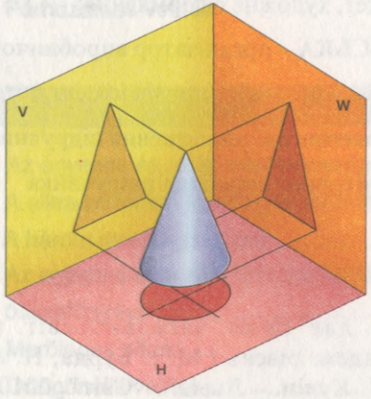
M. I. Burda, Ny. A. Taraszenkova

MÉRTAN

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 10. osztálya számára

Akadémiai szint

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma



ЧОПСЬКА
СЕРЕДНЯ ШКОЛА № 2

Львів
"Світ"
2010

УДК 514 (075)
ББК 22.151я721
Б91

Перекладано з видання :
Бурда М. І. Геометрія :
підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень /
Бурда М.І., Тарасенкова Н. А.– К. : Зодіак-ЕКО, 2010.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 3 березня 2010 р., № 177)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту,
розробник концепцій: дизайну, художнього оформлення;

Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА – автори тексту і методичного апарату;

Олег КОСТЕНКО – координатор проекту;

Олена ПОПОВИЧ – редактор-організатор;

Андрій ВІКСЕНКО – макет, художнє оформлення;

Валентина МАКСИМОВСЬКА – організатор виробничого процесу;

Галина КУЗНЄЦОВА – економічний супровід проекту;

Роман КОСТЕНКО – маркетингові дослідження підручника;

Андрій КУЗНЕЦОВ – моніторинг апробації підручника

Бурда М. І.
Б91 Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. із навчанням угорською мовою : академ. рівень / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова // переклад угорською мовою Ю. І. Кулін. – Львів. : "Світ", 2010. – 176 с. : іл.
ISBN 978-966-603-668-4

УДК 514(075)
ББК 22. 151я 721

© Бурда М. І. , Тарасенкова Н. А., 2010
© Видавництво "Зодіак-ЕКО", 2010
© Художнє оформлення. Віксенко А. М., 2010
© Концепції: дизайну, художнього оформлення Кузнецов Ю. Б., 2010
© Кулін Ю. І., переклад, 2010

ISBN 978-966-603-668-4 (угор.)
ISBN 978-966-7090-72-2 (укр.)

TARTALOM

Kedves diákok! 4

A SÍKMÉRTAN ISMÉTLÉSE

1. fejezet **BEVEZETÉS A TÉRMÉRTANBA**



1.§. A térmértan alapfogalmai és axiómái 28
2.§. Egyszerű soklapok (poliéderek) és metszeteik 37

2. fejezet **PÁRHUZAMOS EGYENESEK ÉS SÍKOK A TÉRBEN**



3.§. Két egyenes kölcsönös helyzete a térben 50
4.§. Térbeli egyenesek párhuzamossága 58
5.§. Az egyenes és a sík kölcsönös helyzete a térben 65
6.§. Két sík kölcsönös helyzete a térben 72
7.§. A párhuzamos síkok tulajdonságai 81
8.§. Párhuzamos vetítés 90

3. fejezet **EGYENESEK ÉS SÍKOK MERŐLEGESSÉGE A TÉRBEN**



9.§. Az egyenes és a sík merőlegessége 108
10.§. A síkra bocsátott merőleges és ferde 114
11.§. A három merőleges tétele 122
12.§. Az egyenes és a sík párhuzamosságának és merőlegességének összefüggése 130
13.§. Merőleges síkok 136
14.§. Ortogonális vetítés 145

A TANULTAK ISMÉTLÉSE 157

FELELETEK ÉS ÚTMUTATÁSOK 167

TÁRGYMUTATÓ 174

Kedves diákok!

Megkezditek a térmértan tanulását. Ez a mértannak az az ága, amelyik a síkidomok térbeli tulajdonságaival foglalkozik. A 9. osztályban már megismerkedtetek a síkidomok bizonyos tulajdonságaival. Már tudjátok, milyen lehet az egyenes és sík kölcsönös helyzete a térben, hogyan kell meghatározni a különböző soklapok és forgástestek felszínét és térfogatát.

Az idén a térmértannal fogtok foglalkozni még alaposabban és részletesebben. Megtanuljátok a térmértan axiómáit és azok következményeit, megtudjátok, melyek a párhuzamos és merőleges egyenesek, illetve a sík, valamint két sík tulajdonságai, hogyan lehet meghatározni a távolságot és a szöget a térben. Begyakoroljátok az órán tanult fogalmak, tulajdonságok és sajátosságok alkalmazását a feladatok megoldásakor és a gyakorlati foglalkozásokon. Rá fogtok jönni arra, hogy a térmértani ismeretek elengedhetetlenül fontosak lehetnek több szakmában is, például a tervezőmérnökök, építészek, konstruktőrök, szerszámgép-lakatosok vagy esztergályosok munkájában.

Hogyan lehet eredményesen használni a tankönyvet a mértani ismeretek elsajátításához? A tananyag három fejezetre oszlik, a fejezetek pedig paragrafusokra. A paragrafusokban elméleti anyag és feladatok vannak. Az elméleti rész tanulásakor fordítsatok különös figyelmet a keretbe foglalt szövegre. Ez tartalmazza a mértani alakzatokra vonatkozó legfontosabb meghatározásokat és tulajdonságokat, amelyeket fontos, hogy megértsetek és megjegyezzetek, hogy majd sikeresen alkalmazhassátok a feladatok megoldásánál. Az egyéb lényeges tudnivalókat **kövér** betűtípussal szedtük. *Dőlttel* a szakkifejezéseket (tudományos megnevezéseket) emeltük ki.

Ha ellenőrizni szeretnétek, hogyan tanultátok meg a paragrafust, vagy meg szeretnétek ismételni a leckét, akkor ebben a **Fontosabb tudnivalók** rovat lehet a segítségetekre, amit a paragrafus végén találhattok. A fejezetek végén viszont ellenőrző kérdések és szöveges feladatok vannak, amelyek támpontot adhatnak ahhoz, milyen alaposan sajátítottátok el az adott témát.

Olvassátok el a feladatok megoldását megkönnyítő útmutatásokat, amit a típusfeladatok tartalmaznak.

A tankönyvben található feladatokat négy nehézségi fokra osztottuk. Az alapszinthez tartoznak azok, amelyeket (′) jellel láttunk el. Ezek felkészítő jellegű feladványok, és azoknak ajánljuk, akik nem biztosak abban, hogy megértették az elméleti anyagot. A körrel (°) ellátott sorszámok a közepes nehézségű feladatok mellett állnak. Ezeket mindannyiótoknak tudnia kell megoldani, mivel enélkül nem fogtok tudni tovább haladni a tanulásban. Az általános szintű feladatok sorszámait jelöletlenül hagytuk. Ha ezeket megoldjátok, akkor biztosak lehettek abban, hogy a tudásotok megfelelő. Csillaggal (*) jelöltük a nehéz feladatokat. Amennyiben nem tudjátok első nekifutásra megoldani a nehéz feladatokat, ne keseredjetek el, legyetek türelmesek és kitartóak. A megoldás öröme mindent kárpótol majd.

A kövér betűvel leírt feladatok megoldását jól jegyezzétek meg! Ezek olyan mértani alapigazságok, amiket sikeresen alkalmazhattok más feladatoknál is.

A **Bővebben** rovat az ismeretek elmélyítésére szolgál.

A tankönyvben különleges rajzokat (piktogramokat) is találtok. A piktogramok megkönnyítik a tájékozódást a tananyagban.


Olvasd el!


Hogyan kell leírni?


Jól gondold meg!


Mi a teendő?


Jegyezd meg!


Típusfeladat

Sok sikert kívánunk az új ismeretek megszerzésében, leljetek örömöt a tanulásban!

A SÍKMÉRTAN ISMÉTLÉSE



Ebben a fejezetben megismétled:

- a síkmértan alapfogalmait;
- az axiómákat, a bizonyítás nélküli állításokat;
- a síkidomok alaptulajdonságait és ismertetőjeleit;
- a síkmértani feladatok megoldásánál alkalmazható módszereket.

SÍKMÉRTANI ALAPFOGALMAK

Már tudod, hogy a *síkmértan alapfogalma* a pont és az egyenes, az *alapviszonyai* pedig a *rajta van*, *illeszkedik*, *közte van*, *felmérés*. Ezeket a fogalmakat meghatározás nélkül vezetjük be. Ezekkel az alapfogalmakkal határozzuk meg a többi síkidomot (félegyenes, szakasz, szög és így tovább) és ezek kölcsönös helyzetét (egybevágóság, hasonlóság, párhuzamosság, stb.). Ugyanígy néhány állítást elfogadunk alapigazságnak, vagyis bizonyítás nélkül. Az ilyen állításokat *axiómáknak* nevezzük. Az összes többi állítást az axiómákra, a definíciókra és a már bizonyított tételekre támaszkodva bizonyítjuk be.

SÍKMÉRTANI AXIÓMÁK

1. Léteznek olyan pontok, melyek illeszkednek az egyenesre, és léteznek olyan pontok, melyek nem.

2. Bármely két ponton keresztül csak egy egyenes húzható.

3. Az egyenes három pontja közül az egyik a másik kettő között van.

4. Bármely F síkidom ráhelyezéssel önmagába vihető át.

5. Ha az F_1 síkidom ráhelyezéssel átvihető az F_2 síkidomra, akkor az F_2 síkidom is átvihető az F_1 síkidomra.

6. Ha az F_1 síkidom egybevágó az F_2 síkidommal és az F_2 síkidom egybevágó az F_3 síkidommal, akkor az F_1 síkidom is egybevágó az F_3 síkidommal.

→ 7. Bármely $\frac{\text{szakasz}}{\text{szög}}$ $\frac{\text{hossza}}{\text{fokmértéke}}$ nagyobb nullánál.

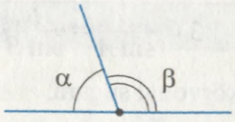
→ 8. $\frac{\text{A félegyenesre, annak kezdő pontjától}}{\text{Egy félegyenes egyik oldalára}}$ csak egy $\frac{\text{adott hosszúságú szakasz}}{\text{adott fokmértékű szög}}$ mérhető fel.

→ 9. $\frac{\text{A szakasz hossza}}{\text{A szög fokmértéke}}$ egyenlő azon $\frac{\text{szakaszok hosszának}}{\text{szögek fokmértékének}}$ összegével, melyekre $\frac{\text{bármelyik pontja}}{\text{bármelyik belső félegyenese}}$ bontja.

→ 10. *(Párhuzamossági axióma.)* Az egyeneshez nem tartozó ponton keresztül csak egy vele párhuzamos egyenes húzható.

A síkmértan könnyebb megértése érdekében nem minden axiómát fogalmaztunk meg a 7–9-es tankönyvben, de viszont alkalmaztuk azokat.

SZÖGEK ÉS PÁRHUZAMOS EGYENESEK

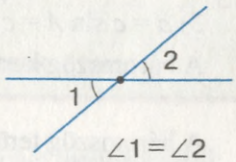


$\alpha + \beta = 180°$

1. ábra

Mellékszögeknek nevezzük azokat a szögeket (1. ábra), melyek egyik szára közös, a másik kettő pedig kiegészítő félegyenes. A mellékszögek összege 180°.

Két szöget akkor nevezünk *csúcsszög*nek, ha az egyik szög szárai a másik szög szárainak a kiegészítő félegyenesei (2. ábra). A csúcsszögek egyenlők.



$\angle 1 = \angle 2$

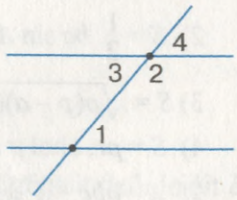
2. ábra

A párhuzamos egyenesek tulajdonságai. Ha két párhuzamos egyenest metszünk egy harmadikkal (3. ábra), akkor:

1) a társszögek összege 180°: $1\angle + 2\angle = 180°$;

2) a váltószögek egyenlők: $1\angle = 3\angle$;

3) az egyállású szögek egyenlők: $1\angle = 4\angle$.

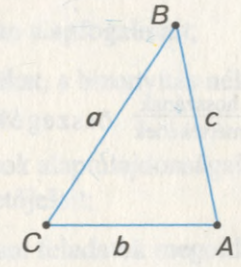


3. ábra

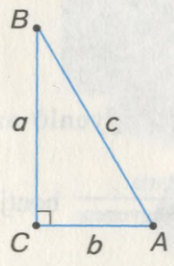
1)–3) állítások megfordítását *a párhuzamos egyenesek tulajdonságának* nevezzük. Fogalmazzátok meg önállóan!

A HÁROMSZÖG. A KÖRVONAL

Szögeik szerint megkülönböztetünk hegyesszögű, tompaszögű és derékszögű háromszöget, oldalaik szerint pedig különböző oldalú, egyenlő szárú, egyenlő oldalú vagy szabályos háromszögeket.



4. ábra



5. ábra

Bármely tetszőleges ABC háromszögben (4. ábra):

1) $A\angle + B\angle + C\angle = 180°$ (a háromszögek belső szögeiről szóló tétel);

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (koszinusz tétel);

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (szinusz tétel), ahol R a háromszög köré írt körvonal sugara.

Az ABC derékszögű háromszögben (5. ábra)::

1) $A\angle + B\angle = 90°$;

2) $c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagorasz tétele);

3) $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$.

A háromszög kerülete az oldalhosszak összegével egyenlő.

A háromszög területét az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

1) $S = \frac{1}{2} ah_a$, ahol h_a az a oldalhoz tartozó magasság;

2) $S = \frac{1}{2} bc \sin A$;

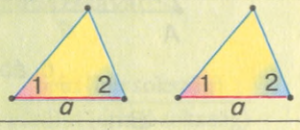
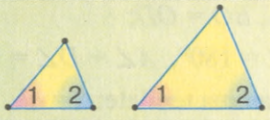
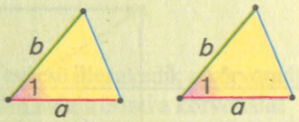
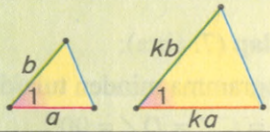
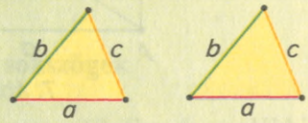
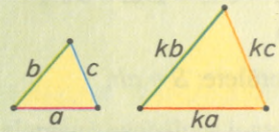
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ahol p a félkerület (Hérón képlete);

4) $S = pr$, ahol p a félkerület, r a beírt körvonal sugara;

5) $S = \frac{abc}{4R}$, ahol R a körülírt körvonal sugara.

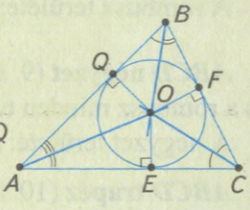
Az 1. táblázatban összefoglaltuk a háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának ismertetőjeleit. Fogalmazd meg páronként! Miben különböznek?

1. táblázat

Két háromszög egybevágó, ha	Két háromszög hasonló, ha
	
	
	

Fogalmazd meg a második táblázat alapján a beírt és a körülírt háromszögek definícióját és azok tulajdonságait!

2. táblázat

A háromszög köré írt körvonal	A háromszögbe írt körvonal
A körvonal O középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.	A körvonal O középpontja a szögfelezők metszéspontja.
$R = OA = OB = OC$	$r = OE = OF = OQ$
	

Bármely háromszög köré / Bármely háromszögbe lehet körvonalat írni, de csak egyet.

A körvonal hosszát és a körlap területét az alábbi képletekkel lehet meghatározni:

$C = 2\pi R = \pi D$, $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$, ahol R a körvonal sugara, D az átmérője.

NÉGYSZÖGEK

A táblázatok és a jelölések alapján add meg az ismert négyszögfajták definícióit és fogalmazd meg a tulajdonságaikat!

***ABCD* parallelogramma** (6. ábra):

1) $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$;

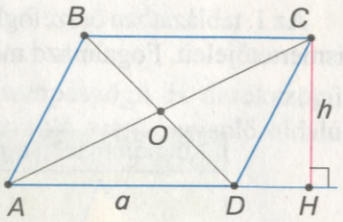
2) $AD = BC$, $AB = DC$;

3) $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$;

4) $AO = OC$, $BO = OD$;

5) $A\angle + B\angle = 180°$, $A\angle + D\angle = 180°$.

A paralelogramma területe: $S = ah$.



6. ábra

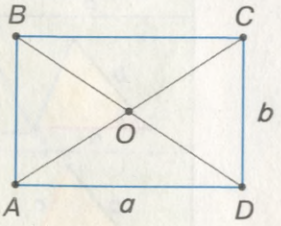
***ABCD* téglalap** (7. ábra):

1) a parallelogramma minden tulajdonsága;

2) $A\angle = B\angle = C\angle = D\angle = 90°$;

3) $AC = BD$.

A téglalap területe: $S = ab$.



7. ábra

***ABCD* rombusz** (8. ábra):

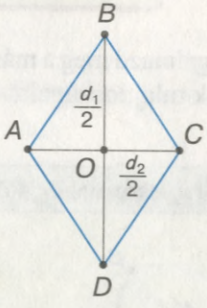
1) parallelogramma minden tulajdonsága;

2) $AB = BC = CD = DA$;

3) $AC \perp BD$;

4) $ABD\angle = CBD\angle$, $BAC\angle = DAC\angle$.

A rombusz területe: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



8. ábra

***ABCD* négyzet** (9. ábra): a parallelogramma, a téglalap és a rombusz minden tulajdonsága.

A négyzet területe: $S = a^2$.

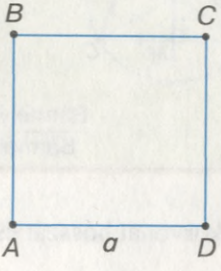
***ABCD* trapéz** (10. ábra):

1) $AD \parallel BC$;

2) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$,

ahol MN a középvonal.

A trapéz területe: $S = \frac{(a+b)h}{2}$.

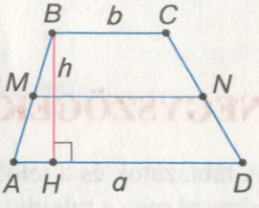


9. ábra

A húrnégyszögek és az érintőnégyszögek tulajdonságai:

1) az $MNKP$ húrnégyszögben (11. ábra):
$M\angle + P\angle = 180°$, $N\angle + K\angle = 180°$;

2) az $ABCD$ érintőnégyszögben (11. ábra):
$AB + CD = AD + BC$.



10. ábra

SOKSZÖGEK

Beírt (húr-) és körülírt (érintő-) sokszögek.

Emlékezz vissza a húr- és érintő négyszögek meghatározására! Hasonlítsd össze a könyv megfogalmazásával!

A sokszög $\frac{\text{beírt (húr sokszög)}}{\text{körülírt (érintő sokszög)}}$,

ha $\frac{\text{minden csúcsa illeszkedik a körvonalra}}{\text{minden oldala érinti a körvonalat}}$.

Szabályos sokszögek

Fogalmazd meg a 12. ábra és az alábbi felírások alapján a szabályos n-szög definícióját és tulajdonságait!

