Csak a konzervatív erőkkel egymásra ható testrendszer teljes mechanikai energiája állandó: $W_{m0} + W_{h0} = W_m + W_h$.

Ha a rendszerben súrlódási erő lép fel (nem konzervatív erő), a teljes mechanikai energia nem marad meg, mivel annak egy része belső energiává alakul át.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk a rendszer teljes mechanikai energiájának? 2. Vezessétek le a teljes mechanikai energia megmaradásának törvényét! 3. Hozzatok fel példát a helyzeti energia mozgásivá való átalakulására és fordított irányú átalakulására! 4. Milyen feltételek mellett érvényes a teljes mechanikai energia megmaradásának törvénye? 5. Hozzatok fel példákat azokra az esetekre, amikor a teljes mechanikai energia nem marad meg! Mit mondhatunk ebben az esetben a test teljes energiájáról?

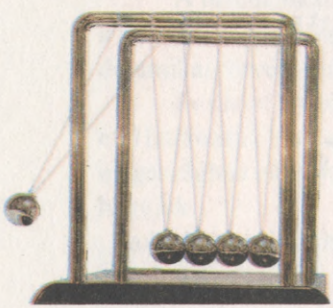
31. gyakorlat

A feladatok megoldásánál hagyjátok figyelmen kívül a légellenállást.

1. Rugós pisztolyból kilőttünk egy golyót a levegőbe. Milyen energiaátalakulás megy végbe eközben?
2. Bizonyára hallottatok már a hegyekben megfigyelhető és nagyon veszélyes jelenségről, a sárlavináról. Miért érhetnek el a legördülő sziklák eközben óriási sebességet? Vizsgáljátok meg a lezúduló sár jelentőségét!
3. Az előzőleg nyugalomban lévő test 20 méter magasból esni kezd. Mekkora magasságban lesz a test sebessége 10 m/s? Mekkora lesz a sebessége földetéréskor?
4. Egy testet 30 méteres magasságból 10 m/s sebességgel függőlegesen fölfelé dobtak. Milyen magasságban válik egyenlővé a test mozgási és helyzeti energiája?
5. A vízszintes rugóhoz egy 0,5 kg tömegű kiskocsit rögzítettek. Határozzátok meg a kocsi maximális sebességét, ha a rúgómerevség 250 N/m, maximális alakváltozása pedig 4 cm. A kocsi és az asztallap közötti súrlódást hagyjuk figyelmen kívül.

6*. A 40 N/m merevségű rugót függőlegesen felfüggesztették. Az alsó részére 800 g tömegű testet akasztottak. A rugót lefelé 15 cm-nyire megnyújtották, majd elengedték. Mekkora magasságba emelkedik fel ezután a test? Határozzátok meg a test legnagyobb sebességét!

37. §. RUGALMAS ÉS TÖKÉLETESEN RUGALMATLAN ÜTKÖZÉS



37.1. ábra. A golyók rugalmas ütközését bemutató eszköz

Bizonyára sokaknak ismerős az alábbi kísérlet. Vékony acélhuzalra öt golyót függesztettek fel (37.1. ábra). Ha az első golyót oldalra húzzuk, majd elengedjük, az ütközés után az utolsó golyó mozgásba lendül és nagyjából akkora távolságra lendül ki, mint amekkorára az első golyót mozdítottuk el. Visszaérkezve és ütközve a négy golyóval, ismét az első fog elmozdulni. A folyamat ismétlődik, miközben a középen lévő golyók mozdulatlanok maradnak. Ezt a jelenséget az energia- és impulzusmegmaradás törvénye felhasználásával tudjuk megmagyarázni.

1 Miben különbözik a rugalmas a rugalmatlan ütközéstől?

Az **ütközés** a testek rövid ideig tartó kölcsönhatása, mely során közvetlenül érintkeznek egymással.

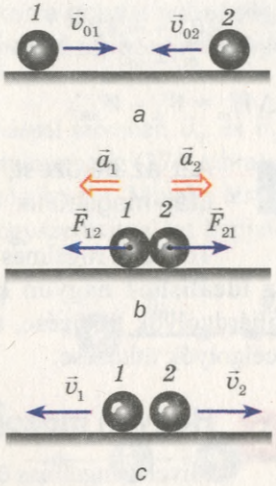
Az ütközés pillanatában megváltozik a testek sebessége. Mivel az ütköző testeket zárt rendszernek vehetjük (ütközéskor a rendszer belső erői jóval meg-

haladják a külső erők értékét), *ütközéskor érvényes az impulzusmegmaradás törvénye.*

A testek ütközése a következőképpen történik. Az érintkezés pillanata után a testek tovább közelednek egymáshoz és ezért deformálódnak. Rugalmas erőpár jön létre, amely a testeknél bizonyos gyorsulást eredményez (37.2. ábra). Ennek eredményeként a testek sebessége megváltozik, majd idővel kiegyenlítődik. Abban a pillanatban megáll a testek közeledése és a rugalmassági erők maximális értéket érnek el. A rugalmassági erők hatására a testek eltávolodnak egymástól és csökken a deformációjuk.

Az ütközés előtti és az azt követő pillanatban a testek helyzeti energiája nullával egyenlő. A W_0 teljes mechanikai energia az ütközés előtt és a W teljes mechanikai energia az ütközés végén a testek mozgási energiájának összegével egyenlő:

$$W_0 = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} \; ; \; W = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \; .$$



37.2. ábra. A golyók ütközésekor létrejövő erők és gyorsulások: *a*) a rendszer az ütközés előtti pillanatban; *b*) az ütközés pillanata; *c*) a rendszer az ütközés után

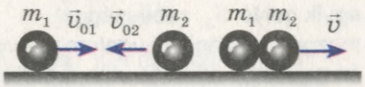
Ha az ütközés után *megmarad a teljes mozgási energia* ($W_0 = W$), akkor ezt az ütközést ***rugalmas ütközés*nek** nevezzük. Ha az ütközés után a teljes mozgási energia nem marad meg ($W_0 > W$), akkor ***rugalmatlan ütközésről*** beszélünk.

Az ütközések két típusát vizsgáljuk meg – *a tökéletesen rugalmatlan és a rugalmas ütközést.*

Azt az ütközést, mely után a kölcsönható testek összetapadva mozognak tovább, **tökéletesen rugalmatlan ütközésnek nevezzük** (37.3. ábra).

Tökéletesen rugalmatlan ütközésnek számít a meteorit ütközése a Földdel, a földre ejtett agyagdarab, a homokkal teli ládába lőtt golyó, a neutron elnyelése az uránmagban a magreakció során. Tökéletesen rugalmatlan ütközéskor a testek rugalmatlan alakváltozást szenvednek, miközben a mozgó testek mozgási energiája részlegesen, illetve teljes egészében belső energiává alakul át.

Két, m_1 és m_2 tömegű, $\vec{v}_{01}$, illetve $\vec{v}_{02}$ sebességgel mozgó test tökéletesen rugalmatlan ütközésekor az ütközés utáni $\vec{v}$ sebességüket az impulzusmegmaradás törvénye segítségével határozhatjuk meg: $m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = (m_1 + m_2)\vec{v}$. Innen



37.3. ábra. Az m_1 és m_2 tömegű test a tökéletesen rugalmatlan ütközés után összetapadva, mint egy $m = m_1 + m_2$ tömegű test mozog tovább

$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02}}{m_1 + m_2}$. A rendszer mozgási energiája eközben csökken ($\Delta W_m = W_m - W_{m0}$).

Azt az ütközést, amely során a testek alakváltozása a kölcsönhatás után megszűnik, **rugalmas ütközésnek** nevezzük.

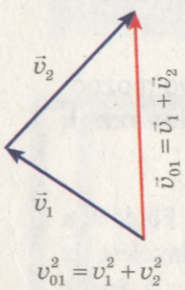
Tötéletes rugalmas ütközés a reális környezetben nem létezik. Viszont léteznek az ideálishoz nagyon közeliek. Példák a tökéletesen rugalmas ütközésre: a biliárdgolyók ütközése, a betonfalba rúgott labda, a fenti kísérletben bemutatott acélggolyók ütközése.

2 Hogyan mozognak a rugalmas ütközés után a testek?

Mivel a rugalmas ütközés alatt érvényes az impulzusmegmaradás törvénye és a kinetikus energiák összege megmarad, egyidejűleg két egyenlőség teljesül:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \\ \frac{m_1v_{01}^2}{2} + \frac{m_2v_{02}^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \end{cases} \Big| \times 2 \Rightarrow \begin{cases} m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \\ m_1v_{01}^2 + m_2v_{02}^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2. \end{cases} \quad (1)$$

Ha ismert az ütköző golyók tömege és sebessége a kölcsönhatás előtt, megoldva az egyenletrendszert megkapjuk a golyók sebességét az ütközés után. A fenti egyenletrendszerek megoldása általános esetre hosszadalmas és összetett feladat, ezért mi csak néhány részesetet vizsgálunk meg.



37.4. ábra. Ha az ütközés előtt az egyik golyó $\vec{v}_{01}$ sebességgel mozgott, a másik nyugalomban volt és rugalmas ütközés után a golyók $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ sebességgel mozogtak tovább, akkor a $\vec{v}_{01}$, $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorok derékszögű háromszöget alkotnak, melyben v_{01} az átfogó, v_1 és v_2 pedig a befogók

1. eset. *Az ütköző golyók tömege egyenlő ($m_1 = m_2 = m$), az egyik az ütközésig nyugalomban volt* ($v_{02} = 0$). Ebben az esetben az (1) rendszert a következőképpen írjuk fel: $\begin{cases} m\vec{v}_{01} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2, \\ mv_{01}^2 = mv_1^2 + mv_2^2. \end{cases}$

Leegyszerűsítve az egyenleteket m-mel:

$$\begin{cases} \vec{v}_{01} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ \vec{v}_{01}^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2. \end{cases}$$

A kapott rendszer első egyenlete azt mutatja, hogy a $\vec{v}_{01}$, $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorok háromszöget alkotnak, a második egyenlet arra utal, hogy ez a háromszög derékszögű (37.4. ábra). Ez azt jelenti, hogy a golyók ütközés után egymásra merőleges irányban mozognak tovább (lásd a 37.4. ábrát). A biliárd kedvelői jól ismerik ezt a jelenséget.

2. eset. *Két azonos tömegű golyó centrális ütközése.*

Centrálisnak az olyan ütközést nevezzük, amikor a golyók sebességvektora az ütközés előtt és után is a golyók tömegközéppontján megy keresztül.

Tételezzük fel, hogy két, azonos tömegű golyó egymással szemben $\vec{v}_{01}$ és $\vec{v}_{02}$ sebességgel, a golyók középpontját összekötő egyenes mentén mozog (37.5. ábra).

Meghatározzuk a golyók $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ sebességét az ütközés után. Mivel a testek tömege azonos ($m_1 = m_2 = m$), az (1) rendszert m-mel egyszerűsítve azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} \vec{v}_{01} + \vec{v}_{02} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ v_{01}^2 + v_{02}^2 = v_1^2 + v_2^2. \end{cases}$$

Az OX tengelyt az első golyó mozgásirányába vesszük fel, és megkeressük a vektoregyenlet erre a tengelyre eső vetületét: $v_{01x} = v_{01}$; $v_{02x} = -v_{02}$; $v_{1x} = -v_1$; $v_{2x} = v_2$. A következőt kaptuk:

$$\begin{cases} v_{01} - v_{02} = -v_1 + v_2, \\ v_{01}^2 + v_{02}^2 = v_1^2 + v_2^2. \end{cases}$$

Rendezzük az összeadandókat, és a második egyenlet mindkét oldalát tényezőkre bontjuk:

$$\begin{cases} v_{01} + v_1 = v_{02} + v_2, \\ v_{01}^2 - v_1^2 = v_2^2 - v_{02}^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

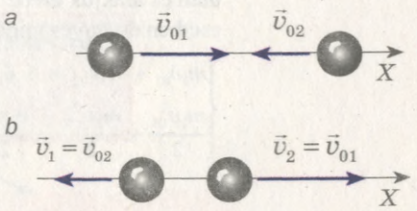
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{01} + v_1 = v_{02} + v_2, \\ (v_{01} + v_1)(v_{01} - v_1) = (v_{02} + v_2)(v_2 - v_{02}). \end{cases}$$

A rendszer második egyenletét tagonként elosztjuk az első egyenlettel: $\begin{cases} v_{01} + v_1 = v_{02} + v_2, \\ v_{01} - v_1 = v_2 - v_{02}. \end{cases}$

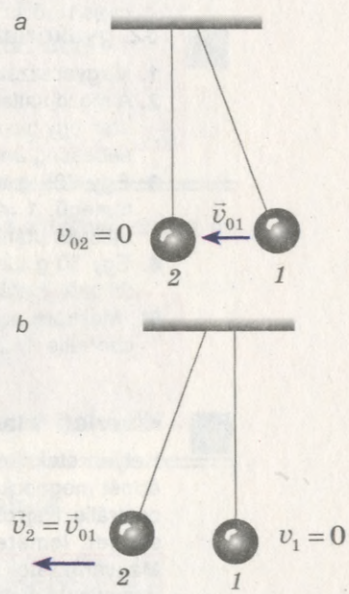
A kapott kifejezés első egyenletéből kivonjuk a második egyenletet: $2v_1 = 2v_{02} \Rightarrow v_1 = v_{02}$. Összeadva a rendszer egyenleteit: $2v_{01} = 2v_2 \Rightarrow v_2 = v_{01}$.

Azt látjuk, *hogy centrális rugalmas ütközés eredményeként az azonos tömegű golyók sebességei felcserélődnek.*

Ha az *1.* golyó $\vec{v}_{01}$ sebességgel mozgott, a *2.* golyó nyugalomban volt ($v_{02} = 0$), akkor ütközés után az *1.* golyó megáll ($v_1 = 0$), a *2.* golyó pedig $\vec{v}_{01}$ sebességgel ($\vec{v}_2 = \vec{v}_{01}$) kezd mozogni. Az állítás egy egyszerű kísérlettel könnyen ellenőrizhető (37.6. ábra).



37.5. ábra. Két azonos tömegű golyó centrális rugalmas ütközése:
a) a rendszer ütközés előtt;
b) a rendszer ütközés után



37.6. ábra. Két azonos tömegű golyó centrális rugalmas ütközése után az addig mozgó golyó megáll, az álló pedig az előzőleg mozgó golyó sebességével kezd mozogni:
a) a rendszer ütközés előtt;
b) a rendszer ütközés után

Összegzés

Az ütközés a testek rövid ideig tartó kölcsönhatása, mely során közvetlenül érintkeznek egymással.

Azt az ütközést, mely után a kölcsönható testek összekapcsolódva mozognak tovább, tökéletesen rugalmatlan ütközésnek nevezzük. Eközben a rendszer mozgási energiája nem marad meg, viszont érvényes az impulzusmegmaradás törvénye: $m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v} + m_2\vec{v}$.

Azt az ütközést, amely során a testek deformációja megszűnik a kölcsönhatás után és alakjuk eredeti állapotába áll vissza, rugalmas ütközésnek nevezzük. Ebben az esetben érvényes mind az impulzusmegmaradás, mind az energiamegmaradás törvénye:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_{01} + m_2\vec{v}_{02} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \\ \dfrac{m_1v_{01}^2}{2} + \dfrac{m_2v_{02}^2}{2} = \dfrac{m_1v_1^2}{2} + \dfrac{m_2v_2^2}{2}. \end{cases}$$

Ellenőrző kérdések

1. Mi az ütközés? 2. Milyen ütközést nevezünk tökéletesen rugalmatlannak? Mondjatok példát! 3. Miért nem érvényes rugalmatlan ütközés esetén az energia megmaradásának törvénye? 4. Milyen ütközést nevezünk rugalmasnak? Mondjatok példát! 5. Érvényes-e rugalmas ütközés során az energiamegmaradás törvénye? Az impulzusmegmaradásé? 6. Mit mondhatunk két azonos tömegű test sebességéről rugalmas ütközés után?

32. gyakorlat

1. Magyarázzátok el a paragrafus elején leírt kísérletet (37.1. ábra)!
2. A mozdulatlan golyó az ugyanolyan tömegű mozgó golyóval való rugalmas ütközése után egy bizonyos sebességre tesz szert. Hányszor nagyobb az így szerzett mozgási sebesség annál, amely rugalmatlan ütközés során jönne létre?
3. Egy 200 g tömegű, 4 m/s sebességű golyóval szembe mozog egy ugyanakkora tömegű, 1 m/s sebességű golyó. Határozzátok meg a golyók rugalmas centrális ütközés utáni sebességét!
4. Egy 30 g tömegű, 5 m/s sebességű golyó egy 20 g tömegű mozdulatlan golyóval ütközik. Határozzátok meg a golyók rugalmas centrális ütközés utáni sebességét!

5*. Mekkora a golyó tömege, ha sebessége egy 1 kg tömegű testtel való rugalmas centrális ütközés után 4 m/s-ról 2 m/s-ra csökkent?

Kísérleti feladat

Helyezzetek üres rajzlapra egy fémpénzt és rajzoljátok körbe. Egy másik azonos értékű érmét megpöckölve találjátok el a fémpénzt, ügyelve arra, hogy ütközésük ne legyen centrális. Rajzoljátok meg az érmék mozgáspályáját, majd mérjétek meg a köztük lévő szöget. Ismételjétek meg a kísérletet úgy, hogy az ütközés centrális legyen. Magyarázzátok meg a kapott eredményeket! Ismeretes, hogy a kísérletet célszerűbb dámafigurákkal végezni. Vajon miért?

A 3. FEJEZET ÖSSZEGZÉSE

1. A 3. fejezetben a *megmaradás törvényeivel* ismerkedtünk meg.

2. Megtanultuk, hogyan fogalmazhatjuk meg *Newton második törvényét* az impulzus „nyelvén".

A test impulzusváltozása megegyezik a testre ható erő impulzusával:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}t$$

A test impulzusa:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Az erő impulzusa:

$$\vec{F}t$$

3. Elsajátítottuk az *impulzusmegmaradás törvényét.*

Zárt rendszerben a testek impulzusainak geometriai összege kölcsönhatás előtt megegyezik a testek kölcsönhatás utáni impulzusainak geometriai összegével:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \text{const}$$

4. Megismerhettük a *reaktív mozgás* fogalmát, előfordulását a természetben és felhasználását a technikában.

A reaktív mozgás olyan mozgás, mely akkor jön létre, mikor a test egy része bizonyos sebességgel elhagyja a testet.

5. Megismételtük a *mechanikai munka és a teljesítmény* fogalmát

Mechanikai munka

Mechanikai munka a testre ható erő hatásának mértéke:

$$A = Fs\cos\alpha$$

Teljesítmény

Teljesítmény a munkavégzés sebessége:

$$P = \frac{A}{t} = F_x v$$

6. Felelevenítettük a különböző *mechanikai energiafajtákat, megismertük a mechanikai energia megmaradásának törvényét.*

A **mechanikai energia** a test munkavégző képességét jellemzi

Helyzeti energia
a kölcsönhatás energiája

Mozgási energia
a mozgás energiája

a felemelt test esetén
$W_h = mgh$

a rugalmasan deformált test esetén
$W_h = \frac{kx^2}{2}$

$W_m = \frac{mv^2}{2}$

A helyzeti energia tétele
$A = -(W_h - W_{h0}) = -\Delta W_h$

A mozgási energia tétele
$A = W_{m2} - W_{m1} = \Delta W_m$

A mechanikai energia megmaradásának törvénye:
A csak konzervatív erőkkel egymásra ható zárt testrendszerben a teljes mechanikai energia változatlan marad:
$W = W_h + W_m = \text{const}$

7. Tanulmányoztuk *két test ütközését.*

Testek ütközéses kölcsönhatásának modelljei:

Rugalmas ütközés során megmarad a mozgási energia

Tökéletesen rugalmatlan ütközés során a mozgási energia nem marad meg, hanem részben, illetve teljes egészében belső energiává alakul át

Az ütközés során érvényes az impulzusmegmaradás törvénye

ÖNELLENŐRZÉSRE SZOLGÁLÓ FELADATOK *MEGMARADÁSI TÖRVÉNYEK A MECHANIKABAN*

Az 1–12. feladatok feltüntetett megoldásai közül csak egy helyes .

1. (*1 pont*) Melyik a lendület képlete?
a) $\vec{v}t$; **b)** $m\vec{a}$; **c)** $m\vec{v}$; **d)** $\vec{F}t$.

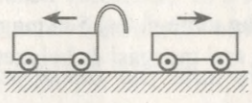
2. (*1 pont*) Mi a teljesítmény mértékegysége az SI-ben?
a) watt; **c)** lóerő;
b) joule; **d)** newton.

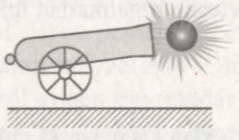
3. (*1 pont*) Melyik vektormennyiség az alábbiak közül?
a) teljesítmény; **c)** teljes energia;
b) mechanikai munka; **d)** impulzus.

4. (*2 pont*) Melyik esetben nem változik a mozgási energia?
a) egy kő esik le a hegyről;
b) az autó megáll a jelzőlámpa előtt;
c) az ejtőernyős egyenletesen ereszkedik a földre;
d) a golyó átüti a deszkát.

5. (*2 pont*) Melyik esetben nem beszélhetünk zárt testrendszerről?


a

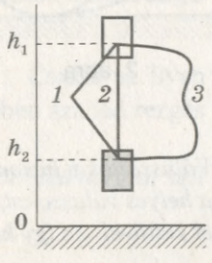

c


b


d

6. (*2 pont*) A rugalmasan deformált rugó a „test–rugó” rendszerben 16 J munkát végzett. Melyik állítás igaz?
a) a rugó helyzeti energiája 16 J-lal nőtt;
b) a test mozgási energiája 16 J-lal nőtt;
c) a rendszer teljes energiája 16 J-lal csökkent;
d) a test mozgási energiája 16 J-lal csökkent.

7. (*2 pont*) A test elmozdítása h_1 magasságból h_2 magasságba három különböző pályán történt (1. ábra). Melyik esetben legnagyobb a nehézségi erő munkája?
a) *1.* esetben; **c)** *3.* esetben;
b) *2.* esetben; **d)** a nehézségi erő munkája minden esetben azonos.



1. ábra

8. (*2 pont*) Melyik fizikai mennyiség nem változik két test rugalmas ütközésekor?

a) a testek sebessége;

b) a testek mozgási energiája;

c) a testek impulzusa;

d) a testrendszer mozgási energiája és impulzusa.

9. (*2 pont*) Az 1 kg tömegű test 2 m/s^2 állandó gyorsulással mozog. Mennyi a test impulzusának változása 3 s alatt?

a) 1 kg $\frac{m}{s}$; **b)** 1,5 kg $\frac{m}{s}$; **c)** 6 kg $\frac{m}{s}$; **d)** 9 kg $\frac{m}{s}$.

10. (*3 pont*) Két, egyenként 6 N és 8 N egymásra kölcsönösen merőleges erő hatására a test 2 m távolságra mozdult el a rá ható erők eredője mentén. Mivel egyenlő az eredő erő munkája?

a) 12 J; **b)** 16 J; **c)** 20 J; **d)** 28 J.

11. (*3 pont*) Két, egyenként 2 kg és 3 kg tömegű test egymással szemben 5 m/s és 4 m/s sebességgel mozog. Mekkora lesz a testek sebességének abszolút értéke tökéletesen rugalmatlan ütközés után?

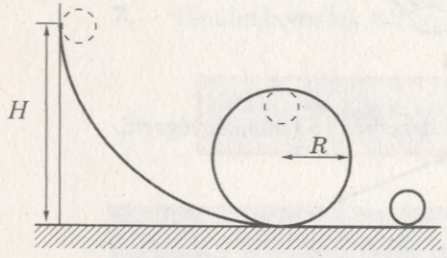
a) 0; **b)** 0,4 m/s; **c)** 4,4 m/s; **d)** 11 m/s.

12. (*3 pont*) A 600 N/m merevségű rugót 5 cm-re nyújtották meg. Mekkora munkára van szükség a rugó további 5 cm-re való nyújtásához?

a) 0,3 J; **b)** 2,25 J; **c)** 7,5 J; **d)** 22,5 kJ.

13. (*3 pont*) Az 1 kg tömegű test 5 m magasságból szabadon esik. Milyen magasságban lesz egyenlő a test mozgási és helyzeti energiája? Mekkora lesz a sebessége azon a magasságon?

14. (*4 pont*) A 12 m/s sebességgel mozgó 0,2 kg tömegű test utoléri a 3 m/s sebességgel mozgó, 0,4 kg tömegű testet. Határozzátok meg a tökéletesen rugalmatlan ütközés során felszabaduló hőmennyiséget!



2. ábra

15. (*5 pont*) Legalább mekkora H magasságból kell legurulnia a golyónak (2. ábra) ahhoz, hogy végigguruljon az R sugarú „halálhurkon”? A golyó minimális sebességét annak ismeretében határozhatjátok meg a hurok legfelsőbb pontján, hogy a támaszték ellenállási ereje ebben a pontban egy pillanatra nullával egyenlő.

Válaszaitokat hasonlítsátok össze a könyv végén található megoldásokkal. Jelöljétek meg a helyes válaszokat, és számoljátok össze a megszerzett pontokat. Az eredményt osszátok el kettővel. Az így kapott szám megfelel a tanulmányi eredményeteknek.

4. FEJEZET. MECHANIKAI REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK

38. §. REZGŐMOZGÁS. A REZGŐMOZGÁST JELLEMZŐ FIZIKAI MENNYISÉGEK

?! A 8. osztályos fizika tananyagában már megismerkedtetek a rezgőmozgás, mint mechanikai rezgés fogalmával. Az ilyen típusú mozgások körülvesznek bennünket: az ágak hintázása, a gitár húrjainak rezgése, az úszó mozgása a hullámzó víz felszínén, az óra ingájának mozgása, szívverés stb. A rezgőmozgás egy sor jellegzetes ismertetőjellel rendelkezik, amelyekkel ebben a fejezetben ismerkedhettek meg.

1 Mi a különbség a szabad, illetve a kényszerrezgések között

A **mechanikai rezgés** olyan mozgás, mely egyenlő időközönként jó közelítéssel ismétlődik.

A rezgések különböző típusai ismertek *.

Egyes rezgések, mint például a levegő mozgása a fúvós hangszerekben, a dugattyúké a belső égésű motorokban, a varrógép tűje, csak akkor jöhetnek létre, ha a testre külső erők hatnak, melyek rendszeresen változnak, és a testet rezgőmozgás végzésére késztetik. Az ilyen rezgéseket *kényszerrezgéseknek* nevezzük.

A testre ható periodikusan változó külső erő által előidézett rezgést **kényszerrezgésnek** nevezzük.

Némely rezgések belső erők hatására jönnek létre külső periodikus ráhatás nélkül. Ilyen például a cérnára vagy rugóra rögzített golyó rezgése, amely a golyó nyugalmi helyzetéből való kitérítése majd elengedése után jön létre; az ág rezgése, melyről éppen egy madár felszállt; a megütött harang rezgése. Az ilyen rezgéseket *szabad rezgéseknek* nevezzük.

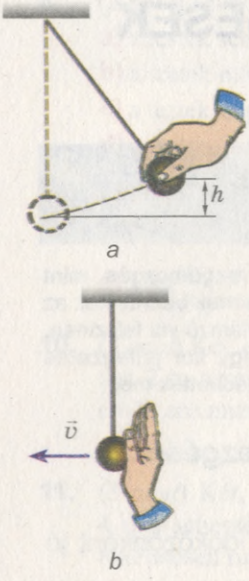
A rendszer belső erői hatására létrejövő rezgéseket, melyek a rendszer nyugalmi állapotból való kitérítése, majd magára hagyása után jönnek létre, **szabad rezgéseknek** nevezzük.

A testek azon rendszerét, melyben szabad rezgések jöhetnek létre, **rezgő rendszereknek** nevezzük.

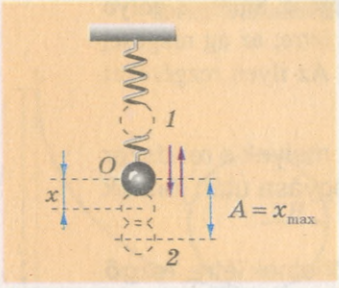
A rezgő rendszerek jellemzője a *stabil egyensúly állapota*. Csakis az ilyen állapot mellett jöhet létre szabad rezgés. Hogy a rezgő rendszerekben szabad rezgés jöjjön létre, *két feltételnek* kell teljesülnie:

1) *a rendszerrel* – a stabil egyensúly állapotához képest – *többletenergiát kell közölni* (38.1. ábra);

* Az elkövetkezendőkben csak a *mechanikus rezgésekről* beszélünk.



38.1. ábra. Ahhoz, hogy a rezgő rendszerben szabad rezgések jöjjenek létre, ki kell billenteni azt egyensúlyi állapotából: helyzeti (*a*) vagy mozgási (*b*) energiát kell közölni vele



38.2. ábra. A rugóra rögzített súly rezgőmozgást végez (*x* a súly elmozdulása, *A* a rezgés amplitúdója). Azt az időközt, mely alatt a súly az *1.* helyzetből a *2.* helyzetbe mozdult el, majd visszatért (egy teljes rezgés ideje), a rezgés periódusidejének (*T*) nevezzük

2) *a rendszer belső súrlódása kicsi kell hogy legyen*, mivel ellenkező esetben a rezgés gyorsan leáll, illetve el sem kezdődik (ez következik be, ha a rugón lévő testet folyadékba merítjük).