1) $AB = BC = \ldots = AF$ és $A\angle = B\angle = \ldots = F\angle$;

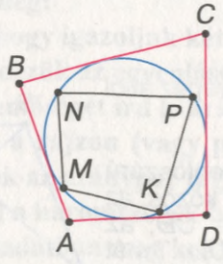
2) az O pont a beírt és a köré írt körvonalának a középpontja;

3) $AOF\angle = \frac{360°}{n}$;

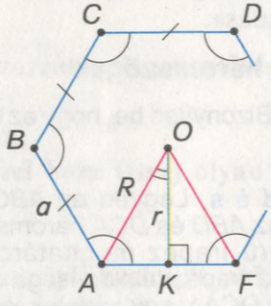
4) $A\angle + B\angle + \ldots + F\angle = 180°(n-2)$;

5) $r = \frac{AK}{\operatorname{tg} AOK\angle} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}}$;

6) $R = \frac{AK}{\sin AOK\angle} = \frac{a}{2 \sin \frac{180°}{n}}$.



11. ábra



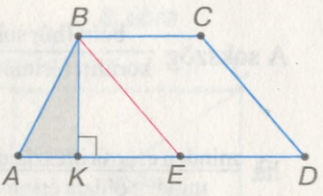
12. ábra

A SÍKMÉRTANI FELADATOK MEGOLDÁSÁNÁL ALKALMAZHATÓ MÓDSZEREK

1. SEGÉDHÁROMSZÖGEK ALKALMAZÁSA

Háromszögek, nem egybevágó háromszögek

Feladat. Határozd meg annak a trapéznak a magasságát, melynek alapjai a és c ($a > c$), és az a lapon fekvő szögek α és β.



13. ábra

Megoldás. Legyenek az $ABCD$ trapéz alapjai $AD = a$ és $BC = c$, az $A\angle = \alpha$ és a $D\angle = \beta$ (13. ábra). Húzzuk meg a CD oldallal párhuzamos BE egyenest, $BE \parallel CD$. Így az ABE háromszögben $AE = a - c$, $BAE\angle = \alpha$, $BEA\angle = CDA\angle = \beta$.

Írjuk le a szinusztételt, majd fejezzük ki az AB oldalt: $\dfrac{AB}{\sin\beta} = \dfrac{AE}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}$,

ebből $AB = \dfrac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. (1)

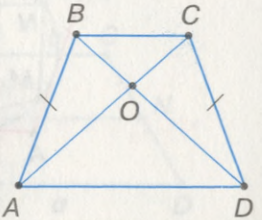
Húzzuk meg a trapéz BK magasságát! Az $ABK\Delta$ derékszögű.
Ezért $BK = AB \cdot \sin\alpha$. (2)

Helyettesítsük be az (1) egyenlőséget a (2)-ba: $BK = \dfrac{(a-c)\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Mértani feladatok megoldásánál az alábbi tervet kövesd:
1) keress a rajzon háromszöget (ha nincs, akkor pótszerkesztéssel hozz létre), mely megoldható (a mi esetünkben ez az *ABE* háromszög);
2) a feladatot akkor végezted el, ha a meghatározott elem (az *AB* oldal) megfelel a feladat feltételeinek;
3) ha nem, akkor a meghatározott elem felhasználásával keress újabb háromszöget a rajzon (*ABK* háromszög). Ha a második háromszög meghatározott eleme (*BK* magasság) megfelel a feladat feltételeinek, akkor elmondhatod, hogy megoldottad a feladatot. Ha nem, akkor keress harmadik háromszöget, és így tovább, amíg nem jutsz olyan háromszöghöz, melynek az oldala vagy a szöge a feladat megoldása.

Egybevágó háromszögek

Feladat. Bizonyítsd be, hogy az egyenlőszárú trapéz átlói egyenlők!



14. ábra

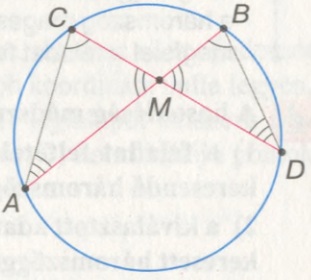
Megoldás. Legyen az $ABCD$ trapéz egyenlőszárú (14. ábra). Az ABD és DCA háromszög AD oldala közös, az egyenlőszárú trapéz meghatározásából $AB = CD$, az egyenlőszárú trapéz tulajdonsága alapján $A\angle = D\angle$. Tehát az $ABD\Delta = DCA\Delta$ egy oldaluk és a rajta lévő két szög egyenlősége miatt. Az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai egyenlők, ezért $AC = BD$.

Jegyezd meg:
– ahhoz, hogy igazoljuk két szakasz vagy két szög egyenlőségét:
1) keressünk a rajzon két olyan háromszöget, melynek elemei a feladat feltételében szereplő szakaszok (szögek);
2) bizonyítsuk be, hogy ezek a háromszögek egybevágók;
3) vonjuk le a következtetést, hogy az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai (szögei) egyenlők.
– ha egy feladatban valamely szakaszt (szöget) kell meghatározni, akkor célszerű olyan egybevágó háromszögeket keresni, melyek közül az egyiknek az adott szakasz az oldala (szög a szöge).

Hasonló háromszögek

Hasonló háromszögeket alkalmazunk olyan egyenlőségek igazolására, melyekben szakaszpárok szorzata van.

F e l a d a t. Ha egy körvonal két tetszőleges AB és CD húrja egy M pontban metszi egymást, akkor $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Bizonyítsd be!



15. ábra

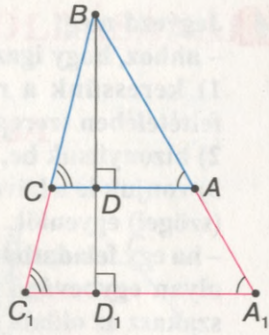
M e g o l d á s. Elemezzük a feladatot (15. ábra). Tételezzük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőség teljesül. Írjuk le az egyenlőséget aránypár alakban: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. Az aránypárból következik, hogy azok a háromszögek, melyeknek az AM és CM, valamint a DM és BM szakaszok az oldalai, hasonlók kell, hogy legyenek. Valóban, az $AMC\angle = DMB\angle$, mivel csúcsszögek, és az $ACM\angle = DMB\angle$, mert mind a két szög az AD ívhez tartozik. Tehát az $AMC\Delta \sim DMB\Delta$, megfelelő két szögük páronként egyenlő. Kövessünk fordított gondolatmenetet, tehát az $AMC\Delta \sim DMB\Delta$ hasonlóságából következik a megfelelő oldalak aránya $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. Ebből következik, hogy $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Jegyezd meg:
– ahhoz, hogy igazoljuk két-két szakasz szorzatának egyenlőségét:
1) feltételezzük az egyenlőség teljesülését;
2) az egyenlőséget írd le aránypár alakban;
3) keress a rajzon (vagy pótszerkesztéssel hozz létre) olyan háromszögeket, melyeknek az aránypár tagjai az oldalai;
4) igazold a háromszögek hasonlóságát.
– ha a feladatban meg kell határozni valamelyik szakaszt, akkor célszerű azt a két hasonló háromszög közül az egyik oldalának tekinteni, majd leírni a megfelelő aránypárt.

2. A HASONLÓSÁG MÓDSZERE

A hasonlóság módszerét szerkesztési feladatoknál szokták alkalmazni.

Feladat. Szerkessz ABC háromszöget, ha adott az A és C szöge, valamint a B szögből húzott h magasság!



16. ábra

Megoldás. Vegyünk egy A_1C_1 tetszőleges szakaszt, majd szerkesszünk az A és C szögek alapján A_1BC_1 háromszöget, amely hasonló a keresettel (16. ábra). Majd szerkesszük meg a háromszög BD_1 magasságát. A BD_1 félegyenesre mérjük fel a $BD = h$ szakaszt, és a D ponton keresztül húzzunk párhuzamost: $AC \parallel A_1C_1$. Az $ABC\Delta$ a keresett háromszög. Valóban, mivel $AC \parallel A_1C_1$, ezért $A\angle = A_1\angle$ és $C\angle = C_1\angle$, vagyis az ABC háromszög két szöge egyenlő az adott szögekkel. A szerkesztés alapján a háromszög magassága $BD = h$. Így az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek.

A hasonlóság módszerével megoldható szerkesztési feladatok menete:

1) a feladat feltételei közül válasszuk ki azokat, melyek meghatározzák a keresendő háromszög fajtáját (az oldalak arányát, szögeit);

2) a kiválasztott adatok alapján szerkesszünk segédháromszöget, ami hasonló a keresett háromszöggel;

3) szerkesszük meg a keresett háromszöget azon adatok alapján, melyek meghatározzák a háromszög méreteit (szakaszok hosszát).

3. A MÉRTANI HELYEK MÓDSZERE

Feladat. Szerkeszd meg az ABC háromszögnek azt a belső pontját, amely egyenlő távolságra van a szög száraitól és az adott M ponttól d távolságra található!

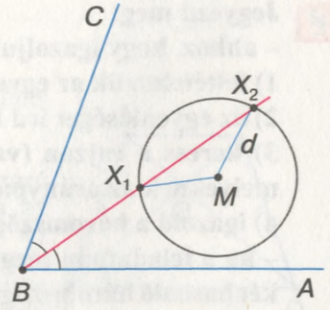
Megoldás.

Elemzés (17. ábra). Az X pontra vonatkozóan két feltételnek kell teljesülnie:

1) egyenlő távolságra van az ABC szög száraitól;

2) d távolságra van az M ponttól.

Az első feltételnek megfelelő pontok mértani helye az ABC szög szögfelezője. A második feltételt kielégítő pontok mértani helye az M középpontú d sugarú körvonal. A keresett X pont a két alakzat metszéspontja.



17. ábra

Szerkesztés. Szerkesszük meg az $ABC\angle$ szögfelezőjét, és az M középpontú d sugarú körvonalat. Jelöljük ki a szögfelező és a körvonal X metszéspontját. Ilyen pontokból lehet kettő: X_1 és X_2 (17. ábra), vagy egy, vagy egy sem.

A mértani helyek módszerével megoldható feladatok menete:

1) elemezzük a feladat feltételeit, és határozzuk meg a keresett pontot;

2) tisztázzuk, milyen két feltételnek felel meg;

3) határozzuk meg a feltételeket kielégítő pontok mértani helyét;

4) vonjuk le a következtetést, a keresett pont a kapott mértani helyek metszéspontja.

4. A KOORDINÁTA-MÓDSZER

Ha koordináta-módszerrel szeretnénk megoldani a feladatot, akkor az adott síkidomot helyezzük a koordináta-rendszerbe úgy, hogy a lehető legtöbb koordináta nulla legyen, vagy a koordináták egyenlők legyenek. Például, az $ABCD$ téglalapot célszerű úgy elhelyezni, hogy a csúcsai az $A(0; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; b)$ és $D(a; 0)$ koordinátájú pontok legyenek.

Feladat. Bizonyítsd be, hogyha egy parallelogramma átlói egyenlők, akkor ez a parallelogramma téglalap!

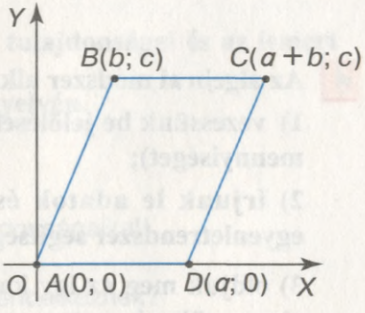
Megoldás. *Első lépés.* Fogalmazzuk át a feladatot koordinátákkal. Helyezzük el a parallelogrammát egy koordináta-rendszerbe úgy, hogy a csúcsok az $A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a + b; c)$ és $D(a; 0)$ pontok legyenek (18. ábra).
A feladat feltételei szerint $AC = BD$. Írjuk le az A és a C, valamint a B és a D pontok távolságát koordinátáikkal:

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2},$$

$$(a + b)^2 + c^2 = (a - b)^2 + c^2.$$

Második lépés. Alakítsuk át a kapott egyenlőséget:
$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2$,
ebből $4ab = 0$.

Harmadik lépés. Az utolsó egyenlőségből kapjuk, mivel $a > 0$, ezért $b = 0$. Ez azt jelenti, hogy a $B(b; c)$ pont az OY tengelyre illeszkedik. Ezért a BAD szög derékszög, vagyis az $ABCD$ parallelogramma téglalap.



18. ábra

A koordináta-módszer alkalmazásával az alábbi három lépést kell végrehajtani a feladatok megoldásánál:

1) fogalmazzuk meg a feladat feltételeit koordinátákkal;

2) alakítsuk át az algebrai kifejezést;

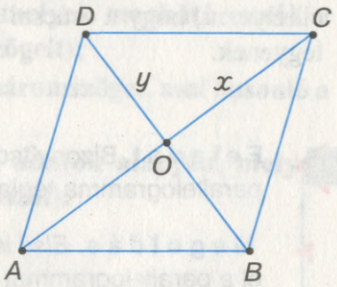
3) fogalmazzuk meg a kapott eredményt a mértan nyelvén.

5. AZ ALGEBRAI MÓDSZER

Feladat. Egy rombusz kerülete $2p$, átlóinak összege m. Határozd meg a rombusz területét!

Megoldás. Legyen a rombusz átlója x és y (19. ábra). A feladat feltételei alapján $x + y = m$.

Az AOD derékszögű háromszögből: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, mivel a rombusz oldala a kerületének a negyedével egyenlő: $a = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$. Szorozzuk meg a második egyenlet mindét oldalát 4-gyel, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk: $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = p^2 \end{cases}$.



19. ábra

Az egyenletrendszerből határozzuk meg x és y szorzatát. Ehhez az első egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre, majd vonjuk ki a második egyenletből az első egyenletet. Azt kapjuk, hogy $2xy = m^2 - p^2$, ebből $xy = \frac{m^2 - p^2}{2}$.

A rombusz területe az átlók szorzatának felével egyenlő, ezért $S = \frac{1}{2}xy = \frac{m^2 - p^2}{4}$.

Az algebrai módszer alkalmazásánál az alábbi lépéseket kell követni:

1) vezessünk be jelöléseket (a leggyakrabban x, y, z betűvel jelöljük a keresett mennyiséget);

2) írjunk le adatok és változók közötti összefüggéseket egyenlet vagy egyenletrendszer segítségével;

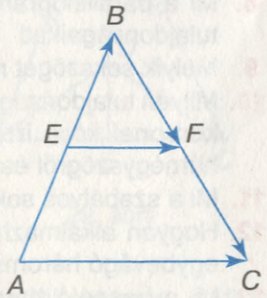
3) oldjuk meg az így kapott egyenletet vagy egyenletrendszert. Ha szükséges, elemezzük a kapott megoldást.

BŐVEBBEN

A VEKTOROK MÓDSZERE

Feladat. Bizonyítsd be, hogy a háromszög középvonala párhuzamos az oldallal és feleakkora!

Megoldás. Legyen EF az ABC háromszög egyik középvonala (20. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $EF \parallel AC$ és $EF = \frac{1}{2} AC$!



20. ábra

Első lépés. Fogalmazzuk meg a feladat feltételeit vektorokkal: jelöljük a rajzon az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{EF}$ vektorokat.

Így a feladat követelményét az $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ egyenlőséggel írhatjuk le.

Második lépés. A háromszög szabály szerint $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$. Alakítsuk át ezt az egyenlőséget, figyelembe véve, hogy $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Harmadik lépés. Az utolsó vektor-egyenlőségből következik, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$:

1) az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok kollineárisak, és így párhuzamosak;

2) $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|$, vagy $EF = \frac{1}{2} AC$.

Ahhoz, hogy a vektorok módszerével oldjuk meg a kitűzött feladatot, az alábbi három lépést kell végrehajtani:
1) fogalmazzuk át a feladatot vektorokkal. Ehhez először a feladatban szereplő szakaszok közül néhányat értelmezzük vektorként, majd írjuk le a vektor-egyenlőséget;
2) alakítsuk át az egyenlőséget a vektor-műveletek tulajdonságai és az ismert vektor-egyenlőségek alapján;
3) a kapott eredményt fogalmazzuk meg a mértan nyelvén.

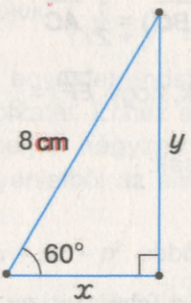
FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Sorold fel a főbb síkidomokat és nevezd meg főbb tulajdonságaikat!
2. Fogalmazd meg a síkmértan axiómáit!
3. Mi a csúcsszög; a mellékszög? Milyen tulajdonsággal rendelkeznek?
4. Fogalmazd meg a párhuzamos egyenesek tulajdonságait, ismertetőjelét!

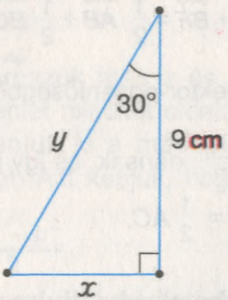
5. Nevezd meg az általános és a derékszögű háromszög oldalai és szögei közötti összefüggéseket!
6. Sorold fel a háromszög területének képleteit!
7. Sorold fel a háromszögek egybevágóságának; hasonlóságának ismertetőjeleit!
8. Mi a parallelogramma, a téglalap, a rombusz, a négyzet, a trapéz? Sorold fel a tulajdonságaikat!
9. Melyik sokszöget nevezzük húrsokszögnek; érintősokszögnek?
10. Milyen tulajdonságai vannak a körvonalba írt háromszögnek, a húrháromszögnek; a körvonal köré írt háromszögnek, az érintőháromszögnek? Mi mondható el a húrnégyszögről és az érintőnégyszögről?
11. Mi a szabályos sokszög? Sorold fel a tulajdonságait!
12. Hogyan alkalmazható a segédháromszög (egy vagy több különböző háromszög, egybevágó háromszög, hasonló háromszög) különböző feladatok megoldásánál?
13. Mi a hasonló háromszögek módszerének és a mértani helyek módszerének a lényege?
14. Sorold fel a koordináta-módszer lépéseit!
15. Magyarázd el az algebrai módszer lépéseit!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

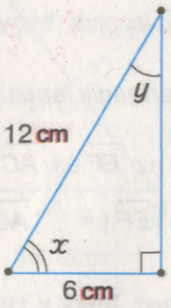
1'. Határozd meg x és y értékét a 21–23. ábrán feltüntetett adatok alapján!



21. ábra

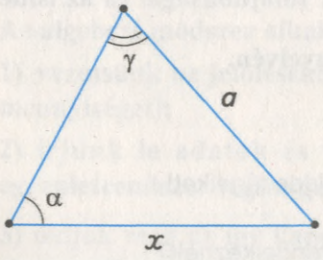


22. ábra

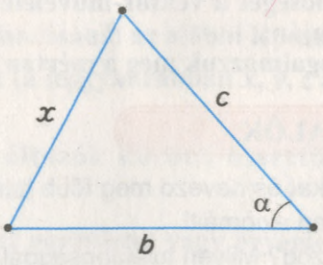


23. ábra

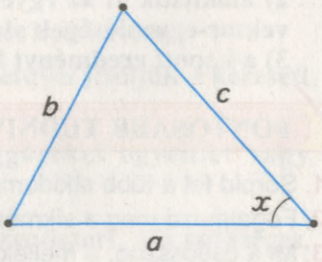
2'. Írd le a 24–26. ábrán feltüntetett adatokkal, hogyan határozható meg a háromszög ismeretlen x eleme?



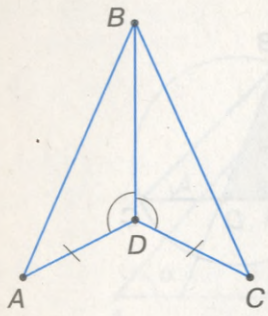
24. ábra



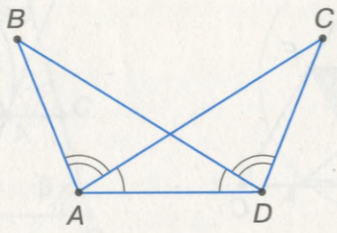
25. ábra



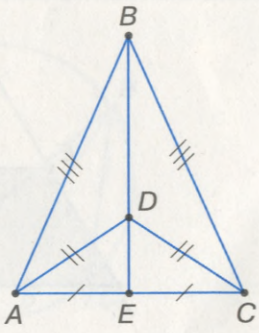
26. ábra



27. ábra



28. ábra



29. ábra

3'. Keress a 27–29. ábrákon egybevágó háromszögeket! Indokold meg, miért egybevágók!

4'. Egy háromszög oldalainak hossza a, b és c. A hozzá hasonló háromszög legrövidebb oldala d. Határozd meg a hasonló háromszög ismeretlen oldalait, ha:

1) $a = 6$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm, $d = 18$ cm;
2) $a = 13$ cm, $b = 7$ cm, $c = 15$ cm, $d = 14$ cm;
3) $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $c = 5$ cm, $d = 10$ cm!

5°. Határozd meg a téglalap átlója és hosszabbik oldala közötti hajlásszöget, ha oldalai:

1) 5 cm és 12 cm; 2) 6 cm és 8 cm; 3) 8 cm és 15 cm!

6°. Egy parallelogramma átlója d, oldala a, a köztük lévő hajlásszög pedig α. Határozd meg a parallelogramma ismeretlen átlóját, oldalát és szögeit, ha:

1) $d = 10$ cm, $a = 6$ cm, $\alpha = 20°$;
2) $d = 12$ cm, $a = 5$ cm, $\alpha = 35°$;
3) $d = a = 5$ cm, $\alpha = 32°$!

7°. Az AB és CD szakasz az O pontban metszi egymást. Az O pont mind a két szakaszt felezi. Határozd meg: 1) a BC szakaszt, ha $AD = 7$ cm;
2) az ABC szöget, ha $BAD\angle = 72°$!

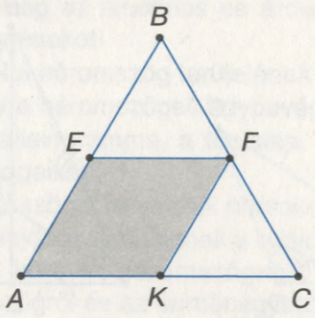
8°. Egy egyenlőszárú háromszög alapja b, a szára pedig a. A hozzá hasonló háromszög alapja c. Határozd meg a háromszög kerületét, ha:

1) $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 6$ cm;
2) $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm;
3) $a = 25$ cm, $b = 14$ cm, $c = 28$ cm!

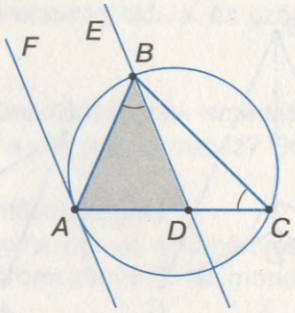
9. Egy egyenlőszárú trapéz átlója a hegyesszögének szögfelezője, alapjai a és b. Határozd meg a trapéz kerületét, ha:

1) $a = 5$ cm, $b = 9$ cm;
2) $a = 8$ cm, $b = 4$ cm!

10. Bizonyítsd be, ha egy egyenlőszárú trapéz átlói kölcsönösen merőlegesek egymásra, akkor a trapéz középvonala egyenlő a magasságával!



30. ábra



31. ábra

11. A rombusz tompaszögéből húzott magassága felezi a rombusz oldalát. Rövidebb átlója 12 cm.
Határozd meg a rombusz:
1) szögeit;
2) kerületét!

12. Az *ABCD* paralelogramma átlóinak *O* metszéspontján keresztül egy egyenest húztak. Ez az egyenes a *BC* és az *AD* oldalakat megfelelően az *M* és *N* pontban metszi.
1) Bizonyítsd be, hogy $OM = ON\Delta$.
2) Határozd meg a parallelogramma *AD* és *BC* oldalait, ha $BM = 4$ cm, $AN = 6$ cm!

13. Bizonyítsd be, hogy az egyenlőszárú háromszögben:
1) az alapon lévő szögek szögfelezői egyenlők;
2) ezekből a csúcsokból húzott súlyvonalak is egyenlők!

14. Egy szabályos háromszögbe rombuszt írtak úgy, hogy egyik szögük közös (30. ábra).
1) Bizonyítsd be, hogy a rombusz oldala feleakkora, mint a háromszög oldala!
2) Határozd meg a rombusz kerületét, ha a háromszög kerülete 18 cm!

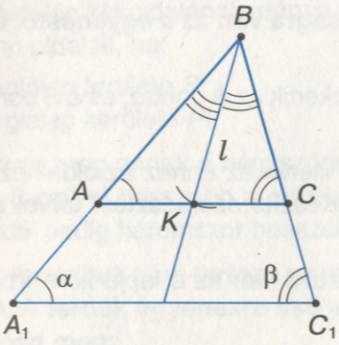
15. Ha a körvonalon kívül lévő *M* ponton keresztül két szelőt húztak, melyek a körvonalat az *A*, *B*, *C* és *D* pontokban metszik, akkor $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Bizonyítsd be!

16. A körvonalon kívül lévő *M* ponton keresztül egy szelőt húztak, mely a körvonalat az *A* és a *B* pontban metszi, és egy érintőt, amely a körvonalat *C* pontban érinti. Bizonyítsd be, hogy $CM^2 = AM \cdot BM$!

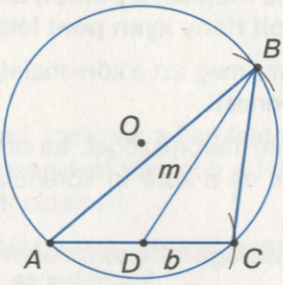
17. Egy trapéz egyik alapon lévő szögeinek összege 90°. Bizonyítsd be, hogy a trapéz magassága a szárak alapra eső vetületeinek mértani közepe!

18*. Bizonyítsd be, hogy az *ABC* háromszög *A* csúcsából húzott súlyvonala rövidebb az *AB* és *AC* oldalak számtani közepénél!

19*. Az *ABC* háromszög húrháromszög (31. ábra). Az *A* csúcson keresztül érintőt húztak, a *B* csúcson keresztül pedig az érintővel párhuzamos egyenest, amely a *D* pontban metszi az *AC* oldalt, vagy annak meghosszabbítását. Bizonyítsd be, hogy $AB^2 = AC \cdot AD$!



32. ábra



33. ábra

Oldd meg a 20–26. feladatot hasonlóság alkalmazásával!

20'. Szerkeszd meg az adott hosszúságú szakaszok középarányosát, ha hosszuk:

1) 9 cm és 1 cm;

2) 2 cm és 8 cm

3) 4 cm és 4 cm!

21°. Szerkessz *ABC* háromszöget, ha adott:

1) $A\angle = 60°$, $B\angle = 70°$, $l_c = 4$ cm;

2) $A\angle = 50°$, $C\angle = 80°$, $h_b = 3$ cm;

3) $B\angle = 40°$, $C\angle = 75°$, $l_a = 5$ cm!

22. Szerkessz háromszöget, ha adott α és β szöge, valamint a harmadik szög l szögfelezője! Készíts tervet a 32. ábra alapján!

23. Szerkessz háromszöget, ha adott két szöge és a harmadik csúcsból húzott súlyvonala!

24. Szerkessz háromszöget, ha adott egyik szöge, a szöget bezáró két oldal aránya és a harmadik oldalhoz tartozó:

1) súlyvonala;

2) magassága!

25. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott:

1) a befogók és az átfogó aránya;

2) az egyik befogó és az átfogó aránya, valamint a másik befogó!

26*. Szerkessz parallelogrammát, ha adott az átlók aránya és a hajlásszögük, továbbá az egyik oldala!

Oldd meg a 27–33. feladatot a mértani helyek módszerével!

27'. Határozd meg az *A* szög oldalait metsző *a* egyenesen azt a pontot, amely azonos távolságra van a szög száraitól!

28°. Szerkeszd meg azt a pontot, amely azonos távolságra van az *ABC* szög száraitól, illetve az *M* és *N* ponttól!

29. **Határozd meg azt a pontot, amely *n* távolságra van az *a* egyenestől és *m*-re az *M* ponttól! Hány ilyen pont létezik?**

30. Szerkeszd meg azt a körvonalat, amely illeszkedik az *A* pontra, és a *B* pontban érinti az *a* egyenest!

31. Szerkessz háromszöget, ha adott *b* oldala, illetve az ehhez az oldalhoz tartozó *m* súlyvonal és a köré írt körének *R* sugara! Készíts szerkesztési tervet a 33. ábra alapján!

32. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, ha adva van az *a* lapja köré írt körének *R* sugara!

33*. Szerkessz háromszöget, ha adott az *a* oldal, a hozzá tartozó *m* súlyvonal és a másik oldalhoz tartozó *h* magasság!

Oldd meg a 34–38. feladatot a koordináta-módszerrel!

34'. Határozd meg a szakaszok hosszát, ha a végpontjai az alábbi pontok:

1) $A\,(4; -2)$, $B\,(-2; 6)$;

2) $A\,(4; -2)$, $B\,(1; 2)$;

3) $O\,(0; 0)$, $D\,(5; 12)$!

35°. *CH* az *ABC* egyenlőszárú háromszög *AB* oldalához tartozó magasság. Határozd meg a szárhoz tartozó súlyvonal hosszát, ha:

1) $AB = 12$ cm, $CH = 4$ cm;

2) $AB = 4$ cm, $CH = 6$ cm!

36. Bizonyítsd be, hogy az átfogó felező pontja azonos távolságra van a derékszögű háromszög csúcsaitól!

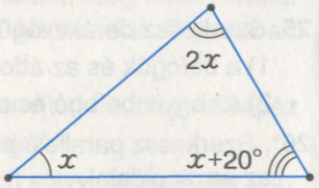
37. Ha az *ABCD* négyszög téglalap, akkor a sík bármely tetszőleges *M* pontjára teljesül, hogy $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Bizonyítsd be!

38. Bizonyítsd be, hogy a parallelogramma átlók négyzetének összege egyenlő az oldalak négyzeteinek összegével!

39*. Bizonyítsd be, hogy a trapéz átlók négyzetének összege egyenlő a szárak négyzeteinek és az alapok kétszeres szorzatának összegével!

Oldd meg a 40–45. feladatot algebrai módszerrel!

40'. Határozd meg a háromszög szögeit a 34. ábrán feltüntetett adatok alapján!



34. ábra

41°. Egy háromszög egyik oldala kétszer hosszabb a másik oldalánál, a harmadik oldal pedig *a*. A háromszög kerülete *P*.

Határozd meg a háromszög ismeretlen oldalait, ha:

1) $a = 5$ cm, $P = 35$ cm;

2) $a = 7$ cm, $P = 43$ cm;

3) $a = 8$ cm, $P = 29$ cm!

42. Egy téglalap két oldalának aránya $m : n$. Írd le, milyen képlettel lehet meghatározni a téglalap oldalait, ha:

1) a téglalap területe S;
2) a téglalap kerülete P!

43. Határozd meg annak a négyszögnek az oldalait, melynek a kerülete 66 cm, egyik oldala 8 cm-rel hosszabb a másiknál és ugyanennyivel rövidebb a harmadiknál, a negyedik pedig háromszor hosszabb a második oldalnál!

44. Az egyeneshez nem tartozó pontból két ferdét húztak, melyek hossza 10 cm és 17 cm. A ferdék egyenesre eső vetületeinek az aránya 2 : 5.
Határozd meg:

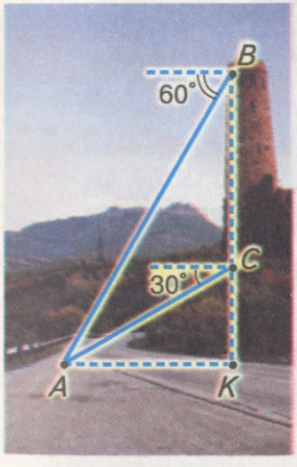
1) a ferdék vetületeit;
2) a pont és az egyenes távolságát!

45*. Egy rombusz átlóinak összege m, területe S.
Határozd meg az átlókat, ha:
1) $m = 10$ cm, $S = 8$ cm^2;
2) $m = 26$ cm, $S = 72$ cm^2.

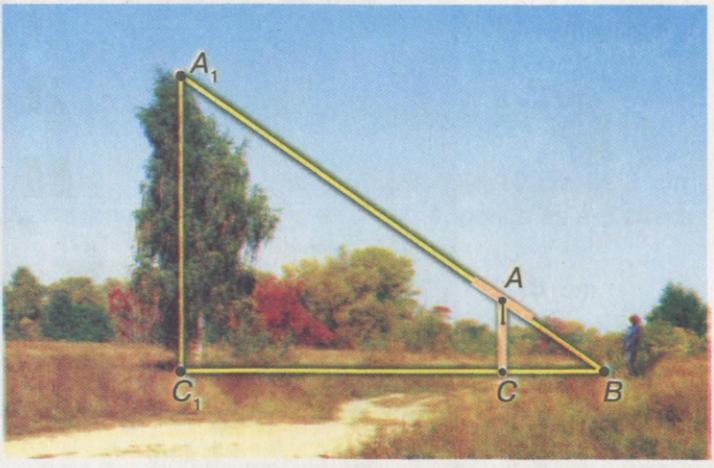
GYAKORLATI ALKALMAZÁS

46. A hegy tetején egy 70 m magas torony áll (35. ábra). A hegy lábánál lévő tárgy (A pont) a toronyból (B pont) a látóhatárhoz viszonyítva 60°-os szög alatt látszik, a torony aljából (C pont) pedig 30°-os szög alatt.
Mekkora a hegy?

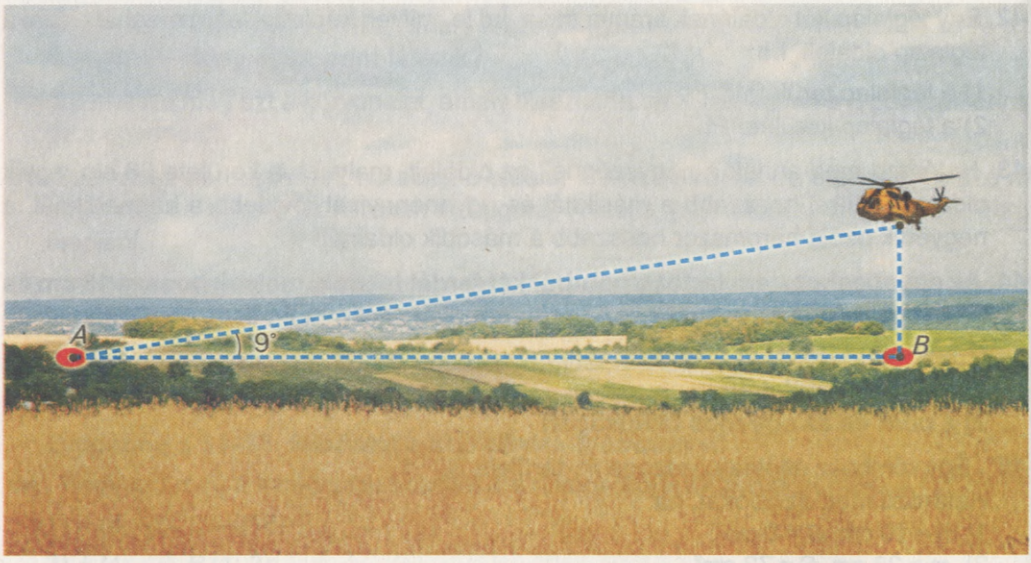
47. A 36. ábrán látható, hogyan határozható meg egy fa magassága kitűző rúddal. Magyarázd meg a mérést!



35. ábra



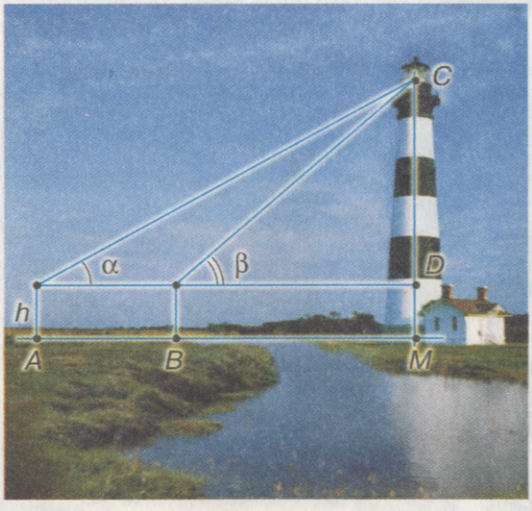
36. ábra



37. ábra

48. Az *A* pontban tartózkodó megfigyelőket arról tájékoztatták, hogy a helikopter 500 méterrel a *B* pont felett van (37. ábra). Az *A* pontból a helikopter 9°-os szög alatt látszik. Milyen messze van a *B* pont az *A* ponttól?

49. A világítótornyot nem lehet megközelíteni (38. ábra). Határozd meg a torony magasságát, ha $AB = 10$ m, $\alpha = 45°$, $\beta = 50°$, a szögeket mérő műszernek a h magassága pedig 1,5 m!



38. ábra

TESZTFELADATOK

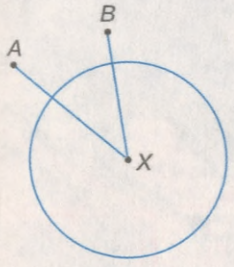
Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld meg a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

1° Az AB és CD szakasz az O pontban metszi és felezi egymást. Milyen háromszögek egybevágóságából következik, hogy $BC = AD$?

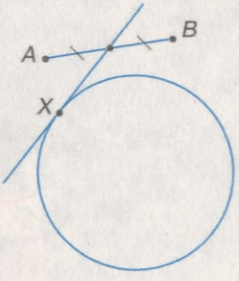
A. $BOC\Delta$ és $BOD\Delta$. **B.** $BOC\Delta$ és $AOC\Delta$. **C.** $ABD\Delta$ és $ACD\Delta$. **D.** $BOC\Delta$ és $AOD\Delta$.

2° Adott körvonalon meg kell határozni az A és B pontoktól azonos távolságra lévő pontot! Melyik szerkesztés helyes?

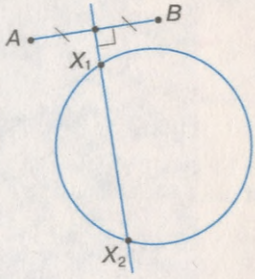
A.



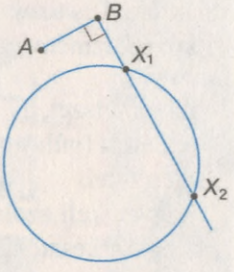
B.



C.



D.



3° A körvonal egyik pontjából merőlegest húztak a körvonal átmérőjére. Határozd meg a merőleges hosszát, ha a talppontja 4 cm-es és 9 cm-es szakaszokra osztja az átmérőt!

A. 13 cm. **B.** 6 cm. **C.** 36 cm. **D.** $\sqrt{13}$ cm.

4 Határozd meg az $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(2; -3)$ pontokkal megadott háromszög AM súlyvonalát!

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $3\sqrt{2}$ cm.

5* Az $ABCD$ derékszögű trapéz ($A\angle = 90°$) AD és BC alapja 10 cm és 3 cm, magassága 4 cm. Határozd meg a hosszabbik alap középpontja és a C csúcs távolságát!