2 Milyen fizikai mennyiségek jellemzik a rezgőmozgást?

A rezgőmozgást, mint egyéb mozgást is, a következő fizikai mennyiségek jellemzik: *sebesség, gyorsulás, koordináta (elmozdulás)*. Rezgés közben a felsorolt mennyiségek állandóan változnak. *Ha rezgés közben a fizikai mennyiségek bizonyos időközönként azonos értékeket vesznek fel,* ***periodikus rezgésekről*** *beszélünk.*

Egy sor fizikai mennyiség van, melyeket periodikus rezgés jellemez: *amplitúdó, periódusidő, rezgésszám körfrekvencia, a rezgés fázisa* (38.2. ábra).

Azt a fizikai mennyiséget, amely egyenlő azzal a távolsággal, amennyire a test az adott időpontban elmozdult az egyensúlyából, x **elmozdulásnak** nevezzük.

A nyugalmi helyzettől mért legnagyobb kitérést a **rezgés amplitúdójának** (A) nevezzük.

$$A = x_{max}.$$

Az elmozdulás és az amplitúdó mértékegysége az SI-ben a **méter (m).**

A szabadrezgések amplitúdója a kezdeti adatok segítségével határozható meg, vagyis azon energia segítségével, melyet az egyensúly állapotából való kilendítéskor közöltek a testtel.

A rezgések T periódusideje vagy **rezgésidő** az a fizikai mennyiség, mely megegyezik azzal az idővel, ami alatt a test visszatér az eredeti állapotába (véghezvisz egy teljes rezgést):

$$T = \frac{t}{N},$$

ahol t a rezgésre fordított idő, N a t idő alatti rezgések száma.

A periódusidő mértékegysége az SI-ben a **másodperc (s).**

A rezgésszám vagy frekvencia ν a rezgő rendszer által egységnyi idő alatt végzett rezgések számával egyenlő fizikai mennyiség:

$$\nu = \frac{N}{t}$$

A frekvencia mértékegysége az SI-ben a **hertz (Hz).** *Ha a rezgések frekvenciája* 1 Hz, *akkor* 1 s *alatt egy teljes rezgés megy végbe.*

A rezgések periódusa és frekvenciája egymás fordított értékei:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

A körfrekvencia ω az a fizikai mennyiség, amely egyenlő a test által 2π másodperc alatt elvégzett teljes rezgés mennyiségével:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

A körfrekvencia mértékegysége az SI-ben **a radián per másodperc** (rad/s, illetve s^{-1}).

Összefoglalás

A mechanikai rezgés olyan mozgás, mely egyenlő időközönként jó közelítéssel ismétlődik.

A testre ható periodikusan változó külső erő által előidézett rezgést kényszerrezgésnek nevezzük.

A rendszer belső erői hatására létrejövő rezgéseket, melyek a rendszer nyugalmi állapotból való kimozdítása majd elresztése után jönnek létre, szabad rezgéseknek nevezzük

Ahhoz, hogy a rezgő rendszerekben szabad rezgés jöjjön létre, két feltételnek kell teljesülnie: 1) a rendszerrel többletenergiát kell közölni; 2) a rendszer belső súrlódása kicsi kell hogy legyen.

A periodikus rezgést egy sor fizikai mennyiség jellemzi: amplitúdó A, periódus T, a rezgések frekvenciája ν, körfrekvencia ω.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk mechanikus rezgésnek? 2. Milyen rezgést nevezünk szabad rezgésnek? Kényszerrezgésnek? Mondjatok példákat! 3. Mi a szabad rezgést végző rendszer jellemzője? 4. Milyen feltételek szükségesek szabad rezgések létrejöttéhez? 5. Nevezzétek meg a rezgőmozgást jellemző legfontosabb fizikai mennyiségeket! Definiáljátok őket!

33. gyakorlat

1. Határozzátok meg a másodpercenként 300 rezgést végző anyagi pont periódusidejét és frekvenciáját!
2. A rugóra rögzített súly rezgésideje 2 s. Mit jelent ez? Határozzátok meg a súly frekvenciáját és körfrekvenciáját! Hány rezgést végez a súly 10 s alatt?
3. A test rezgési frekvenciája 20 Hz. Mit jelent ez? Határozzátok meg a test rezgésidejét! Mennyi idő alatt végez a test 200 rezgést?
4. A rugóra függesztett test rezgésének amplitúdója 5 cm. Mekkora utat tesz meg a test egynegyed periódus alatt? Fél periódus alatt? Egy teljes periódus alatt? Két periódus alatt?

Kísérleti feladat

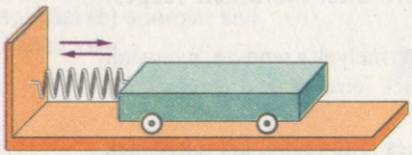
Tanulmányozzátok szívetek működését a rezgések szemszögéből! Határozzátok meg nyugalmi állapotban a szív rezgésidejét, rezgésszámát, körfrekvenciáját! Végezzetek el néhány tornagyakorlatot (pl. 20–30 guggolást), majd újból ismételjétek meg a méréseket! Ismerve a pulzusotokat (a percenkénti szívverést), számítsátok ki bármely folyamat idejét (pl. a víz felforrását)! Vonjatok le következtetéseket!

39. §. HARMONIKUS REZGÉSEK. A HARMONIKUS REZGÉSEK EGYENLETE

?! Ha a test rezgőmozgást végez, a térbeli helyzetét meghatározott módon változtatja. A rezgőmozgás törvényei bonyolultak és túlmutatnak az iskolai tananyagon. Ezért csak egyfajta rezgőmozgás képletét tanuljuk meg, mégpedig a harmonikus rezgésekét. A következendőkben erről lesz szó.

1 Milyen rezgést nevezünk harmonikusnak?

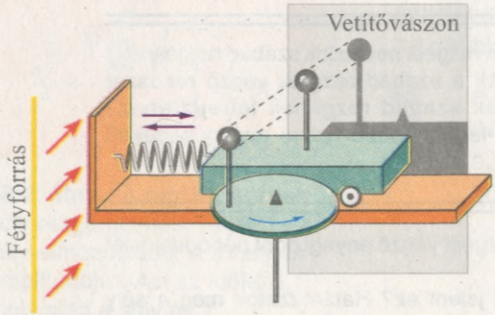
A rezgőmozgás és az egyenletes körmozgás nagyon hasonlít egymásra: mindkét mozgástípus periodikus, azaz azonos időn belül megismétlődnek. Ezenkívül hasonló fizikai mennyiségekkel is jellemezhetjük azokat. Tehát feltételezhetjük, hogy hasonló törvényekkel írhatjuk le a két mozgásfajtát. Bemutatjuk, hogy a körmozgást végző test és a rezgő test koordinátaegyenlete azonos.



39.1. ábra A vízszintesen rugóhoz rögzített, majd egyensúlyi állapotából kimozdított kiskocsi rezgőmozgást végez

Példaként két mozgást hasonlítunk össze: a vízszintesen rugóhoz rögzített kiskocsi és a forgó koronghoz erősített golyó mozgását.

Elmozdítjuk a kiskocsit egyensúlyi állapotából, minek eredményeként az rezgőmozgást végez (39.1. ábra). Meghatározva a t idő alatt végzett N rezgések számát, meghatározzuk a T rezgésidőt: $T = \frac{t}{N}$.

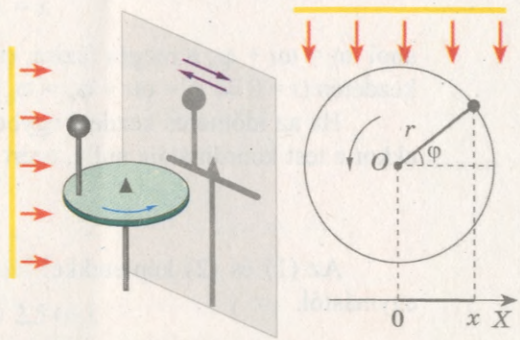


39.2. ábra. Ha a korong periódusideje megegyezik a kocsi rezgésidejével, a golyó és a forgástengely közötti távolság egyenlő a kocsi rezgésének amplitúdójával, akkor a két golyó árnyéka egybeesik

Összeállítjuk a 39.2. ábrán látható szerkezetet. A korongot a kiskocsi periódusidejével megegyező rezgésidővel forgatjuk (a kocsi egy teljes rezgése alatt a korong egy teljes fordulatot tesz meg). A korong forgása alatt a hozzá rögzített golyó árnyéka rezgőmozgást végez. Ha a rugót A távolságra nyújtjuk ki, amely megegyezik a korong r forgási sugarával ($A = r$), majd abban a pillanatban engedjük el, amikor a golyó árnyéka egybeesik a kocsira rögzített golyó árnyékával, akkor azt vesszük észre, hogy az árnyékok tökéletesen egybeesnek.

A valóságban egy ilyen kísérlet elvégzése eléggé bonyolult feladat. Sokkal egyszerűbb felírni a rugóhoz rögzített kocsi rezgésének egyenletét, felhasználva a felsőfokú matematika elemeit. Mivel ti még nem rendelkeztek ehhez kellő tudással, ezért csak megfigyeléseket végzünk és analógiákat keresünk.

A test egyenletes körmozgásának tanulmányozásából tudjátok (lásd a 14. §-t), hogy ilyen mozgás esetén a test x koordinátája az $x = r \cos \varphi$ törvény szerint változik, ahol r a test mozgásának sugara, φ a helyvektor szögelfordulása (39.3. ábra). A rajzon látjuk, hogy ugyanúgy változik a forgó koronghoz rögzített golyó árnyékának koordinátája is.



39.3. ábra. Az r sugarú korongon egyenletesen forgó golyó x koordinátája a következő törvény alapján határozható meg: $x = r \cos \varphi$, ahol φ a helyvektor szögelfordulása. Ugyanezen törvény szerint változik a rezgőmozgást végző golyó árnyékának koordinátája is

Mivel $\varphi = \omega t$, ahol $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a golyó forgásának szögsebessége, ezért a golyó árnyékának x koordinátáját a következőképpen írhatjuk fel:

$$x = r \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Mivel a korongon és a kocsin lévő golyók árnyéka egyforma mozgást végez, ezért a kocsin lévő golyó rezgését leíró képlet ugyanez lesz. A kísérlet feltételei szerint a golyó forgási sugara egyenlő a kocsi rezgésének amplitúdójával ($r = A$), a $\frac{2\pi}{T} = \omega$ képlet pedig a kocsi rezgésének körfrekvenciáját fejezi ki. Innen kapjuk a kocsi *rezgésének a képletét* – az $x(t)$ összefüggés egyenletét:

$$x = A \cos \omega t, \qquad (1)$$

ahol x a kocsi koordinátája t időpontban. A koordináták kezdete egybeesik a kocsi nyugalmi állapotával.

Azokat a rezgéseket, mely alatt a rezgőmozgást végző test koordinátája idővel a szinusz- vagy koszinuszfüggvény szerint változik, **harmonikus rezgéseknek** nevezzük.

Tehát a rugóhoz rögzített kocsi harmonikus rezgést végez.

2 Mi a rezgések fázisa?

Visszatérünk az (1) képlethez. A koszinuszfüggvény argumentumában lévő ωt mennyiséget a *rezgések fázisának* nevezzük. Jele: φ.

A rezgő rendszer állapotát az adott pillanatban jellemző fizikai mennyiséget a **rezgés fázisának** φ nevezzük.

A rezgés fázisát a T rezgésidőnek és annak a t időpontnak a segítségével határozhatjuk meg, amelyben a test koordinátáját vizsgáljuk ($\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t$). A rezgés fázisa az időmérés kezdetétől is függ. Ha a test rezgését tanulmányozva a stopperórát nem a maximális kilengés pillanatában kapcsoljuk be, hanem valamivel később vagy korábban, akkor a rezgés egyenlete a következő alakban írható fel:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

ahol $\omega = \omega t + \varphi_0$ a rezgés fázisa, φ_0 a kezdőfázis – a rezgések fázisa az időmérés kezdetén ($t = 0 \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0 = \varphi_0$).

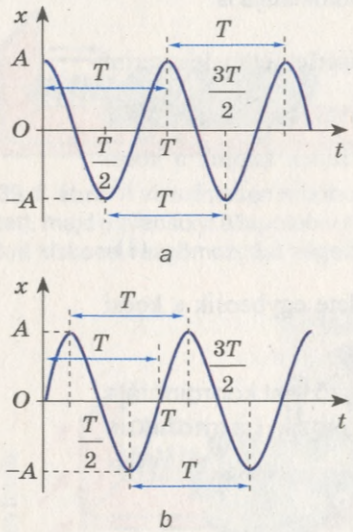
Ha az időmérés kezdete egybeesik a test egyensúlyi állapotának pillanatával, akkor a test koordinátája nulla, ezért a rezgést leíró egyenlet:

$$x = A \sin \omega t. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) képletekkel leírt rezgések csak a kezdőfázissal különböznek egymástól.

3 Milyen alakú a harmonikus rezgések grafikonja?

A rezgő test koordinátája és az idő közötti összefüggést a **rezgés grafikonjának** nevezzük.



39.4. ábra. A harmonikus rezgések grafikonjai. A rezgő test koordinátája a t időtől függően a következő törvények segítségével írható le: $x = A\cos\omega t$ (*a*); $x = A \sin \omega t$ (*b*) ((*A* a rezgések amplitúdója; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ körfázis, T a rezgésidő)

A harmonikus rezgések grafikonja görbe vonal, melyet a matematikában *szinuszoidnak*, illetve *koszinuszoidnak* neveznek (39.4. ábra). A rezgések egyenletéhez hasonlóan a rezgések grafikonjából is könnyű meghatározni a rezgőmozgás jellemzőit. A grafikon lehetőséget ad a rezgés egyenletének a felállítására (lásd a 4. pontot).

A szabad rezgések nem harmonikusak. Viszont ha a rezgő rendszerben elhanyagolható a súrlódás, akkor kis időközökben (ameddig az amplitúdó nem érkezik érezhetően csökkenni) a szabad rezgés harmonikusnak tekinthető és a 39.4. ábrán látható grafikonokhoz hasonlókkal ábrázolható.

4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

1. feladat. A test rezgésének egyenlete: $x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t$ (m). Határozzátok meg a test rezgésének amplitúdóját, rezgésidejét és rezgésszámát! Számítsátok ki a rezgés fázisát és a test koordinátáját az időmérés kezdetétől számított 2 s-ban!

Adva:

$x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t$ (m)

$t = 2$ s

$A - ?$
$T - ?$
$\nu - ?$
$\varphi - ?$
$x - ?$

A fizikai probléma elemzése, megoldás. Harmonikus rezgéssel állunk szemben, ezért az adott egyenletet a harmonikus rezgés általános egyenletével hasonlítjuk össze. Az egyszerűség kedvéért egymás alá írjuk le a két egyenletet:

$x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t$,

$x = A \cos \omega t$.

Innen: $A = 5$ m, $\omega = \frac{\pi}{6}$ s^{-1}.

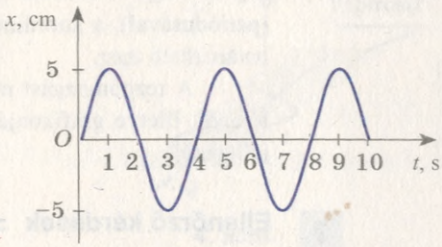
Mivel $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ezért $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ (s);

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08$ Hz; $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{6}$ s$^{-1} \cdot 2$ s $= \frac{\pi}{3}$;

$x = 5 \cos \frac{\pi}{6} t = 5 \cos \frac{\pi}{6} \cdot 2 = 5 \cos \frac{\pi}{3} = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$ (m).

Felelet: a rezgés amplitúdója $A = 5$ m; a rezgés periódusideje $T = 12$ s; a rezgésszáma $\nu \approx 0{,}08$ Hz; a rezgés fázisa 2 s múlva: $\varphi = \frac{\pi}{3}$; a test koordinátája 2 s múlva: $x = 2{,}5$ m.

2. feladat. Az ábrán látható grafikon alapján határozzátok meg a test rezgésének amplitúdóját és periódusidejét! Számítsátok ki a rezgésszámot és a körfrekvenciát; írjátok fel a rezgés egyenletét; határozzátok meg a test elmozdulását $\frac{\pi}{2}$ fázisban!



Adva:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$A - ?$
$T - ?$
$\omega - ?$
$x(t) - ?$
$x\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - ?$

A fizikai probléma elemzése. A megfigyelés kezdetén ($t = 0$) a test egyensúlyban van ($x_0 = 0$), ezért a rezgés egyenlete: $x = A \sin \omega t$.

A grafikonról láthatjuk: a test maximális elmozdulása 5 cm, ezért $A = x_{max} = 5$ cm $= 0{,}05$ m; egy teljes rezgés elvégzéséhez szükséges idő 4 s, tehát $T = 4$ s.

A matematikai modell felállítása, megoldás. Kiszámítjuk a test rezgésszámát és körfrekvenciáját:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\text{ s}} = 0{,}25 \text{ Hz};$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 0{,}25 \text{ s}^{-1} = 0{,}5\,\pi \text{ s}^{-1}.$$

Behelyettesítve az $A = 0{,}05$ m és $\omega = 0{,}5\pi$ s^{-1} értékeket a rezgés egyenletébe, a következőt kapjuk: $x = 0{,}05 \sin 0{,}5\pi t$ (m).

Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$, akkor $x = A \sin \varphi = 0{,}05 \sin \frac{\pi}{2} = 0{,}05$ (m).

Felelet: a rezgés amplitúdója $A = 0{,}05$ m; a rezgés periódusa $T = 4$ s; a rezgés frekvenciája $\nu = 0{,}25$ Hz; a ciklikus frekvencia $\omega = 0{,}5\pi$ s^{-1}; a rezgés egyenlete: $x = 0{,}05 \sin 0{,}5\pi t$ (m); a test elmozdulása $\frac{\pi}{2}$ fázisban (fázisszög esetén): $x = 0{,}05$ m.

Összegzés

Azokat a rezgéseket, mely alatt a rezgőmozgást végző test koordinátája idővel szinusz- vagy koszinuszfüggvény szerint változik, harmonikus rezgéseknek nevezzük.

Ha az időmérés kezdetén a test elérte maximális kitérését, akkor a test kitérése az idő függvényében $x(t)$ a következő alakban írható fel: $x = A \cos \omega t$.

Ha az időmérés kezdete egybeesik a test egyensúlyi helyzetének pillanatával, akkor a rezgés egyenlete a következő kifejezés lesz: $x = A \sin \omega t$.

A harmonikus rezgések egyenletében a sin, illetve a cos alatt található mennyiséget a rezgés fázisának nevezzük: $\varphi = \omega t + \varphi_0$. A rezgés fázisa a mozgás jellegével (periódusával), a koordináta megjelölésének pillanatával és az időmérés kezdetével határozható meg.

A rezgőmozgást megadhatjuk szinuszgörbe segítségével is. A rezgés egyenletéből, illetve grafikonjából meghatározható az adott mozgás összes kinematikai jellemzője.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen rezgéseket nevezünk harmonikusnak? **2.** A harmonikus rezgések egyenletének felállításához miért hasonlítottuk a rezgést a körmozgáshoz? Vázoljátok a kísérletet! **3.** Írjátok fel a harmonikus rezgés egyenletét vagyis a kitérés időfüggését! **4.** Melyik egyenletet használjátok fel, ha az időmérés kezdetén a test egyensúlyban volt? Ha az időmérés kezdetén a testnek maximális volt a kitérése? **5.** Milyen alakú a szabad harmonikus rezgések grafikonja? **6.** Hogyan adható meg a rezgőmozgás?

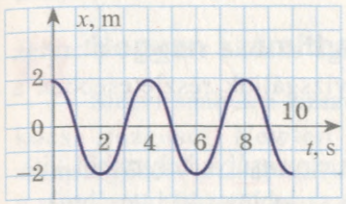
34. gyakorlat

1. Írjátok fel a test harmonikus rezgésének egyenletét, ha a rezgés amplitúdója 10 cm, periódusideje 1 s! Feltételezzük, hogy az időmérés kezdetén a testnek maximális volt a kitérése.

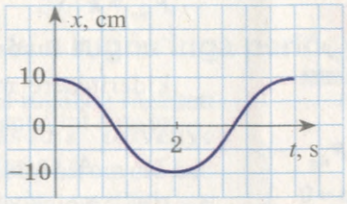
2. A rugóhoz rögzített test 2 s alatt 10 rezgést végez. Maximális kitérése 5 cm. Írjátok fel a harmonikus rezgések egyenletét, ha a megfigyelés kezdetén a test egyensúlyban volt!

3. A test rezgésének egyenlete $x = 4 \sin \frac{2\pi}{3} t$ (m). Határozzátok meg a test rezgésének amplitúdóját, periódusidejét és rezgésszámát!

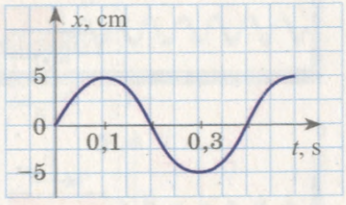
4. A test rezgésének egyenlete $x = 0{,}3\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (m). Határozzátok meg a test rezgésének amplitúdóját, periódusidejét és rezgésszámát; a rezgés fázisszögét és a test koordinátáját a megfigyelés kezdete utáni első másodpercben!
5. Az 1–3. ábrákon különböző testek harmonikus rezgéseinek grafikonjai láthatók. Határozzátok meg minden test rezgésének: a) amplitúdóját; b) periódusidejét; c) rezgésszámát; d) írjátok fel a rezgések egyenleteit!



1. ábra



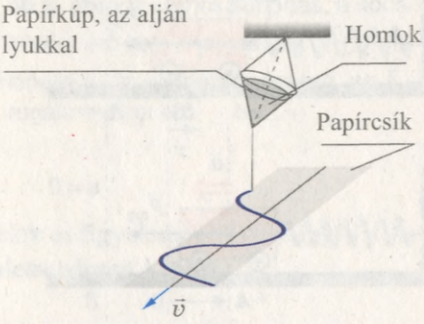
2. ábra



3. ábra

Kísérleti feladat

Állítsátok össze a 4. ábrán látható szerkezetet! Ujjatokkal zárjátok el a kúp alján lévő lyukat, és töltsétek fel a testet száraz homokkal (esetleg sóval vagy kölessel). Billentsétek ki a kúpot egyensúlyi helyzetéből, majd engedjétek el. Ezzel egyidejűleg mozgassátok a papírcsíkot az ábrán látható módon. A kiömlő homok hullámos vonalat hagy maga után a papíron. (Hogy a homok ne hulljon le a papírlapról, azt előzőleg bekenhetitek tapétaragasztóval vagy csirizzel.) Az így kapott „grafikonon" mutassátok meg, és számítsátok ki a rezgés amplitúdóját!



4. ábra

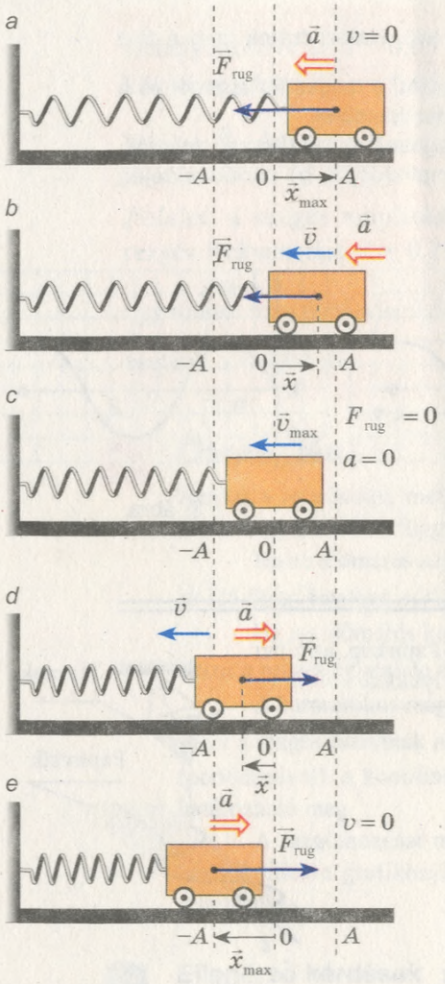
40. §. A RUGÓS INGA REZGÉSE

?! A rezgőmozgások sokfélék lehetnek. Viszont léteznek a rezgőmozgások klasszikusai, melyeket több száz évvel ezelőtt írtak le, és melyek tanulmányozásával *Galileo Galilei* és Isaac Newton kortársa, *Christian Huygens* (1629–1695) foglalkozott. Ezek a rugós inga (rugóra rögzített test) és a matematikai inga rezgései. A fizikában a rugós ingát *harmonikus oszcillátornak* is nevezik.

1 A rugós inga rezgése

A ***rugós inga*** *olyan rezgő rendszer, amely rugóhoz rögzített testből áll.*

Megvizsgáljuk a vízszintes rugós inga rezgését. Egy m tömegű kiskocsit k merevségű rugóval a mozdulatlan falhoz kapcsolunk (40.1. ábra).



40.1. ábra A rugós inga szabadrezgése

Megállapodunk a következőkben:

1) a *rendszerben ható rugalmassági erők elhanyagolhatók,* ezért az inga rezgése nem fog csökkenni, azaz az amplitúdója nem változik;

2) *a rezgés alatt a rugó deformációja* a Hook-törvény szerint megy végbe: $F_{rug} = k\,|\,x\,|$.

A rugós inga szabad rezgése okainak kiderítésére megvizsgáljuk részletesebben a rezgés folyamatát.

A kocsit az egyensúlyi helyzetből kitérítjük x_{max} távolságra jobbra (40.1. *a* ábra). A rugó megnyúlik, és a kocsira hatni kezd a balra irányuló rugalmassági erő. Ebben a pillanatban a rugalmassági erő eléri a legnagyobb értékét: $F_{rug} = k\,|\,x_{max}\,| = kA$.

Elengedjük a kocsit, ami a rugalmassági erő hatására balra mozdul el (40.1. *b* ábra). A kocsi gyorsulásának az iránya egybeesik a sebesség irányával ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}$), ezért a kocsi sebessége növekszik. Mivel a rugó megnyúlása csökken, csökken a rugalmassági erő is, ebből kifolyólag csökkenni fog a kocsi gyorsulása is.

Az egynegyed periódussal megegyező idő elteltével ($t = T/4$) a kocsi egyensúlyi helyzetbe kerül (40.1. *c* ábra). Ebben a pillanatban a rugalmassági erő és a gyorsulás nullával egyenlő, a kocsi sebessége pedig eléri a maximális értéket. Elérve az egyensúlyi helyzetét, a kocsi nem áll meg, hanem lendületénél fogva tovább mozog balra (40.1. *d* ábra). A rugó összenyomódik és növekszik a jobbra ható rugalmassági erő, amely fékezi a kocsit. Elérve a fordulópontot (az egyensúlytól mért maximális elmozdulást), a kocsi egy pillanatra megáll (40.1. *e* ábra). A rezgés kezdetétől eddig a pillanatig egy fél periódus ($t = T/2$) telik el.

A második félperiódus hasonlóan, de ellenkező irányban zajlik le: a kocsi jobbra mozdul el az egyensúly pillanatáig, ismét nő a sebessége; egy bizonyos $t = \frac{3}{4}T$ idő elteltével újra eléri ezt a helyzetet, majd ismét A távolságra lendül ki. Így fejeződik be egy teljes rezgés ($t = T$). Utána minden megismétlődik.

Jegyezzétek meg: a rezgés teljes ideje alatt a rugalmassági erő a rugó kinyúlásával ellentétes irányba hatott, vagyis mindig az egyensúlyi helyzete felé „tolta" a kocsit.

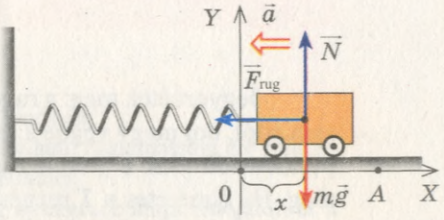
A rugós inga szabad rezgésének okai a következők:

1) *a testre ható erő mindig az egyensúlyi állapot felé hat;*

2) *a rezgő test tehetetlen,* ennélfogva nem áll meg az egyensúly állapotában (amikor a rugalmassági erő nulla), hanem tovább folytatja mozgását a megkezdett irányba.

2 Hogyan számítható ki a rugós inga periódusideje?

Megvizsgáljuk a vízszintes rugóhoz rögzített kocsi rezgését Newton második törvénye szemszögéből (40.2. ábra). A kocsira három erő hat: a támaszték részéről ható $\vec{N}$ reakcióerő, az $m\vec{g}$ nehézségi és az $\vec{F}_{rug}$ rugalmassági erő. Felírjuk Newton második törvényét vektoralakban és a koordináta-rendszer tengelyeire eső vetületük alapján. Az OX tengely iránya megegyezik a kocsi mozgásirányával, az OY tengely pedig merőleges rá, a koordináta-rendszer középpontját a kocsi nyugalmi állapotába helyezzük.