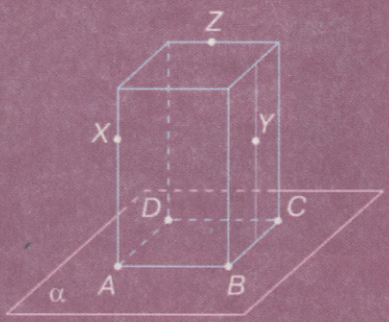
A. 5 cm. **B.** 4 cm. **C.** $\sqrt{5}$ cm. **D.** $2\sqrt{5}$ cm.

1. FEJEZET

BEVEZETÉS A TÉRMÉRTANBA

Ebben a fejezetben megtudod:

- mit tanulmányoz a térmértan;
- mit tekintünk térmértani alapfogalmaknak;
- mik a térmértan axiómái és azok következményei;
- mi a metszet, a téglatest (gúla) metszetei, hogyan kell azokat megszerkeszteni;
- hogyan kell alkalmazni az megismert tulajdonságokat a gyakorlatban és feladatok megoldásánál.

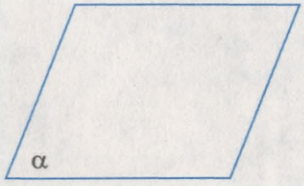





Z
X
D
B
A

1.§. A TÉRMÉRTAN ALAPFOGALMAI ÉS AXIÓMÁI

Már tudod, hogy a *térmértan*, a *sztereometria* a testek tulajdonságait tanulmányozza. Ehhez, akárcsak a síkmértanban, *axiomatikus felépítést* alkalmazunk. Először válasszuk ki az *alapfogalmakat*. Ezeket a fogalmakat nem definiáljuk, mindössze példákon szemléltetjük. Az alapigazságokat, *axiómákat* szintén elfogadjuk és nem bizonyítjuk. A többi fogalmat definiáljuk, az állításokat bizonyítjuk.



39. ábra

A térmértan alapfogalmai a *pont*, az *egyenes* és a *sík*, a reláció szakkifejezései pedig az *illeszkedés*, a *közte van* és az *egybevágóság*. A síkokat leggyakrabban parallelogrammával ábrázoljuk (39. ábra).

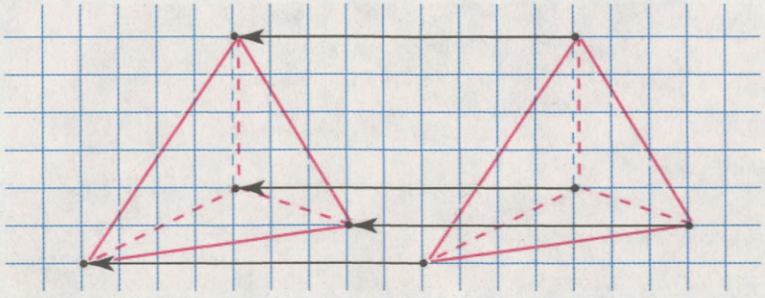
A térmértanban a síkmértanhoz hasonlóan a pontokat a latin ábécé nagy írott betűivel jelöljük: A, B, C, …; az egyeneseket a latin ábécé írott kisbetűjével: a, b, c, …; a síkokat pedig a görög ábécé kisbetűivel: α (alfa), β (béta), γ (gamma)… .

Az új mértani alapfogalom, a sík bevezetése szükségessé teszi a térelemek kölcsönös helyzetének pontosítását, a síkmértani axiómák kibővítését.

Az „illeszkedés” relációt nem csak a pont és az egyenes esetében kell vizsgálni, a pont *rajta van* az egyenesen, hanem a pont és a sík, az egyenes és a sík esetében is, a pont (az egyenes) *rajta van* a síkon.

Három, egy egyenesre illeszkedő pont esetében a „közte van” reláció nem függ a térbeli elhelyezkedéstől, ezért a térmértanban is alapfogalomnak számít.

A térbeli „egybevágóságot” úgy értelmezzük, hogy a két test minden pontja fedésbe hozható (40. ábra).


40. ábra

A térmértan axióma rendszere két részből áll. Az első rész tartalmazza a síkmértan összes axiómáját. Ezek az axiómák érvényesek a tér minden síkjában.

Jegyezd meg:

1) a síkmértanban tanult összes síkidom valamennyi tulajdonsága teljesül a tér minden síkjában;

2) ha két pontról (két egyenesről) van szó, akkor ez a két pont (két egyenes) különböző, vagyis nem illeszkedő.

A második rész azokat a térmértani axiómákat foglalja magába, melyek a pontok, az egyenes és a sík kölcsönös helyzetét határozzák meg. Ezeket egyszerűen a *térmértan axiómáinak* nevezzük. Fogalmazzuk meg ezeket az axiómákat!

1. axióma (illeszkedési axióma).
Léteznek a síkra illeszkedő és a síkra nem illeszkedő pontok.

A 41. ábrán az A pont illeszkedik, a B pont pedig nem illeszkedik az α síkra.

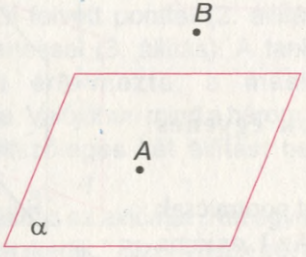
Ezt így írjuk le: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

2. axióma (illeszkedési axióma).
Bármely három nem egy egyenesen lévő pontra csak egy sík illeszkedik.

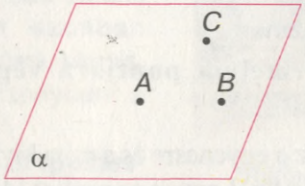
Ennek a tulajdonságnak az alapján a síkot három pontjával is jelölhetjük. Például a 42. ábrán az ABC sík az α sík.

3. axióma (illeszkedési axióma).
Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.

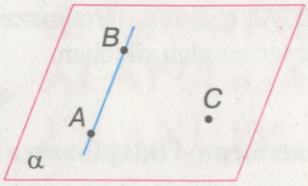
Írjuk le: ha $A \in \alpha$ és $B \in \alpha$, akkor $AB \in \alpha$.



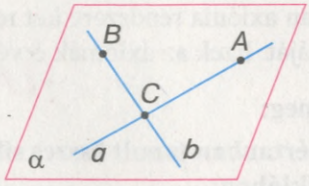
41. ábra



42. ábra



43. ábra



44. ábra

A felsorolt axiómákból következik:

1. következmény

Egy egyenesre és a rá nem illeszkedő pontra csak egy sík illeszkedik.

Valóban, az egyenes bármelyik két pontja és az adott pont (43. ábra) három nem egy egyenesre illeszkednek. A 2. axióma szerint erre a három pontra csak egy sík illeszkedik. A 3. axiómából következik, hogy akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.

2. következmény

Két egymást metsző egyenesre is csak egy sík illeszkedik.

Valóban, ha az egyenesek mindegyikén felveszünk a metszéspontjuktól különböző egy-egy pontot és kiválasztjuk a metszéspontot (44. ábra), akkor három nem egy egyenesre illeszkedő pontot kapunk. A 2. axióma szerint ezek a pontok egy síkot határoznak meg. A 3. axióma alapján mind a két egyenes illeszkedik az adott síkra.

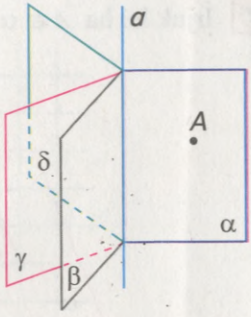
Jegyezd meg, hogy a síkot:
1) három nem egy egyenesre illeszkedő pont;
2) egy egyenes és a rajta kívül lévő pont;
3) két egymást metsző egyenes határozhatja meg.

4. axióma (illeszkedési axióma).
Ha két síknak van közös pontja, akkor a két sík metszete a közös pontokra illeszkedő egyenes.

3. következmény

A tér bármelyik pontjára végtelen sok egyenes illeszkedik.

Valóban, az a egyenesre és a rajta kívül fekvő A pontra csak egy sík illeszkedik. Legyen ez a sík α (45. ábra). Az 1. axióma értelmében viszont a térben végtelen sok, az α síkra nem



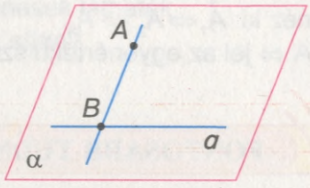
45. ábra

illeszkedő pont létezik. Ezeken a pontokon és az adott egyenesen keresztül az α síktól különböző új sík fektethető. Az ilyen síkoknak a száma végtelen.

A 45. ábrán láthatod, hogy az *a* egyenes illeszkedik az α, β, γ és δ síkokra is.

Feladat. Adott egy *a* egyenes és egy rajta kívül lévő *A* pont. Bizonyítsd be, hogy valamennyi egyenes, amely illeszkedik az *A* pontra és metszi az *a* egyenest, egy síkra illeszkedik!

Megoldás. Az *A* pontra és az *a* egyenesre az 1. axióma következménye alapján csak egy sík fektethető. Jelöljük ezt a síkot α-val (46. ábra). Az *A* ponton keresztül húzzunk egy olyan tetszőleges egyenest, amely metszi az *a* egyenest! Legyen a metszéspont *B*. Az *A* és a *B* pont is illeszkedik az α síkra. Ezért a 3. axióma alapján az *AB* egyenes is illeszkedik az α síkra. Hasonlóképpen bebizonyíthatjuk, hogy bármilyen másik, az *A* pontra illeszkedő és az *a* egyenest metsző egyenes illeszkedik az α síkra is.



46. ábra

BŐVEBBEN

1. A *sztereometria* (térmértan) kifejezés a görög στερεοξ, vagyis tágas és μετρεο mérés szavak összetétele. Megalkotója az ókori görög tudós, Platón (i. e. 427–347) volt, aki az „Akadémia"-ként elhíresült athéni filozófiai iskola alapítója. Platón legnagyobb érdeme a matematikában az volt, hogy először vetette fel és határozottan kiállt amellett az elképzelése mellett, hogy minden felvilágosult embernek tudnia kell a matematikát. Az Akadémia ajtaja fölé a következő feliratot vésette: „Ne lépjen ide be senki, aki nem ismeri a geometriát!"



Raffaello Santi. Platón Leonardo da Vinci képmásával

2. Már tudod, hogy egy síkot meg lehet adni három, nem egy egyenesen fekvő ponttal (1. állítás), továbbá egy egyenessel és azon kívül felvett ponttal (2. állítás) vagy két egymást metsző egyenessel (3. állítás). A tankönyv az első állítást axiómaként értelmezte, a másik kettőt azonban bebizonyította. Valójában mind a három állítás axióma. Vagyis, bármelyik tetszőleges két állítást be lehet bizonyítani a harmadikkal.

Legyen a 3. állítás az axióma: „Két egymást metsző egyenesre egy sík illeszkedik." Bizonyítsuk be, hogy három, nem egy egyenesen fekvő pontra is csak egy sík illeszkedik!

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az *A*, *B* és *C* pont nem egyenesen fekszik. Húzzuk meg az *AB* és a *BC* egyenest! Ezek az egyenesek a *B* pontban metszik egymást. Az axióma alapján az *AB* és a *BC* egyenesre egy sík illeszkedik. Ehhez a síkhoz tartozik az *A*, *B* és a *C* pont.

A 2. állítást bizonyítsd be önállóan!

3. Ha az egyik állításból következik a második, a másodikból pedig az első, akkor az ilyen állításokat *egyenértékűeknek* nevezzük. Bebizonyítottuk, hogy az 1. és a 3. állítás egyenértékű. Valójában azonban mindhárom megismert állítás egyenértékű. Bizonyítsd ezt be önállóan!

Az állításokat latin nagybetűkkel jelöljük. Ha az első állítást A_1-gyel, a másodikat A_2-vel, a harmadikat pedig A_3-mal jelöljük, akkor a rövid írott alak így néz ki: $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3$.

A $\Leftrightarrow$ jel az egyenértékű szót helyettesíti.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mit tanulmányoz a térmértan (a sztereometria)?
2. Nevezd meg a mértani alapfogalmakat! Hogyan jelöljük őket?
3. Melyek a térmértan alaprelációi?
4. Fogalmazd meg a térmértan axiómáit!
5. Fogalmazd meg az axiómák következményeit!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

50'. A térmértan mely fogalmait alkalmazzuk meghatározás nélkül?

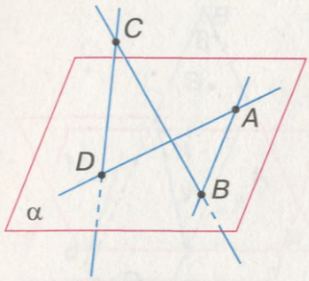
51'. Mi az axióma? Tétel? Hozz fel példákat!

52'. Melyeket nem definiáljuk az alábbi alakzatok közül:

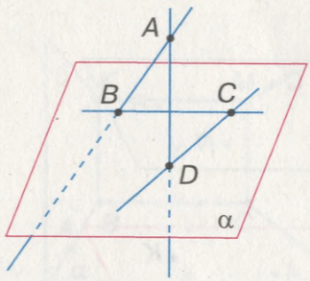
1) pont;	2) szakasz;
3) félegyenes;	4) egyenes;
5) szög;	6) háromszög;
7) körvonal;	8) rombusz;
9) kocka;	10) gömb;
11) sík;	12) hasáb?

53'. Az alábbi relációk közül melyeket soroljuk az alapfogalmakhoz:

1) illeszkedik;
2) metszi;
3) közte van;
4) egyenlő;
5) hasonló;
6) fedésbe hozható?



47. ábra



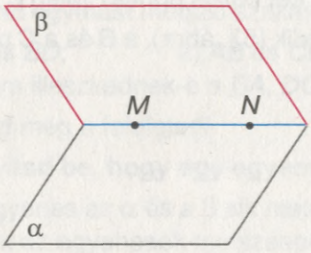
48. ábra

54'. A 47., 48. ábrán egy α sík és az *AB*, *BC*, *AD* és *CD* egyenesek láthatók.
1) Az *A*, *B*, *C* és *D* pontok közül melyek illeszkednek az α síkra?
2) Hogyan jelölhetjük másképpen az α síkot?
3) Melyik egyenes illeszkedik az α síkra?

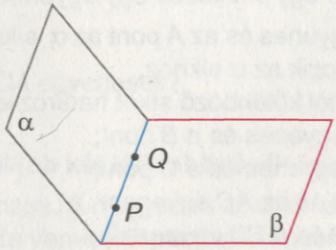
55'. A 49. és 50. ábrákon:
1) melyek az α és β sík közös pontjai;
2) melyik egyenes az α és β sík metsző egyenese?

56°. Nevezd meg a térmértan meghatározás nélküli alapfogalmait!

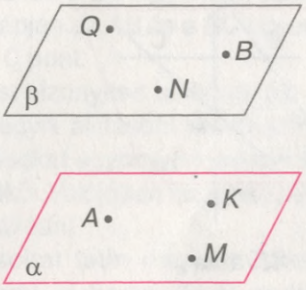
57°. Az alábbi síkmértani axiómák közül melyek teljesülnek a térmértanban is:
1) bármely két pontra csak egy egyenes illeszkedik;
2) bármely egy egyenesre illeszkedő három pont közül egy a másik két pont között van;
3) az egyenesre nem illeszkedő bármely ponton keresztül csak egy, az egyenessel párhuzamos egyenes húzható;
4) bármely félegyenesre annak kezdőpontjától csak egy adott hosszúságú szakasz mérhető fel;
5) minden szakasznak van hossza, ez a hossz mindig nagyobb nullánál;
6) a szakasz hossza egyenlő a részei hosszának összegével;
7) bármely félegyenes egyik oldalára csak egy adott nagyságú szög mérhető fel;
8) minden szögnek van fokmértéke, ami nullánál nagyobb, de 180°-nál kisebb;
9) az egyenesszög 180°-os;
10) a szög fokmértéke azon szögek fokmértékeinek az összegével egyenlő, amelyekre a belső félegyenese osztja a szöget?



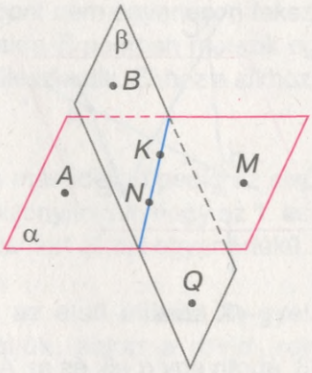
49. ábra



50. ábra



51. ábra



52. ábra

58°. Sorold fel a síkmértan azon axiómáit, melyek a térben is teljesülnek!

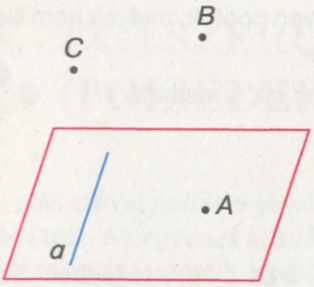
59°. Határozd meg az 51. és 52. ábra alapján azokat a pontokat, melyek:
1) az α síkra illeszkednek;
2) nem illeszkednek a β síkra;
3) melyek nem tartoznak az α síkhoz;
4) melyek a β síkhoz tartoznak?
Jegyezd le a füzetedbe!

60°. Az *A*, *B*, *C* és *D* pontok illeszkednek az α síkra, az *M* és *N* pont pedig nem. Jelölhető-e az α sík az alábbi módon:
1) *AN*; 2) *ADB*;
3) *BCDM*; 4) *ACD*;
5) *BAC*; 6) *CNB*;
7) *DAB*; 8) *MDC*;
9) *CAD*?

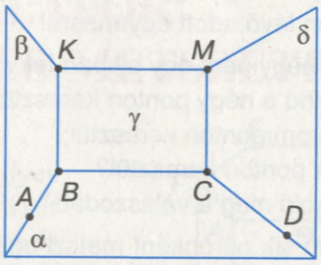
61°. Végy egy α síkot. Jelölj:
1) az α síkra illeszkedő *B* és *C* pontot, és a rá nem illeszkedő *A* pontot;
2) az α síkra illeszkedő *A* és *C* pontot, és a rá nem illeszkedő *B* pontot!
Húzd meg az *AC*, *AB* és *BC* egyeneseket! A meghúzott egyenesek közül melyek illeszkednek az α síkra?
Jegyezd le a füzetedbe!

62°. Lehet-e egy síknak és egy egyenesnek csak két közös pontja? Miért?

63°. Az *a* egyenes és az *A* pont az α síkra illeszkedik (53. ábra), a *B* és a *C* pont viszont nem tartozik az α síkhoz.
Az α síktól különböző síkot határoz-e meg:
1) az *a* egyenes és a *B* pont;
2) az *a* egyenes és a *C* pont;
3) az *AB* és az *AC* egyenes;
4) az *AB* és a *BC* egyenes?
Indokold meg a feleleted!



53. ábra



54. ábra

64°. Töltsd ki a 3. táblázatot az 54. ábra alapján úgy, ahogy az a második oszlopban látható!

3. táblázat

Síkok	α és β	α és γ	α és δ	β és γ	γ és δ
Közös pontok	*A* és *B*				
Metsző egyenes	*AB*				

65°. Rajzolj két egymást metsző α és β síkot! Vegyél fel olyan pontokat, melyek csak
1) az α síkra illeszkednek;
2) a β síkra illeszkednek;
3) az α és β síkra is illeszkednek!
Jegyezd le a füzetedbe!

66. Mindig lehet-e három tetszőleges pontra síkot fektetni? És négy pontra? Indokold meg a feleleted!

67. Bizonyítsd be, ha egy körvonal három pontja egy síkban van, akkor a körvonal minden pontja illeszkedik erre a síkra!

68. Egy síkban vannak-e azok az egyenesek, melyek egy szög szárait metszik? Indokold meg a feleleted!

69. Adott két egymást metsző szakasz:
1) *AC* és *BD*; 2) *AB* és *CD*.
Egy síkra illeszkednek-e a *BA*, *DC*, *DB* és *CA* egyenesek?
Indokold meg a feleleted!