40.2. ábra Ha nincs súrlódás, a kocsira három erő hat: a támaszték $\vec{N}$ reakcióereje, az $m\vec{g}$ nehézségi erő, az $\vec{F}_{rug}$ rugalmassági erő.

Newton második törvényének egyenlete ebben az esetben:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{rug} = m\vec{a}.$$

Leképezve ezt az egyenletet a koordinátatengelyekre és figyelembe véve, hogy a Hook-törvény szerint $\vec{F}_{rug\,x} = -kx$, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} OX: F_{rug\,x} = ma_x, \\ OY: N - mg = 0, \\ \quad F_{rug\,x} = -kx. \end{cases}$$

Összehasonlítva az első és harmadik egyenlet jobb oldalát, meghatározzuk az a_x értékét. Mivel $ma_x = -kx$, ezért:

$$a_x = -\frac{k}{m}x. \qquad (1)$$

A kapott egyenletet a *rugós inga szabadrezgése egyenletének* nevezzük. Megvizsgálva az egyenletet, kijelenthetjük: a rugós inga rezgésekor a gyorsulás egyenesen arányos az inga elmozdulásával és a mozgásával ellentétes irányba hat.

Bebizonyítjuk: *ha a test mozgásának bármely pillanatában a gyorsulása egyenesen arányos az elmozdulással ($a \sim x$) és a mozgásával ellentétes irányba hat ($\vec{a} \uparrow\downarrow x$), akkor az adott mozgást harmonikus rezgésnek nevezzük (szinusz-,*

illetve koszinusztörvény alapján írható le) és az egyenletét a következő képlet segítségével írhatjuk fel:

$$a_x = -\omega^2 x, \qquad (2)$$

ahol ω a harmonikus rezgések körfrekvenciája.

Összehasonlítva az (1) és (2) egyenleteket: $\omega^2 = \frac{k}{m}$, vagy $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Figyelembe véve, hogy $T = \frac{2\pi}{\omega}$, megkapjuk ***a rugós inga rezgésidejének képletét***:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (3)$$

Jegyezzétek meg: a rugós inga rezgésideje nem függ a rezgések amplitúdójától, sem attól, hol megy végbe a rezgés (a Földön, az űrhajó fedélzetén vagy a Holdon). A periódusidő csak a „test – rugó" rezgő rendszer jellemzői segítségével határozható meg. Ha ismeretes a T rezgési periódus és a k rugómerevség, meg lehet határozni a test tömegét. A tömeg meghatározásának ezt a módszerét a súlytalanság állapotában használják, amikor az egyszerű mérleg már nem használható.

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A test rezgésének egyenlete a rugón a következő: $x = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{3}t\,(\text{m})$. Határozzátok meg a test tömegét, ha a rugó merevsége 40 N/m! Számítsátok ki a test gyorsulását és a testre $t = 1$ s pillanatban ható rugalmassági erő nagyságát!

Adva:

$x = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{3}t\,(\text{m})$

$k = 40$ N/m

$t = 1$ s

$m - ?$

$a - ?$

$F_{rug} - ?$

A fizikai probléma elemzése, megoldás. Mivel harmonikus rezgéssel állunk szemben, ezért a megoldás érdekében az adott egyenletet a harmonikus rezgések általános egyenletével hasonlítjuk össze: $x = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{3}t$, $x = A\cos\omega t$. Összevonva a kifejezéseket:

$A = 0{,}02$ m; $\omega = \frac{2\pi}{3}\,\text{s}^{-1}$.

Felhasználva az $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ képletet, meghatározzuk a test tömegét: $m = \frac{k}{\omega^2}$.

Hook törvénye alapján $F_{rug} = k\,|\,x\,|$; Newton második törvénye szerint: $a = \frac{F_{rug}}{m}$.

Kiszámítjuk a keresett mennyiség értékét:

$x = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{3}\cdot t = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{3}\cdot 1 = 0{,}01$ (m);

$[m] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg}$, $\{m\} = \frac{40 \cdot 9}{4\pi^2} \approx 9$, $m \approx 9$ kg;

$[F] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{N}$, $\{F\} = 40 \cdot 0{,}01 = 0{,}4$, $F = 0{,}4$ N;

$[a] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $\{a\} = \frac{0{,}4}{9} \approx 0{,}044$, $a \approx 0{,}044 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Felelet: a test tömege $m \approx 9$ kg, a test gyorsulása $t = 1$ s pillanatban: $a \approx 0{,}044 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, az adott pillanatban a testre ható rugalmassági erő: $F_{\mathrm{rug}} = 0{,}4$ N.

Összegzés

A rugós inga egy rugóhoz rögzített test által alkotott rendszer.

A rugós inga szabad rezgésének okai: 1) a testre ható rugalmassági erő mindig az egyensúlyi helyzet irányába hat; 2) a rezgő test tehetetlen.

A rugós inga rezgésének periódusa nem függ a rezgések amplitúdójától, és a $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ képlet segítségével számítható ki.

Ha a test mozgásának bármely pillanatában a gyorsulása egyenesen arányos az elmozdulással és a mozgásával ellentétes irányba hat, akkor az adott mozgást harmonikus rezgésnek nevezzük. A harmonikus rezgések egyenlete: $a_x = -\omega^2 x$, ahol ω a harmonikus rezgések körfrekvenciája.

Ellenőrző kérdések

1. Mi a rugós inga? Mondjatok példákat! **2.** Írjátok le a rugós inga rezgésének folyamatát! **3.** Rezgés közben miért nem áll meg a test, amikor az egyensúlyi helyzetén halad át? **4.** Hogyan változik a rugalmassági erő rezgés közben? **5.** Melyik képlet segítségével határozható meg a rugós inga rezgésének periódusa? **6.** Harmonikus rezgés közben függ-e a test gyorsulása annak elmozdulásától? **7.** Írjátok fel a harmonikus rezgés egyenletét!

35. gyakorlat

1. A 10 kg tömegű test 2 s periódusú rezgést végez a rugón. Határozzátok meg a rugó merevségét és a test rezgésszámát!

2. Határozzátok meg a 40 N/m merevségű rugóra függesztett test tömegét, ha az egyensúlyi helyzetéből való kitérítése után 8 rezgést végez 12 s alatt!

3. Két test azonos rugókra van felfüggesztve. Hogyan különbözik ezeknek a rezgő rendszereknek a rezgésideje, ha az egyik test tömege négyszerese a másikénak?

4. A rugós inga rezgésének az egyenlete: $x = 5 \sin\frac{\pi}{6}t$ (m). Határozzátok meg a rugó merevségét és a test rezgésszámát, ha a test tömege 2 kg! Mekkora rugalmassági erő hat a testre a mozgás kezdete után 1 s-mal?

5. A függőleges rugó a rá rögzített test hatására 2 cm-re nyúlt meg. Határozzátok meg a rugós inga szabad rezgéseinek frekvenciáját!

6*. A víz felszínén egy 200 g tömegű fahasáb úszik. A hasábot kissé a víz alá nyomták, majd elengedték. Határozzátok meg a fahasáb rezgésének frekvenciáját, ha alapterülete 50 cm²!

41. §. A MATEMATIKAI INGA REZGÉSE

?! A firenzei dóm óriási csillárját megfigyelve, amely a huzat hatására lendült ki egyensúlyi állapotából, Galileo Galilei megmérte a rezgésidejét és megállapította, hogy a rezgésidő nem függ az amplitúdótól. Mivel az órát abban az időben még nem ismerték, Galilei saját pulzusát számolva végezte el a méréseket. A mai kor embere nem győz eleget csodálkozni a régi korok tudósain, akik ilyen egyszerű módszerekkel is képesek voltak pontos eredmények elérésére. Tulajdonképpen Galilei megalapozta a rezgőmozgások tanulmányozásával foglalkozó fizikai irányzatot, bevezetve a rezgés amplitúdójának és periódusidejének fogalmát.
A plafonhoz erősített csillár, a bababölcső, az óra ingája – ezek mind a fizikai inga példái. Épp az ilyen ingák tanulmányozásával foglalkozik a következő paragrafus.

1 Mit nevezünk matematikai ingának?

Azt a tömör testet, amely rezeg vagy rezgőmozgást végezhet a test tömegközéppontja fölött elhelyezkedő felfüggesztési ponton átmenő tengelyhez viszonyítva, *fizikai ingának* nevezzük.

A fizikai inga példájául a gépkocsi belsejében felfüggesztett gyerekjáték szolgálhat. Ha a játékot kibillentjük egyensúlyi állapotából, akkor az himbálózni kezd. Viszont az ilyen típusú rezgést nehéz tanulmányozni: jellege függ a játék méretétől, a függeszték tulajdonságaitól és sok egyéb tényezőtől.

Hogy a test méretei ne befolyásolják annak rezgését, olyan felfüggesztést kell kiválasztanunk, amely sokkal hosszabb a test méreténél. Ebben az esetben a testet anyagi pontnak tekinthetjük. A nehezéknek könnyűnek, és hogy a lengés ideje alatt a test egyenlő távolságra legyen a felfüggesztés pontjától, állandó hosszúságúnak (nem nyúló) kell lennie. Ilyen módszerrel megalkothatjuk a *matematikai inga fizikai modelljét.*

Matematikai ingának a súlytalan és nem nyúló fonálra rögzített és a nehézségi erő hatására lengést végző anyagi pontot nevezzük.

A rezgő rendszert ebben az esetben a fonálra függesztett anyagi pont és a Föld alkotják, amely nélkül ez a rendszer nem létezhetne.

2 A matematikai inga lengése

Vegyünk egy nem nagy, de eléggé nehéz golyót és függesszük fel egy hosszú, nem nyúló fonálra. Ez a rendszer a matematikai inga. Ha a golyót kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük, akkor az az egyensúlyi állapot körül fog mozogni. Megvizsgáljuk a golyó mozgását és megállapítjuk az ilyen mozgás okát.

Ha a golyót kitérítjük egyensúlyi állapotából (41.1. *a* ábra), akkor az $m\vec{g}$ nehézségi erő és a fonál $\vec{T}$ feszítőerejének $\vec{F}$ eredője az egyensúlyi állapot felé mutat. Ha elengedjük a golyót, az egyensúlyi állapot felé kezd mozogni, mialatt növekszik a sebessége (mivel $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{v}$).

Abban a pillanatban, amikor a golyó eléri egyensúlyi helyzetét (41.1. *b* ábra), a rá ható erők kiegyenlítődnek és eredőjük 0 ($\vec{F} = 0$), a golyó sebessége maximális lesz.

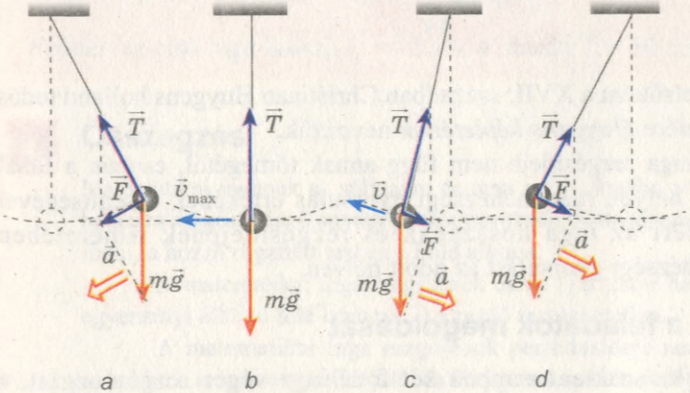
A golyó itt nem áll meg, hanem tehetetlensége folytán folytatja mozgását (41.1. *c* ábra). Ebben az esetben a golyóra ható erők $\vec{F}$ eredője, ahogyan az erők által létrehozott gyorsulása is, a golyó mozgásával ellentétes irányba fognak irányulni ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{v}$), aminek következtében a golyó lassulni kezd. Elérve bal szélső helyzetét, a golyó egy pillanatra megáll (41.1. *d* ábra), majd az eredő erő ismét mozgásba lendíti, immár az ellenkező irányba. A golyó ismét eléri egyensúlyi állapotát, majd elérve a másik oldali szélső helyzetét, egy pillanatra újra megáll. A következő pillanattól a folyamat ismét elindul.

Tehát a matematikai inga a rendszer belső erőinek a hatására szabad rezgést végez. A matematikai inga rezgésének ugyanazok az okai, amelyek a rugós inga esetében is: 1) a testre ható erők eredője mindig az egyensúlyi állapot felé irányul; 2) a rezgő test tehetetlen.

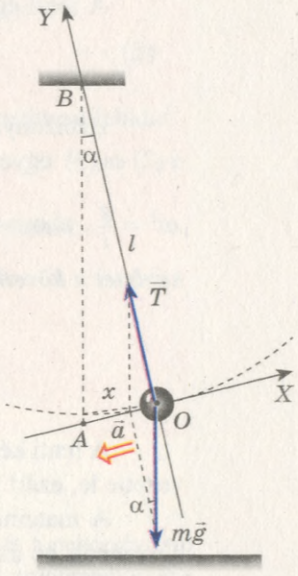
3 Hogyan számítható ki a matematikai inga rezgésideje?

Bebizonyítjuk, hogy az egyensúlyi állapotából csupán kissé kibillentett (3–5°) matematikai inga harmonikus rezgéseket végez. Igazoljuk, hogy az ilyen inga mozgásának az egyenletét a következő alakban írhatjuk fel: $a_x = -\omega^2 x$.

Magyarázó rajzot készítünk, amelyen a testre az adott pillanatban ható erőket tüntetjük fel (41.2. ábra). Az *OX* tengely a test mozgáspályájának az érintője mentén irányul, az *OY* pedig a fonal mentén ható feszítőerő irányába.



41.1. ábra. A matematikai inga szabad rezgése



41.2. ábra. A matematikai inga periódusideje képletének meghatározása: *l* az inga fonalának a hossza, *x* a test elmozdulása, α kilengési szög.

Felírjuk Newton második törvényét vektor alakban és vetületi egyenletként. Az OY tengely mentén a test nem mozdul el, mivel a fonál nem nyúlik, ezért felírjuk az OX tengelyre eső vetületeket:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}; \quad T_x + (mg)_x = ma_x.$$

Mivel $T_x = 0$, $(mg)_x = mg \sin \alpha$, ezért a vetületi egyenlet a következő lesz: $-mg \sin \alpha = ma_x$, vagy:

$$a_x = -g \sin \alpha . \qquad (1)$$

Az AOB derékszögű háromszögből meghatározhatjuk a sin α értékét: $\sin \alpha \frac{AO}{AB}$. Mivel a kilengési szög csekély, ezért $AB \approx l$, ahol l az inga hossza; $AO \approx x$, ahol x a golyó elmozdulása. Tehát $\sin \alpha = \frac{x}{l}$. Behelyettesítve ezt a kifejezést az (1) képletbe, megkapjuk a matematikai inga rezgésének a képletét:

$$a_x = -\frac{g}{l} x. \qquad (2)$$

A fenti egyenletet felírhatjuk a következőképpen:

$$a_x = -\omega^2 x. \qquad (3)$$

Bebizonyítottuk, hogy a matematikai inga rezgése harmonikus. Összehasonlítva a (2) és (3) egyenletek jobb oldalait, megkapjuk az inga rezgésének körfrekvenciáját: $\omega^2 = \frac{g}{l}$, ahonnan $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Mivel $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a ***matematikai inga periódusidejének képletét a következő formában írhatjuk fel***:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

A fenti képletet elsőként a XVII. században Christiaan Huygens holland tudós vezette le, ezért tiszteletére ***Huygens képletének*** nevezzük.

A matematikai inga rezgésideje nem függ annak tömegétől, csupán a fonal hosszának és az adott helyen mért nehézségi gyorsulás értékének a segítségével határozható meg. Ezért az inga hosszának és rezgésidejének ismeretében meghatározhatjuk a nehézségi gyorsulást az adott helyen.

4 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A fizika szaktanteremben két fonálinga végez rezgőmozgást, a hosszúk közötti különbség 22 cm. Azonos idő alatt az egyik inga 30, míg a másik 36 rezgést végzett. Mekkora az ingák hossza?

Adva:
$l_1 - l_2 = 22$ cm $=$
$= 0{,}22$ m
$N_1 = 30$
$N_2 = 36$
$t_1 = t_2 = t$

$l_1 - ?$
$l_2 - ?$

A fizikai probléma elemzése. Az ingák egy helyiségben végeznek rezgőmozgást, tehát a nehézségi gyorsulásuk ugyanakkora. Köztudott, hogy minél hosszabb az inga, annál kevesebb számú rezgést végez azonos idő alatt. Legyen $l_1 > l_2$, akkor $N_1 > N_2$.

A matematikai modell felállítása, megoldás. A megoldáshoz felírjuk mindkét inga rezgésidejét:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}\,;\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}\,.$$

Az első egyenletet elosztva a másodikkal, a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \qquad (1)$$

A periódusidő képlete szerint: $T_1 = \frac{t}{N_1}$; $T_2 = \frac{t}{N_2}$, ahol a rezgés ideje t egyenlő mindkét inga esetében, ezért: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1}$. (2)

Összehasonlítva az (1) és (2) egyenletek jobb oldalait és behelyettesítve a feladat adatait, a következőt kapjuk:

$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{36^2}{30^2} = 1{,}44 \Rightarrow l_1 = 1{,}44 l_2\,.$$ A feltételek szerint:

$$l_1 - l_2 = 0{,}22\text{ m} \Rightarrow 1{,}44 l_2 - l_2 = 0{,}22\text{ m} \Rightarrow 0{,}44 l_2 = 0{,}22\text{ m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow l_2 = 0{,}5\text{ m} = 50\text{ cm}; l_1 = 1{,}44 l_2 = 72\text{ cm}.$$

Felelet: az első inga hossza $l_1 = 72$ cm, a másiké $l_2 = 50$ cm.

Összegzés

Matematikai ingának a súlytalan és nem nyúló fonálra rögzített és a nehézségi erő hatására rezgést végző anyagi pontot nevezzük. A matematikai inga rezgőrendszerét a fonál, a hozzá rögzített test és a Föld alkotja.

A matematikai inga rezgésének okai: 1) a testre ható erők eredője mindig az egyensúlyi állapot felé irányul; 2) a rezgő test tehetetlen.

A matematikai inga rezgésének periódusideje nem függ annak tömegétől, valamint a rezgés amplitúdójától és Huygens képletének segítségével számíthatjuk ki:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk fizikai ingának? Mondjatok példákat! 2. Határozzátok meg a matematikai inga fogalmát! 3. Írjátok le a matematikai inga rezgését! 4. Mi az oka a matematikai inga rezgésének? 5. Milyen képlet segítségével határozható meg a matematikai inga rezgésének a periódusa? Ki vezette le elsőként ezt a képletet? 6. Ki állapította meg elsőként, hogy a matematikai inga rezgésének periódusa nem függ a rezgések amplitúdójától? Hogyan történt?

36. gyakorlat

1. Határozzátok meg a nehézségi gyorsulás értékét egy olyan bolygón, ahol a 6,00 m hosszú inga periódusideje 3,14 s!
2. Mekkora a 2 s periódusidejű inga hossza?
3. Végez-e rezgést a matematikai inga a súlytalanság állapotában? Válaszotokat indokoljátok!
4. A laboratórium helyiségében lévő két inga közül ugyanazon időköz alatt az egyik inga 30-cal több rezgést végzett, mint a másik. Az ingák hosszának az aránya: 4 : 9. Hány rezgést végez egyazon idő alatt mindegyik inga?

5*. Mekkora lesz az 1 m hosszú matematikai inga periódusideje, ha az a Mars felszínén van? A Mars tömege 9,3-szor kisebb a Föld tömegénél, sugara pedig a Föld sugaránál 1,9-szer kisebb.

6. SZ. LABORATÓRIUMI MUNKA

Téma: inga elkészítése és rezgési periódusának meghatározása. A nehézségi gyorsulás meghatározása inga segítségével.

A munka célja: fonálinga készítése; kísérleti úton megbizonyosodni Huygens képletének helyességéről; az elkészített inga segítségével meghatározni a nehézségi gyorsulást.

Eszközök: állvány, rögzítő csavar, kis golyó (esetleg kis test) akasztóval, 1 m hosszú fonál, mérőszalag, stopperóra.

A MUNKA MENETE

II A kísérlet előkészítése

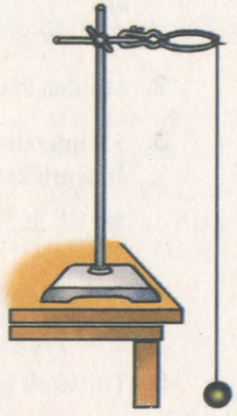
1. A munka megkezdése előtt feleljetek az alábbi kérdésekre és oldjátok meg a feladatot!
   1) Milyen mozgást nevezünk rezgőmozgásnak?
   2) Milyen rezgéseket nevezünk harmonikusnak?
   3) Mikor nevezhetjük a fonálra függesztett testet matematikai ingának?
   4) Milyen feltételekkel lesz a matematikai inga rezgése harmonikus?

Feladat. A kis acélgolyó egy l hosszúságú fonálon t idő alatt N számú rezgést végez. Határozzátok meg a nehézségi gyorsulást az adott földrajzi helyen!

2. A feladat végeredménye alapján határozzátok meg, milyen fizikai mennyiségeket kell meghatároznotok ahhoz, hogy megkapjátok nehézségi gyorsulásának az adatait. Milyen mérőműszerekre van szükségetek ehhez?

Kísérlet

A mérések eredményeit foglaljátok az 1. táblázatba!



1. Állítsátok az állványt az asztal szélére és szorítócsavar segítségével rögzítsetek hozzá egy gyűrűt! Készítsétek el az ingát: a fonal egyik végét rögzítsétek a gyűrűhöz, a másikat a golyóhoz! A fonal hossza akkora legyen, hogy a golyó néhány centiméterre legyen a padló fölött (lásd az ábrát).
2. Mérjétek meg a fonal hosszát!
3. Húzzátok el az ingát 5–8 cm-re az egyensúlyi állapotából, majd engedjétek el!
4. Mérjétek meg 20–30 rezgés idejét!
5. Ismételjétek meg háromszor a kísérletet, minden esetben csökkentve a fonal hosszát!

1. táblázat

Kísérlet sorszáma	A fonál hossza l, m	A rezgések száma N	A rezgés ideje t, s	Periódusidő $T_1 = \frac{t}{N}$, s	Periódusidő $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, s	Relatív hiba ε_T, %

A kísérlet eredményeinek elemzése

1. rész. Az inga periódusidejének meghatározása. Huygens képletének leellenőrzése

1. Minden kísérletben:

1) számítsátok ki az inga periódusidejét kétféleképpen: felhasználva a periódus meghatározását $T_1 = \frac{t}{N}$; Huygens képletének a segítségével:

$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ($g = 9{,}8$ m/s^2).

2) Értékeljétek a relatív hibát az $\varepsilon = \left|1 - \frac{T_1}{T_2}\right| \cdot 100\%$ képlet segítségével!

2. Töltsétek ki az 1. táblázatot!

2. rész. A nehézségi gyorsulás meghatározása inga segítségével

1. A fonal hosszának és a periódusidőnek a kísérletben meghatározott adatait $T_1 = \frac{t}{N}$ írjátok át a 2. táblázatba!
2. Minden kísérletre számítsátok ki a nehézségi gyorsulást: $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$!
3. Számítsátok ki a négy alkalommal meghatározott nehézségi gyorsulás átlagértékét:

$$g_{köz} = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{4}.$$

4. Értékeljétek a kísérlet relatív hibáját az $\varepsilon_g = \left|1 - \frac{g_{átl}}{g_n}\right| \cdot 100\%$ (n = 1, 2, 3, 4) képlet segítségével!
5. Töltsétek ki a táblázatot!

2. sz. táblázat

Kísérlet sor-száma	Fonal hossza l, m	Periódusidő $T_1 = \frac{t}{N}$, s	Nehézségi gyorsulás		Relatív hiba
			g, m/s²	$g_{átl}$, m/s²	ε_g, %

A kísérlet eredményeinek elemzése

Elemezzétek a kísérletet és eredményeit! Vonjatok le következtetést, amelyben leírjátok, milyen mennyiségeket mértetek meg, milyen eredményeket kaptatok, függ-e a kapott eredmény a fonal hosszától (ha igen, akkor miként), mi a mérési hiba oka.

Alkotó feladat

Készítsetek egy 1 s periódusidejű ingát! Kísérletileg vizsgáljátok meg, valóban az előre megadott értékű-e a periódusa! Írjátok le a kísérlet elvégzésének tervét!

42. §. A REZGŐMOZGÁS ENERGIÁJA

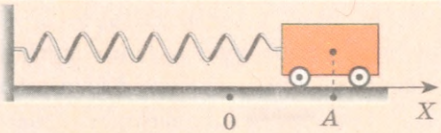
?! A szabad rezgések létrejöttének egyik feltétele az, hogy a rendszer energiát vegyen fel. A következő paragrafusból megtudhatjátok, mekkora ennek az energiának a „részesedése".

1 Energiaátalakulás az inga rezgőmozgásakor

Párhuzamosan megvizsgáljuk a *rugós* és a *matematikai inga* rezgését. A súrlódást mindkét esetben figyelmen kívül hagyjuk. Mivel nem lép fel súrlódás, a rezgő rendszer konzervatív, és érvényes rá a mechanikai energia megmaradásának törvénye.

Rugós inga	Matematikai inga

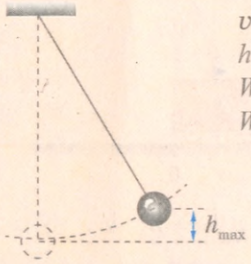
1. Az ingát kitérítjük nyugalmi állapotából, ezzel helyzeti energiát közlünk vele. Az első pillanatban az inga nyugalmi állapotban van, ezért mozgási energiája nulla. Helyzeti energiája maximális és megegyezik az inga teljes energiájával: $W = W_{h\,max}$.



$v = 0 \Rightarrow W_m = 0$

$x = x_{max} = A \Rightarrow W_h = \frac{kx^2_{max}}{2} = \frac{kA^2}{2}$

$W = W_{h\,max} = \frac{kA^2}{2}$



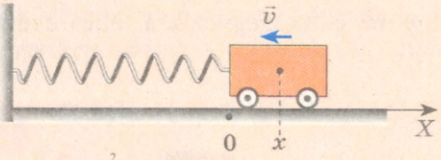
$v = 0 \Rightarrow W_m = 0$

$h = h_{max} \Rightarrow$

$W_h = mgh_{max}$

$W = W_{h\,max} = mgh_{max}$

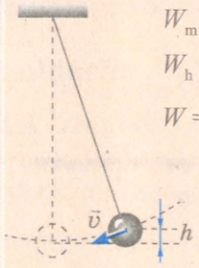
2. Elengedjük az ingát. A test az egyensúlyi helyzet felé kezd mozogni. Ezalatt a helyzeti energiája csökken, viszont növekszik a sebessége, tehát a mozgási energia növekszik. A rendszer teljes energiája változatlan marad, és egyenlő a helyzeti és mozgási energiák összegével: $W = W_m + W_h$.



$W_m = \frac{mv^2}{2}, v \uparrow \Rightarrow W_m \uparrow$

$W_h = \frac{kx^2}{2}, x \downarrow \Rightarrow W_h \downarrow$

$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

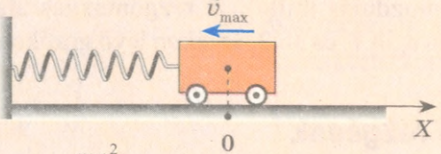


$W_m = \frac{mv^2}{2}, v \uparrow \Rightarrow W_m \uparrow$

$W_h = mgh, h \downarrow \Rightarrow W_h \downarrow$

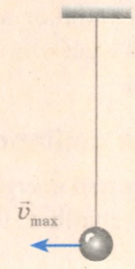
$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + mgh$

3. Az egyensúlyi állapoton történő átmenetkor a rugós inga rugójának megnyúlása (a matematikai ingán a test felemelkedése) egyenlő nullával, tehát az inga helyzeti energiája szintén nulla. A test sebessége ebben a pillanatban maximális, azaz maximális a mozgási energia is. A teljes energia megegyezik a maximális mozgási energiával: $W = W_{m\,max}$.



$W_m = \frac{mv^2_{max}}{2}; x = 0 \Rightarrow W_h = 0$

$W = W_{m\,max} = \frac{mv^2_{max}}{2}$



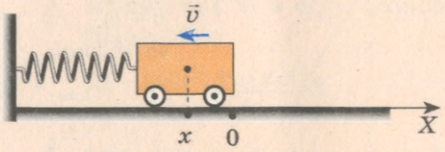
$W_m = \frac{mv^2_{max}}{2};$

$h = 0 \Rightarrow W_h = 0$

$W = W_{m\,max} = \frac{mv^2_{max}}{2}$

Rugós inga	Matematikai inga

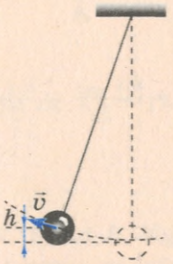
4. A következő pillanatokban a test sebessége, tehát a mozgási energiája is csökken. A rendszer helyzeti energiája viszont növekszik. A teljes energia ekkor is változatlan marad, és megegyezik a mozgási valamint helyzeti energiák összegével: $W = W_m + W_h$.



$$W_m = \frac{mv^2}{2},\ v \downarrow \Rightarrow W_m \downarrow$$

$$W_h = \frac{kx^2}{2},\ |x| \uparrow \Rightarrow W_h \uparrow$$

$$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

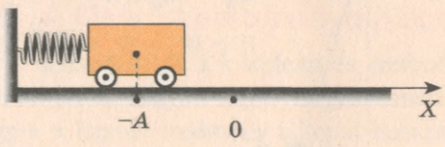


$$W_m = \frac{mv^2}{2},\ v \downarrow \Rightarrow W_m \downarrow$$

$$W_h = mgh,\ h \uparrow \Rightarrow W_h \uparrow$$

$$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

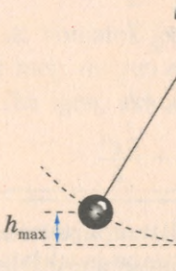
5. Abban a pillanatban, amikor az inga maximálisan kilendül az egyensúlyi helyzetéből, a test egy pillanatra megáll és mozgási energiája nulla lesz. Az inga helyzeti energiája ekkor lesz a legnagyobb és megegyezik a teljes energiával: $W = W_{h\,max}$.



$$v = 0 \Rightarrow W_m = 0$$

$$x = x_{max} = -A \Rightarrow W_{h\,max} = \frac{k x_{max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

$$W = W_{h\,max} = \frac{kA^2}{2}$$



$$v = 0 \Rightarrow W_m = 0$$

$$h = h_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{h\,max} = mgh_{max}$$

$$W = W_{h\,max} = mgh_{max}$$

Az inga szabad rezgése alatt a helyzeti és mozgási energiája állandóan változik. A helyzeti energia a fordulópontokban (a legnagyobb kilengés pontja) a legnagyobb, a mozgási viszont azokban a pillanatokban, amikor a test az egyensúlyi helyzetén megy keresztül (amikor az elmozdulás nulla). A rezgőmozgás alatti energiaátalakulások leírását legcélszerűbben a 36.1. és 36.2. ábrákon lévő grafikonok segítségével végezhetjük el.

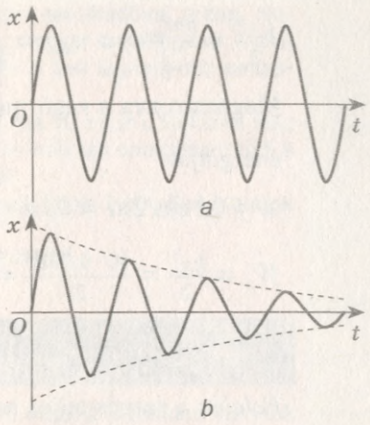
2 Csillapítatlan és csillapodó rezgések

Ha a rendszerben a rezgés energiaveszteség nélkül megy végbe, akkor a rezgés bármilyen hosszú ideig is eltarthat. Ilyenkor a rezgés amplitúdója az idővel nem változik.

Azokat a rezgéseket, melyek amplitúdója az idővel nem változik, **csillapítatlan rezgéseknek** nevezzük (42.1. *a* ábra).

Viszont minden rezgő rendszerben van energiaveszteség. Az energia egy része a súrlódási erő, a légellenállás, a rugó, illetve a fonal deformálásának a legyőzésére fordítódik. Ennek eredményeképpen a mechanikai energia fokozatosan belső energiává alakul át, ezáltal a rezgések amplitúdója csökken, és bizonyos idő elteltével a rezgés megszűnik (csillapodik).

Azokat a rezgéseket, melyek amplitúdója az idő múlásával csökken, **csillapodó rezgéseknek** nevezzük (42.1. *b* ábra).



42.1. ábra. Rezgések grafikonjai: *a*) állandó rezgés; *b*) csillapodó rezgés

Minél nagyobb ellenállásba ütközik a rezgő test, annál hamarabb szűnik meg a rezgés. Például, ha a fonálra függesztett golyót a levegőben és a vízben próbáljuk hintáztatni, azt tapasztaljuk, hogy a levegőben tovább tart a mozgás, a vízben szinte azonnal megszűnik. Ezen a jelenségen alapszik az autók lengéscsillapítóinak a működése: az autó váza egy dugattyúval van összekötve, amely egy folyadékkal teli hengerben mozog. A folyadék nagy ellenállása a rezgések csillapodásához vezet.

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A rugón lévő nehezék rezgésegyenlete a következő: $x = 0{,}1 \cos 2\pi t$ (m). Határozzátok meg a rezgés teljes mechanikai energiáját, a súly maximális sebességét, valamint a rendszer mozgási és helyzeti energiáját a megfigyelés $\frac{1}{6}$-dik másodpercében. A súly tömege 1 kg. A rendszer konzervatív.

Adva:
$x = 0{,}1 \cos 2\pi t$ (m)
$t = \frac{1}{6}$ s
m = 1 kg

$W - ?$
$v_{max} - ?$
$W_m - ?$
$W_h - ?$

A fizikai probléma elemzése, megoldás. Mivel a rendszer konzervatív, ezért érvényes rá a teljes mechanikai energia megmaradásának törvénye:

$$W = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2_{max}}{2} = W_m + W_h.$$

Összehasonlítjuk a rezgések általános képletét a feladatban megadott kifejezéssel: $x = A\cos\omega t$, $x = 0{,}1 \cos 2\pi t$. A következőt kapjuk: $A = 0{,}1$ m; $\omega = 2\pi$ s^{-1}.

Mivel $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ezért $k = \omega^2 m = 4\pi^2 \cdot 1 \approx 40$ (N/m);

$$W = W_{h\,max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{40 \cdot 0{,}01}{2} = 0{,}20 \text{ (J)};$$

$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{kA^2}{m}} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega = 0{,}1 \cdot 2\pi \approx 0{,}63$ (m/s).

Meghatározva a rugó megnyúlását $t = \frac{1}{6}$ s múlva, kiszámítjuk a rugó helyzeti energiáját:

$x = 0{,}1\cos 2\pi t = 0{,}1\cos 2\pi \cdot \frac{1}{6} = 0{,}1\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}05$ (m);

$W_h = \frac{kx^2}{2} = \frac{40 \cdot 0{,}0025}{2} = 0{,}05$ (J);

$W = W_m + W_h \Rightarrow W_m = W - W_h = 0{,}20 - 0{,}05 = 0{,}15$ (J).

Felelet: a rezgés teljes mechanikai energiája $W = 0{,}20$ J, a nehezék legnagyobb sebessége $v_{max} = 0{,}63$ m/s; a súly mozgási energiája $W_m = 0{,}15$ J; a rugó helyzeti energiája $W_h = 0{,}05$ J.

Összegzés

A szabad rezgést végző inga helyzeti és mozgási energiája folyton változik. A fordulópontoknál a helyzeti energia értéke a legnagyobb, az egyensúlyi helyzetén történő átmenetkor pedig nulla. A mozgási energia viszont a fordulópontokban nulla, az egyensúlyi helyzetben pedig a legnagyobb.

Ha a rezgő rendszerben nincs súrlódás, a rendszer teljes mechanikai energiája állandó, a rezgések amplitúdója szintén változatlan marad. Az ilyen rezgéseket csillapítatlan rezgéseknek nevezzük.

A csillapítatlan rezgések teljes mechanikai energiáját a következő képletek segítségével számíthatjuk ki:

$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2}$ – rugós inga esetén;

$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + mgh = mgh_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2}$ – matematikai inga esetén.

Bármely valós rezgő rendszerben az energia egy része a súrlódási erő leküzdésére fordítódik, ennek eredményeként a rendszer teljes mechanikai energiája csökken és fokozatosan csökken a rezgések amplitúdója. Az ilyen rezgéseket csillapodó rezgéseknek nevezzük.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen energiaátalakulások történnek a rugós inga rezgése alatt? A fonalinga lengése során? **2.** Az inga helyzeti energiája milyen helyzetben a legnagyobb? A legkisebb? Mit mondhatunk a mozgási energiáról ezekben a pontokban? **3.** A súrlódás hiányában miért lesz a rezgés csillapítatlan? Mondjátok el a csillapítatlan rezgések meghatározását! **4.** A szabad rezgések amplitúdója miért csökken fokozatosan, ha a rendszerben súrlódás lép fel? Hogyan nevezzük ezeket a rezgéseket?

37. gyakorlat

1. Milyen maximális magasságra lendül ki a matematikai inga, ha az egyensúlyi állapotának elérésekor sebessége 2 m/s?

2. Egy 200 g tömegű test a 40 N/m merevségű rugón 5 cm amplitúdóval rezeg. Határozzátok meg a test sebességét abban a pillanatban, amikor a kilengése 1 cm! Számítsátok ki a rendszer teljes mechanikai energiáját és a test legnagyobb sebességét!
3. Az 5 kg tömegű rugós inga rezgésének egyenlete: $x = 0{,}2 \cos 10\,\pi t$ (m). Mekkora lesz a rezgések teljes mechanikai energiája, az inga mozgási és helyzeti energiája 0,025 s múlva? Számítsátok ki a nehezék legnagyobb sebességét!
4*. A 100 N/m merevségű rugóra függesztett súly rezgési amplitúdója 2 cm. Számítsátok ki a súly mozgási és helyzeti energiáját $\frac{\pi}{3}$ rad fázisszög esetén!

43. §. KÉNYSZERREZGÉSEK. REZONANCIA

?! 1750-ben a franciaországi Angers városkában egy 102 m hosszú lánchídon katonák menetelve keltek át. Ennek eredményeként a híd kilengése annyira felerősödött, hogy a láncok elszakadtak és a híd a folyóba zuhant, a hullámsírban 226 katona lelte halálát. 1906-ban hasonló okok miatt történt baleset Szentpétervárott, ahol az Egyiptomi híd szakadt le egy lovassági ezred alatt. Ezek az események hűen szemléltetik a rezgő rendszerek rezonanciáját. Mi is az a rezonancia, milyen esetekben hasznos a jelenléte és mikor nem – erről lesz szó a következő paragrafusban.

1 Miért van szükség a rendszerek rezgésének a fenntartásához energiára?

Ha a rezgő rendszert kimozdítjuk egyensúlyi állapotából, benne szabad rezgések jönnek létre, melyek frekvenciája nem függ az amplitúdótól. *A szabad rezgések frekvenciáját a rezgő rendszer sajátfrekvenciájának nevezzük.* Az energiaveszteség miatt a szabad rezgések mindig csillapodó rezgések. Hogy a rezgések ne csillapodjanak, a rezgő rendszernek állandóan külső energiára van szüksége.

Megvizsgálunk egy példát. Bizonyára mindannyian hintáztatok már. Mikor kicsik voltatok, a felnőttek hintáztattak benneteket, nagyobb korotokban már megtanultátok meglendíteni magatokat. Mit is jelent a „meglendíteni magatokat"? A hintán lendítve magatokat (a hinta szintén egy fizikai inga) az izmaitok munkájának köszönhetően a rezgő rendszernek (a hintának) rendszeresen energiát adtok át.

Ha a rendszernek átadott energia nem elegendő ahhoz, hogy a súrlódás miatti veszteséget kiküszöböljük, úgy a hinta mozgásának amplitúdója fokozatosan addig csökken, míg a hinta *rezgése nem állandósul. Állandósult rezgés esetén a rendszer energiaveszteségét egyenlő a rendszer által kívülről kapott energia mennyiségével* (mely izmaitok munkája által jön létre).

Ha a kívülről kapott energia mennyisége nagyobb annál, amennyire a súrlódás leküzdéséhez szükség van, úgy a rezgések amplitúdója növekedni fog. Viszont az amplitúdó növekedésével növekszik az energiaveszteség is, ezért bizonyos idő múlva a hinta újra állandó amplitúdóval fog kilengeni, mely az előző állandó amplitúdótól nagyobb lesz.

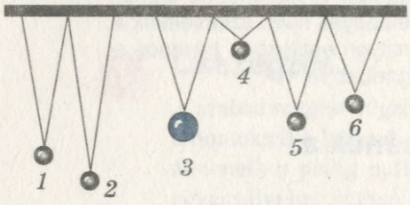
A hintát más módszerrel is ki lehet lendíteni: a földön állva a hintát kézzel fogva mozgathatjátok előre-hátra olyan frekvenciával, amely nem egyezik meg a hinta saját frekvenciájával. A hinta *kényszerrezgéseket fog végezni, melyek frekvenciája*

egyenlő a rá ható lendítőerő frekvenciájának a változásával (a kezetek részéről ható rugalmassági erő), viszont kérdéses, hogy lesz-e elég erőtök nagy rezgés-amplitúdó eléréséhez.

2 Miért jön létre rezonancia?

A hintát előre-hátra változó ütemben lendítgetni talán csak a kísérlet kedvéért próbáljátok meg, mivel már tapasztalatból tudjátok, hogyha a hintát saját *ütemének* megfelelően lendítitek, nagyobb kilengést érhettek el. A lengések tágassága rohamosan növekszik, ha a külső változó erő frekvenciája egybeesik a hinta szabad rezgésének frekvenciájával.

Azt a jelenséget, amikor a periodikusan változó külső erők frekvenciája megegyezik a rezgő rendszer saját frekvenciájával, **rezonanciának** nevezzük.



43.1. ábra A rezonancia jelenségét tanulmányozó kísérlet

A rezonancia megfigyelésére elvégzünk egy kísérletet. Vékony lécre felfüggesztünk öt könnyű és egy nehezebb golyót (43.1. ábra). Figyeljétek meg, hogy a legnehezebb 3. és az 5. golyó azonos hosszúságú fonalon függ, a többi golyó fonalának változó a hosszúsága. A nehéz golyót kilendítjük az egyensúlyából. Az inga rezgése átadódik a lécnek, ami kényszerrezgéseket kezd végezni, melyek frekvenciája megegyezik a nehéz golyó szabadrezgésének frekvenciájával.

Ennek eredményeként a léc ismétlődően változó erővel kezd hatni a többi ingára, melyek ennek hatására szintén rezgőmozgásba kezdenek. Az ingák rezgési amplitúdója különböző lesz. A legnagyobb mértékben az 5. inga leng ki, melynek fonalhossza (egyben rezgésének frekvenciája is) megegyezik a nehéz golyó fonálhosszával.

Kiderítjük az ingák ilyen viselkedésének okait.

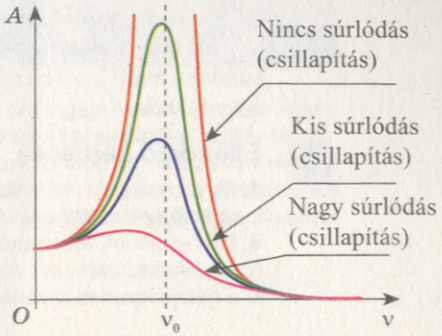
Arról van szó, hogy amikor *a külső erő változásának frekvenciája nem esik egybe a rezgőrendszer saját frekvenciájával* ($\nu \neq \nu_0$), a külső erő hol előre lendíti a golyót (pozitív munkát végez), hol gátolja a mozgásában (negatív munkát végez). Ennek eredményeként a külső erők munkája jelentéktelen, ezért kicsi lesz az állandósult rezgések amplitúdója is.

Ha a külső erők változásának frekvenciája megegyezik a rendszer rezgésének frekvenciájával ($\nu = \nu_0$), akkor a rezgés teljes időtartama alatt a külső erő hatásának iránya egybeesik a golyó mozgásának az irányával, ezért a külső erő által végzett munka egész idő alatt pozitív lesz. A rendszer energiája gyorsan nőni kezd, és ezáltal rohamosan nő a rezgések amplitúdója is.

A rezonancia jelenségének leírása grafikon segítségével a legszemléletesebb.

A kényszerrezgések amplitúdója és a külső erők változásának frekvenciája közötti összefüggést **rezonanciagörbének** nevezzük.

A 43.2. ábra különböző mértékű csillapítás (súrlódási erők) hatása alatti rezonanciagörbét ábrázol. Elemezve a grafikonokat, levonhatjuk a következtetést: 1) a külső erő hatására elérhető amplitúdó akkor a legnagyobb, ha a külső erők frekvenciája egybeesik a rendszer sajátfrekenciájával ($\nu = \nu_0$); 2) minél nagyobb a rendszerben ható súrlódási erő, annál kisebb a rezonanciagörbe csúcspontja, azaz annál kevésbé érződik a rezonancia.



43.2. ábra. A rezgések A amplitúdójának és a külső erő ν frekvenciájának, amely periodikusan változik a súrlódási erők függvényében, függvénygrafikonjai; ν_0 a rendszer rezgésének sajátfrekvenciája. Figyeljétek meg: ha a rendszerben nagy a súrlódás, akkor a rezonancia alacsonyabb frekvencián jelentkezik, mint amekkora a rendszer rezgésének sajátfrekvenciája

3 Hogyan küszöbölhető ki és hol hasznosítható a rezonancia?

Minden fizikai test képes szabad rezgést végezni. Az ilyen objektumokra periodikusan ismétlődő külső hatások rezonanciát idézhetnek elő, ami az objektumok összeomlásához vezethet. A paragrafus elején már említettük, hogyan szakadtak le a hidak rezonancia hatására. Ismeretesek repülőgépkatasztrófák is, amikor a szárnyak rezgésének amplitúdója a légörvény-turbolencia hatására hirtelen megnő. A vonatok mozgásakor a kerekek kattogásának frekvenciája a sínösszetételeknél néha egybeesik a lengéscsillapítók szabad rezgésének a frekvenciájával, melynek következtében a vagonok vészesen kilenghetnek, ami balesethez vezethet.

Hogyan küszöbölhető ki a rezonancia káros hatása? A 43.2. ábra grafikonjait elemezve azt látjuk, hogy növelhető a súrlódás, viszont ez fölösleges energiaveszteséghez vezet. Ezért más módszerekhez folyamodnak: megváltoztatják a rendszer rezgésének vagy a kívülről ható változó erőnek a frekvenciáját. Például a fenti példában a repülőgépeknél egyszerűen megnövelték a szárnyak súlyát, minek hatására azok rezgési frekvenciája eltért a rá ható külső erők frekvenciájától. A vonatok részére meghatározzák az elkerülendő sebességet, a hidakon átkelve megtiltották a menetelést, házak építésénél szem előtt tartják a földkéreg rezgésének frekvenciáját földrengések idején.

A rezonancia jelensége hasznos is lehet: rezonancia segítségével egyszerűbb meglendíteni a hintát, könnyebb kitolni az elakadt autót. A rezonanciát felhasználják a bányászatban a vibrációs fejtőgépeknél, az akusztikában, orvostudományban, a rádiójelek fogadásánál és továbbításánál. A fizika további tanulmányozása során több alkalommal találkozhattok majd a rezonancia fogalmával.

! Összegzés

A testek külső, periodikusan változó erők hatására történő rezgését kényszerrezgéseknek nevezzük. A kényszerrezgések frekvenciája megegyezik a periodikusan változó külső erők frekvenciájával. A kényszerrezgések amplitúdóját a külső erők értékével határozhatjuk meg.

A kényszerrezgések amplitúdójának hirtelen megnövekedését, amikor a periodikusan változó külső erő frekvenciája megegyezik a rezgőrendszer saját frekvenciájával, rezonanciának nevezzük.

A kényszerrezgések amplitúdója és a külső erők változásának frekvenciája közötti összefüggést rezonanciagörbének nevezzük. Minél nagyobb a rendszerben a súrlódás, annál kisebb értéknél lesz a rezonanciagörbe csúcspontja, vagyis annál kisebb a rezonancia.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen rezgést nevezünk kényszerrezgésnek? **2.** Minek a segítségével határozható meg a kényszerrezgések frekvenciája? **3.** Mitől függ a kényszerrezgések amplitúdója? **4.** Mit nevezünk rezonanciának? Mondjatok rá példákat! **5.** Mi a rezonanciagörbe? Milyen következtetéseket vonhatunk le a tanulmányozása során? **6.** Hogyan küszöbölhető ki a nemkívánatos rezonancia? Hol hasznosítják a rezonanciát?

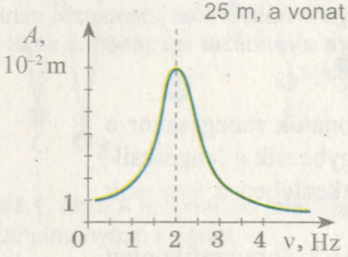
38. gyakorlat

1. Miért remeg az ablaktábla, ha a ház előtt jármű halad el?

2. Ha vízzel teli vödröt viszünk, egy bizonyos haladási sebességnél a víz kilöttyen. Mit kell tennünk a jelenség megszüntetéséhez?

3. A rugós inga 0,5 kg tömegű nehezékére 10 Hz frekvenciájú változó erő hat. Létrejön-e rezonancia abban az esetben, ha a rugó merevsége 200 N/m?

4. A vonat milyen minimális sebességénél jön létre rezonancia, ha egy síndarab hossza 25 m, a vonat rezgésének periódusa 1,25 s?



5. Az ábrán egy rugós inga rezonanciagörbéje látható. Határozzátok meg a rugó merevségét, ha az inga nehezékének tömege 1 kg!

6*. A vagon belsejében 40 cm hosszú fonalra egy kis tömegű nehezéket rögzítettek. Mekkora a vonat sebessége abban a pillanatban, amikor a nehezék intenzíven kezd kilengeni? A síndarab hossza 25 m.

FIZIKA ÉS TECHNIKA UKRAJNÁBAN



V. T. Troscsenko

Az UTA H. Sz. Piszarenko nevét viselő szilárdságkutató intézete (Kijev).

Az intézetet 1966-ban *H. Piszarenko* akadémikus alapította, aki első igazgatóként évekig vezette. Jelenleg a vezetői teendőket *Valerij Trohimovics Troscsenko* akadémikus (lásd a képet), az ukrán tudomány és technika érdemes művelője, a Szovjetunió és Ukrajna állami díjasa (1982, 1969, 1997) látja el.

A főbb működési irányokban elért sikerek – a konstrukciók stabilitása és dőlésmechanizmusa, nem konzervatív mechanikai rendszerek rezgése – nemzetközi hírnevet hoztak az intézménynek. Hogy elképzelhessük az említett kutatási irányzatokat, elegendő felidéznünk egy építési feladatot: mekkora falvastagságra van szükség a különböző építményeknél, hogy azok stabilak maradjanak a 6-os erősségű (Richter-skála szerinti) földrengés esetén is (ez főleg a Krím-félszigetre érvényes).

Az intézet tudósai jelentős előrelépést értek el a technikai rendszerek elemeinek, illetve egyes anyagok stabilitásának tanulmányozásában, valamint a stabilitás növelésének elméletében és gyakorlatában.

Kidolgozták a mechanikai feszültség időbeni változásának matematikai modelljét, amelyet az atomerőművek szerkezeti stabilitásánál hasznosítanak. Ukrajnában elsőként dolgozták ki a reaktorok köpenyének értékeléséhez és szolgálati ideje meghatározásához szükséges szabványokat.

44. §. ÖNREZGÉSEK

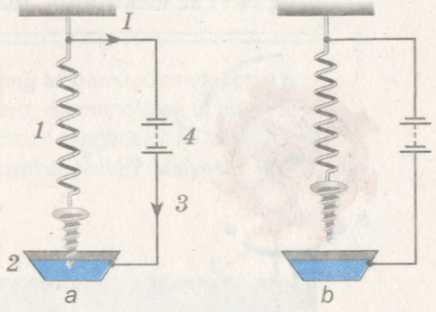
?! Bizonyára sokan láttatok már ingaórát. Az ilyen típusú óra ingája állandó lengést végez, melyet nem nevezhetünk szabad rezgéseknek: a szabad rezgések idővel csillapodnak, az óra ingája rezgésének az amplitúdója viszont hosszú időn át változatlan marad. Ezeket a rezgéseket kényszerrezgéseknek sem nevezhetjük, mivel nincs periodikusan változó külső erőhatás. Az óra ingájának a lengése egy külön rezgéstípus, mellyel ebben a paragrafusban ismerkedhettek meg.

1 Mi jellemzi az önrezgéseket?

A kényszerrezgések olyan nem csillapodó rezgések, amelyek egy külső energiaforrásból táplálkozó periodikusan ismétlődő erő hatására jönnek létre. Vannak rendszerek, melyekben a csillapítatlan rezgések nem periodikus külső hatás eredményeként léteznek, hanem a rendszerek azon tulajdonsága jóvoltából, amely szerint a rendszer saját maga szabályozza az energiafelvételt egy állandó forrásból. Az ilyen rendszereket *önrezgő* rendszereknek nevezzük, a bennük létrejött csillapítatlan rezgéseket pedig *önrezgéseknek*.

Az olyan csillapítatlan rezgéseket, amelyek a rendszerben egy állandó, a rendszer által szabályozott energiaforrás hatására jönnek létre, **önrezgéseknek** nevezzük.

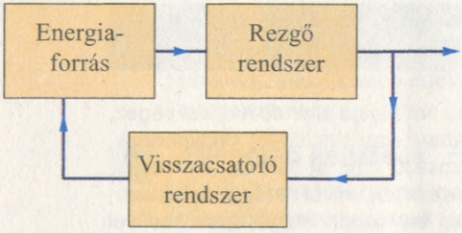
A szemléletesség kedvéért megvizsgálunk egy mágneses-mechanikus önrezgő rendszert (44.1. ábra). A rendszer egy függőleges rugós ingából (*1*), elektrolitot tartalmazó edényből (*2*), összekötő vezetékekből (*3*) és áramforrásból (*4*) áll. Az inga nehezéke egy nehéz acélszög, a rugó áramvezető anyagból készült.



44.1. ábra. Mágneses-mechanikus (megszakítós) önrezgő rendszer: *1*) rugós inga (rezgő rendszer); az áramforrásból közvetített energia szabályozására szolgáló berendezés: *2*) elektrolit, *3*) vezetékek; *4*) áramforrás (energiaforrás)

Megvizsgáljuk, hogyan működik a rendszer. Ha az ingát kibillentjük egyensúlyi állapotából, rezegni kezd. A rezgés legalsó pontjában a szög hegye beleér az elektrolitba és zárja az áramkört, aminek következtében a csavarrugón áram megy keresztül (44.1. *a* ábra).

Mivel a csavarrugó szomszédos menetein az áram egy irányban folyik, ezért ezek a menetek vonzani kezdik egymást – a rugó hirtelen összehúzódik, mialatt a szög, pótlólagos mozgási energiát kapva, kiemelkedik az elektrolitból, aminek következtében megszakad az áramkör (44.1. *b* ábra). Amikor a szög ismét az elektrolitba ér, az áramkör bezáródik, és a szög újra energiához jut. Az ilyen rendszer rezgése addig tart, ameddig az áramforrás működik.



44.2. ábra Az önrezgő rendszer fő elemeinek működési elve

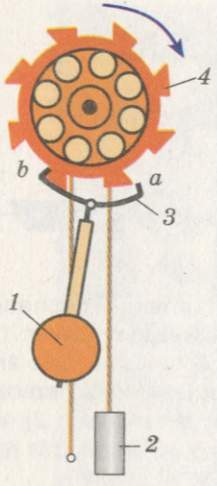
Bármely önrezgő rendszer három fő elemből áll (44.2. ábra): rezgő rendszerből, melyben szabad rezgések mehetnek végbe (a mi esetünkben ez a rugós inga); energiaforrásból (ez jelen esetben az áramforrás); visszacsatoló rendszerből, amely szabályozza az energia felvételét a forrásból (az említett rendszerben ez a vezeték és az elektrolit, melyek periódusonként egyszeri alkalommal zárják az áramkört).

Az *önrezgések fő jellemzői.*

1. *Az önrezgés nem csillapodó rezgés.*

2. A kényszerrezgésektől eltérően az *önrezgések frekvenciája megegyezik a rezgő rendszer szabad rezgéseinek a frekvenciájával és nem függ az energiaforrástól.*

3. A szabad rezgésektől eltérően, melyeknél az amplitúdó függ az energiától, az *önrezgések amplitúdóját a rendszer önmaga határozza meg.* Valóban, ha a megvizsgált esetben a rugós inga több energiát kap, mint amennyi a súrlódás kiküszöbölésére használódott el, a rezgések amplitúdója csak addig növekszik, míg a szög eléri az elektrolitot, majd hirtelen visszaugrik.



44.3. ábra. Az ingaóra mechanizmusa: *1*) inga; *2*) súly; *3*) horgonyvillaszár, két kemény behajlított műanyaglemezzel a végén (*a* és *b* lapocskák); *4*) gátkerék

2 Mechanikus önrezgő rendszerek

A mechanikus önrezgő rendszerek példájául a horgony-gátszerkezetű ingaóra szolgálhat (44.3. ábra). Az órában a rezgő rendszer az inga (*1*), az energiaforrás a megemelt súly (*2*). A visszacsatoló rendszer ebben az esetben a horgony (*3*), amely a forgó keréknek (*4*) egy fél periódus alatt egy fognyit enged elmozdulni.