70. Bizonyítsd be, hogy egy egyenesre legalább két különböző sík fektethető!

71. Az *a* egyenes az α és a β sík metsző egyenese. A *b* egyenes az α síkra illeszkedik. A *B* pont az egyenesek metszéspontja. Rajta van-e a *B* pont az *a* egyenesen? Indokold meg a feleleted!

72*. Bizonyítsd be, hogy adott síkban léteznek olyan pontok, melyek nem illeszkednek a síkban lévő adott egyenesre!

73*. Adott négy nem egy síkban fekvő pont. Hány sík fektethető:
1) mind a négy ponton keresztül;
2) három ponton keresztül;
3) két ponton keresztül?
Indokold meg a válaszodat!

74*. Három sík páronként metszi egymást az *a*, *b* és *c* egyenesekben. Bizonyítsd be, hogyha az *A* pont a síkok közös pontja, akkor az *a*, *b* és *c* egyenesek metszéspontja az *A* pont!

75*. A γ sík, illetve az α és β síkok metsző egyenese az *a* és a *b* egyenes. Bizonyítsd be, hogyha az *a* és *b* egyenes metszi egymást, akkor a metszéspont az α és a β sík metsző egyenesére illeszkedik!

76*. Adott néhány közös kezdőpontú félegyenes. Három félegyenes nem illeszkedik egy síkra. Hány különböző síkot fektethetünk úgy, hogy minden síkra két félegyenes illeszkedjen, ha összesen:
1) három; 2) négy; 3) *n* félegyenes van?

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

77. Miért gyártanak nagyon sok eszköznek (fényképezőgépnek, teodolitnak stb.) három lábat?

78. Ahhoz, hogy egy felületről eldönthessük, síkfelület-e, vonalzót helyezünk rá különböző irányokba. Ha a vonalzó két szélső pontja érinti a felületet, akkor a teljes vonalzónak is érintenie kell azt. Min alapszik ez az eljárás?

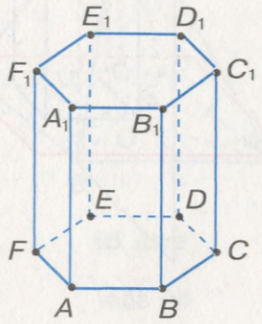
79. Az ács két zsinórral ellenőrzi le, hogy a szék négy lába egy síkban van-e, vagyis inog-e, vagy sem. Hogyan végzi ezt?



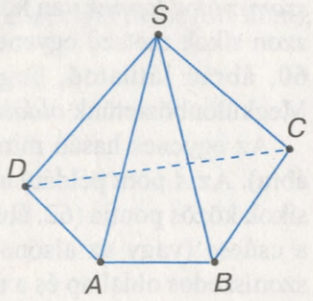
2. § EGYSZERŰ SOKLAPOK (POLIÉDEREK) ÉS METSZETEIK

A *soklap*, más szóval *poliéder* jó példa arra, milyen egy térmértani test. Az *egyenes hasábot* (55. ábra) és a *gúlát* (56. ábra) már ismered. Ezeken a testeken és metszeteiken fogjuk szemléltetni az egyenesek és síkok tulajdonságait.

A soklapok felszínét sokszögek alkotják, amelyeket *lapoknak* nevezünk. Innen ered a „soklap" elnevezés. Az egyenes hasáb (gúla) lapjainak külön neve van: ezek az *oldallapok* és az *alaplapok*. Az egyenes hasáb *oldallapjai* téglalapok, a gúla oldallapjai pedig háromszögek. Az egyenes hasábnak két alaplapja van, melyek egybevágó sokszögek, a gúlának egy alaplapja van. Attól függően, hogy hány oldalú sokszög a hasáb (gúla) alaplapja, a hasábot (gúlát) *háromoldalúnak*, *négyoldalúnak* vagy *n-oldalúnak* nevezzük. Az 55. ábrán az $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ hatoldalú egyenes hasáb látható, melynek alaplapjai az $ABCDEF$ és az $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ sokszögek, az 56. ábrán az $SABCD$ négyoldalú gúlát ábrázoltuk, melynek alaplapja az $ABCD$ négyszög. A derékszögű parallelepipedon, más szóval a téglatest (57. ábra) és a kocka (58. ábra) is egyenes hasáb.

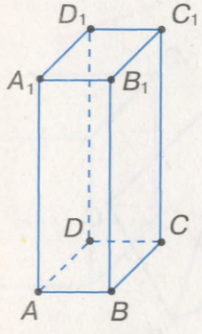


55. ábra

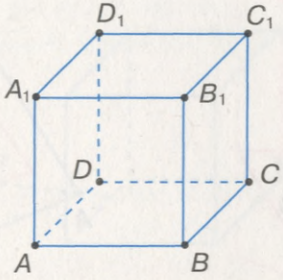


56. ábra

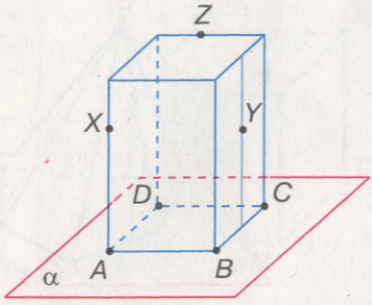
Az egyenes hasáb (a gúla) minden lapja meghatározott síkra illeszkedik. Az 59. ábrán az A, B, C és D pontok az α síkra illeszkednek, az X, Y és Z pontok pedig nem.



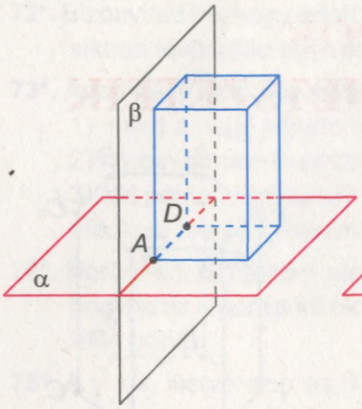
57. ábra



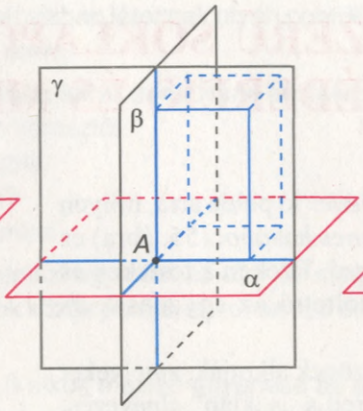
58. ábra



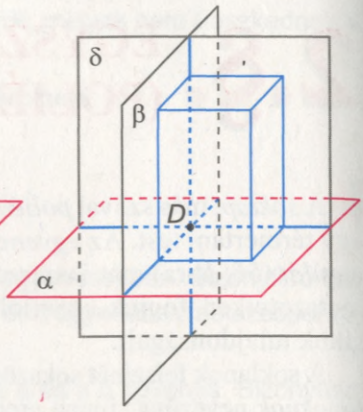
59. ábra



60. ábra



61. ábra



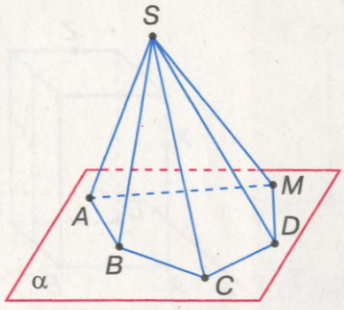
62. ábra

A hasáb (gúla) különböző lapjai különböző síkokra illeszkednek. Bármelyik két *szomszédos lapnak* van közös szakasza, melyet *élnek* nevezünk (60. ábra). Ez a szakasz azon síkok metsző egyenesének része, amelyekre az adott oldallapok illeszkednek. A 60. ábrán láthatod, hogy az *AD* él pontjai illeszkednek az α és a β síkra is. Megkülönböztetünk *oldalélt* és *alapélt* (az alaplap oldalát).

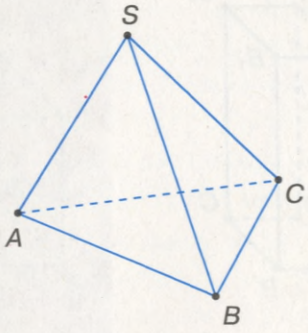
Az egyenes hasáb minden *csúcsában* három szomszédos lap fut össze (61. és 62. ábra). Az *A* pont például az α, β és γ síkok metszéspontja, a *D* csúcs pedig az α, β és δ síkok közös pontja (62. ábra). Az egyenes hasáb minden csúcsa egyben az alaplapnak is a csúcsa (vagy az alsónak vagy a felsőnek), mivel ebben a csúcsban fut össze két szomszédos oldallap és a megfelelő alaplap.

A gúlának van egy jellegzetes csúcsa, melybe minden oldallap összefut. Ezt a csúcsot a *gúla csúcsának* nevezzük. A 63. ábrán ez az *S* pont. A gúla csúcsa több mint három sík metszéspontja lehet, melyekre a gúla oldallapjai illeszkednek. Az alaplap csúcsaiban három lap fut össze: a két szomszédos oldallap és az alaplap.

? Létezik-e olyan gúla, melynek minden csúcsában három lap fut össze? Igen. Ez a háromoldalú gúla (64. ábra).



63. ábra

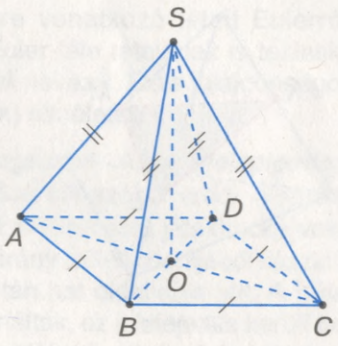


64. ábra

Az egyenes hasábot akkor nevezzük *szabályosnak*, ha az alaplapja szabályos sokszög.

A *szabályos* gúla alaplapja szabályos sokszög, oldalélei pedig egyenlők.

A *gúla magassága* a csúcs távolsága az alaplaptól, ami nem más, mint a csúcsból az alaplapra húzott merőleges szakasz. A szabályos gúla magasságának talppontja az alaplap középpontja. A 65. ábrán az *SABCD* szabályos négyoldalú gúla magassága az *SO* szakasz.



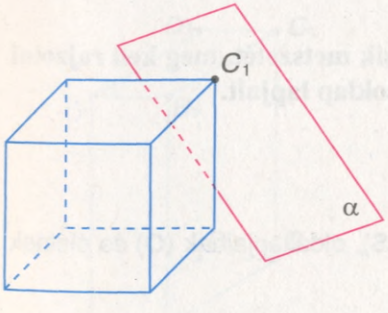
65. ábra

Ha egy α sík nem illeszkedik a soklapok oldallapjaira, akkor a kölcsönös helyzetük a következő lehet:

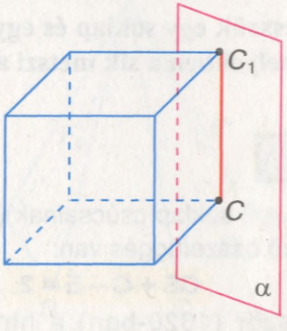
1) az α síknak és a soklapnak nincs közös pontja;
2) az α síknak és a soklapnak csak egy közös pontja van, valamelyik csúcs (66. ábra);
3) az α síkra a soklap egyik éle illeszkedik (67. ábra);
4) az α sík metszi a soklapot (68. ábra).

A soklapot metsző síkot ***szelősíknak*** nevezzük.

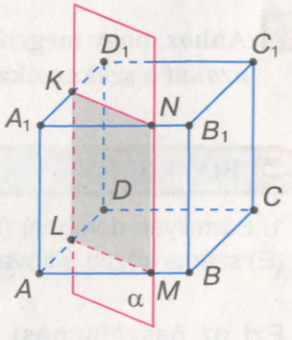
A soklap és a szelősík közös része a *metszet*. Ez egy síkidom, melynek az oldalai azok a szakaszok, melyekben a sík metszi a poliédert. Ezért a metszet oldalai a soklap lapjaira illeszkednek, a csúcsai pedig az élekre. A 68. ábrán a *KLMN* négyszög az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka és az α sík metszete.



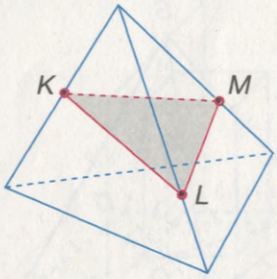
66. ábra



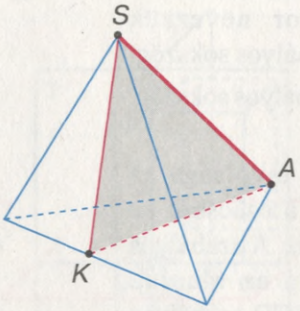
67. ábra



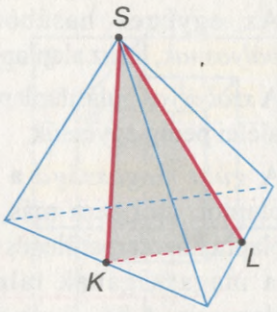
68. ábra



69. ábra



70. ábra



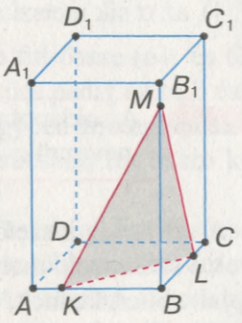
71. ábra

Mivel két sík nem metszheti egymást egynél több egyenesben, ezért a metszősík sem metszheti az oldallapot egynél több szakaszban.

Bármelyik síkhoz hasonlóan a metszősíkot is megadhatjuk három nem egy egyenesre illeszkedő ponttal (69. ábra), egy egyenessel és a rajta kívül lévő ponttal (70. ábra) vagy két egymást metsző egyenessel (71. ábra).

Feladat. Adva van az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasáb AB, BC és BB_1 oldalaira illeszkedő K, L és M pont (72. ábra). Szerkeszd meg a parallelepipedon és a sík metszetét, amely az adott pontokra illeszkedik!

Megoldás. A feladat feltétele alapján a K és az M pont az ABB_1A_1 oldallap síkjának és a metszősíknak a közös pontja. Ezért ezeknek a síkoknak a metszete a KM egyenes, a KM szakasz pedig az ABB_1A_1 téglalap és a metszősík közös része. Hasonlóképpen kapjuk, hogy a metszősík és az $ABCD$, valamint a BCC_1B_1 lap metszete rendre a KL és az ML szakasz. Húzzuk meg a KM, KL és ML szakaszokat! A KLM háromszög a keresett metszet.



72. ábra

Ahhoz, hogy megszerkesszük egy soklap és egy sík metszetét, meg kell rajzolni azokat a szakaszokat, melyekben a sík metszi a soklap lapjait.

BŐVEBBEN

1. Bármilyen domború (konvex) soklap csúcsainak (**CS**), oldallapjainak (**O**) és éleinek (**É**) száma között a következő összefüggés van:

$$\mathbf{CS + O - É = 2.}$$

Ezt az összefüggést először (1620-ban) a híres francia matematikus, René Descartes (1596–1650) állapította meg, később (1752-ben) a német Leonhard Euler

(1707–1783) újra felfedezte és bebizonyította. Az erre vonatkozó tételt Eulerről nevezték el. Egyes források ezt a soklapok Descartes-Euler-féle tételének is tekintik. A **CS + O – É** számot a soklapok *Euler-féle tulajdonságának* nevezik. Ezt a tulajdonságot széleskörűen alkalmazzák a soklap felületek (polifelületek) elméletében.

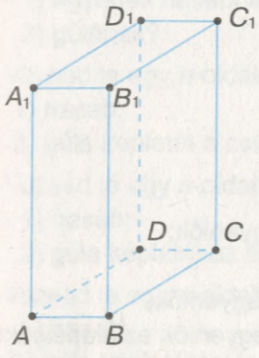
2. A *hasáb* görögül πρισμα (prizma), jelentése *szétforgácsolt*. A *parallelepipedon* (téglatest) a görög παραλλοξ párhuzamos és az επιπεδον sík szóból ered. A *kocka* megnevezésére az ókorban a χυβοξ szót használták. Ez olyan csont játékkocka volt, amelynek oldalaira számokat vésték. A kocka általában a bárány ízületi csontjából készült, amely eleve négy oldalára tudott fordulni, de csiszolás után hat oldallapja lett. A *gúla* megnevezésére Egyiptomban például a *piramis* szót használták, ez a kifejezés került be a szláv nyelvekbe is. A piramis eredeti jelentése olyan *emlékmű*, obeliszk, amit híres embernek, a fáraónak emeltek.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

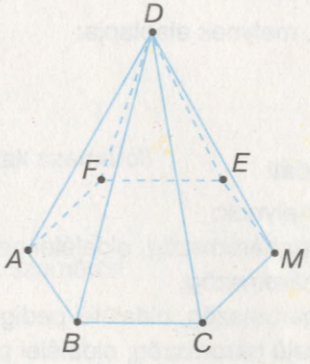
1. Hozz fel példát testre!
2. Mi az egyenes hasáb; a gúla?
3. Mi a hasáb alaplapja? mik a lapjai? az élei? a csúcsai?
4. Mi a gúla alaplapja? mik a lapjai? az élei? a csúcsai?
5. Mi alapján osztályozzuk a hasábokat háromoldalúra, négyoldalúra, *n* oldalúra? Mi a gúlák osztályozási elve?
6. Mit nevezünk szabályos hasábnak? Mi a szabályos gúla?
7. Magyarázd meg, mi a soklapok szelő síkja? Hogyan adható meg ez a sík?
8. Mi a soklapok metszete?
9. Magyarázd meg, hogyan kell megszerkeszteni a soklap metszetét!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

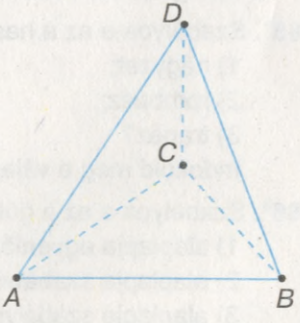
80'. Válaszolj az alábbi kérdésekre a 73–75. ábrák alapján:
1) mely testek láthatók a képeken;
2) hány alaplapjuk és oldallapjuk van;
3) milyen sokszög az alaplapjuk;
4) milyen sokszögek az oldallapok?



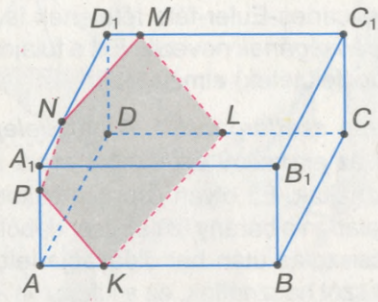
73. ábra



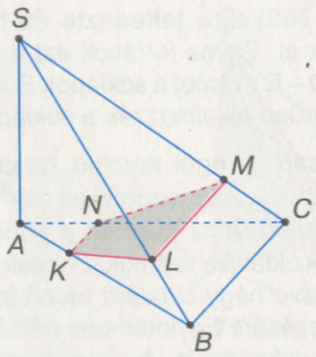
74. ábra



75. ábra



76. ábra



77. ábra

81'. Nevezd meg a 73–75. ábrán látható testek csúcsait és éleit! Mely lapjaik:
1) futnak össze az alábbi csúcsokban:
a) A; b) B; c) C;
2) közös élei az alábbi szakaszok:
a) AB; b) CD; c) AD?