A nem csillapodó rezgések ebben az önrezgő rendszerben a következőképpen mennek végbe. A nehézségi erő hatására a súly lefelé mozog és a gátkereket az óra járásának irányába forgatja, mialatt a súly helyzeti energiája a gátkerék forgási energiájává alakul át. Az inga ezalatt szabadrezgést végez.

Amikor az inga a bal oldali legszélső állapota felé közeledik (az ábrán jelzett helyzete felé), a *b* lapocska a fogaskerék fogába kapaszkodik. Erre a gátkerék megáll, az inga pedig bal felé kap lendületet, pótlólagos energiát véve fel. Az inga további mozgása során a *b* lapocska

lecsúszik a gátkerék fogáról és a kerék forogni kezd. Mikor az inga eléri a jobb szélső helyzetét, a horgony *a* lapocskája megakaszt egy újabb fogat, amitől a kerék bal irányú lökést kap. Tehát az inga egy periódus alatt két alkalommal kap energiát, mialatt saját maga szabályozza az energiafelvételt a forrástól.

A mechanikus önrezgő rendszerek széles körben megtalálhatók mindennapi életünkben és a technikában is. Az önrezgés az alapja a belső égésű motorok, a csengők működésének, számos hangszer hangzásának, a rendszeresen felcsapó gejzíreknek, az ember és az állatok hangjának. Az élőlények szívét és tüdejét szintén az önrezgő rendszerekhez sorolhatjuk.

Összegzés

Az olyan nem csillapodó rezgéseket, amelyek a rendszerben egy állandó, a rendszer által szabályozott energiaforrás hatására jönnek létre, önrezgéseknek nevezzük.

Az önrezgő rendszereknek három fő eleme van: rezgő rendszer, energiaforrás, visszacsatoló rendszer, amely szabályozza az energia felvételét a forrásból.

A szabadrezgésektől eltérően az önrezgések nem csillapodnak fokozatosan, amplitúdójuk nem függ a rezgő rendszernek a rezgés előtt közvetített energiától. Az önrezgések különböznek a kényszerrezgésektől is: tőle eltérően, az önrezgések amplitúdóját és periódusát nem a periodikusan változó külső erő, hanem a rendszer tulajdonsága határozza meg.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk önrezgő rendszernek? **2.** Nevezzétek meg az önrezgő rendszerek három fő elemét! **3.** Soroljatok fel néhány önrezgő rendszert, és mondjátok el működési elvüket! **4.** Miben hasonlítanak az önrezgések és a szabad rezgések? Mi közöttük a különbség? **5.** Miben különbözik az önrezgés a kényszerrezgéstől? Melyek a közös tulajdonságaik?

45. §. MECHANIKAI HULLÁMOK

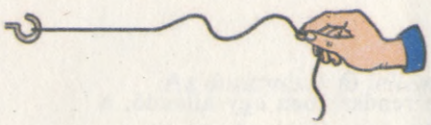
A mechanikai rezgések gyakran megfigyelhetők a természetben és a technikában. Rezgést végez a dugattyú az autó motorjában, amivel együtt rezeg maga a motor is, rezeg a Föld kérge földrengéskor, a levegő a fúvós hangszerekben, a víz felszíne a beledobott kőtől stb. Ha az egyik helyen létrejött rezgés a térben továbbterjed, akkor hullámmozgásról – hullámról – beszélünk. Mi a mechanikai hullám és milyen tulajdonságai vannak a hullámterjedésnek? A kérdésekre a válaszokat ebből a paragrafusból tudhatjátok meg.

1 Milyen a mechanikai hullámok terjedési mechanizmusa?

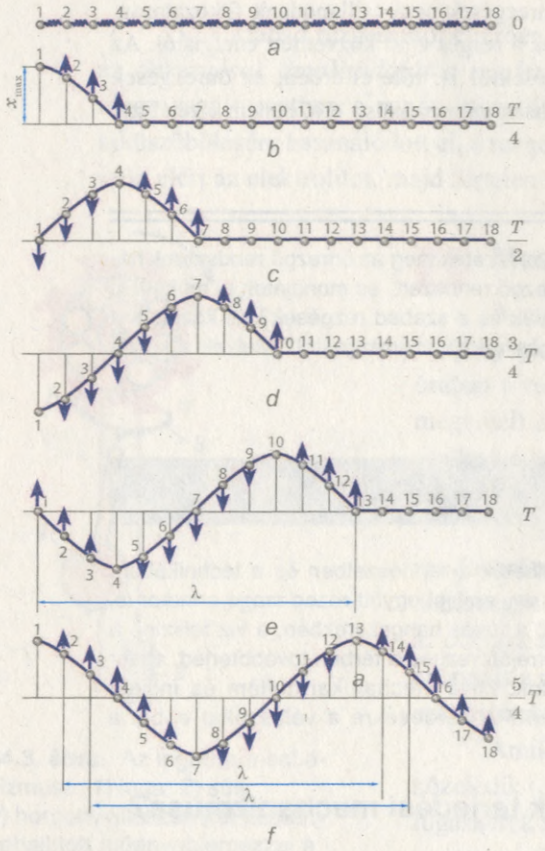
Az anyag vagy mező rezgésének terjedését a térben **hullámnak** nevezzük.

Fizikai természetük szerint a hullámoknak két típusát különböztetik meg: *elektromágneses hullámok* (pl. rádióhullámok, fény, γ-sugárzás) és *mechanikus hullámok*. A mechanikus hullámok két csoportra oszthatók: *rugalmas hullámok* (pl. hang- és szeizmikus hullámok) és *folyadékfelszíni hullámok*. Az elkövetkezendőkben a *rugalmas mechanikai hullámok* tanulmányozásával foglalkozunk.

A rezgés terjedését rugalmas közegben **rugalmas mechanikai hullámnak** nevezzük.



45.1. ábra. Hullám terjedése rugalmas kötélen



45.2 ábra. Keresztirányú (transzverzális) hullám terjedési mechanizmusa (λ hullámhossz)

A közeget *rugalmasnak* nevezzük, ha részecskéi között olyan erők hatnak, amelyek meggátolják a közeg deformálódását. Például vegyünk egy hosszú gumikötelet, melynek egyik végét a falhoz rögzítettük, a másik végét rezgésbe hozzuk. Ebben az esetben a hullámzás fokozatosan átadódik a kötél további részeinek – a kötélen hullám szalad végig (45.1. ábra).

Megvizsgáljuk modellen az ilyen hullám terjedését: a zsinórt egyforma golyócskák sorával helyettesítjük (a golyók a zsinór részeit jelképezik), melyek súlytalan rugóval vannak összekötve (a rugó a részecskék közötti erőt helyettesíti) (45.2. *a* ábra).

Ha az *1.* golyót (a zsinór végét) kimozdítjuk egyensúlyi állapotából, akkor a rugó kihúzódik és a *2.* golyóra rugalmassági erő kezd hatni, melynek hatására a *2.* golyó szintén mozgásba kezd. Mivel a golyó tehetetlen, mozgása egy kis idő elteltével indul meg. A *2.* golyó mozgásának eredményeként a *3.* golyó is mozogni kezd (45.2. *b* ábra).

Ha az *1.* golyó rezgőmozgásba kezd, a *2.* golyó szintén rezegni kezd, de bizonyos időeltolódással. A *2.* golyó rezgésének eredményeként a *3.* golyó is mozgásba jön, ami átadódik a következő golyóknak (45.2. *c–e* ábrák). Végül az összes golyó az *1.* golyóval azonos frekvenciával, de fáziseltolódással fog mozogni (45.2. *f* ábra).

A rugalmas hullám terjedésének mechanizmusa a következő. A rugalmas közegben rezgő test – a hullám forrása – a hozzá közel eső részecskékre hat és rezgésre kényszeríti őket. Ezalatt a rezgő részecskék és a közeg többi része közötti távolság hol növekszik, hol csökken. Ennek eredményeként rugalmassági erők jönnek létre, melyek összébb tolják a részecskéket, ha azok eltávolodnának egymástól, és ellenkezőleg – hatására taszítják egymást a részecskék, ha túl közel kerülnének egymáshoz. Fokozatosan a közeg összes részecskéje hullámmozgásba kezd – a közegben hullám jön létre.

2 Mik a hullámmozgás jellemzői?

Visszatérünk a 45.2. ábrán bemutatott rugalmas kötélhez és kiemeljük a *hullámmozgás néhány jellemzőjét.*

1. Bármely hullám a *hullámforrásnál* kezdődik; a részecskék rezgése a hullám terjedésekor *kényszerrezgés*, melynek frekvenciája *megegyezik a forrás rezgésének frekvenciájával.*

2. *A hullám a térben nem azonnal, hanem bizonyos sebességgel terjed.* Miután egy részecskének rezgőmozgást közvetítettek, a többi részecske nem rögtön, hanem bizonyos idő múlva kezd rezgőmozgásba.

3. Hullámmozgás esetén nem történik anyagátvitel. Minden egyes részecske egy egyensúlyi helyzetük körül rezeg. Minden mechanikai hullámban *egyszerre két mozgásfajtával találkozunk: a közeg részecskéinek rezgésével és a hullám terjedésével.* Mivel a közeg részecskéi csak abban az esetben végeznek kényszerrezgést, ha energiát kapnak, ezért hullámmozgáskor *anyagátvitel nélküli energiaátvitel történik.*

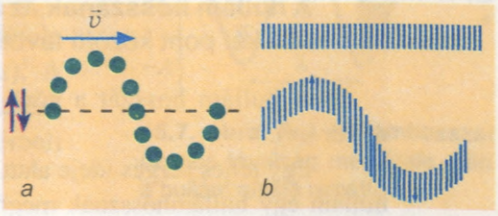
3 Keresztirányú és hosszanti hullámok

Figyeljétek meg a hullám terjedését a rugalmas kötélen: a hullám a kötél hosszában terjed, egyes részei pedig a terjedés irányára merőlegesen rezegnek (lásd a 45.1., 45.3. ábrákat).

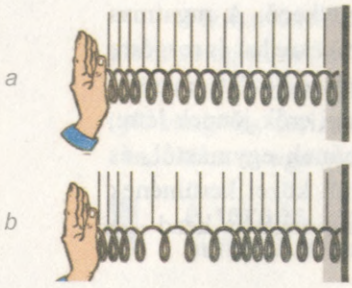
Az olyan hullámot, amelyben a közeg részecskéinek rezgése merőleges a hullámterjedés irányára, **keresztirányú (transzverzális)** hullámnak nevezzük.

Keresztirányú hullámzáskor deformáció a tér egyik rétegének a másikhoz viszonyított elmozdulása hatására történik (45.3. *b* ábra). A rétegek elmozdulása (elcsúszása) csak a szilárd testekben eredményezi rugalmassági erők létrejöttét, ezért a keresztirányú hullámok csak szilárd testekben terjednek.

Nézzünk egy másik példát a hullámmozgásra. Veszünk egy hengeres csavarrugót, melynek egyik végét rögzítjük. A rugó



45.3. ábra. Keresztirányú hullámzáskor a közeg részecskéinek rezgése merőleges a hullámterjedés irányára (*a*); a részecskék rezgését a rétegek nyírási deformációja kíséri (*b*)



45.4. ábra. A hullám terjedése hengeres csavarrugón



45.5. ábra. Hosszanti hullám esetében a részecskék rezgése egybeesik a hullámmozgás irányával (*a*); a részecskék rezgését nyújtási és összenyomási deformáció kíséri (*b*)

másik végét sorozatosan ütögetjük és azt tapasztaljuk, hogy a rugó meneteinek rezgése a rugó mentén adódik át – a rugón hullám fut végig (45.4. ábra). Viszont ebben az esetben a rugó menetei a hullámterjedés irányában rezegnek, nem pedig arra merőlegesen.

Azt a hullámot, melyben a közeg részecskéinek rezgése egybeesik a hullámterjedés irányával, **hosszanti (longitudinális)** hullámnak nevezzük.

Hosszanti hullámok esetén a deformáció a közeg rétegeinek egymáshoz viszonyított összenyomódásában és széthúzódásában nyilvánul meg (45.5. ábra). A összenyomási deformáció következtében (bármilyen közegben) rugalmassági erők jönnek létre, ezért a hosszanti hullámok bármilyen közegben (cseppfolyós, szilárd, gáznemű) terjedhetnek.

A folyadék felszínén létrejövő hullámok se nem keresztirányúk, se nem hosszantiak. Az ilyen hullámoknak összetett hosszanti-keresztirányú természetük van és a folyadék részecskéi eközben ellipszis mentén mozognak. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha megfigyeljük a vízbe dobott könnyű fadarab mozgását.

4 Hogyan határozható meg a hullám hossza?

Visszatérünk a 45.2. ábrához. Végezzen az *1.* golyó egy teljes rezgést, vagyis a mozgásideje legyen egy teljes periódus ($t = T$) (45.2. *e* ábra). Ezalatt a hullám a *13.* golyóhoz ért. Könnyű észrevenni, hogy az *1.* és a *13.* golyó egyenlő fázisú szinkronmozgást végez. Ugyanez történik a *2.* és *14.*, *3.* és *15.* stb. golyókkal is (45.2. *f* ábra).

A **hullám hosszának** az azonos fázisban lévő egymáshoz legközelebb álló két pont közötti távolságot nevezzük.

A hullám hosszát a görög λ (lambda) betűvel jelölik, mértékegysége a méter (m).

Egy teljes rezgés ideje alatt (a rezgés egy periódusának megfelelő idő alatt) a hullám egy hullámhossznak megfelelő távolságot tesz meg. Ennek alapján a fenti meghatározást a következőképpen is fogalmazhatjuk:

A **hullám hossza** az a távolság, amelyet a hullám a rezgés egy periódusa alatt tesz meg.

Mivel a hullám terjedésének sebessége az adott közegben állandó, ezért azt a következő képlet segítségével határozhatjuk meg: $v = \frac{s}{t}$.

Ha a mért idő egyenlő a periódusidővel ($t = T$), akkor a hullám által megtett távolság megegyezik a hullámhosszal ($s = \lambda$), a hullám terjedésének a sebességét pedig a következő képlettel írhatjuk fel: $v = \frac{\lambda}{T}$.

Az ismert $\frac{1}{T} = \nu$ képletből, ahol ν a közegben lévő részecskék rezgésszáma, a ***hullám egyenletét*** a következőképpen fejezhetjük ki:

$$v = \lambda\nu$$

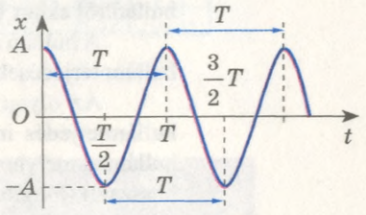
Jegyezzétek meg: a hullám terjedési sebességét a közeg rugalmassági tulajdonsága határozza meg, ezért ha a hullám (pl. a hanghullám) az egyik közegből a másik közegbe megy át, a terjedési sebessége megváltozik. A közegben lévő részecskék rezgésszámát a hullámforrás rezgésszáma határozza meg, ezért az változatlan marad. Tehát a hullám egyenlete alapján állíthatjuk: ha a hullám egyik közegből a másikba megy át, megváltozik annak hossza.

5 A hullámok periodikusságának két fajtája

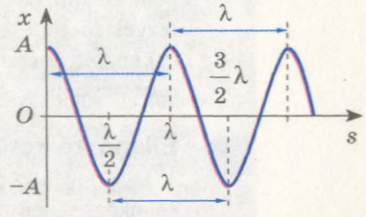
A $v = \frac{\lambda}{T}$ képlet a hullámok periodikusságának két fajtáját jellemzi, mivel a hullám *térbeli és időbeli periodikusságot* mutat. Mit is jelent ez?

Megvizsgáljuk a közeg részecskéjének a mozgását. Mivel a közegben hullám terjed, ezért a vizsgált részecske az időben periodikus mozgást végez. Egy T időintervallum elteltével a *részecske rezgése teljesen megismétlődik* (45.6. ábra). A T periódus a hullám időbeli periodikusságát jellemzi.

A hullámhosszal azonos távolság megtétele után a *hullám alakja ismétlődik* (45.7. ábra). A hullámhossznyi távolságra lévő részecskék rezgése megegyező. Ezért a hullám hossza a hullám térbeli periodikusságát jellemzi.



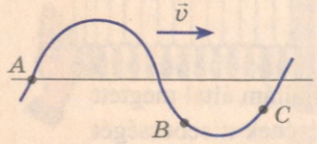
45.6. ábra. A T idő elteltével, amely azonos a periódusidővel, a részecske rezgése megismétlődik



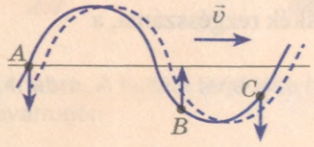
45.7. ábra. A λ hullámhosszal azonos távolság megtétele után a hullám alakja ismétlődik

6 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. Az 1. ábrán egy balról jobbra terjedő keresztirányú hullám grafikonja látható. Milyen irányban mozognak a közeg *A*, *B* és *C* részecskéi?



1. ábra



2. ábra

Megoldás. Feltételezzük, hogy Δt idő elteltével a hullám Δs távolságot tett meg. Mivel a hullám balról jobbra mozog, a hullám alakja pedig az idővel nem változik, ezért a grafikonja a 2. ábrán látható szaggatott vonallal jelzett formájú lesz. A hullám keresztirányú, ezért a részecskéi a hullám irányához képest merőlegesen mozognak.

Az ábrán láthatjuk, hogy az *A* részecske a megfigyelés kezdeti pillanatához képest lejjebb lesz, azaz mozgási sebességének az iránya lefelé mutat; a *B* részecske felfelé mozdul el, tehát sebessége felfelé irányul; a *C* részecske sebessége lefelé irányul.

Felelet: az *A* és *C* részecskék lefelé mozognak, a *B* pedig felfelé.

Összegzés

A anyag vagy mező rezgésének térbeli terjedését hullámnak nevezzük. Rugalmas hullámról akkor beszélünk, ha a rezgés rugalmas közegben terjed.

A hullám a térben nem egy pillanat alatt terjed, hanem bizonyos sebességgel. A hullám terjedésekor anyagátvitel nélküli energiaátvitel történik.

Az olyan hullámot, amelyben a közeg részecskéinek rezgése merőleges a hullámterjedés irányára, keresztirányú (transzverzális) hullámnak nevezzük. Azt a hullámot, melyben a közeg részecskéinek rezgése egybeesik a hullámterjedés irányával, hosszanti (longitudinális) hullámnak nevezzük.

A hullám térbeli és időbeli periodikusságot mutat. Az időbeli periodikusságot a közeg minden egyes részecskéjének rezgésideje jellemzi. A térbeli periodikusságot a hullám hossza határozza meg.

A hullám hosszának az egy fázisban rezgő egymáshoz legközelebb álló két pont közötti távolságot nevezzük; a hullám hossza az a távolság, melyet a hullám a rezgésidő alatt tesz meg. A hullámhossz (λ) és a közeg részecskéinek rezgésszáma (ν) közötti összefüggést a következő kifejezés adja: $v = \lambda\nu$, ahol v a hullám terjedési sebessége.

Ellenőrző kérdések

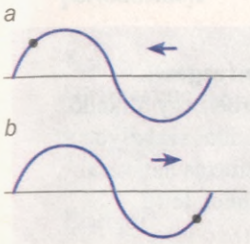
1. Mi a hullám? **2.** Milyen hullámokat nevezünk rugalmasnak? **3.** Írjátok le a hullám keletkezésének mechanizmusát! **4.** Nevezzétek meg a hullámmozgás fő jellemzőit! **5.** Milyen hullámokat nevezünk keresztirányúnak? Hosszantinak? Milyen közegekben terjed az egyik, illetve a másik? **6.** Mi a hullámhossz? Mitől függ? **7.** Mit jelent a „hullám térbeli és időbeli periodikusságot mutat" kifejezés?

39. gyakorlat

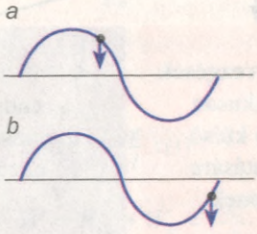
1. A geológusok által végzett robbantáskor a földkéregben lökéshullám jött létre, melynek terjedési sebessége 4,5 km/s. A Föld alsóbb rétegeitől visszavert hullámot a Föld felszínén a robbantás utáni 20. másodpercben észlelték. Milyen mélységben helyezkedik el a földkéregnél jelentősen nagyobb sűrűségű burok?

2. Az óceánon keletkező hullám hossza 270 m, periódusideje pedig 13,5 s. Határozzátok meg a hullám terjedésének sebességét!
3. A tenger partján álló ember megállapította, hogy a két szomszédos hullámhegy közötti távolság 15 m. Ezenkívül azt is megfigyelte, hogy 75 s alatt 16 hullámhegy haladt el mellette, beleértve az elsőt is. Határozzátok meg a hullámok terjedési sebességét!
4. Az 1. ábrán keresztirányú hullámok grafikonjait és terjedési irányait látjátok. Milyen irányba mozdul el a hullám megjelölt pontja?
5. A 2. ábrán keresztirányú hullámok grafikonjait látjátok, melyeken feltüntették a hullám egy megjelölt pontjának a rezgési irányát. Határozzátok meg a hullámok terjedési irányát!

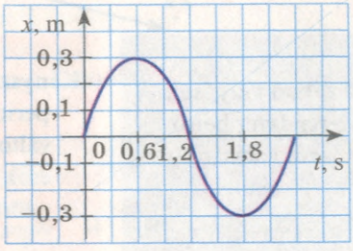
6*. A hullámforrás rezgésének grafikonja alapján (az $x(t)$ összefüggés grafikonja) (3. ábra) ábrázoljátok az ebből a forrásból kiinduló hullám grafikonját (az $x(s)$ összefüggés grafikonját)! A hullám terjedési sebessége 20 m/s.



1. ábra



2. ábra



3. ábra



V. V. Panaszjuk

FIZIKA ÉS TECHNIKA UKRAJNÁBAN

Az UTA H. V. Karpenko nevét viselő fizikai-mechanikai főiskolája (Lviv)

Az 1951-ben alapított intézet az anyagok szerkezeti stabilitásának, a korrózió fizikai-kémiai folyamatai tanulmányozásának, az anyagok korrózióvédelmének, épületek és szerkezetek diagnosztizálásának világhírű kutatóközpontja. Az intézmény tudósai kidolgozták az acél adszorpciós és hidrogénes fáradásának elméletét; továbbfejlesztették a deformált testek egyensúlyhatárának a tudományát; megalapoztak egy új tudományágat – az anyagok fizikai-kémiai mechanikáját.

Az intézetben foglalkoznak a hullámelhajlás matematikai elméletével, a jelek és elektromos áramkörök tanulmányozásával. A tudósok kutatásaik eredményét közel 250 monográfiában adták ki, melyek között ott van *Az anyagok szilárdságának és törésének mechanizmusa* c. 12 kötetes alapmű.

1971-től az intézet igazgatója *Volodimir Vasziljovics Panaszjuk* akadémikus (lásd a képet), több tudományos díj, egyebek között az Európai Szerkezetintegritási Társaság (ESIS) Griffith érmének tulajdonosa.

A 4. FEJEZET ÖSSZEGZÉSE

1. A 4. fejezetből a mechanikai mozgás egy újabb típusával – a *rezgéssel*, valamint a *rezgés rugalmas közegben való terjedésének folyamatával* ismerkedtetek meg.

2. Foglalkoztatok a mechanikai rezgőmozgás tulajdonságaival és a *mechanikai rezgések fajtáival*.

Mechanikai rezgésnek nevezzük az olyan mozgást, amely azonos időközönként teljesen vagy majdnem teljesen megismétlődik

- **Szabad rezgések** a rendszer belső erői hatására történnek
- **Kényszerrezgések** periodikusan változó külső erők hatására történnek
- **Önrezgések** a rendszerben egy állandó, a rendszer által szabályozott energiaforrás hatására jönnek létre

A szabad rezgések létrejöttének feltételei

- A testet az egyensúlyi állapotába visszatérítő erő létezése
- A mozgást gátló ellenállás csekély volta, illetve hiánya

3. Megértettétek a *harmonikus rezgéseket jellemző fizikai mennyiségek lényegét.*

	Fizikai mennyiségek				
	Amplitúdó A, m	Periódusidő T, s	Rezgésszám (frekvencia) ν, Hz	Körfrekvencia ω, s^{-1}	Fázis φ
Fizikai jellemzés	Maximális kitérés értéke (elmozdulás)	Egy teljes rezgéshez szükséges idő	Egy időegység alatti rezgések száma	2π másodperc alatti rezgések száma	A rendszer pillanatnyi állapotát jellemző mennyiség
Képlet	$A = x_{max}$	$T = \frac{t}{N}$	$\nu = \frac{N}{t}$	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$	$\varphi = \omega t + \varphi_0$

4. Megismerkedtetek az ideális rezgőmozgással – az *anyagi pont harmonikus rezgésével*.

Harmonikus rezgések olyan rezgések, melyek során a rezgő pontok koordinátái az idő szinuszos függvénye:
$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ vagy $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

5. Megismertétek a *matematikai és rugós ingák szabad rezgését*.

A rezgések jellemzői	Matematikai inga	Rugós inga
A rezgés periódusideje	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
A rezgés körfrekvenciája	$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Gyorsulás	$a_x(t) = -\frac{g}{l}x(t)$	$a_x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$
Energia	$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + mgh$	$W = W_m + W_h = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

6. Tisztázhattátok a *rezonancia* jelenségét, amely a kényszerrezgéseket végző rezgő rendszerekben jöhet létre.

Rezonancia – a kényszerrezgések amplitúdójának hirtelen növekedése abban az esetben, amikor a külső gerjesztő erő frekvenciája megegyezik a rezgő rendszer saját frekvenciájával.

7. Megismertétek a mechanikus rezgések terjedésének folyamatát a rugalmas közegben – a *mechanikus hullámokat* –, valamint azok különböző típusait.

Mechanikai hullámoknak nevezzük a rezgés terjedését rugalmas közegben.

Keresztirányú (transzverzális) hullám: a közeg részecskéinek rezgése merőleges a hullámterjedés irányára.

Hosszanti (longitudinális) hullám: a közeg részecskéinek rezgése egybeesik a hullámterjedés irányával.

8. Megtudtátok, hogy a hullámmozgás *térbeli és időbeli periodikusságot* mutat, és hogy ez a két periodikusság a ***hullám képletével*** függ össze:

$$v = \lambda\nu$$

ÖNELLENŐRZÉSRE SZOLGÁLÓ FELADATOK A *MECHANIKAI REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK* CÍMŰ FEJEZETHEZ

Az 1–4. feladatok csak egy helyes választ tartalmaznak.

1. (*1 pont*) A rezgéseket szabadnak nevezzük, ha azok:
a) súrlódási erő;
b) a rendszer belső erői;
c) periodikusan változó külső erő;
d) periodikus külső energia hatására történnek.

2. (*1 pont*) Mit nevezünk matematikai ingának?
a) bármely harmonikus rezgést végző fizikai testet;
b) könnyű, súlytalan rugóra függesztett nehezéket;
c) súlytalan és nem nyúló fonálra rögzített anyagi pontot;
d) az olyan testet, melynek a függesztési pontja a súlypontja fölött helyezkedik el.

3. (*1 pont*) Mi a frekvencia mértékegysége az SI-ben?
a) hertz; **c)** radián másodpercenként,
b) másodperc; **d)** méter másodpercenként.

4. (*1 pont*) Határozzátok meg, mivel egyenlő az inga rezgésideje, ha a körfrekvenciája $4\pi\ s^{-1}$:
a) 0,5 s; **b)** 1 s; **c)** 2 s; **d)** 4π s!

5. (*2 pont*) Válasszátok ki a fizikai mennyiségek megfelelő képleteit!

a) a matematikai inga rezgésideje;
b) a rezgések frekvenciája (rezgésszáma);
c) a rugós inga körfrekvenciája;
d) a hullám hossza

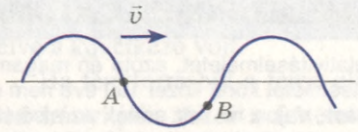
1) $\sqrt{\frac{k}{m}}$
2) $\frac{v}{\nu}$
3) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
4) $\frac{N}{t}$
5) $\frac{mv^2}{2}$

6. (*2 pont*) Mekkora a hangvilla rezgésszáma, ha az általa kibocsátott hanghullám hossza 34 m? A hang terjedési sebessége a levegőben 340 m/s.

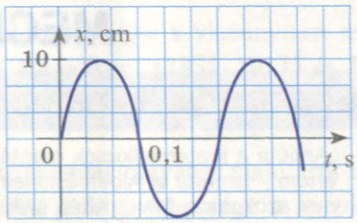
7. (*2 pont*) A megfigyelés első pillanatában a test maximálisan kimozdul az egyensúlyi állapotából. Írjátok fel a test harmonikus rezgésének képletét, ha a rezgések amplitúdója 0,2 m, periódusideje pedig 0,1 s!

8. (*2 pont*) Az 1. ábra a rugalmas zsinegen átfutó keresztirányú hullámot szemlélteti. Merre irányul ebben a pillanatban az *A* és *B* pontok sebessége?

9. (*3 pont*) A test rezgésgrafikonja segítségével (2. ábra) írjátok fel a test rezgésének egyenletét!



1. ábra



2. ábra

10. (*3 pont*) A rugós inga rezgésének amplitúdója 5 cm, frekvenciája pedig 1 Hz. Mekkora távolságot tesz meg a rezgő test 10 s alatt? Mekkora lesz a test elmozdulása ez alatt az idő alatt?

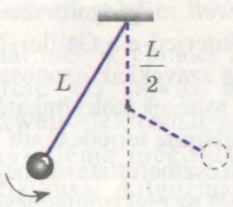
11. (*3 pont*) Az utcán gyalogoltok egy szatyorral a kezetekben, melyben egy fej káposzta van. Magyarázzátok meg, hogy a lépésetek meghatározott tempójában a szatyor miért kezd kilengeni?

12. (*3 pont*) A rugóra függesztett súly rezgését az alábbi egyenlet írja le: $x = 0{,}05 \cos 2\pi t$ (m). Számítsátok ki a rugó merevségét és a súly rezgésének maximális sebességét, ha a súly tömege 200 g!

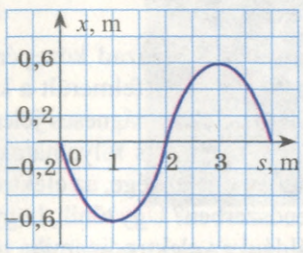
13. (*4 pont*) Két matematikai inga egyszerre kezd rezgésbe. Azonos idő alatt az első inga 20, míg a második 10 rezgést végzett. Mekkora az első inga hossza, ha a másik ingáé 1 m?

14. (*4 pont*) Egy függőleges fal mentén $L = 2$ m hosszú zsinegen függő golyót kibillentettek egyensúlyi helyzetéből. A rögzítési ponttól $\frac{L}{2}$ méter távolságra a falból egy szög áll ki. Amikor az inga az egyensúlyi állapotán megy keresztül, a zsineg beleakad a szögbe (3. ábra). Határozzátok meg az inga rezgésidejét!

15. (*4 pont*) A hullám grafikonja alapján (4. ábra) ábrázoljátok a hullámforrás rezgésének, azaz az $x(t)$ összefüggés grafikonját! A hullám terjedési sebessége 20 m/s.



3. ábra



4. ábra

Válaszaitokat hasonlítsátok össze a könyv végén található megoldásokkal. Jelöljétek meg a helyes válaszokat, és számoljátok össze a megszerzett pontokat. Az eredményt osszátok el kettővel. Az így kapott szám megfelel a tanulmányi eredményeteknek.

5. FEJEZET. RELATIVISZTIKUS MECHANIKA

46. §. A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET POSZTULÁTUMAI

?! „Amióta a matematikusok megtámadták a relativitáselméletet, azóta én magam sem értem"– ismerte el Albert Einstein. A relativitáselmélet körül közel 100 éve nem csitulnak azoknak a heves vitái, akik „nem értik" azt. Vajon mi volt ennek az első látásra kimondottan elméleti fizikához tartozó elmélet létrejöttének az oka? Kiderült, hogy mint általában a fizikában, először volt a kísérlet.

1 A Galilei–Newton-féle relativitási elv

A mechanika a mozgás tudománya. A Newton-féle mechanikában mindennemű mozgást inerciális vonatkoztatási rendszerekhez viszonyítva vizsgálnak. A mechanikai mozgás tanulmányozásához kiválasztják a legkézenfekvőbb *inerciális vonatkoztatási rendszert,* melyet mozdulatlannak vesznek. Viszont ez nem jelenti azt, hogy az adott feladat megoldásához ez az egyetlen vonatkoztatási rendszer. Kiválaszthatunk más inerciális vonatkoztatási rendszert – a feladat helyes megoldása ezáltal nem változik.

Az inerciális vonatkoztatási rendszerekre **a mechanikus relativitási elv (Galilei–Newton-féle relativitási elv)** az érvényes.

Bármilyen mechanikus folyamat valamennyi inerciarendszerben azonosan megy végbe, azaz a rendszer belsejében semmiféle mechanikai kísérlet segítségével sem lehet megállapítani, hogy végez-e a rendszer egyenes vonalú egyenletes mozgást vagy nyugalomban van.

Az inerciarendszerekben teljesül a ***sebességek összeadásának klasszikus törvénye:*** *a test $\vec{v}$ sebessége a mozdulatlan vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva egyenlő a test mozgó vonatkoztatási rendszerhez viszonyított $\vec{v}_1$ sebességének és a mozgó vonatkoztatási rendszer mozdulatlanhoz viszonyított $\vec{v}_2$ sebességének az összegével*:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

2 Mik voltak a speciális relativitáselmélet megalkotásának előfeltételei?

Miután a XIX. század közepén *James Maxwell* megfogalmazta az elektrodinamika alaptörvényeit, felmerült a kérdés: vajon kiterjed-e a Galilei–Newton-féle relativitási elv az elektromágneses jelenségekre? Más szavakkal: azonosan mennek-e végbe az elektromágneses folyamatok (elektromos töltések kölcsönhatása, elektromágneses indukció jelensége, az elektromágneses hullámok terjedése stb.) valamennyi inerciarendszerben? Úgy tűnik, hogy már egyszerű eszmefuttatással negatív választ kapnánk. Például az elektrodinamika törvényei szerint az elektromágneses hullámok terjedési sebessége a vákuumban (egyebek között a fény sebessége is) minden irányban azonos és $c = 3 \cdot 10^8$ m/s[1] *-mal egyenlő. Viszont a sebességek összeadhatóságának

* A fénysebesség mérései bebizonyították, hogy a *fény sebessége a vákuumban* $2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s. Az egyszerűség kedvéért a számításoknál a $c = 3 \cdot 10^8$ m/s értéket használják.

klasszikus törvénye szerint a fény sebessége különböző viszonyítási rendszerekben más és más.

Valóban így van? A fény sebessége valóban függ-e a viszonyítási rendszer kiválasztásától? Ennek bizonyítására *Albert Michelson* (1852–1931) és *Edward Morley* (1838–1923) amerikai tudósok 1881-ben elvégeztek egy kísérletet, melynek az elve a következő volt.

Ha fényforrásból a fényt először a Föld mozgásirányába, majd arra merőlegesen irányítják, akkor a feltételezésük szerint a fény sebessége a mozdulatlan viszonyítási rendszerhez képest minden esetben más értéket mutat.

Valóban, a sebességek összeadásának klasszikus törvénye szerint a Föld mozgásirányával megegyező c_1 fénysebességet a mozdulatlan megfigyelő számára a következő kifejezéssel kellene kiszámítani:

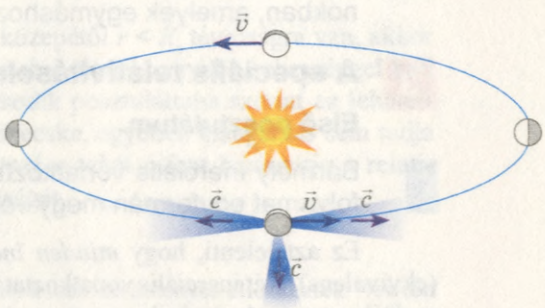
$$c_1 = c + v,$$

ahol $c = 3 \cdot 10^8$ m/s a földi fényforrásból eredő fény sebessége; $v = 2{,}96 \cdot 10^4$ m/s a Föld Nap körüli sebessége.

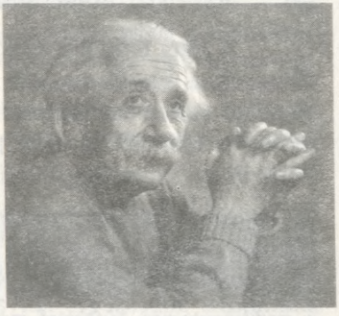
Ha a fény a Föld forgásával ellentétes irányban terjed, akkor annak c_2 sebességét a következő képlettel kellene kifejezni: $c_2 = c - v$. Ennek megfelelően a Föld mozgásirányára merőleges fénysugár sebességét a $c_3 = \sqrt{c^2 + v^2}$ képlettel kellene meghatározni.

A kísérletek bebizonyították, hogy a *Föld mozgása nincs hatással a fény sebességére* (46.1. ábra). Ez a tény a XIX. század végén és a XX. század elején alkotó vezető fizikusokat alaposan „sarokba szorította", hiszen a *kapott eredmény ellenkezik a sebességek összeadásának klasszikus törvényével.*

Tehát melyik elmélet a helyes: a Newton-féle klasszikus mechanika vagy Maxwell elektromágneses elmélete? A probléma megoldásán a kor jelentős fizikusai dolgoztak, olyanok, mint *Anton Lorentz* (1853–1928), *Henry Poincaré* (1854–1912), *Hermann Minkowszki* (1864–1909), *Albert Einstein* (46.2. ábra). Világossá vált, hogy a megoldást csak a tér és az idő



46.1. ábra. A fény terjedési sebessége független a Föld mozgásának irányától. A fény sebessége a Föld mozgásának irányában és arra merőlegesen is állandó és megegyezik a fény sebességével a vákuumban: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s



46.2. ábra. Albert Einstein (1879–1955), a modern elméleti fizika egyik megalapítója, a Nobel-díj tulajdonosa. A tudós több fontos fizikai elmélet kidolgozója, olyanoké, mint a speciális relativitáselmélet (1905), az általános relativitáselmélet (1907–1916), a fotoeffektus és hőkapacitás kvantumelmélete stb.

újszerű fizikai megközelítése segítségével találhatják meg. Ilyen elképzelésekkel a XIX. század végén Lorentz és Poincaré már kezdett foglalkozni, a végleges megfogalmazásuk viszont Einstein nevéhez fűződik, aki *A mozgó testek elektrodinamikájáról* című művében közölte elméletét. Einstein és Poincaré egymástól függetlenül fogalmazták meg azokat a posztulátumokat, amelyek a speciális relativitáselmélet vagy relativisztikus (a latin *relativus* szóból, jelentése viszonylagos) mechanika alapját képezik.

A speciális relativitáselmélet a fizikai folyamatok kölcsönhatását kizárólag inerciális vonatkoztatási rendszerekben vizsgálja, vagyis olyan vonatkoztatási rendszerekben, melyek egymáshoz viszonyítva egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.

Az általános relativitáselmélet a fizikai folyamatok kölcsönhatását neminerciális vonatkoztatási rendszerekben tanulmányozza, azaz olyanokban, amelyek egymáshoz képest gyorsuló mozgást végeznek.

3 A speciális relativitáselmélet posztulátumai

Első posztulátum.

Bármely inerciális vonatkoztatási rendszerben valamennyi természeti folyamat egyformán megy végbe.

Ez azt jelenti, hogy *minden inerciális vonatkoztatási rendszer egyenértékű* (ekvivalens). Két inerciális vonatkoztatási rendszer létezésekor nincs értelme tisztázni, melyik mozog és melyik van nyugalomban. *A fizika bármelyik ágában* (elektromosság és mágnesesség, molekuláris fizika, atomfizika, mechanika és egyebek) *végzett kísérletek sem tudják egyértelműen meghatározni az abszolút inerciális vonatkoztatási rendszert.*

Második posztulátum.

A fény terjedési sebessége a vákuumban azonos valamennyi inerciális vonatkoztatási rendszerben.

A fény terjedési sebessége a vákuumban *invariáns* (változatlan), vagyis nem függ sem a fényforrás, sem a fényjelet vevő készülék (megfigyelő) sebességétől. A speciális relativitáselmélet második posztulátumát A. Mickelson és E. Morley kísérletileg is igazolta. A fény terjedési sebességének állandóságát a közös középpont körül óriási sebességgel keringő kettős csillagok megfigyelése, valamint számos más megfigyelés és kísérlet is igazolja.

A fény terjedési sebességének állandósága a természet alaptulajdonsága. A második posztulátum szerint a *fénysebesség mindenfajta kölcsönhatás terjedésének maximális sebessége.* Anyagi test nem rendelkezhet a fénysebességnél nagyobb sebességgel.

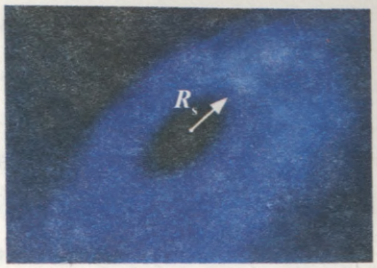
4* Miért léteznek fekete lyukak?

A **fekete lyuk** a tér-idő olyan területe, melynek annyira erős a gravitációja, hogy még a fénysebességgel rendelkező objektumok sem tudják elhagyni (46.3. ábra).

A fekete lyuk sugarát az energiamegmaradás törvényének a segítségével határozzák meg. Hogy leküzdjék az M tömegű és R sugarú űrbéli test gravitációs vonzását, bármilyen m tömegű részecske nagyobb mozgási energiával kell hogy rendelkezzen, mint amekkora az említett testtel való gravitációs kölcsönhatás által létrejött helyzeti energiája:

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant \frac{GmM}{R}.$$

Innen következik, hogy az űrbéli test minimális sugara, melyet a maximális $v_{max} = c$ sebességgel rendelkező részecske el tud hagyni, a következő: $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, ahol R_s – a Schwarzschild-sugár (az adott képletet elsőként *Karl Schwarzschild* vezette le 1916-ban).



46.3 ábra. Szuperóriás fekete lyuk, melynek tömege 18 milliárdszor nagyobb a Nap tömegénél; R_s – Schwarzschild-sugár (vagy gravitációs sugár)

Amennyiben a részecske a fekete lyuk közepétől $r < R_s$ távolságra van, akkor ahhoz, hogy elhagyja a fekete lyukat v, a fénysebességnél nagyobb sebességgel kell rendelkeznie ($v > c$). A relativitáselmélet második posztulátuma szerint ez lehetetlen, ezért az R_s sugáron belül lévő egyetlen részecske, egyetlen kisugárzás sem tudja elhagyni a fekete lyukat. A fekete lyukak létezése tehát újfent bizonyítja a relativitáselmélet második posztulátumának helyességét.

Összegzés

Albert Mickelson és Edward Morley kísérleteinek eredményei ellenkeztek Newton mechanikájával, és ezért elősegítették egy új elmélet – a speciális relativitáselmélet – létrejöttét. A speciális relativitáselmélet alapját két posztulátum alkotja.

1. Bármely inerciális vonatkoztatási rendszerben valamennyi természeti folyamat egyformán megy végbe.

2. A fény terjedési sebessége a vákuumban azonos valamennyi inerciális vonatkoztatási rendszerben. Ez a posztulátum azt is jelenti, hogy a fénysebesség mindenfajta kölcsönhatás terjedésének maximális sebessége.

Ellenőrző kérdések

1. Mickelson és Morley kísérleteinek eredményei miben mondtak ellent a sebességösszeadás klasszikus törvényének? **2.** Fogalmazzátok meg a speciális relativitáselmélet posztulátumait, és magyarázzátok el a jelentésüket! **3.** Miben nyilvánul meg az első posztulátum eltérése Newton mechanikájától? **4.** Mivel egyenlő a fény terjedési sebessége a vákuumban? Mi a jele? **5*.** Miért erősíti meg a fekete lyukak létezése bármely kölcsönhatás maximális terjedési sebességét?

47. §. A SEBESSÉGEK ÖSSZEADÁSÁNAK RELATIVISZTIKUS TÖRVÉNYE. AZ EGYIDEJŰSÉG RELATIVITÁSA

A speciális relativitáselméletet tanulmányozva bizonyára felmerült némelyetekben a kétely: hogyan beszélhetünk arról, hogy Newton mechanikájának törvényei nem érvényesülnek, amikor számtalan kísérlet bizonyítja azok igazát. Sőt, fel is háborodtok: miért áldoztunk annyi időt a klasszikus mechanika tanulmányozására, ha annak elmélete ellentmond a kísérletek eredményeinek? Kételyetek és felháborodásotok érthető, de alaptalan. Arról van szó, hogy Newton mechanikája a speciális relativitáselmélet egy részét képezi, azokra az esetekre vonatkozik, amikor a részecskék sebessége nagyságrendekkel kisebb a fény sebességénél. Megvizsgáljuk, valóban így van-e.

1 Abszolút-e az idő?

A fény terjedési sebessége után a speciális relativitáselmélet másik fontos fogalma az *esemény*.

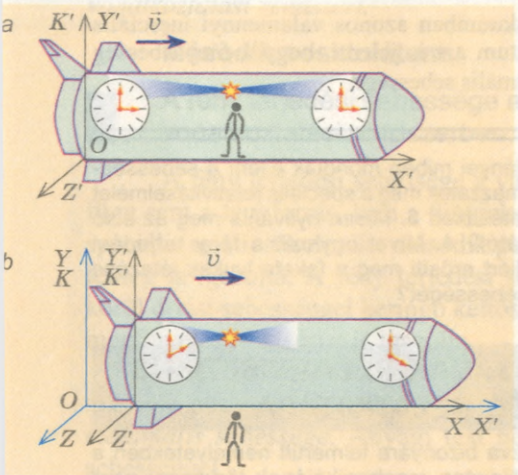
Eseménynek a tér adott pontjában és az adott pillanatban végbemenő jelenséget nevezzük.

Az anyagi pont számára egy eseményt adottnak tekintünk, ha ismert *az esemény színhelyének* (x, y, z) koordinátája, valamint az *esemény történésének t ideje*. Mértani szempontból az esemény meghatározására elegendő a *négydimenziós „koordináta–idő" térben megadni egy pontot*.

Newton klasszikus mechanikájában az idő ugyanakkora bármilyen inerciális vonatkoztatási rendszerben, vagyis a „most", „előzőleg", „később", „egyidejűleg" fogalmak nem függenek a vonatkoztatási rendszer kiválasztásától. *A relativisztikus mechanikában az idő függ a vonatkoztatási rendszer kiválasztásától.* Az egyik vonatkoztatási rendszerben egyidejűleg végbemenő események egy másik vonatkoztatási rendszerben bizonyos időintervallum múlva mehetnek végbe.

Az események egyidejűségét csak szinkronban járó órák segítségével lehet megállapítani. Más módszer nem létezik. Az órák *szinkronban* működnek, ha azonos időt mutatnak az esemény történésének pillanatában.

Feltételezzük, hogy a tér A és B pontjaiba két *szinkron–órát* (szinkronban járó órákat) helyeztek. Történjenek az adott pontokban bizonyos események, például villámlás. Ha a megfigyelő azt *látja*, hogy villámláskor mindkét óra azonos időt mutat, azt a következtetést vonhatja le, hogy a két esemény egy időben történt. A „*látja*" azt jelenti, hogy a megfigyelőhöz elért a fényjel.



7.1. ábra. Események egyidejűségének relativitása: *a*) az űrhajó közepén álló megfigyelő számára a fény egyidejűleg éri el a hajó orrát és tatját;) a hajón kívül álló megfigyelő szerint a fény a ajó orrát később éri el, mint a tatját

Ha a jel egy pillanat alatt terjedne, azt mondhatnánk, hogy az esemény abszolút jellegű. Viszont egyetlen jel sem terjedhet a fény sebességénél gyorsabban. Ezért az egyik inercirendszerben egyidejű események egy másik, az elsőhöz képest mozgásban lévő rendszerben, már nem történnek egy időben – *két esemény egyidejűsége viszonylagos*.

A fenti állítást egy elképzelt kísérlettel bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a külső megfigyelőhöz képest v sebességgel mozgó űrhajó belsejében egy fényforrás van. Egy másik megfigyelő pedig az űrhajó belsejében helyezkedik el (47.1. ábra). Egy meghatározott időpontban a fényforrás felvillan. A hajó belsejében lévő megfigyelő számára a *fény egyidejűleg éri el a hajó orrát és tatját*, azaz az űrhajóval kapcso-

latos K' vonatkoztatási rendszerben a két esemény egyidejű (lásd a 47.1. *a* ábrát). A hajón kívül álló megfigyelő szerint a *fény a hajó tatját hamarább éri el, mint az orrát*, mivel a tat közeledik a megfigyelőhöz, az orr viszont távolodik tőle. A külső megfigyelőhöz rendelt K vonatkoztatási rendszerben az *események nem egyidejűleg történnek meg* (lásd a 47.1. *b* ábrát).

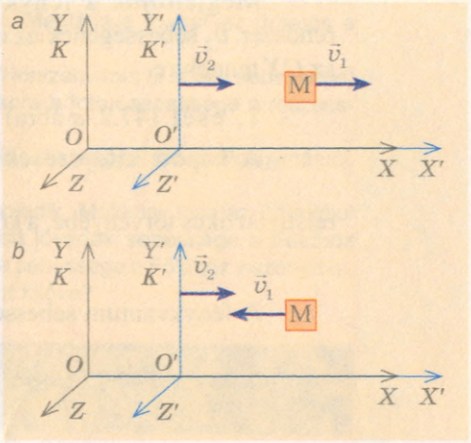
2 A sebességek összeadásának relativisztikus törvénye

A speciális relativitáselmélet posztulátumai szerint a fény sebessége a vákuumban állandó és nem függ sem a fényforrás, sem a fényjelet vevő készülék (megfigyelő) sebességétől. Ez azt jelenti, hogy a sebességek összeadásának klasszikus törvénye a relativisztikus mechanikában nem érvényes. A speciális relativitáselméletben a *sebességek összeadásának relativisztikus törvényét* használják. Felírjuk a törvényt egy részesetre.

Mozogjon a test $\vec{v}_1$ sebességgel az X' tengely mentén a K' vonatkoztatási rendszerben, amely viszont $\vec{v}_2$ sebességgel mozog a K rendszerhez képest. Képzeljük el, hogy a mozgás alatt az OX és $O'X'$ koordinátatengelyek azonos irányúak és egy egyenesen fekszenek, az OY és $O'Y'$ valamint az OZ és $O'Z'$ tengelyek pedig párhuzamosak (47.2. ábra). Ebben az esetben a *sebességek összeadásának relativisztikus törvénye* a következőképpen néz ki:

$$v_x = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{1 + \frac{v_{1x} \cdot v_{2x}}{c^2}},$$

ahol v_x a test sebességének vetülete a K mozdulatlan vonatkoztatási rendszerhez képest; v_{1x} a test sebességének vetülete a K' mozgó vonatkoztatási rendszerhez képest; v_{2x} a K' mozgó vonatkoztatási rendszer sebességének vetülete a K rendszerhez képest.



47.2. ábra. Az M test a K' vonatkoztatási rendszerhez képest $\vec{v}_1$ sebességgel mozog, amely viszont a K VR-hez viszonyítva mozog $\vec{v}_2$ sebességgel: *a*) a test sebességének iránya egybeesik az $O'X'$ tengely irányával; *b*) a test sebességének az iránya ellentétes az $O'X'$ tengely irányával

Összehasonlítjuk a sebességek összeadásának relativisztikus és klasszikus törvényeit.

A fénysebességnél jelentősen kisebb sebességek esetében ($v_1 \ll c$ és $v_2 \ll c$),

$1 + \frac{v_{1x}v_{2x}}{c^2} \approx 1$ *és a sebességek összeadásának relativisztikus törvénye a sebességek összeadásának klasszikus alakját veszi fel:*

$$v_x = v_{1x} + v_{2x}.$$

3 Gyakoroljuk a feladatok megoldását

Feladat. A sebességek összeadásának relativisztikus törvénye alapján bizonyítsátok be, hogy a fény sebessége nem változik az egyik inerciarendszerből a másikba való átmenetkor!

A fizikai probléma elemzése, megoldás. A megoldáshoz magyarázó rajzot készítünk (felhasználjuk a 47.2. ábrát). Mozogjon a fénykvantum (elemi részecske) $\vec{v}_1$ ($v_1 = c$) sebességgel a K' vonatkoztatási rendszer $O'X'$ tengelye mentén, amely $\vec{v}_2$ sebességgel mozog a K rendszer OX tengelye irányában. Meg kell határoznunk a fénykvantum sebességét a K rendszerhez képest.

Megvizsgálunk két lehetőséget: 1) a fénykvantum az $O'X'$ tengely mentén mozog; 2) a fénykvantum az $O'X'$ tengellyel ellentétes irányban mozog.

Megoldás. Felírjuk a sebességek összeadásának relativisztikus törvényét: $v_x = \dfrac{v_{1x} + v_{2x}}{1 + \dfrac{v_{1x} \cdot v_{2x}}{c^2}}$.

Megjelöljük a fénykvantum $\vec{v}_1$ sebességének, a K' vonatkoztatási rendszer $\vec{v}_2$ sebességének az irányát, majd meghatározzuk a sebességek vetületét az OX tengelyre.

1. eset (47.2. *a* ábra). $v_{1x} = v_1 = c$, $v_{2x} = v_2$.

A kapott kifejezéseket behelyettesítve a sebességek összeadásának relativisztikus törvényébe, a következőt kapjuk: $v_x = \dfrac{c + v_2}{1 + \dfrac{cv_2}{c^2}} = \dfrac{c + v_2}{1 + \dfrac{v_2}{c}} = \dfrac{c + v_2}{\dfrac{c + v_2}{c}} = c$.

A fénykvantum sebessége a K vonatkoztatási rendszerhez képest c.

2. eset (47.2. *b* ábra). $v_{1x} = -v_1 = -c$, $v_{2x} = v_2 \Rightarrow v_x = \dfrac{v_2 - c}{1 - \dfrac{cv_2}{c^2}} =$

$= \dfrac{v_2 - c}{1 - \dfrac{v_2}{c}} = \dfrac{v_2 - c}{\dfrac{c - v_2}{c}} = -c.$

A fénykvantum sebessége a K vonatkoztatási rendszerhez képest c; a „–” előjel azt jelenti, hogy a kvantum az OX tengely irányával ellentétes irányba mozog.

Felelet: a fény terjedési sebessége nem függ a vonatkoztatási rendszer kiválasztásától.

Összegzés

Eseménynek a tér adott pontjában és az adott pillanatban végbemenő jelenséget nevezzük. Az anyagi pont számára az eseményt adottnak tekintjük, ha kiolvasható belőle az esemény helye (x, y, z koordinátája), valamint t időpontja.

Két esemény egyidejűsége viszonylagos: az egyik inerciarendszerben egy időben végbemenő események nem egyidejűek az első rendszerhez képest bizonyos sebességgel mozgó másik vonatkoztatási rendszerben.

A speciális relativitáselméletben a sebesség meghatározására a sebességek összeadásának relativisztikus törvényét használják: $v_x = \dfrac{v_{1x} + v_{2x}}{1 + \dfrac{v_{1x} \cdot v_{2x}}{c^2}}$.

A sebességek összeadásának relativisztikus törvénye a fénysebességnél jelentősen kisebb sebességek esetén klasszikus alakban íródik fel. Általános esetben Newton klasszikus mechanikája a speciális relativitáselmélet részesete.

Ellenőrző kérdések

1. Mi az esemény? **2.** Mikor tekinthetjük az eseményt adottnak? **3.** Milyen eseményeket nevezünk egyidejűeknek? **4.** Magyarázzátok meg, mit jelent a „két esemény egyidejűsége viszonylagos" kifejezés! **5.** Írjátok fel a sebességek összeadásának relativisztikus törvényét! **6.** A sebességek összeadásának relativisztikus törvénye milyen sebességek esetén írható fel klasszikus alakban?

40. gyakorlat

1. Két autó egymással szemben mozog. Mivel egyenlő az egyik autó lámpájából kisugárzódó fény sebessége a másik autóhoz rendelt vonatkoztatási rendszerben?
2. Az űrhajó fénysebességgel távolodik a Földtől. Meglátja-e magát az űrhajós a fedélzeten elhelyezett tükörben?
3. A részecskegyorsítóból $0{,}5c$ sebességgel kirepülő ionizált atom (c a fény sebessége) a mozgásának irányába fotont bocsátott ki. Mekkora a foton sebessége a részecskegyorsítóhoz viszonyítva?
4. Két űrhajó a mozdulatlan megfigyelőhöz képest $0{,}7c$ sebességgel távolodik egymástól. Mekkora az űrhajók viszonylagos sebessége?
5. Az űrhajó a megfigyelőtől $0{,}8c$ sebességgel távolodik. Mekkora lesz az űrhajóból $0{,}6c$ sebességgel a mozgás irányába kibocsátott lövedék sebessége a Földhöz viszonyítva? Mekkora ugyanennek a lövedéknek a sebessége a Földhöz viszonyítva, ha az az űrhajó mozgásával ellentétes irányba lett kilőve?

48. §. A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET POSZTULÁTUMAINAK KÖVETKEZMÉNYEI

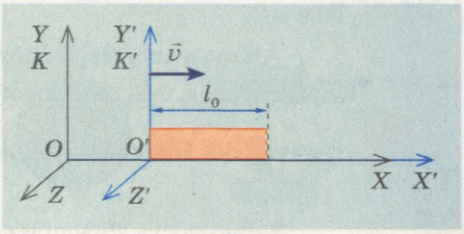
„A dolgok létezésének kora független azok mozgási sebességétől, ami lehet tetszőleges, illetve egyáltalán nem észlelhető mozgás" – írta Newton. A klasszikus mechanika művelői magától értetődőnek vették, hogy az idő és a testek mérete abszolút és nem függ azok mozgási sebességétől. Megvizsgáljuk a relativisztikus mechanika szemszögéből, hogy ez valóban így van-e.