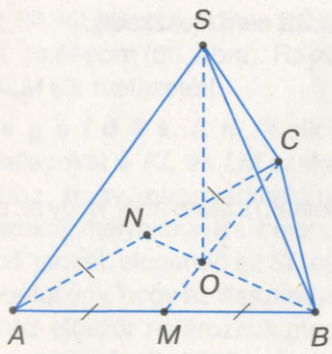
82'. A 76., 77. ábrákon állapítsd meg:
1) melyik sík metszi a soklapot;
2) mely szakaszokban metszi ez a sík az oldallapokat;
3) melyik sokszög a metszet!

83°. Adott egy $ABCA_1B_1C_1$ egyenes háromoldalú hasáb. Nevezz meg olyan síkot, amely illeszkedik:
1) a hasáb három csúcsára;
2) a hasáb egyik élére és egyik csúcsára;
3) a hasáb két olyan élére, melynek van közös pontja!

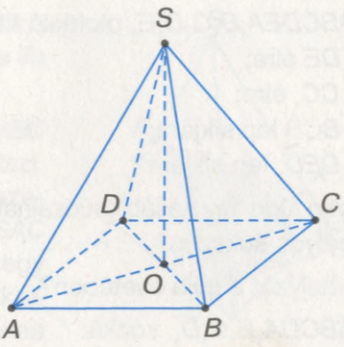
84°. Adott egy $SABCD$ négyoldalú gúla. Nevezz meg olyan síkot, amely illeszkedik
1) a gúla három csúcsára;
2) a gúla egyik élére és egyik csúcsára;
3) a gúla két metsző élére!

85°. Szabályos-e az a hasáb, melynek alaplapja:
1) négyzet;
2) rombusz;
3) trapéz?
Indokold meg a válaszodat!

86°. Szabályos-e az a gúla, melynek:
1) alaplapja egyenlőszárú háromszög, oldalélei pedig egyenlők;
2) alaplapja szabályos háromszög;
3) alaplapja szabályos háromszög, oldalélei pedig nem egyenlők;
4) alaplapja egyenlő oldalú háromszög, oldalélei pedig egyenlők az alapélekkel?
Indokold meg a válaszodat!



78. ábra



79. ábra

87°. A 78. és a 79. ábrán olyan szabályos gúlákat láthatsz, melyek magassága SO. Magyarázd meg, hová esik a magasság talppontja!

88°. Rajzolj:
1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű parallelepipedont (téglatestet);
2) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát!
Ábrázold azt a metszetet, amely:
1) az A, C és D csúcsokra;
2) a B_1, D_1 és C csúcsokra;
3) a BC és A_1D_1 élekre;
4) az AA_1 és CC_1 élekre illeszkedik!
Milyen síkidom a metszet?

89°. Rajzolj:
1) háromoldalú;
2) négyoldalú;
3) hatoldalú gúlát!
Jelöld meg az oldalélek felezőpontjait, fektess metszősíkot a felezőpontokra!
Milyen síkidom a metszet?

90. Legkevesebb hány lapja, éle, csúcsa lehet egy:
1) egyenes hasábnak;
2) gúlának?

91. Vezesd le egy n-oldalú:
1) hasáb;
2) gúla képletét a csúcsainak számáról!

92. Vezesd le egy n-oldalú:
1) hasáb;
2) gúla képletét az éleinek számáról!

93. Vezesd le egy n-oldalú:
1) hasáb;
2) gúla képletét lapjainak számáról!

94. Az $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ ötoldalú hasáb hány csúcsa nem illeszkedik:
1) a DE élre;
2) a CC_1 élre;
3) a BCD lap síkjára;
4) a DED_1 lap síkjára?

95. Hogyan függ egy hasáb csúcsainak (éleinek, lapjainak) száma attól, hogy az alaplapja szabályos sokszög?

Mi a helyzet a gúla esetében?

96. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka:
1) AA_1 élén felvettünk egy P pontot;
2) AD élén egy Q pontot.

A kocka mely lapjait metszi az az egyenes, amely illeszkedik a felvett pontra, a kocka egyik lapjára és az egyik csúcsra?

Hány ilyen egyenes létezik?

97. Az $SABCD$ gúla:
1) SA élén felvettünk egy M pontot;
2) BC élén egy N pontot.

A gúla mely lapjait metszi az az egyenes, amely illeszkedik a felvett pontra, a gúla egyik lapjára és az egyik csúcsra?

Hány ilyen egyenes létezik?

98. Rajzolj:
1) téglatestet;
2) kockát!

Az alsó alaplap egyik átlóján és a felső alaplap egyik csúcsán keresztül fektess síkot úgy, hogy a metszet:

a) háromszög; b) négyszög legyen!

99. Rajzold meg az $SABCD$ gúla és azon sík metszetét, amely illeszkedik:
1) az SA, AB és AD élek felezőpontjaira;
2) az AB él felezőpontjára és az SBC oldallap súlyvonalára;
3) az SAB és SBC lapok súlyvonalaira!

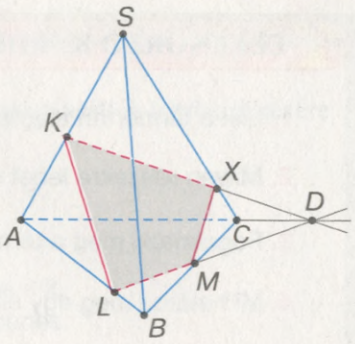
Minden esetben van megoldása a feladatnak?

100*. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Nevezd meg azokat a síkokat, amelyek a kocka legalább három csúcsára illeszkednek!

101*. Egy téglatest három oldalélén két-két pontot vettek fel. Hány sík fektethető ezekre a pontokra úgy, hogy a sík legalább három pontra illeszkedjen?

102*. Egy négyoldalú gúla három oldalélén három-három pontot vettek fel. Hány sík fektethető ezekre a pontokra úgy, hogy a sík legalább három pontra illeszkedjen?

103*. Az *SABC* gúla *SA*, *AB* és *BC* éleire illeszkedik a *K*, *L* és *M* pont (80. ábra). Rajzold meg a gúla és a *KLM* sík metszetét!



80. ábra

M e g o l d á s. A *KLM* sík az *SAB* és *SBC* oldallapokat a *KL* és *LM* szakaszokban metszi. Ahhoz, hogy megszerkesszük azokat a szakaszokat, melyekben a sík metszi az *SBC* és *SAC* oldallapokat, elegendő az *SC* élen megjelölni egy *X* pontot úgy, hogy az illeszkedjen a metsző síkra. Ehhez először határozzuk meg az *AC* egyenes és a metsző sík közös pontját. Az *AC* és az *LM* egyenes az alaplap síkjára illeszkedik, így megszerkeszthetjük a *D* metszéspontjukat. Ez a pont szintén az *SAC* síkhoz tartozik, ezért meghúzhatjuk a *KD* egyenest, ami a keresett *X* pontban metszi az *SC* élt. Kössük össze az *M* és *X* pontot. Az így keletkezett *KLMX* négyszög lesz a metszet.

104*. Jelölj az *SABCD* gúla három oldalélén olyan pontokat, melyek 1 : 2 arányban osztják az élt! Az egyik élen a csúcstól, a másik két élen pedig az alaptól számítva kezd a mérést. Ábrázold a felvett három pontra illeszkedő síkmetszetet!

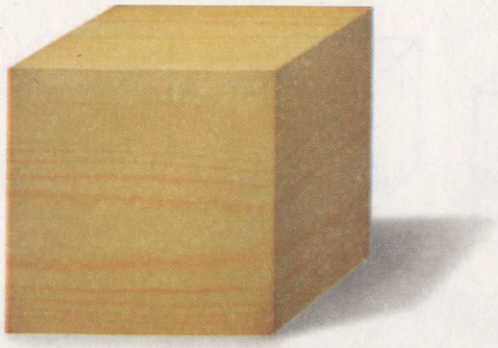
Hány megoldása van a feladatnak?

105*. Jelölj az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka három oldalélén olyan pontokat, melyek 2 : 5 arányban osztják az élt! Az egyik élen a felső alaplap csúcsától, a másik két élen az alsó alaplap csúcsától kezd a mérést. Ábrázold a felvett három pontra illeszkedő síkmetszetet!

Hány megoldása van a feladatnak?

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

106. Egy fakockából szabályos gúlát kell esztergályozni. Hogyan kell eljárni, ha a gúla:
1) négyoldalú; 2) háromoldalú?



ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Mik a térmértan alapfogalmai?
2. Milyen részekre lehet osztani a térmértan axiómáit?
3. Fogalmazd meg a térmértan axiómáit!
4. Mi határoz meg egy síkot?
5. Mi az egyenes hasáb; a gúla?
6. Mi a szabályos hasáb? Mi a szabályos gúla?
7. Milyen síkot nevezünk a poliéder metszősíkjának?
8. Mi a metszet?
9. Miért nem metszheti egy sík a poliéder lapját két szakaszban?
10. Magyarázd meg, hogyan kell megszerkeszteni egy metszetet!

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

1° A térmértan alapfogalmai:

A. Pont, sík és szög.
B. Pont, egyenes és szög.
C. Pont, szakasz és sík.
D. Pont, sík és egyenes.

2° Mi határoz meg egy síkot:

A. Három egy egyenesre illeszkedő pont;
B. Két pont;
C. Egy egyenes és a rajta kívüli pont;
D. Egy egyenes és a rajta lévő pont?

3° Mi lehet a metszősík és egy poliéder oldallapjának a metszete:

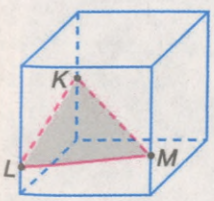
A. Egyenes. **B.** Szakasz. **C.** Félegyenes. **D.** Szög?

4 Az alábbi állítások közül melyik nem axióma?

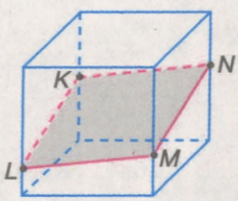
A. Az egyenesre nem illeszkedő adott ponton keresztül lehet az adott egyenessel párhuzamos egyenest húzni, de csak egyet.
B. Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik erre a síkra.
C. Léteznek olyan pontok, melyek hozzátartoznak egy síkhoz, és léteznek olyanok, amelyek nem.
D. Ha két síknak van közös pontja, akkor a két sík metszete az ezt a pontot átszelő egyenes.

5* Meg kell rajzolni egy kocka és a *KLM* sík metszetét.
Melyik rajz helyes?

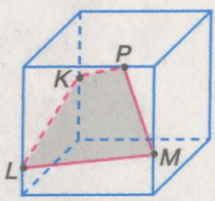
A.



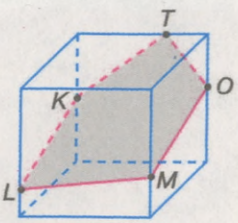
B.



C.

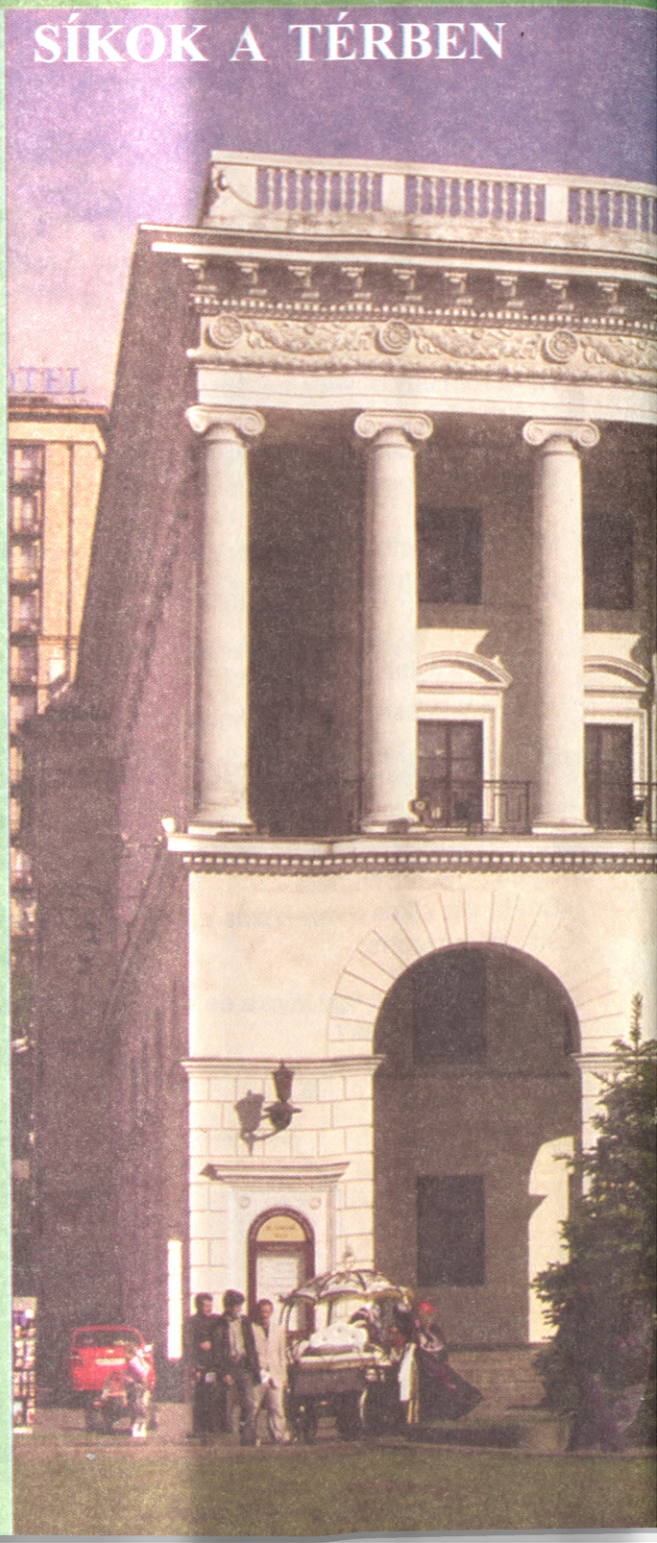


D.



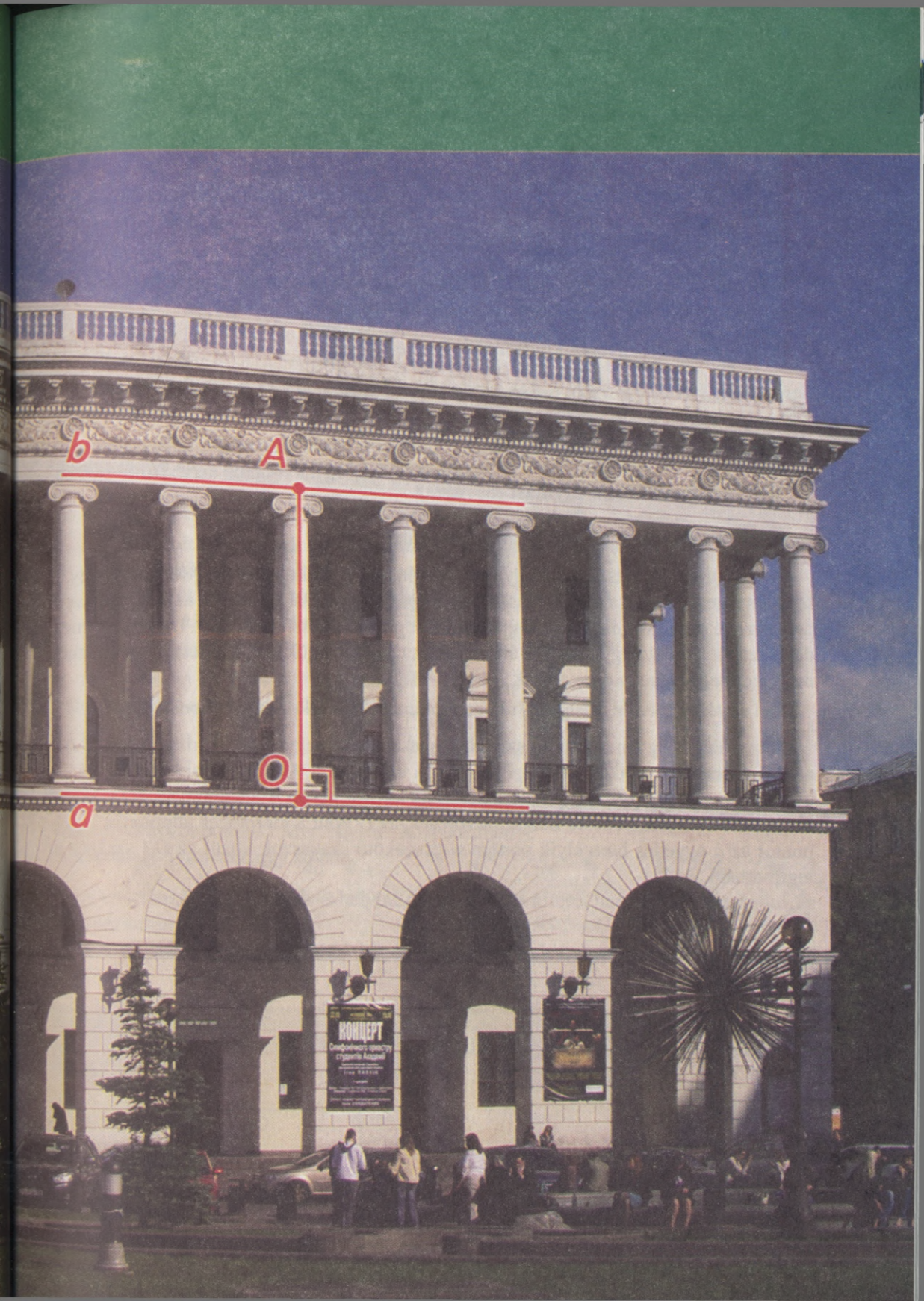
2. FEJEZET

PÁRHUZAMOS EGYENESEK ÉS SÍKOK A TÉRBEN



Ebben a fejezetben megtudod:

- milyen lehet két egyenes; egy egyenes és egy sík kölcsönös helyzete a térben, mi a párhuzamosság ismertetőjele;
- hogyan kell meghatározni az egyenes és a pont távolságát, két párhuzamos egyenes távolságát; két metsző egyenes hajlásszögét;
- mik a párhuzamos síkok és mi az ismertetőjelük;
- mi a párhuzamos vetítés, és hogyan kell ábrázolni a testek képét párhuzamos vetítésnél;
- hogyan kell alkalmazni a megismert definíciókat, ismertetőjeleket és tulajdonságokat a gyakorlatban és feladatok megoldásánál


b
A
O
a
КОНЦЕРТ
Симфонічного оркестру
студентів Академії

3. § KÉT EGYENES KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

Már tudod, hogy két egyenesnek a síkon vagy van egy közös pontja, azaz metsző egyenesek, vagy nincs közös pontjuk, azaz párhuzamosak.

? Milyen lehet két egyenes kölcsönös helyzete a térben?

1. KÉT EGYENESNEK EGY KÖZÖS PONTJA VAN

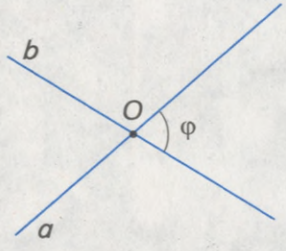
Ha az *a* és a *b* egyenesnek a térben van egy közös pontja, akkor ezek az egyenesek a közös pontban *metszik* egymást (81. ábra).

Az egymást metsző egyeneseket így jelöljük: $a \times b$.

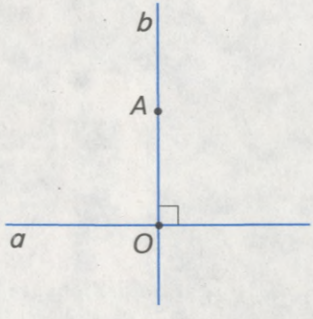
Amennyiben a metszésnél hegyes és tompaszögek is keletkeztek (81. ábra), úgy a hegyesszöget tekintjük a két egymást metsző egyenes *hajlásszögének*. Ha az *a* és *b* egyenes hajlásszöge φ, akkor ezek az egyenesek φ *szög alatt metszik egymást*. Ha két egyenes derékszögben metszi egymást (82. ábra), akkor a hajlásszögük 90°. Ezeket az egyeneseket *merőleges egyeneseknek* nevezzük.

Két egyenes merőlegességét a térben ugyanúgy jelöljük, mint a síkon: $a \perp b$.

A merőleges egyenesekre illeszkedő szakaszok és félegyenesek is merőlegesek. Az adott egyeneshez tartozó *merőlegesnek* azt a szakaszt nevezzük, amely merőleges az adott egyenesre és egyik végpontja illeszkedik az egyenesre. A 82. ábrán az AO szakasz az A pontból az a egyenesre húzott merőleges, az O pont a merőleges talppontja. Az A pontot az a egyenes bármelyik pontjával összekötő szakaszok közül az OA szakasz a legrövidebb.



81. ábra



82. ábra

A pont és az egyenes távolságának nevezzük a pontból az egyenesre húzott merőleges szakasz hosszát.

A 82. ábrán az A pont és az a egyenes távolsága az AO szakasz hosszával egyenlő.

2. KÉT EGYENESNEK NINCS KÖZÖS PONTJA

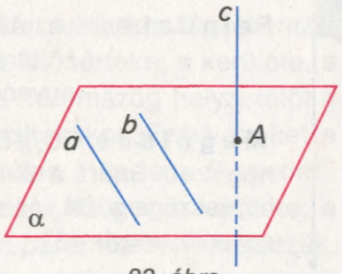
Ha két egyenesnek a térben nincs közös pontja, akkor vagy egy síkra illeszkednek, vagy különböző síkokhoz tartoznak.

A 9. osztályban a mértan órákon már tanultál ilyen egyenesekről. Határozd meg azokat, és hasonlítsd össze a könyv megfogalmazásával!

Ha két egyenesnek a térben nincs közös pontja és egy síkban vannak, akkor azok ***párhuzamosak.***
Ha két egyenes a térben különböző síkokra illeszkedik, akkor ezek ***kitérő*** egyenesek.

A 83. ábrán az a és a b egyenes párhuzamos az a és a c, illetve a b és a c pedig kitérő.

Ezt így kell jelölni: $a \parallel b$, $a \perp c$, $b \perp c$. A „$\perp$” jel a „kitérő” szót helyettesíti.



83. ábra

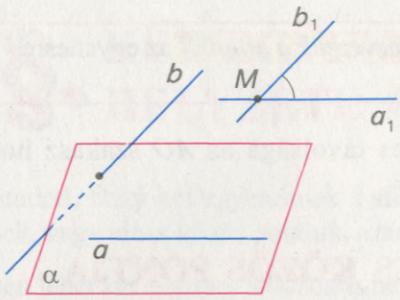
Miért nem szerepel a kitérő egyenesek definíciójában, hogy nincs közös pontjuk? Mert egyenes következménye annak, hogy nincsenek egy síkban.

A következő meghatározás is helytálló: két egyenes kitérő, ha nincs közös pontjuk és nem párhuzamosak.

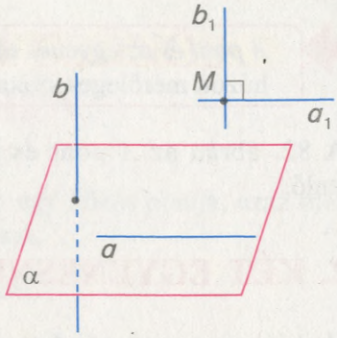
A 4. táblázatban összefoglaltuk két egyenes kölcsönös helyzetét a térben.

4. táblázat

Alakzatok	Kölcsönös helyzetük			Jelölés
a és b egyenes	egy síkban vannak	egy közös pontjuk van	merőlegesek	$a \perp b$
			metszők	$a \times b$
		nincs közös pontjuk	párhuzamosak	$a \parallel b$
	nincsenek egy síkban		kitérők	$a \perp b$



84. ábra



85. ábra

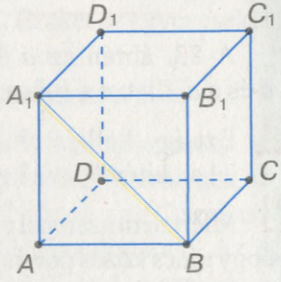
A párhuzamos egyenesek hajlásszögét 0°-nak fogadjuk el.

Kitérő egyenesek hajlásszögén a velük párhuzamos és egymást metsző egyenesek hajlásszögét értjük (84. ábra). Ez a szög nem függ az egymást metsző és az adott egyenesekkel párhuzamos egyenesektől. A 13. paragrafusban ezt az állítást igazolni fogjuk.

Ha két kitérő egyenes hajlásszöge 90°, akkor ezeket az egyeneseket merőlegeseknek nevezzük (85. ábra). Tehát, **két merőleges egyenes a térben vagy metsző vagy kitérő.**

Feladat. Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (86. ábra). Határozd meg a BA_1 és CC_1 kitérő egyenesek hajlásszögét!

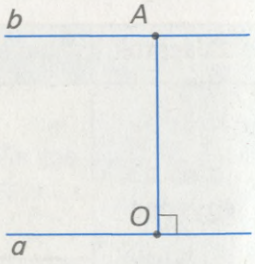
Megoldás. $CC_1 \parallel BB_1$, mivel a kocka minden lapja négyzet. Ezért a BA_1 és CC_1 kitérő egyenesek hajlásszöge a BA_1 és BB_1 egyenesek hajlásszögével egyenlő, vagyis 45°.



86. ábra

Ahhoz, hogy meghatározzuk két kitérő egyenes hajlásszögét, elegendő az egyik egyenesen felvenni egy tetszőleges pontot, majd ezen a ponton keresztül a másik egyenessel párhuzamos egyenest húzni.

Két párhuzamos egyenes távolsága
az egyik egyenes bármelyik pontjából
a másik egyenesre húzott merőleges hosszával
egyenlő.



87. ábra.

A 87. ábrán az a és a b párhuzamos egyenes távolsága az AO szakasz hosszával egyenlő.

BŐVEBBEN

1. Euklidész ógörög tudós fő műve, az *Elemek* körülbelül i. e. 300-ban jelent meg. A szerző ebben a könyvében összegezte és rendszerezte a görög matematikusok, a khioszi Hippokratész, a tarrentumi Archytasz, a knidoszi Eudoxosz és az athéni Theaitétosz munkásságának eredményeit. Az *Elemek* 13 könyvből áll.
Az I–IV. kötet a síkmértan alapjait tanulmányozza.
Az V. könyv a mértani mennyiségek arányával foglalkozik, a VI. a hasonlóságot tárgyalja, a VII–IX. a számelmélettel kapcsolatosak és a számok arányosságát ismerteti, a X. könyv az irracionális számok fogalmát taglalja. A XI. – XIII. könyvek a térmértannal foglalkoznak.
A XI. könyvben Euklidész a térmértan alapjait fekteti le. A tudós 28 meghatározást ad meg és bebizonyít 39 állítást, melyek elsődlegesen az egyenesek és a síkok kölcsönös helyzetét jellemzik.
A XII. könyv a forgástestekkel, a XIII. könyv pedig a szabályos testekkel foglalkozik.
Euklidész *Elemek* című munkájának történelmi jelentősége abban rejlik, hogy ez az első próbálkozás a mértan *axiomatikus* felépítésére. Napjainkban ez a módszer képezi az alapját a matematikai elméletek kialakításának és igazolásának.

2. Számodra már ismertek a síkidomok mértani jellemzői. A háromszög jellemzői közé tartozik például az oldalainak hossza, szögeinek fokmértéke, a kerülete, a területe. A háromszög ezen jellemzői nem függnek a háromszög helyzetétől a síkon és nem változnak (invariánsak) a síkok elmozdításakor. Ezért ezeket a tulajdonságokat *invariánsoknak* nevezzük. Nem minden invariáns független. Például egy háromszög oldalainak hosszától függenek a szögei, a kerülete, a területe és így tovább. A síkidom független invariánsát *paraméternek* nevezzük.
Felmerülhet benned a kérdés: *Milyen paraméterekkel rendelkezik két egyenes?*
Két egymást metsző egyenesnek egyetlen paramétere van – a hajlásszögük.
Két párhuzamos egyenesnek is egy paramétere létezik –a távolságuk.
Két kitérő egyenesnek két paramétere van, a hajlásszögük és a távolságuk.
Minél több paraméterrel rendelkezik egy alakzat, annál általánosabb, mert a paraméterek változtatásával több olyan alakzat is keletkezik, ami az adott fogalomhoz tartozik. Ez egyben magyarázatot ad arra is, hogy a kitérő elhelyezkedés a legáltalánosabb tulajdonsága két egyenesnek a térben. Valójában, ha a kitérő egyenes hajlásszöge nulla, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak; ha távolságuk nulla, akkor metszők.

3. Az egyenesek kölcsönös helyzetére használt „ × ”, „ ⊥ ”, „ || ”, „ _ ” jelek ikonok, amelyek utalnak a fogalmak jellegére.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Milyen lehet két egyenes kölcsönös helyzete a térben?
2. Hogyan határozzuk meg két egyenes hajlásszögét a térben?
3. Fogalmazd meg, mi a pont és az egyenes távolsága!
4. Mely egyenesek párhuzamosak a térben? Hogyan jelöljük a párhuzamos egyeneseket?
5. Fogalmazd meg, mit nevezünk kitérő egyeneseknek! Hogyan jelöljük ezeket?
6. Hogyan értelmezzük a kitérő egyenesek hajlásszögét?
7. Magyarázd meg, milyen egyeneseket tekintünk merőlegeseknek a térben?
8. Fogalmazd meg, mi két párhuzamos egyenes távolsága!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

107'. Hozz fel példát környezetedből egyenesek különböző kölcsönös helyzeteire!

108'. Nevezz meg a 88. és 89. ábra alapján olyan egyeneseket, melyeknek egy közös pontjuk van az:

1) AB; 2) BC; 3) AC egyenessel!

Mi az egyenesek metszéspontja?

109'. Nevezz meg merőleges egyeneseket a 88., 89. ábrán!

110'. Vannak-e merőleges egyenesek a 90. és a 91. ábrán?

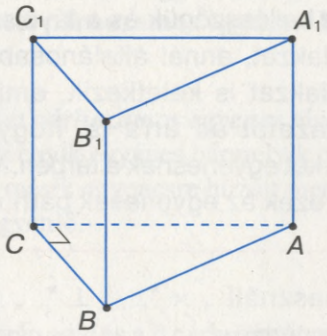
111'. Nevezz meg egyeneseket és merőlegeseket a 88–91. ábrán!

112'. Melyik szakasz hossza egyenlő az A pont és a BC egyenes távolságával (88–91. ábra)?

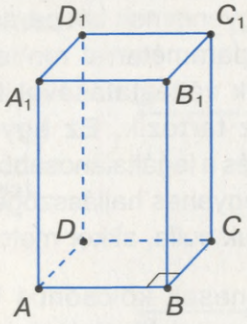
113'. Nevezz meg a rajzok alapján:

1) párhuzamos egyeneseket (88., 89. ábra);
2) kitérő egyeneseket (88–91. ábra)!

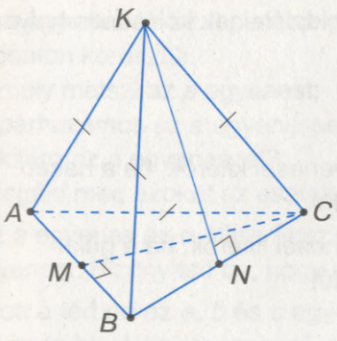
Jegyezd le a füzetedbe!



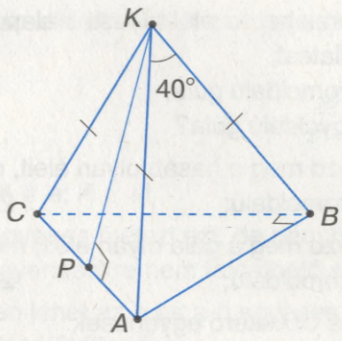
88. ábra



89. ábra



90. ábra



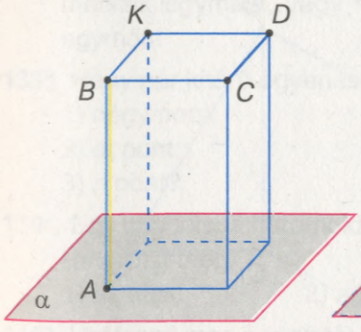
91. ábra

114°. Rajzolj egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát! Nevezz meg:
1) az alsó alaplapban lévő egymást metsző egyeneseket;
2) a felső alaplapra illeszkedő merőleges egyeneseket;
3) az A_1 és a C pontra illeszkedő merőleges egyeneseket;
4) a B és a D_1 pontból húzott egyenest, illetve merőlegest!

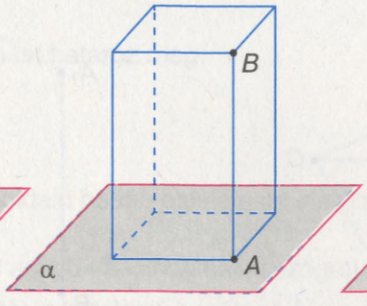
115°. Mekkora az alábbi egyenesek hajlásszöge:
1) CA és AK (90. ábra); 2) CA és AM, ha az $ABC\Delta$ szabályos (90. ábra);
3) KA és AB (91. ábra); 4) KC és KP, ha az $AKB\Delta = AKC\Delta$ (91. ábra)?

116°. Egy egyenes parallelepipedon felső alaplapjának egyik csúcsa és alsó alaplapjának egyik éle egy oldallaphoz tartozik. Mekkora az adott csúcs és él távolsága, ha a téglatest méretei:
1) 3 cm, 4 cm, 5 cm; 2) 5 cm, 2 cm, 2 cm; 3) 8 cm, 8 cm, 8 cm?
Készíts megfelelő rajzot!

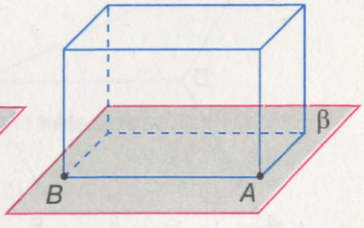
117°. A téglatest (92. ábra) AB és CD éleinek egyenesei kitérők, a CD és BK éleké pedig párhuzamosak. A 93. és 94. ábrán ugyanez a téglatest látható elforgatva. Rajzold le a 93. és a 94. ábrát, és jelöld meg a CD és BK éleket! Milyen az AB és CD élek egyeneseinek; a CD és BK élek egyeneseinek kölcsönös helyzete?



92. ábra



93. ábra



94. ábra

118°. Milyen lehet az alábbi testek alapéleinek és oldaléleinek kölcsönös helyzete:
1) téglatest;
2) háromoldalú gúla;
3) négyoldalú gúla?

119°. Nevezd meg a hasáb olyan éleit, melyek egyenesei kitérők, ha a hasáb:
1) háromoldalú; 2) négyoldalú!

120°. Nevezd meg a gúla olyan éleit, melyek egyenesei kitérők, ha a gúla:
1) háromoldalú; 2) négyoldalú!

121°. *AB* és *CD* kitérő egyenesek.
Páhuzamosok-e az 1) *AC* és *BD*; 2) *AD* és *BC* egyenesek?

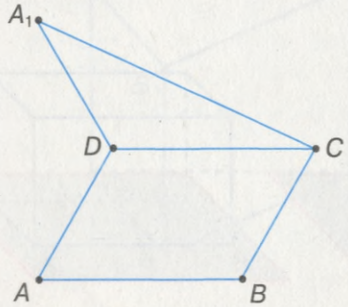
122°. Egy parallelogramma és egy téglalap különböző síkokra illeszkednek (95. és 96. ábra). Igazak-e az alábbi állítások:
1) az AA_1 és *BD* egyenesek metszik egymást;
2) az A_1B és *AD* egyenesek párhuzamosak lehetnek;
3) a CA_1 és *AD* egyenesek kitérők?

123°. Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyzet. Nevezd meg azokat az éleit, melyek egyenesei merőlegesek és:
1) metszik egymást; 2) kitérők!

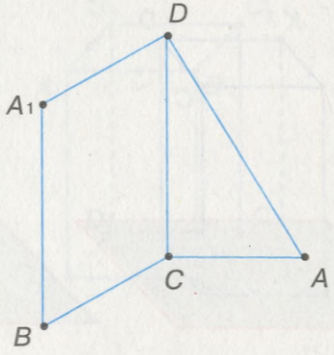
124°. Határozd meg a téglatest párhuzamos éleinek a távolságát, ha a téglatest méretei:
1) 4 cm, 6 cm, 9 cm;
2) 5 cm, 5 cm, 5 cm;
3) 5 cm, 12 cm, 12 cm!

125. Bizonyítsd be, hogy egy egyenes és a hozzá tartozó merőleges egy síkra illeszkedik!

126. Az *A* és *B* pontok az α síkra illeszkednek, a *C* pont a síkon kívüli. Határozd meg a *C* pont és az *AB* egyenes távolságát, ha:
1) $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 15$ cm;
2) $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 9$ cm!



95 ábra



96 ábra

127. Az a egyenes és az A pont az α síkra illeszkedik. Hány olyan egyenes húzható az A ponton keresztül:
1) mely metszi az a egyenest;
2) párhuzamos az a egyenessel;
3) kitérő az a egyenessel?
Vizsgáld meg azokat az eseteket, amikor $A \in a$; $A \notin a$!

128. Az a egyenes az α síkra illeszkedik, a b egyenes metszi azt, de nem metszi az a egyenest. Bizonyítsd be, hogy az a és b egyenesekre nem fektethető sík!

129. Adott a térben az a, b és c egyenes. Milyen lehet az a és a b egyenes kölcsönös helyzete az alábbi egyenesek elhelyezkedésétől függően:
1) a és c; 2) b és c?

130. Egy hasáb hány pár éle illeszkedik a kitérő egyenesekre, ha a hasáb:
1) háromoldalú; 2) négyoldalú?

131. Egy gúla hány pár éle illeszkedik a kitérő egyenesekre, ha a gúla:
1) háromoldalú; 2) négyoldalú?

132. Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyzet. Határozd meg az alábbi élek hajlásszögét:
1) DA_1 és BC_1; 2) BA_1 és BC_1; 3) AD és CC_1!

133. Az $ABCD$ trapéz alapjai az AD és BC egyenesekre illeszkednek. Határozd meg az AD és BC egyenesek távolságát, ha:
1) $AD = CD = 17$, $AD = 8$, $BC - AD = 16$;
2) $AB = 14$, $AD = 8$, $CD = 15$, $BC = 21$!

134*. Bizonyítsd be, ha két egyenesnek nincs közös pontja, akkor vagy egy síkra, vagy különböző síkokra illeszkednek!

135*. Ha több egyenesnek nincs közös pontja, viszont páronként metszik egymást, akkor egy síkhoz tartoznak. Bizonyítsd be!

136*. Egy négyszög csúcsai nem egy síkra illeszkednek. Bizonyítsd be, hogy a szemben fekvő oldalak felezőpontjait összekötő szakaszok metszik egymást és a metszéspontjukban felezik egymást!