1 Megváltoznak-e mozgáskor a testek lineáris méretei?

A rúd hosszának a két vége közötti *azonos időben* (olyan óra szerint, amely a mérés elvégzésének rendszerében van) lemért távolságot nevezzük. Mivel a két esemény egyidejűsége viszonylagos, ezért azt állíthatjuk, hogy különböző vonatkoztatási rendszerekben a rúd hossza eltérő.

Legyen a kemény rúd nyugalomban a K' vonatkoztatási rendszerben, amely viszont a K vonatkoztatási rendszerhez képest v sebességgel mozog (48.1. ábra).

Ha a rúd a K' rendszer mozgásirányában helyezkedik el (az OX tengely mentén), akkor a relativitáselmélet szerint érvényes a következő képlet:

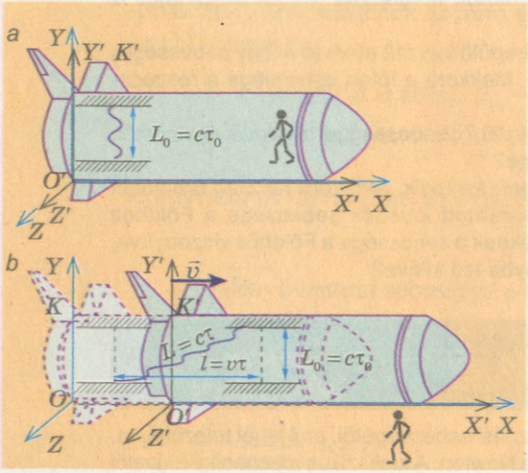


48.1. ábra. A rúd l_0 hossza a K' vonatkoztatási rendszerben, amelyben a rúd nyugalomban van, nagyobb a rúd l hosszához viszonyítva a K vonatkoztatási rendszerben, melyhez képest a rúd mozog: $l_0 > l$

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

ahol l_0 a rúd hossza a K' rendszerben, melyben nyugalomban van; l a rúd hossza a K rendszerben, melyhez képest a rúd mozog.

Mivel $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$, ezért a rúd abban a rendszerben rendelkezik a legnagyobb hosszúsággal, amelyben nyugalomban van. Abban a rendszerben viszont, amelyben mozog, a hossza *csökken*. A test hosszának változását mozgáskor *Lorentz-féle hosszúsági csökkenésnek* nevezzük. (A Lorentz-transzformáció egyik képlete.)



48.2. ábra. Időintervallumok mérése fényóra segítségével: a) az esemény saját τ_0 idejének mérése, mikor a megfigyelő együtt mozog az órával; b) a mozdulatlan megfigyelő által mért idő – az ő számára a fény nagyobb távolságot tesz meg, tehát az időintervallum is nagyobb: $L > L_0$ $\tau > \tau_0$

2 Miben nyilvánul meg az idő lassulásának hatása?

Megvizsgáljuk, hogyan változik két egymást követő esemény közötti időintervallum az egyik vonatkoztatási rendszerből a másikba való átmenetkor. A vizsgálathoz úgynevezett *fényórát* használunk, melynek következő a felépítése: az L_0 hosszúságú rúd végeire egymással párhuzamos tükrök vannak erősítve (48.2. ábra). A fényimpulzus felfelé és lefelé mozog és a fény visszaverődését egy speciális műszer rögzíti. A megfigyelő, melyhez képest az óra nyugalomban van (48.2. *a* ábra), azt rögzíti, hogy két egymást követő visszaverődés közötti idő a $\tau_0 = \frac{L_0}{c}$ képlettel határozható meg.

Ahhoz a megfigyelőhöz képest, amelyhez az óra v sebességgel mozog, a fényimpulzus $L > L_0$ távolságot tesz meg (48.2. *b* ábra), ezért ő két egymást követő visszaverődés között a $\tau = \frac{L}{c}$ képlettel meghatározható időt állapít meg.

Felhasználva Pitagorasz tételét, a következő kifejezést kapjuk: $L^2 = l^2 + L_0^2$, illetve

$$(c\tau)^2 = (v\tau)^2 + (c\tau_0)^2 \Rightarrow \tau^2(c^2 - v^2) = c^2\tau_0^2 \Rightarrow \frac{\tau_0^2}{\tau^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} \Rightarrow \frac{\tau_0^2}{\tau^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Innen a τ idő, amit az a megfigyelő mért, melyhez képest az óra mozgott:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Abban a viszonyítási rendszerben mért τ_0 időintervallum, melyhez képest az óra nyugalomban van (az esemény saját ideje) kisebb, mint a τ időintervallum, melyet abban a rendszerben mértek, amihez képest az óra mozog. Más szóval, az idő a mozgó vonatkoztatási rendszerben lelassul.

Az *idő lelassulásának* semmi köze sincs az óra szerkezeti felépítéséhez, ez *magának az időnek a tulajdonsága.* Az idő lelassulását *bármely* óra kimutatja a mozgó vonatkoztatási rendszerben. Az ellenkező esetben egy ún. „mozgásjelzőt (mozgásindikátort)" kapnánk: ha az óra késik, a vonatkoztatási rendszer mozog, ha nem késik – a rendszer nyugalomban van. Ez azt jelentené, hogy létezik egy ideális (abszolút mozdulatlan) vonatkoztatási rendszer, melynek ténye ellenkezik a speciális relativitáselmélet első posztulátumával, amely arról szól, hogy minden inerciális vonatkoztatási rendszer egyenértékű. A mozgó vonatkoztatási rendszerben minden fizikai folyamat, egyebek közt az öregedés is lelassul. Ha legalább az egyik folyamat nem lassulna le, úgy újfent „mozgásjelzőt" kapnánk.

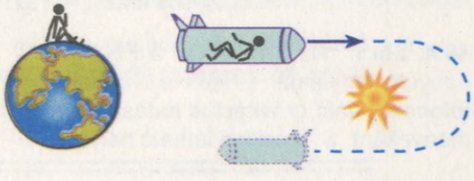
Az idő lelassulása kísérletileg például radioaktív maghasadáskor figyelhető meg. Legyen a mag hasadásának ideje a vonatkoztatási rendszerben, melyhez képest a mag nyugalomban van, $\tau_0 = 0{,}1$ s. Ha lineáris gyorsító segítségével a magnak akkora sebességet adunk, hogy $1 - \frac{v^2}{c^2} = 0{,}01$ (vagyis $v^2 \approx 0{,}99\ c^2$), akkor a maghasadás ideje:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0{,}1c}{0{,}1} = 1c.$$

A kísérlet az elméletnek megfelelően megmutatta, hogy a felgyorsított atommagok radioaktív hasadása lassúbb a nyugalomban lévő atommagok hasadásánál.

A nagy sebességgel mozgó rendszerekben a folyamatok lassúsága a nyugalomban lévő rendszerekhez képest jól érzékeltethető, ha megvizsgáljuk az *iker-paradoxont.*

Elvégzünk egy elméleti kísérletet. Két iker közül az egyiket egy $v^2 = 0{,}99\ c^2$ sebességre felgyorsított rakétába ültetjük (48.3. ábra), az űrhajón lévő óra alapján *egy* év múlva visszahozzuk a Földre: $\tau_0 = 1$ év.



48.3. ábra. Ikerparadoxon: a Földön maradt ikernél nagyobb öregedés figyelhető meg, mint a fény sebességéhez közeli sebességgel mozgó testvérénél

A Földön az óra azt mutatja, hogy a két esemény – a kilövés és a visszatérés – közötti idő:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1\,\text{év}}{0{,}1} = 10\ \text{év}.$$

Természetes, hogy a Földön maradt iker láthatóan megöregedett. Ez a példa, mely Einstein nevéhez fűződik, jól érzékelteti az események késleltetését a mozgó vonatkoztatási rendszerekben.

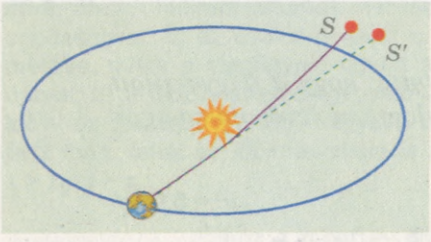
A speciális relativitáselmélet csak az inerciális vonatkoztatási rendszereket vizsgálja. A Földről felrepülő, majd ugyanoda visszatérő űrhajó, nem inerciális vonatkoztatási rendszer: útja során legalább háromszor gyorsul fel: indításkor, a visszaútra térésekor és a leszállás során. Ezen oknál fogva az idő késleltetésének képletét az ikrek esetében közvetlenül nem lehet felhasználni. Az adott szituációt az általános relativitáselmélet módszereivel kell megközelíteni. Megjegyezzük, hogy az ikerparadoxon érvényes az általános relativitáselméletben.

3 Hogy függ össze a tömeg és az energia?

Rátérünk a speciális relativitáselmélet egyik fontos következményére: mégpedig megvizsgáljuk az m tömegű test E energiájának függését annak v sebességétől. Einstein bebizonyította, hogy ez az összefüggés a következő képlettel adható meg:

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (1)$$

Az elemi részecskék energiájának képlete többszörösen beigazolódott az atommagok, protonok és elektronok gyorsításakor végzett kísérletekben. Az adott képletből több fontos *következtetés* ered.



48.4. ábra. Az S csillagtól a Föld felé irányuló fénysugár elhajlik a Napnak a fotonokra való gravitációs hatása eredményeként; S' a csillag látható helyzete

1) Az elektromágneses tér energiával rendelkezik, tehát ehhez az energiához okvetlen kapcsolódik a tömeg. Például a foton (a fény „részecskéje") tömegének meglétét kísérletileg igazolták, amikor a fény elhajlását vizsgálták a Nap melletti elhaladásakor (48.4. ábra).

2) Ha a test (elemi részecske) nyugalmi állapotban van ($v = 0$), akkor az (1) képlet a következő alakban írható fel:

$$E = mc^2$$

Az adott energiát ***nyugalmi energiának*** nevezik. Tehát *bármely tömeggel bíró részecske (bármely test) $E = mc^2$ energiatartalékkal rendelkezik.*

3) *A test energiájának változása egyenesen arányos tömegének változásával:* $\Delta E = \Delta mc^2$. A testtel való energiaközlés minden esetben tömegnövekedéssel jár, és ellenkezőleg: energialeadáskor csökken a test tömege.

Az energia és a tömeg összefüggésének képletét legteljesebb mértékben az 1940-es években értékelték, amikor az atombomba létrehozásán dolgoztak. Arról van szó, hogy az urán-235 magja a lassú neutronokkal való ütközéskor osztódik, minek következtében óriási mennyiségű energia szabadul fel. Felmerülhet a kérdés: honnan ered ez az energia? A számítások bebizonyították, hogy az uránmag tömege a hasadás előtt nagyobb, mint az annak következtében létrejövő részecskék össztömege. Tehát ez a tömegdefektus (*tömeghiány*) válik ki energia formájában.

4) Azokban az esetekben, amikor a test (részecske) a fénysebességnél jelentősen kisebb sebességgel mozog ($v \ll c$), az (1) képletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$E(v) = mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

ahol $\frac{mv^2}{2}$ a test (részecske) mozgási energiája; mc^2 *a test (részecske) nyugalmi energiája.*

Összegzés

A test hossza különböző vonatkoztatási rendszerekben különböző. A test mérete a nyugalmi állapotban lévő vonatkoztatási rendszerben a legnagyobb. Ha l_0 a rúd hossza abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyhez képest a test nyugalomban van, l a rúd hossza abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyhez képest a test mozog, akkor $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Az idő eltérő vonatkoztatási rendszerekben különbözőképpen viselkedik. A mozgó rendszerekben lassabban telik, mint a nyugalmi állapotban lévőkben. Ha τ_0 abban a vonatkoztatási rendszerben mért időintervallum, amelyhez képest a test (részecske) nyugalomban van (az esemény saját ideje), τ pedig abban a rendszerben mért idő, amelyhez viszonyítva a test (részecske) mozog, akkor $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

A mozgásban lévő test, illetve részecske energiája függ annak sebességétől: $E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Ha a test (részecske) sebessége jelentősen kisebb a fény sebességénél, akkor ezen test (részecske) energiája a következő képlettel határozható meg: $E(v) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}$, ahol az $E = mc^2$ a test (részecske) nyugalmi energiája.

A test vagy részecske energiaváltozása minden esetben azok tömegének megváltoztatását vonja maga után: ha energiát nyelnek el, tömegük növekszik, ha leadják az energiát, akkor tömegük csökken.

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan változik meg az állandó sebességgel mozgó test hossza? **2.** Milyen időt neveznek az esemény saját idejének? **3.** Hogyan változik az állandó sebességgel mozgó test számára az időintervallum? **4.** Melyik kísérlet igazolja az idő lassulását? **5.** Írjátok fel a test mozgási energiája és sebessége összefüggésének képletét! Milyen alakban írható fel ez a képlet kis sebességek ($v << c$) esetén? **6.** Mi az értelme az mc^2 mennyiségnek?

41. gyakorlat

1. A Földön lévő megfigyelő számára nyugalomban lévő rúd hossza 2 m. Mekkora lesz a rúd hossza, ha 0,6c sebességgel fog mozogni?
2. Mekkora sebességgel kell repülnie az űrhajónak, hogy az általa megtett út a Földről mérve kétszer rövidebb legyen?
3. Hányszorosára lassul le az idő a Földhöz képest 2,6 · 10^8 m/s sebességgel mozgó űrhajóban?
4. A Földhöz képest 0,8c sebességgel mozgó űrhajóban eltelt 2 év. Mennyi idő telik el ezalatt a Földön lévő megfigyelő számításai szerint?
5. Az instabil részecske létezésének saját ideje 1%-kal tér el a létezésének nyugalomban lévő órával mért idejétől. Mekkora sebességgel mozog a részecske?
6. Miért vezet a test felmelegítése annak tömegnövekedéséhez?
7. Mekkora munka elvégzésére van szükség ahhoz, hogy az elektron 0,6c sebességét 0,8c-re növeljük?

AZ 5. FEJEZET ÖSSZEGZÉSE

1. A fejezetben megismerkedhettetek a *relativisztikus mechanika alapeszméivel; a speciális relativitáselmélet posztulátumaival.*

A speciális relativitáselmélet posztulátumai

I. Bármely inerciarendszerben valamennyi természeti folyamat egyformán megy végbe	II. A fény terjedési sebessége a vákuumban azonos valamennyi inerciális vonatkoztatási rendszerben

2. Megérthettétek, hogy a *fény sebessége a vákuumban mindenfajta kölcsönhatás terjedésének maximális sebessége*: $c = 2{,}9979 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{c}}$.

3. Megismerhettétek az *események egyidejűségének viszonylagosságát.*

A tér különböző pontjaiban történő két esemény egyidejűsége viszonylagos: az egyik inerciarendszerben egyidejű események nem egyidejűek azokban a vonatkoztatási rendszerekben, amelyek az első rendszerhez képest bizonyos sebességgel mozognak

4. Megtanulhattátok a *relativisztikus mechanika törvényeit.*

A tömeg és az energia összefüggésének törvénye	A sebességek összeadásának törvénye az egydimenziós vonatkoztatási rendszerben
$E_0 = mc^2$; $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$v_x = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{1 + \frac{v_{1x} \cdot v_{2x}}{c^2}}$

5. Megbizonyosodhattatok a *speciális relativitáselmélet posztulátumainak következményeiről.*

A speciális relativitáselmélet posztulátumainak következményei

A Lorentz-féle hosszúsági csökkenés (Lorentz-transzformáció)	Az idő lelassulásának effektusa
$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

A TÉRRŐL ÉS IDŐRŐL SZÓLÓ JELENKORI ELKÉPZELÉSEK. A KLASSZIKUS, RELATIVISZTIKUS MECHANIKA ÉS A KOZMOLÓGIA KAPCSOLATA

1 A tér és idő tulajdonságairól szóló elképzelések fejlődése

Felidézzük a tér és idő tulajdonságairól szóló elképzelések fejlődését. *A Newton–Galilei-féle mechanikában az idő egynemű (homogén) és bármely vonatkoztatási rendszerben azonos.* Elfogadták, hogy a térmértan az eukleidészi axiómáknak van alárendelve; *a tér homogén és izotróp.* Az idő és tér ezen tulajdonságai a Földön és a világűrben végzett kísérleti megfigyelések alapján nyertek bizonyítást.

A tér egyneműsége a fizikai tér összes pontjának az egyenrangúságát jelenti (a fizikai rendszer bármely irányban való párhuzamos elmozdulása nem befolyásolja a benne végbemenő folyamatok jellegét).

Az idő egyneműsége az összes pillanat egyenrangúságát jelenti.

A tér izotrópiája a tér összes irányának egyenrangúsága (a fizikai rendszer bármilyen irányba való elfordulása nem befolyásolja a benne végbemenő folyamatok jellegét).

A speciális relativitáselméletben az idő és tér egy egységes négydimenziós (három koordináta és az idő) egynemű és izotróp rendszerben egyesül. Az egyik vonatkoztatási rendszerből a másikba való átmenetkor nem csak a koordináták változnak meg, ahogyan Galilei átalakulásainál (Galilei-transzformációknál), hanem az idő is.

Kis sebességek esetén a speciális relativitáselmélet mozgásegyenletei megegyeznek a Newton-féle klasszikus mechanika mozgásegyenleteivel.

A speciális relativitáselméletben a tér-idő tulajdonságai nem függnek az anyag tulajdonságaitól. Az *Albert Einstein* által megalkotott általános relativitáselmélet megállapította a tér-idő és az anyag tulajdonságai közötti összefüggést. Be lett bizonyítva, hogy a tér-idő geometriáját az anyag állapota határozza meg, az anyag mozgásának képlete pedig a tér-idő geometriájától függ.

Einstein és követői bebizonyították, hogy a valós világ geometriája különbözik az euklideszi geometriától. Különösen jelentős a különbség a nagy anyagi tömegek felhalmozódásának a helyén. A csillagászati megfigyelések teljes egészében bebizonyították ezt a feltevést.

Einstein elméletének továbbfejlesztésében nagy szerepe volt *Alekszandr Friedmann* (1888–1925) orosz-szovjet geofizikus és matematikusnak. 1922–1924-ben megkapta Einstein egyenleteinek a megoldását az izotróp, egynemű világegyetemre. A tudós feltevése szerint az anyag a világegyetemben egyenletesen oszlik el. Természetesen ez a valóság durva megközelítése. Viszont a csillagászati megfigyelések azt bizonyítják, hogy Friedmann modellje megfelel a valóságnak: világegyetemünk óriási mennyiségű galaxisból áll, melyek a térben egyenletesen helyezkednek el.

Friedmann bemutatta, hogy a világegyetem nem stabil – állandó jelleggel változik. A tudós a világegyetem időbeli változásának három lehetséges irányát dolgozta ki – a világegyetem anyagsűrűségének (μ) és a kritikus anyagsűrűség (μ_k) arányának a függvényében.

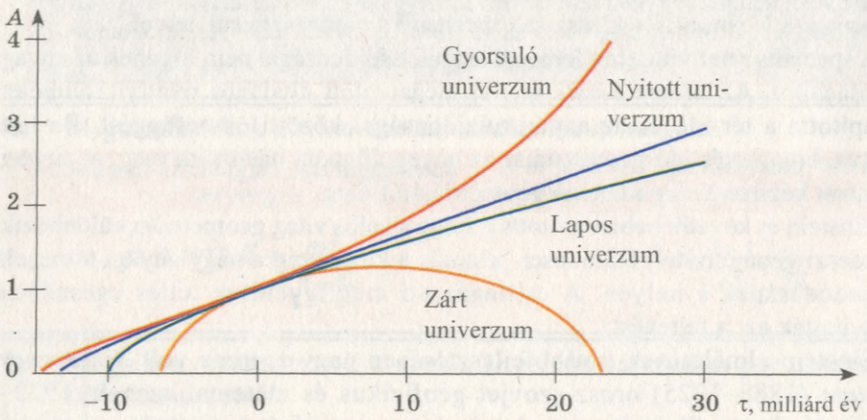
2 Mik a világegyetem fejlődésének lehetséges irányai?

Friedmann *első feltevése* szerint (ha $\mu > \mu_k$) a világegyetemnek nem euklideszi geometriája van pozitív görbülettel – a ***világegyetem zárt izotróp modellje***. E szerint a feltevés szerint a világegyetem A térbeli méretei az idő múlásával növekszenek, elérik a lehetséges legnagyobb értéket, majd a nulla felé csökkennek (lásd az 1. ábrán a sárga vonalat).

A $t = 0$ pillanat a világegyetem születésének pillanata. A kis időközök ($t \to 0$) a világegyetem életének első pillanatai. Ebben a pillanatban az anyag sűrűsége a végtelen felé közelít. A mai napon ezek a legkérdésesebb idők, melyek a tudomány számára még ismeretlenek. Az Európai Atomkutató Központ munkatársainak egyik feladata (a nagy hadronütköztető) – meghatározni az anyag tulajdonságait magas sűrűség és energia esetén.

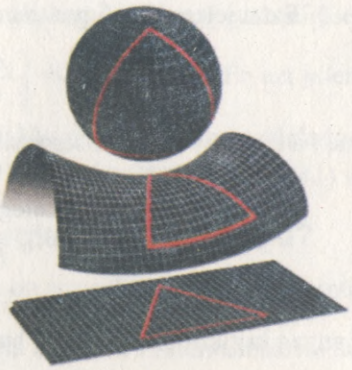
Friedmann *második feltevése* szerint (ha $\mu < \mu_k$) a világegyetemnek nemeuklideszi geometriája van negatív görbülettel – a ***világegyetem nyitott izotróp modellje***. Ebben a modellben a világegyetem méretei egyenletesen nőnek a $t = 0$ időponttól (a világegyetem létrejöttének pillanatától) a végtelenségig, mikor $t \to \infty$ (lásd az 1. ábra kék vonalát). A világegyetem létrejöttének pillanatában szintén óriási az anyag sűrűsége és az energia mértéke.

Friedmann *harmadik feltevése* (ha $\mu = \mu_k$) alapján a világegyetemnek nemeuklideszi geometriája van, a görbület nullával egyenlő – a ***világegyetem lapos izotróp modellje***. (lásd az 1. ábrán a zöld vonalat).



1. ábra. A vízszintes tengely mentén az időt tüntették fel milliárd években, a függőleges tengely mentén a világegyetem méretét viszonylagos egységekben ($A = 1$ a világegyetem mérete jelenleg). A $\tau = 0$ időpontnak korunk felel meg. Látható, hogy kis anyagsűrűségek esetén ($\mu \leqslant \mu_k$) a világegyetem terjeszkedik. Nagy anyagsűrűségnél ($\mu > \mu_k$) a világegyetem először növekszik, majd csökken

Nem áll módunkban szemléltetni a háromdimenziós tér különböző görbületeit, mivel érzékeltetéséhez 4D-s grafikára van szükség. Ezért az illusztráláshoz kétdimenziós síkok görbületeit mutatjuk be (2. ábra). A gömb és a hiperboloid felszíne, valamint a sík kétdimenziós felületek, melyek rendelkeznek pozitív, negatív, valamint a végtelenhez közelítő görbületi sugárral. Ezeknek a felületeknek különböző a mértana. Például a síkon két párhuzamos egyenes sohasem metszi egymást. A gömbön két, az egyenlítő mentén párhuzamos egyenes, meghosszabbításuk esetén a sarkokon metszik egymást.



2. rajz. A világegyetem időbeli változásának feltételes irányai: μ az anyag sűrűsége; μ_k az anyag kritikus sűrűsége

A 2. ábrán feltüntetett három felület megfelel Friedmann a világegyetem fejlődéséről felállított három feltevésének.

Feltételezések szerint a világegyetem létrejöttétől napjainkig 13,7 milliárd év telt el. A tér-idő pontot ($t = 0$, $A = 0$) különleges pontnak nevezik, mivel ebben a pillanatban az anyag sűrűsége végtelenné alakul át. Most már érthető, hogy az anyag viselkedésének leírását a világegyetem létrejöttekor nem lehet csak az általános relativitáselmélet felhasználásával elvégezni, fel kell használni a kvantumelméletet is.

3 Milyen megfigyelések igazolják a világegyetem tágulását?

A világegyetem tágulását kísérletileg 1929-ben figyelte meg *Edwin Powell Hubble* (1889–1953) amerikai csillagász. Ez a tágulás a következő képlettel írható fel:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = v = HA,$$

ahol ΔA a világegyetem méretének változása Δt idő alatt; v a megfigyelt objektum távolodásának sebessége a megfigyelőhöz képest; H Hubble-állandó; A a világegyetem térbeli méretei.

Ha egy fényforrás v sebességgel távolodik tőlünk, akkor a kísérletileg megfigyelt fényfrekvencia meghatározására a következő képletet használjuk:

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{v}{c}, \qquad (1)$$

melyben ν_0 a fény frekvenciája annak kibocsátásakor; ν a fény megfigyelt frekvenciája*.

* A rezgésszámban vagy a hullámhosszban megjelenő változást, amely amiatt alakul ki, hogy a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, *Doppler-effektusnak* nevezzük.

Ezt a jelenséget figyelte meg Hubble és vezette le a következő összefüggést:

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{H}{c} l, \qquad (2)$$

ahol l a megfigyelt galaxisig (csillagig) lévő távolság.
Az (1) és (2) kifejezésekből: $v = Hl$.

A Hubble-állandó jelenlegi értéke:

$$H = 0{,}25 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

A Hubble-állandó fontos mennyisége az általános relativitáselméletnek, amely az anyag kritikus sűrűségét μ_k határozza meg:

$$\mu_k \approx 10^{-26}\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Az anyag ilyen sűrűségénél a tér 1 $\mathrm{m^3}$-ben közel 10 hidrogénatom található.

A látható anyag átlagos sűrűsége μ_l jelentősen kisebb a kritikus sűrűségnél: $\frac{\mu_l}{\mu_k} \approx 3 \cdot 10^{-3}$. Ezek az adatok arról tanúskodnak, hogy világegyetemünk nyílt modellnek felel meg.

4 Milyen tények igazolják a sötét anyag létezését?

A XX. század 70–80-as éveiben a csillagászatban egy kiemelkedő felfedezést tettek – a világegyetem olyan részeire akadtak, melyek gravitációs vonzással rendelkeznek. Ezen furcsa tulajdonságai miatt ezt az anyagfajtát *sötét anyagnak* nevezték el.

A sötét anyag felfedezése a galaxisok forgási sebessége megfigyelésének, és a fény galaktikákon áthatolása tanulmányozásának köszönhető. A csillagászok megfigyelései azt mutatták, hogy némely galaxisok perifériáján a csillagok forgási sebessége jelentősen nagyobb a második kozmikus sebességnél*, ha a galaxis tömege alatt a látható tömeget értjük. Ezek szerint a látható tömegen (pl. a Föld tömege) kívül a galaxisok rendelkeznek láthatatlan (sötét) anyaggal.

Egy másik megfigyeléssorozat a távoli galaxisokról jövő fény megfigyelésével foglalkozott. Az egyszerűség kedvéért a fényt mint bizonyos energiával rendelkező részecskék áradatát fogjuk vizsgálni, aminek következtében a fény minden részecskéje $m = \frac{E_{\text{fény}}}{c^2}$ tömeggel rendelkezik. A gravitáció törvénye szerint a fényrészecskék minden galaxishoz vonzódnak, amelyek mellett elrepülnek, vagyis a fénysugár útja elgörbül. A megfigyelések azt mutatták, hogy a mozgáspálya görbülete jóval nagyobb annál, mint amennyire az a látható anyag hatásából következne. Ezért, mint az előző megfigyeléseknél, a sötét anyagról kezdtek beszélni.

---

* Második kozmikus sebesség – az a legkisebb sebesség, melyet a bolygó (csillag, galaxis) felszínén lévő testtel kell közölnünk ahhoz, hogy az, leküzdve a gravitációt, végleg elhagyja az adott bolygót. A második kozmikus sebesség a következő képlettel határozható meg: $v \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, ahol r a bolygó (csillag, galaxis) mérete, M a tömege.

A csillagászati megfigyelések arról tanúskodnak, hogy a világegyetem sűrűsége nagyon megközelítette a kritikus sűrűséget: $\left(1-\frac{\mu}{\mu_k}\right) \ll 1$, $\mu < \mu_k$. Ez azt jelenti, hogy makroszkopikus léptékekben a tér euklideszi. Viszont a nagy anyagsűrűséggel rendelkező részein a tér nemeuklideszi geometria törvényei szerint viselkedik.

5 Miben nyilvánul meg a sötét energia rendkívülisége?

1998-ban még egy rendkívüli felfedezés látott napvilágot: világegyetemünk $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} > 0$ gyorsulással tágul. Ez a felfedezés nem egyezett Freidmannak a világegyetem egyneműségéről tanúskodó eredményeivel. Ezért bevezették a *sötét energia* fogalmát, amely rendkívüli tulajdonsággal rendelkezik: a sötét energia nyomása negatív; ezenkívül ez az energia a világegyetemben egyenletesen oszlik el. A sötét energia nem képez csillag jellegű testet.

A csillagászok megfigyelése szerint az átlagos, „földi" anyag a világegyetem összes anyagának 4%-át alkotja, a többi részt a sötét anyag (≈ 22%) és a sötét energia (≈ 74%) tölti be.

Az űrkutatásnak számtalan kérdésre kell felelnie. Hogyan jött létre a világegyetem? Kis léptékben miért nem egynemű, nagy léptékben viszont az? A világegyetemben miért csak 4% a „mi" földi anyagunk részaránya? Miért van olyan sok fekete lyuk? Miért tágul egyszerre a világegyetem minden része?

A fizika és csillagászat idevágó részei jelenleg a „legforróbbak". A megfigyelésekben aktív részt vállalnak a Központi Csillagászati Obszervatórium, a Rádiócsillagászati Intézet, a Krími Asztrofizikai Obszervatórium, a Harkivi Fizikai és Műszaki Intézet Nemzeti Tudományos Központ, a Bogoljubov Elméleti Fizikai Intézet tudósai.

A világegyetem létrejöttének egyik hipotézisét a Bogoljubov Elméleti Fizikai Intézet tudósa, *Petro Ivanovics Fomin* vetette fel. Elméletének alapján, a világegyetemünk létrejötte előtt vákuum volt; a világegyetem összes anyaga vákuumból jött létre, ezért annak teljes energiája nulla: az anyag pozitív energiája teljes egészében kompenzálódik a gravitációs kölcsönhatás negatív energiájával. Viszont Fomin hipotézise nem ad magyarázatot a fekete lyuk és a sötét energia természetére.

! Összegzés

A speciális relativitáselmélet megmutatta, hogy a háromdimenziós koordináta-rendszer az idővel egy egységes négydimenziós teret alkot, amely saját geometriával rendelkezik.

Einstein az általános relativitáselméletében bebizonyította, hogy az egységes tér és idő lokális geometriája az anyag állapotával határozható meg az adott lokális területen.

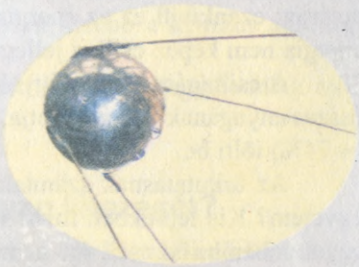
A világegyetem gyorsulással terjeszkedik. Kísérletileg felfedezték a feketelyukat és a sötét energiát. A gravitáción kívül egyéb tulajdonságaik egyelőre nem ismertek.

Az űrkorszak kezdete


1. ábra

Amikor 1918-ban a cári testőrség archívumát vizsgálták, az 1881. április 3-án kivégzett *Nyikolaj Ivanovics Kibalcsics* (1853–1881) (lásd az 1. ábrát) iratai között ráakadtak a *Légi közlekedési eszköz terve* c. dokumentumra, melyen az 1881. március 23-i dátum állt. Művében, a Korop nevű ukrán kisvárosban (jelenleg Csernyihivi megye) született 28 éves fiatalember, lőporral működő rakétahajtómű tervét alkotta meg, kidolgozta irányításának módszerét, megvizsgálta az üzemanyag égésének menetét. Kibalcsics munkája a pilótavezérelt kozmikus repülő berendezés első tudományos terve.

1957. október 4-én a szovjet tudósok földkörüli pályára állították az *első műholdat*, amely megnyitotta az emberiség kozmikus korszakát. Az első műhold (2. ábra) egy 58 cm átmérőjű és 83,6 kg tömegű gömb volt, melyre négy antennát szereltek a rádióadók jeleinek továbbítására. A szükséges energiaforrás egyszerű elem volt. A startot követő 315. másodpercben a műhold levált a rakétahordozó második fokozatáról és az általa sugárzott rádiójel hallható volt világszerte. A műhold 92 napig keringett Föld körüli pályán, mialatt 1440-szer kerülte meg a Földet, rádióadói pedig a kilövés utáni két héten át működtek.


2. ábra

1959. január 4-én a Szovjetunióban *felbocsátották a Hold első műholdját Hold-1* néven, amely szeptember 14-én érte el a Holdat, és készített felvételeket a Földről nem látható részéről.


3. ábra

1961. április 12-én elsőként repült ember az űrbe. 1 óra 48 perc alatt a *Vosztok* űrhajó, *Jurij Gagarin* (1931–1968) (a 3. ábrán balról) szovjet űrhajóssal a fedélzetén körülrepülte a Földet és a Szaratov megyei Szmelivka község közelében ért földet.

A XX. század 50–60-as éveiben az űrhajók fellövése *Szerhij Koroljov* (1907–1966) (3. ábrán jobbról) kiemelkedő konstruktőr, Zsitomir szülöttének a vezetésével történt.

1969. július 21-én *Neil Armstrong* (szül. 1930) és *Edwin Aldrin* (szül. 1930) amerikai űrhajósok a Holdra léptek. Az első lépést a Holdon Armstrong tette meg (4. ábra), a következőket mondva: „Kis lépés egy embernek, de hatalmas ugrás az emberiségnek."


4. ábra

Az űrkutatási ipar létrejötte Ukrajnában

Ukrajnában a űrkutatási ipar létrejötte 1937-re tehető, amikor a Harkivi Légügyi Főiskolán *Georgij Proszkura* (1876–1958) vezetésével létrehoztak egy kutatócsoportot. Munkájuk eredménye egy *óriási sztratoszferikus rakéta* felbocsátása volt.

Az ukrán *Komunar*, *Arzenál*, *Monolit*, *Jevpatoriai űrközpontok* részt vettek a Föld első műholdjának a felbocsátásában. A XX. század 60-as éveiben megkezdődött az irányítási rendszerek, fedélzeti automatikai műszerek, az űrhajók és űrközpontok egyéb berendezéseinek a tervezése és létrehozása. Jelenleg az űrkutatási ipar legnagyobb vállalata Dnyipropetrovszkban található.

Pivdenne tervezőiroda és Pivdenmas termelési egyesülés (Dnyipropetrovszk)
(forrás: loveoda.narod.ru/razvitie.html)


5. ábra

A *Pivdenne* tervezőiroda története 1951-ben kezdődött, amikor a szovjet kormány rendelete alapján a Dnyipropetrovszk területén lévő hatalmas autógyárat ballisztikus rakéták gyártására állították át.

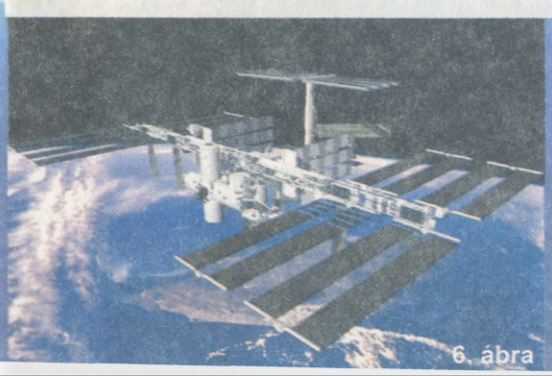
1954-ben a gyár területén létrehoztak egy különleges tervezőirodát – a *Pivdenne*-t, melynek vezetését a tehetséges tudósra és szervezőre, *Mihajlo Jangelre* (1911–1971) bízták (5. ábra). Attól az időtől fogva a *Pivdenmas* és a *Pivdenne* határozza meg a világ űrtechnikájának több irányvonalát.

A *Pivdenne* tervezőiroda konstruktőrei 67 űrtechnikai eszköz és 12 űrtechnológiai rendszer tervét dolgozták ki, a *Pivdenmas* vállalattal közösen közel 400 űrtechnikai eszközt készítettek el és állítottak Föld körüli pályára (ezek egyike a 6. ábrán látható).

1995-ben a *Pivdenne* és a *Pivdenmas* orosz, norvég és amerikai kollégáikkal közösen elkezdték a *Tengeri start* program realizálását, valamint a hasonló nevű repülés- és űrtechnikai eszközök létrehozását (7. ábra). Rakétahordozóként ukrán gyártmányú *Zenit* rakétákat használtak fel.

Az *Interkozmosz* program 25 műholdja közül 22-t a *Pivdenne* állította elő.

A *Pivdenne* tervezőiroda kezdeményezésére Ukrajnában új irányzat fejlesztése kezdődött el. A világűrből a világóceán tanulmányozására és megfigyelésére szolgáló berendezések létrehozásán fáradoznak. Jelenleg az *Óceán* fantázianevű műszer már sokban elősegíti az óceánkutatók munkáját, melyet a jövőben a Föld természeti tartalékainak a feltérképezésére is továbbfejlesztenek.


6. ábra


7. ábra

A FELADATOK MEGOLDÁSA

Bevezetés. 1. feladat. **1.** 2,1 mm; 0,1 mm; 0,2 mm; 9,5%; 2,1 ± 0,2 (mm). **2.** 8%. **3.** 0,182 m/s 4,1%; 0,007 m/s; 0,182 ± 0,007 (m/s). **2. feladat.** **1.** Nem. **4.** $a_x = 2{,}5$ m; $a_y = 1{,}5$ m; $b_x = -3$ m $b_y = 0$ m; $c_x = 3{,}5$ m; $c_y = -2{,}5$ m; $d_x = 0$ m; $d_y = -2{,}5$ m; **5.** 0,64 dm^3.

1. fejezet 4. feladat. **6.** 10 m; 0. **7.** 63; 40. **8.** –8 m; 6 m; 10 m. **5. feladat.** **1.** 8,3 m/s; **2.** a) –2 m/s; 10 m; b) 5 m/s; 0 m; d) 4 m/s; –8 m. **3.** $x = 30 - 5t$ (m); $x_1 = -20$ m; $s_1 = 50$ m. **4.** 20 m/s; 0 m/s; 6 s; 1 s; 40 m; 20 m; **5.** $10t$; 20; $-20 + 5t$; $60 - 12t$. **6.** 4,7 s; 0,7 m. **7.** $-700 + 5t$; $500 - 20t$; $1400 - 25t$; –460 m; 48 s; 70 s; –350 m; 180 s; –3100 m. **6. feladat.** **1.** 11 m/s; 9 m/s. **2.** 167 m; 174 m. **3.** 149 km. **4.** 7,6°; 2 óra 1 perc. **5.** a) 2,24 m/s; 168 m; 75 s; 75 m. **6.** 45 s. **7. feladat.** **1.** 1 m/s. **2.** 3,2 m/s; 2 m/s. **3.** 75 s; 6 m/s. **4.** 700 km/óra. **5.** –7,5 m/s; 0; 27,5 m/s; 90 m. **8. feladat.** **3.** 1,5 m/s^2. **4.** 1 m/s; 0; 1 m/s. **5.** 0. **6.** 20 s. **7.** $-4 + 2t$; $6 + t$; $2{,}5 - 2{,}5t$; $-10 - 4t$. **8.** $2 + t$; $-3 + t$; 1 m/s; $5 - 2t$. **9. feladat.** **1.** 35 m. **2.** 25 m. **3.** 1,8 s; 4,4 m/s^2. **4.** 40 m; 0 m; $-20 + 20t - 5t^2$. **5.** $5 + 4t$; $1 - t$; $0{,}4t$; $-5 - 6t$; 0,75. **6.** 20 s. **10. feladat.** **1.** 10 m/s; 15 m. **2.** 40 m. **3.** 10 m/s^2. **4.** 5 m; 10 m; 0 m. **5.** 0,34 s. **6.** 35 m. **11. feladat.** **2.** 30 km/s. **3.** 375. **4.** 3,3 m/s^2. **5.** $20v_{xb}$; $1200a_{xb}$. **6.** $10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$; $10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$; 0; 10 m.

Ellenőrző feladatok. *1. rész.* **1.** d. **2.** b. **3.** c. **4.** d. **5.** 2 m/s. **6.** $-4 + 2t$. **7.** 28 s. **8.** 7,6 m/s. **10.** 150 km az *A* helytől; 2,5 h. ***2. rész.*** **1.** b. **2.** d. **3.** a. **4.** b. **5.** a. **6.** $12 - 4t$; –4 m/s^2. **7.** 10,8 m; 9,2 m. **8.** 520 m. **9.** 30 m. **10.** 1 s és 5 s. **11.** 0,45 s; 2,34 m.

2. fejezet 13. feladat. **1.** Nem. **2.** 0. **3.** 5 N. **14. feladat.** **2.** 9 m/s. **3.** ≈ 1,1 m. **15. feladat.** **2.** Nem. **3.** 5 m/s^2. **4.** 3,2 N; a kör középpontja felé. **5.** 5 m/s^2. **6.** 2,5 t. **16. feladat.** **1.** Egyenlően. **3.** 0,5 m/s^2. **17. feladat.** **1.** Kétszeresére növekszik. **2.** 10 m. **3.** 16-szorosan. **4.** $2 \cdot 10^{30}$ kg. **18. feladat.** **1.** 2 kg; 20 N. **2.** $6 \cdot 10^{24}$ kg. **3.** 4,9 m/s^2. **4.** 49-szer. **19. feladat.** **2.** 30 m/s; 45 m. **3.** 0,63 s; 8,1 m/s; 52°; 3,2 m; 3,7 m. **4.** Nem. **5.** 2,5 m; 10 m. **6.** Átrepül. **20. feladat.** **1.** 3,75 m/s^2; 3,6 km/s. **2.** 18 600 km. **3.** 7,1 km/s; 2 h. **4.** 6750 km. **21. feladat.** **1.** 20 cm. **2.** 1884 N. **3.** 114 N. **4.** 200 GPa; 40 MPa. **5.** 5 N/m; 20 N/m. **22. feladat.** **1.** 0 N. **2.** a) 10 N; b) 5 N; c) 15 N. **3.** 3,5 kN; $n = 4$. **4.** 45 kN; 31,6 m/s. **5.** 0,5 s^{-1}. **23. feladat.** **1.** Nem. **4.** 0,5. **5.** 7 m/s^2. **6.** 15 N; 0,025. **24. feladat.** **1.** 20 s. **2.** 0,0625. **3.** 0,5. **4.** 0,3 m/s^2. **5.** 42 N. **6.** 2,7 m/s. **25. feladat.** **1.** 100 N. **2.** A nehéz súlytól 10 cm-re. **3.** 23 N; 46 N. **4.** 51,3°. **26. feladat.** **3.** ≈ 3,8 cm. **4.** 1,3 cm.

Ellenőrző feladatok. *1. rész.* **1.** b. **2.** d. **3.** a. **4.** d. **5.** d. **6.** b. **8.** ≈ 71 m/s; 45°. **9.** 128 N; 7 m/s. **10.** A vízzel telt edény felé. ***2. rész.*** **1.** b **2.** b. **3.** c. **4.** b. **5.** d. **6.** c. **7.** 0,24 m/s^2; 8 s. **8.** 0,27. **9.** $F = \frac{mgr}{\sqrt{l^2 - r^2}}$. **10.** 15,5 m/s; 31°.

3. fejezet 27. feladat. **4.** 1,75 m/s. **5.** 4,1 m/s és 1,3 m/s. **6.** $v_A = 8{,}7$ m/s; $v_B = 5$ m/s. **7.** 1,4 m. **28. feladat.** **3.** 550 J. **4.** 0,5 t. **5.** – 562,5 J. **6.** 20 W. **29. feladat.** **1.** 1,8 GJ. **2.** 150 kJ. **3.** 2-szeresére növekszik. **4.** 200 m/s. **5.** a) 8 J; b) 24,5 J; c) 40 J. **6.** 60°. **30. feladat.** **1.** 0. **2.** 2 m. **3.** 3 J. **4.** 5 J; 2 J. **31. feladat.** **3.** 15 m; 20 m/s. **4.** 17,5 m. **5.** 0,9 m/s. **6.** 15 cm; 1,1 m/s. **32. feladat.** **2.** 2-szer. **3.** 1 m/s; 4 m/s. **4.** 6 m/s; 1 m/s. **5.** 3 kg; 333 g.
Ellenőrző feladatok. **1.** c. **2.** a. **3.** d. **4.** c. **5.** a. **6.** b. **7.** d. **8.** d. **9.** c. **10.** c. **11.** b. **12.** b. **13.** 2,5 m; 7,1 m/s. **14.** 5,4 J. **15.** $2{,}5R$.

4. fejezet. 33. feladat. **1.** 0,2 s; 5 Hz. **2.** 0,5 Hz; 3,14 s^{-1}; 5. **3.** 0,05 s; 10 s. **4.** 5 cm; 10 cm; 20 cm; 40 cm. **34. feladat.** **1.** $0{,}1\cos(2\pi t)$. **2.** $0{,}05\sin(10\pi t)$. **3.** 4 m; 8 s; 0,125 Hz. **4.** 0,3 m; 6 s; 0,17 Hz; π/2; 0. **5.** 2 m; 4 s; 0,25 Hz; $2\cos(0{,}5\pi t)$; 0,1 m; 4 s; 0,25 Hz; $0{,}1\cos(0{,}5\pi t)$; 0,1 m; 0,4 s; 2,5 Hz; $0{,}1\sin(5\pi t)$. **35. feladat.** **1.** 99 N/m; 0,5 Hz. **2.** 2,3 kg. **3.** 2-szer. **4.** 0,55 N/m; 0,08 Hz; 1,4 N. **5.** 140 Hz. **6.** 99 Hz. **36. feladat.** **1.** 25 m/s^2. **2.** 1 m. **3.** Nem. **4.** 90; 60. **5.** 3,2 s. **37. feladat.** **1.** 0,2 m. **2.** 0,69 m/s; 0,05 J; 0,71 m/s. **3.** 99 J; 44,5 J; 44,5 J; 6,28 m/s. **4.** 15 mJ; 5 mJ. **38. feladat.** **4.** 72 km/h. **5.** 158 N/m. **6.** 72 km/h. **39. feladat.** **1.** 90 km. **2.** 20 m/s. **3.** 3 m/s. **4.** a) Felfelé; b) lefelé. **5.** a) Balra; b) jobbra. **6.** $0{,}3\sin\left(\frac{\pi}{24}s\right)$.

Ellenőrző feladatok. **1.** b. **2.** c. **3.** a. **4.** a. **5.** a–3; b–4; c–1; d–2. **6.** 10 Hz. **7.** $0{,}2\cos(20\pi t)$. **8.** *A* pont felfelé, *B* pont lefelé. **9.** $0{,}1\sin(10\pi t)$. **10.** $l = 2$ m; $s = 0$ m. **12.** 7,9 N/m; 0,3 m/s. **13.** 0,25 m. **14.** $T = 2{,}4$ s. **15.** $-0{,}6\sin(10\pi t)$.

5. fejezet. 40. feladat. **1.** *c*. **2.** Igen **3.** *c*. **4.** 0,94*c*. **5.** 0,95*c*; 0,38*c*. **41. feladat.** **1.** $l = 1{,}6$ m. **2.** $2{,}6 \cdot 10^8$ m/s. **3.** 2-szer. **4.** $\tau = 3{,}3$ év. **5.** $4{,}2 \cdot 10^7$ m/s. **7.** 0,341 pJ.

TARTALOM

Bevezetés

1. §. A fizika mint tudomány megszületése és fejlődése. A fizikai ismeretek jelentősége az ember életében és a társadalom fejlődésében ... 4
2. §. A tudományos megismerés alapjai. A fizikai mennyiségek és mérésük ... 7
3. §. Mérések. Mérési hibák ... 11
4. §. A matematika nyelve a fizika törvényeinek megfogalmazására ... 17

1. fejezet. Kinematika

5. §. A mechanika fő feladata. Mechanikai mozgás. Koordináta-rendszerek és vonatkoztatási rendszerek ... 23
6. §. Anyagi pont. Mozgáspálya. Út. Elmozdulás ... 28
7. §. Egyenes vonalú egyenletes mozgás ... 33
8. §. A mozgás viszonylagossága. Az elmozdulások és sebességek összeadásának törvényei ... 39
9. §. Változó mozgás. Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség ... 43
10. §. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás. Gyorsulás ... 47
11. §. Elmozdulás az egyenletesen gyorsuló mozgás során. Koordinátaegyenlet ... 53
    1. sz. laboratóriumi munka ... 59
12. §. A testek szabadesése. A szabadesés gyorsulása. A szabadesést végző testek mozgásegyenlete ... 61
13. §. A test görbe vonalú mozgása ... 65
14. §. Egyenletes körmozgás ... 67
    Az 1. fejezet összegzése ... 72
    Önellenőrzésre szolgáló feladatok a *Kinematika* című fejezethez ... 74

2. fejezet. Dinamika

15. §. Az inerciajelenség. Inerciális vonatkoztatási rendszerek. Newton első törvénye ... 76
16. §. Kölcsönhatás. Erő ... 81
    2. sz. laboratóriumi munka ... 85
17. §. Tehetetlenség. A test tömege ... 87
18. §. Newton második törvénye ... 89
19. §. Newton harmadik törvénye ... 93
20. §. Az általános tömegvonzás törvénye ... 96
21. §. Nehézségi erő ... 101
22. §. A test mozgása a nehézségi erő hatására ... 104
23. §. A föld műholdjai. Első kozmikus sebesség ... 110
24. §. A testek deformációja. A deformáció fajtái ... 115
25. §. Rugalmassági erő. Mechanikai feszültség. Hooke törvénye ... 118
    3. sz. laboratóriumi munka ... 123
26. §. A test súlya. A gyorsulással mozgó test súlya. Súlytalanság. Túlterhelés ... 125
27. §. Súrlódási erő ... 130
    4. sz. laboratóriumi munka ... 135
28. §. A test mozgása több erő hatására ... 137
29. §. A testek egyensúlya. Az erőnyomaték. A forgástengellyel rendelkező testek egyensúlyának feltétele ... 143
    5. sz. laboratóriumi munka ... 147

30. §. Tömegközéppont. A testek egyensúlyának fajtái ... 149
A 2. fejezet összegzése ... 154
Önellenőrzésre szolgáló feladatok a *Dinamika* című fejezethez ... 156

3. fejezet. Megmaradási törvények a mechanikában

31. §. Az impulzusmegmaradás törvénye ... 158
32. §. Reaktív mozgás. Rakéták ... 163
33. §. Mechanikai munka. Teljesítmény ... 167
34. §. Mechanikai energia. Mozgási energia ... 171
35. §. Helyzeti energia ... 174
36. §. A mechanikai energia megmaradásának törvénye ... 179
37. §. Rugalmas és tökéletesen rugalmatlan ütközés ... 184
A 3. fejezet összegzése ... 189
Önellenőrzésre szolgáló feladatok a *Megmaradási törvények a mechanikában* című fejezethez ... 191

4. fejezet. Mechanikai rezgések és hullámok

38. §. Rezgőmozgás. A rezgőmozgást jellemző fizikai mennyiségek ... 193
39. §. Harmonikus rezgések. A harmonikus rezgések egyenlete ... 196
40. §. A rugós inga rezgése ... 201
41. §. A matematikai inga rezgése ... 206
6. sz. laboratóriumi munka ... 210
42. §. A rezgőmozgás energiája ... 212
43. §. Kényszerrezgések. Rezonancia ... 217
44. §. Önrezgések ... 221
45. §. Mechanikai hullámok ... 223
A 4. fejezet összegzése ... 230
Önellenőrzésre szolgáló feladatok a *Mechanikai rezgések és hullámok* című fejezethez ... 232

5. fejezet. Relativisztikus mechanika

46. §. A speciális relativitáselmélet posztulátumai ... 234
47. §. A sebességek összeadásának relativisztikus törvénye. Az egyidejűség relativitása ... 237
48. §. A speciális relativitáselmélet posztulátumainak következményei ... 241
Az 5. fejezet összegzése ... 246

A térről és időről szóló jelenkori elképzelések. A klasszikus, relativisztikus mechanika és a kozmológia kapcsolata ... 247

Enciklopédiai oldal ... 252

Bolog Dsenna 13./14/

Навчальне видання
БАР'ЯХТАР Віктор Григорович
БОЖИНОВА Фаїна Яківна

ФІЗИКА
Академічний рівень
Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів
із навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української
Перекладачі:
Арпад Арпадович Буркуш
Атгіла Адальбертович Штерр

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *І. Е. Ковач*
Художник *Д. В. Алимова*
Коректор *І. О. Петро*

Формат 70x100/16. Папір офс.
Гарнітура Таймс. Друк офс. Умовн. друк. арк. 21,13. Обл.-вид. арк. 23,24.
Тираж 1735 пр. Зам. № 200п

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване
видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2980 від 19.09.2007
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк ВАТ „Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи Зт № 5 від 27.06.2000
e-mail: patent@uzh.ukrtel.net

KINEMATIKA

Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Gyorsulás, $\frac{m}{s^2}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$$

A sebességváltozás időtartama, s

Kezdősebesség, $\frac{m}{s}$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Végsebesség, $\frac{m}{s}$

Az elmozdulás vetülete, m

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

$$s_x = \frac{v_x + v_{0x}}{2} \cdot t$$

$$s_x = \frac{v_x^2 + v_{0x}^2}{2a_x}$$

Koordináta, m

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Kezdeti koordináta, m

Szabadesés

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

A szabadesés gyorsulása, 9,8 m/s²

$$y = y_0 + v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2}$$

Egyenletes körmozgás

Keringési idő, s

$$T = \frac{t}{N}$$

Fordulatok száma

$$n = \frac{N}{t}$$

Forgásidő, s

Fordulatszám, $\frac{1}{s}$

Lineáris sebesség, $\frac{m}{s}$

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2\pi R}{T}$$

A körvonal sugara, m

Az elfordulás szöge, rad

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

Szögsebesség, $\frac{rad}{s}$

Rezgő mozgás

Periódusidő (Rezgésidő), s

$$T = \frac{t}{N}$$

A rezgések száma

$$\nu = \frac{N}{t}$$

Rezgésszám (Frekvencia), Hz

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Körfrekvencia, s^{-1}

A rezgés fázisa, rad

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Kezdőfázis, rad

A rezgés egyenlete

Koordináta, m

$$x = A\cos\omega t$$

$$x = A\sin\omega t$$

A rezgés amplitúdója, m

$$a_x = -\omega^2 x$$

A gyorsulás vetülete, $\frac{m}{s^2}$

DINAMIKA, STATIKA

Newton második törvénye

Gyorsulás, $\frac{m}{s^2}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Tömeg, kg

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

Eredő erő, N

Gravitációs erő

A gravitációs vonzóerő, N

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

A testek tömege, kg

A testek közötti távolság, m

Gravitációs állandó, $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m}{kg^2}$

Nehézségi erő, N

$$F = mg$$

A test tömege, kg

A Föld tömege, kg

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

A Föld sugara, m

A Föld felett magasság, m

DINAMIKA, STATIKA

Elektromágneses erők

Csúszó súrlódási erő, N

Súrlódási együttható

$F_{csúszósúr} = \mu N$

A támaszték reakcióereje, N

Rugalmassági erő, N

Rugómerevség, N/m

$\vec{F}_{rug} = -k\vec{x}$

Megnyúlás, m

Viszonylagos megnyúlás

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Megnyúlás, m

Mechanikai feszültség, Pa

$\sigma = \frac{F_{rug}}{S}$

Keresztmetszet, m^2

$\sigma = E \cdot |\varepsilon|$

Young-féle modulus, Pa

Erőnyomaték, N • m

Erő, N

$M = F \cdot l$

Erőkar, m

A test egyensúlyának feltétele

$\begin{cases} M_1 + ... + M_n = 0 \\ \vec{F}_1 + ... + \vec{F}_n = 0 \end{cases}$

MUNKA, ENERGIA, LENDÜLET (IMPULZUS)

Lendület, kg · $\frac{m}{s}$

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Tömeg, kg

Mozgássebesség, $\frac{m}{s}$

Erőimpulzus, N · s

$\vec{F} \cdot t$

Erő, N

Idő, s

Az impulzusmegmaradás törvénye

Az összimpulzus a kölcsönhatás előtt

$\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} + ... + \vec{p}_{0n} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n$

Az összimpulzus a kölcsönhatás után

Mechanikai munka, J

$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$

Elmozdulás, m

Mozgási energia, J

$W_m = \frac{mv^2}{2}$

Mozgássebesség, m/s

Helyzeti energia, J

$W_h = mgh$

Magasság, h

Rugómerevség, $\frac{N}{m}$

$W_h = \frac{kx^2}{2}$

Megnyúlás, m

Az energiamegmaradás törvénye

A kezdeti teljes mechanikai energia

$W_{m0} + W_{h0} = W_m + W_h$

A végső teljes mechanikai energia

Teljesítmény, N

$P = \frac{A}{t}$

$P = F_x \cdot v$

Az erő vetülete a mozgás irányára, N

RELATIVISZTIKUS MECHANIKA

A sebességek összeadásának relativisztikus törvénye

A test sebessége mozdulatlan VR-hez képest, $\frac{m}{s}$

$v_x = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{1 + \frac{v_{1x} v_{2x}}{c^2}}$

A fény terjedési sebessége vákuumban, $c = 3 \cdot 10^8$ $\frac{m}{s}$

A tömeg-energia ekvivalencia törvény

Nyugalmi energia, J

$E_0 = mc^2$

A mozgó test energiája, J

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Lorentz-transzformáció

A VR hossza, amelyhez képest a test mozog, m

$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

A VR hossza, amelyhez képest a test nyugalomban van, m

Az idő lelassulásának effektusa

Az eltelt idő abban a VR-ben, amelyhez képest a test mozog, s

$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Az eltelt idő abban a VR-ben, amelyhez képest a test nyugalomban van, s