137*. Bizonyítsd be, hogy egy négyszög csúcsai egy síkban vannak, ha átlói metszik egymást, vagy ha két nem szomszédos oldalának egyenesei metszik egymást!

138*. Hány pár kitérő egyenest határoz meg:
1) négy pont;
2) öt pont;
3) n pont?

139*. Egy szabályos háromoldalú hasáb oldaléle az alapél kétszerese. Határozd meg:
1) az élek; 2) a lapok átlóinak hajlásszögét!

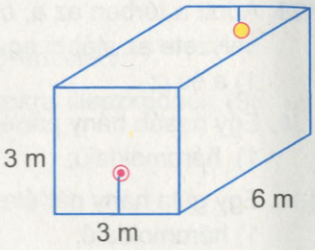
140*. Határozd meg a szabályos hatoldalú hasáb párhuzamos éleinek távolságát, ha az alapéle az oldalélével egyenlő és hossza 5 cm!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

141. Hogyan ellenőrizhető le két madzaggal, hogy egy négylábú asztal az egyenes padlón billegni fog-e?

142. Egy udvaron (α sík) van egy kút (A pont), a kúthoz egy gyalogút vezet (a egyenes), amit egy lámpaoszlop világít meg (b egyenes).
Az α síkban húzd meg azt az egyenest amely: 1) metszi az a és a b egyenest is; 2) metszi a b egyenest és párhuzamos az a egyenessel; 3) metszi az a és a b egyenest és illeszkedik az A pontra! Fogalmazd meg a megfelelő gyakorlati feladatokat!

143. Egy 6 m hosszú, 3 m széles és 3 m magas szobában villanyvezetéket kell húzni a kapcsolótól a csillárig. A kapcsoló a bejárati falon van 1 méterre a padlótól, a világítótest pedig a szemközti falon 1 méterre a plafontól (97. ábra). Hol kell elvezetni a drótot a legtakarékosabban?



97. ábra

144. Hogyan határozható meg a tantermetek kitérő egyeneseinek hajlásszöge?

4. § TÉRBELI EGYENESEK PÁRHUZAMOSSÁGA

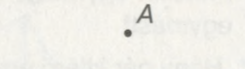
A síkmértan tananyagából már tudod, hogy az egyenesen kívül lévő ponton keresztül csak egy olyan egyenes húzható, amely párhuzamos az adott egyenessel. Ez a síkmértan egyik axiómája, ami bármelyik síkra érvényes a térben is. A térmértanban viszont ezt az állítást be kell bizonyítani.

Tétel (a térbeli párhuzamos egyenesek tulajdonságai).
Az egyenesen kívüli ponton keresztül a térben csak egy, az adott egyenessel párhuzamos egyenes húzható.

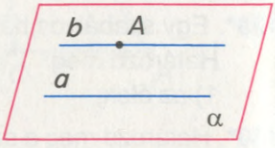
Adott: a egyenes, A pont, $A \notin a$ (98. ábra).

Bizonyítsd be: ha $A \in b$, akkor csak egy $b \parallel a$ egyenes létezik!

Bizonyítás. A térmértani axiómák első következménye alapján az a egyenesen és az A ponton keresztül csak egy α sík fektethető.
Az α síkban az A ponton keresztül csak egy, az a egyenessel párhuzamos b egyenes húzható (99. ábra).
Tehát, a térben az A ponton keresztül csak egy $b \parallel a$ egyenes húzható.

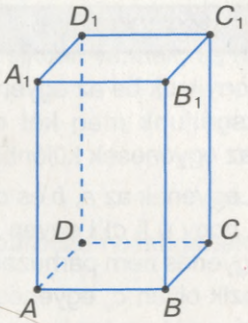


98. ábra



99. ábra

A párhuzamos egyenesek meghatározásából és a bebizonyított tételből következik, hogy **két párhuzamos egyenesre csak egy sík fektethető.**



100. ábra

Jegyezd meg, hogy a térben teljesül a két párhuzamos egyenes síkmértanban megismert tulajdonsága.

A 100. ábrán egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest látható. Az oldallapok téglalapok. A szemben fekvő oldalak párhuzamosak, így minden lap szemben fekvő éleinek egyenesei is párhuzamosak. Például, az AA_1 és BB_1, az AB és A_1B_1 élek egyenesei párhuzamosak.

? Meggyőződtél arról, hogy $AA_1 \parallel BB_1$ és $BB_1 \parallel CC_1$ (100. ábra). Igaz-e, hogy $AA_1 \parallel CC_1$? Igen, csak ezt a térben bizonyítani kell, mert az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek különböző síkokban vannak.

Tétel (a párhuzamosság tranzitív tulajdonsága). Ha két egyenes párhuzamos egy harmadik egyenessel, akkor egymással is párhuzamosak.

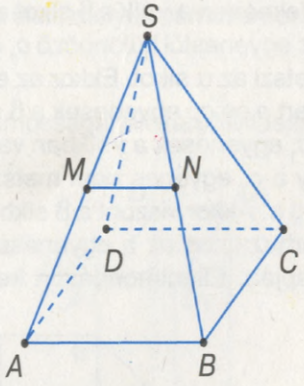
A tételnek több bizonyítása is létezik. Az eddigi ismeretekre támaszkodó bizonyítás összetett, ezért a **Bővebben** fejezetben taglaljuk. A 6. paragrafusban egy egyszerűbb bizonyítást fogunk ismertetni.

A párhuzamos egyenesek tranzitivitása lehetőséget ad igazolni, hogy a 100. ábrán látható téglatest minden oldalélének egyenese párhuzamos.

Bizonyítsd be önállóan!

Feladat. *MN* az *SABCD* szabályos négyoldalú gúla *SAB* oldallapjának középvonala (101. ábra). Bizonyítsd be, hogy *MN* || *CD*!

Megoldás. A gúla oldalalapjai háromszögek, ezért az *MN* szakasz az *SAB* háromszög középvonala. Így *MN* || *AB*. *AB* || *CD*, mivel a gúla alaplapja az *ABCD* négyzet. Tehát a párhuzamos egyenesek tranzitivitása értelmében *MN* || *CD*.



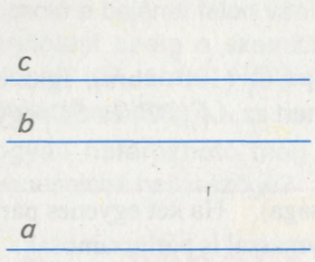
101. ábra

Ahhoz hogy eldöntsük, párhuzamos-e két egyenes, keressünk olyan egyenest, mely párhuzamos mindkét egyenessel, vagy keressük meg az adott egyeneseknek azokat a szakaszait, melyek egy paralelogramma szemben lévő oldalai (vagy egy trapéz alapjai vagy egy háromszög oldala és középvonala stb.).

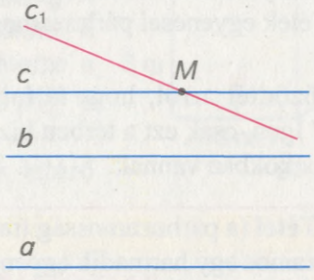
BŐVEBBEN

Bizonyítsuk be az egyenesek párhuzamosságának tranzitivitását!
Vizsgáljunk meg két esetet, amikor: 1) az egyenesek egy síkra illeszkednek; 2) az egyenesek különböző síkokban vannak.

1) Legyenek az a, b és c egyenesek egy síkban és $a \parallel b$, $a \parallel c$ (102. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $b \parallel c$! Legyen az M pont a c egyenes tetszőleges pontja. Tegyük fel, hogy a c egyenes nem párhuzamos a b-vel. Akkor a párhuzamos egyenesek axiómája alapján létezik olyan c_1 egyenes, amely párhuzamos a b egyenessel (103. ábra). Azt kaptuk, hogy az M ponton keresztül két, a b egyenessel párhuzamos egyenes húzható, a c és a c_1. Tehát ellentmondásba kerültünk, feltételezésünk nem helytálló, vagyis $b \parallel c$.

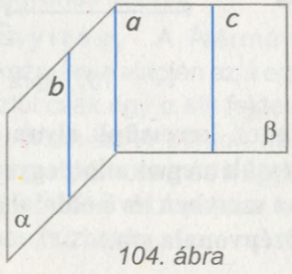


102. ábra

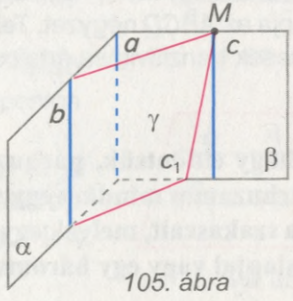


103. ábra

2) Legyenek az a, b és c egyenesek nem egy síkban és $a \parallel b$, $a \parallel c$. Bizonyítsuk be, hogy $b \parallel c$! Fektessünk a párhuzamos a és b egyenesekre α síkot, a párhuzamos a és c egyenesekre pedig egy β síkot (104. ábra)! A c egyenes tetszőleges M pontja és a b egyenes is meghatároz egy síkot. Legyen ez a sík γ. A térmértan 4. axiómájának értelmében a γ sík a β síkot egy egyenesben metszi. Tételezzük fel, hogy ez az egyenes a c egyenestől különböző c_1 egyenes (105. ábra). Tegyük fel továbbá, hogy a c_1 egyenes metszi az α síkot. Ekkor az egyenes és a sík metszéspontja illeszkedik az a egyenesre, mert a és c_1 egyenesek a β síkban vannak, és illeszkedik a b egyenesre is, mivel a b és a c_1 egyenesek a γ síkban vannak. Viszont adott, hogy $a \parallel b$. Ellentmondásba ütköztünk. Így a c_1 egyenes nem metszi az α síkot, és nem metszheti az a egyenest sem, tehát $c_1 \parallel a$. Akkor viszont a β síkban két olyan egyenes van, amely illeszkedik az M pontra és párhuzamos az a egyenessel: a feladat feltételei szerint $c \parallel a$ és $c_1 \parallel a$ a bizonyítás alapján. Ellentmondásba kerültünk a térmértan axiómájával, ezért a $c \parallel a$ és $c_1 \parallel a$



104. ábra



105. ábra

egyenes illeszkedik egymásra. Ez azt jelenti, hogy a c egyenes a γ síkban van, és nem metszi az α síkot. Azt kaptuk, hogy a b és a c egyenesek a γ síkban vannak, és nem metszik egymást. Tehát $b \parallel c$.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Fogalmazd meg a párhuzamosság axiómáját!
2. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a térbeli egyenesek párhuzamosságának fő tulajdonságát!
3. Sorold fel a párhuzamos egyenesek tulajdonságait!
4. Fogalmazd meg a párhuzamos egyenesek tranzitivitását!
5. Magyarázd meg, hogyan állapíthatjuk meg két egyenesről a térben, hogy párhuzamosak-e?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

145'. Húzz egy a egyenest és vegyél fel rajta kívül egy A pontot!
Húzz meg egy AB egyenest párhuzamosan az a egyenessel!
Hány ilyen egyenes húzható: 1) a síkon; 2) a térben?

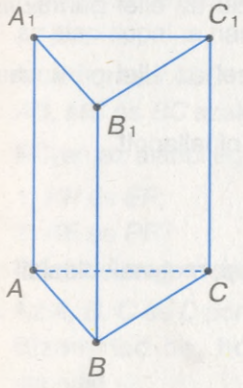
146'. Szemléltesd a környezetedben lévő tárgyakon az egyenesek tranzitivitását:
1) a síkon; 2) a térben!

147'. Nevezz meg a 106–108. ábrák jelöléseit használva:
1) párhuzamos egyenes párokat;
2) párhuzamos egyenesekre illeszkedő síkokat!

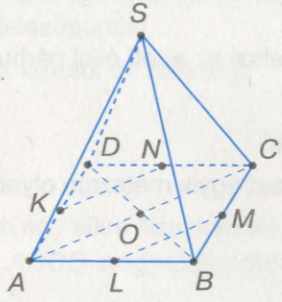
148'. Hány síkot határoz meg két párhuzamos egyenes?
Hozz fel példákat a környezetedből!

149'. Nevezd meg a 108. ábrán látható téglatestnek azokat az éleit, melyek párhuzamosak az adott élekkel és nem egy lapra illeszkednek:
1) AA_1; 2) BB_1; 3) AB; 4) BC.

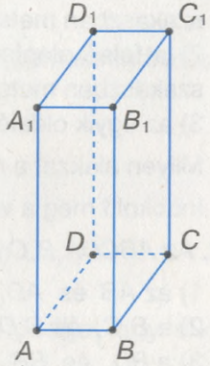
150'. Hozz fel példát a környezetedből az egyenesek párhuzamosságának tranzitivitására!



106. ábra



107. ábra



108. ábra

151°. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka hány éle illeszkedik az adott csúcsra és párhuzamos az adott éllel:

1) A csúcs és B_1C_1 él;
2) D csúcs és BB_1 él;
3) C_1 csúcs és AA_1 él?

Indokold meg a választ!

152°. Rajzolj $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatestet! Húzd meg azt az oldallapátlóját, amely illeszkedik az adott csúcsra és párhuzamos az adott egyenessel:

1) A csúcs és B_1D_1 egyenes;
2) D_1 csúcs és BC_1 egyenes;
3) B csúcs és A_1C_1 egyenes!

153°. Az AB szakasz és az α sík közös pontja az A pont. A B ponton és az AB szakasz C felezőpontján keresztül párhuzamos egyeneseket húztak, melyek rendre a B_1 és C_1 pontokban metszik az α síkot.

Egy síkban van-e a BB_1 és CC_1 egyenes?

Határozd meg a CC_1 szakasz hosszát, ha:

1) $BB_1 = 12$ cm; 2) $BB_1 = 9$ cm; 3) $BB_1 = 32$ cm.

154°. Az AB szakasz nem metszi az α síkot. Az AB szakasz végpontjain és C felezőpontján keresztül egyeneseket húztak, melyek rendre az A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik az α síkot. Egy síkban fekszenek-e az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek?

Határozd meg a CC_1 szakasz hosszát, ha:

1) $AA_1 = 10$ cm, $BB_1 = 12$ cm;
2) $AA_1 = 15$ cm, $BB_1 = 9$ cm;
3) $AA_1 = 18$ cm, $BB_1 = 32$ cm!

155°. Sorold fel a párhuzamos egyenesek tulajdonságait a síkmértanban!

156°. A síkmértanban ha egy egyenes metszi két párhuzamos egyenes közül az egyiket, akkor metszi a másikat is. Igaz-e ez az állítás a térben is?

157°. Ábrázold a kocka azon metszetét, amely illeszkedik:

1) az alsó alaplap egyik élére és a felső alaplapot ezzel az éllel párhuzamos szakaszban metszi;
2) a felső alaplap egyik élére és az alsó alaplapot ezzel az éllel párhuzamos szakaszban metszi;
3) az egyik oldalélre és metszi az adott éllel párhuzamos oldallapot!

Milyen alakzat a metszet?

Indokold meg a válaszodat!

158°. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest egyik metszete olyan téglalap, melynek oldalai:

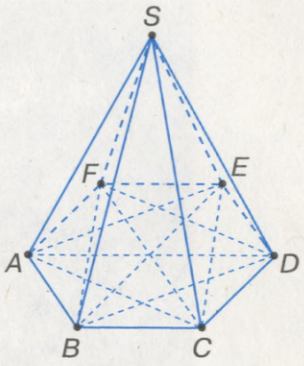
1) az AB és AD_1 élek;
2) a B_1C_1 és C_1D élek;
3) a BD és BB_1 élek.

Mely egyenesekkel párhuzamosak a metszet oldalai?

159°. Adott egy *SABCDEF* szabályos hatoldalú gúla (109. ábra). Mely alapélekkel, illetve az alaplap mely átlóival párhuzamos az *SA* oldalél és az alábbi él felezőpontjaira illeszkedő egyenes:

1) *SB*; 2) *SC*; 3) *SD*?

Indokold meg a válaszodat!



109. ábra

160°. Az *a* és *b* egyenes megfelelően párhuzamos a *c* és *d* egyenesekkel.

Milyen az alábbi egyenesek kölcsönös helyzete:

1) *a* és *c*; 2) *a* és *d*;

3) *b* és *c*; 4) *b* és *d*?

161. Két párhuzamos egyenest metsző összes egyenes egy síkban van.
Bizonyítsd be!

162. Az *a* és *b* egyenes metszi egymást. Bizonyítsd be, hogy az összes olyan egyenes, amely párhuzamos az *a* egyenessel és metszi a *b* egyenest, egy síkban van!

163. Az *a* és *b* egyenes egy síkban van.

Meghúzható-e úgy egy *c* egyenes, hogy:

1) párhuzamos legyen az *a* és *b* egyenessel;

2) illeszkedjen egy adott pontra és metssze az *a* és *b* egyenest?

164. Létezik-e két párhuzamos egyenes, amelyik kitérő egyeneseket metsz?

165. Bizonyítsd be, hogy a hasáb oldaléleinek felezőpontjaira illeszkedő metszet olyan sokszög, amely egybevágó az alaplappal!

166. Egy szabályos *n* oldalú gúlát oldaléleinek felezőpontjain keresztül síkkal metszettük. A gúla alapéle *a*. Milyen alakzat a metszet?

Határozd meg a metszet kerületét és területét, ha:

1) $n = 3$, $a = 4$ cm; 2) $n = 4$, $a = 6$ cm!

167. Bizonyítsd be, hogy a gúla oldaléleinek felezőpontjaira illeszkedő metszet hasonló az alaplappal, a hasonlósági arány pedig $\frac{1}{2}$!

168. Az *M* pont az *ABC* háromszög síkján kívül van. A *K*, *P*, *E* és *F* pontok rendre az *MA*, *AB*, *MC* és *BC* szakaszok felezőpontjai.

Milyen az alábbi egyenesek kölcsönös helyzete:

1) *KP* és *EF*;

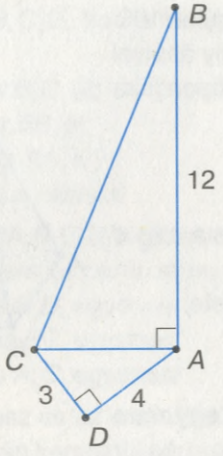
2) *KE* és *PF*?

Indokold meg a válaszodat!

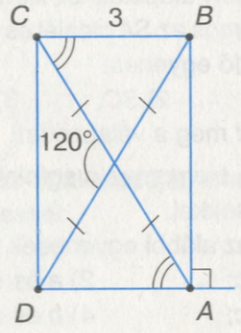
169. Az *A*, *B*, *C* és *D* pontok nem egy síkra illeszkednek.

Bizonyítsd be, hogy az *ABCD* négyszög oldalfelező pontjai egy síkban vannak!

Milyen fajtájú négyszög csúcsai ezek a pontok?



110. ábra



111. ábra

170*. Bizonyítsd be, hogy azon szakaszok felezőpontjai, melyek végpontjai adott párhuzamos egyenesekre illeszkednek, nem egy síkban vannak!

171*. Bizonyítsd be, hogy azon szakaszok felezőpontjai, melyek végpontjai adott kitérő egyenesekre illeszkednek, nem egy síkban vannak!

172*. Bizonyítsd be, hogy a téglatest szemben lévő lapjai egyik élének végpontjaiból húzott átlói párhuzamosak!

173*. Létezik olyan sík, amely egy négyoldalú gúlát parallelogrammában metsz. Bizonyítsd be!

174*. Egy gúla alaplapja olyan sokszög, amely a 110. és 111. ábrán látható. A metsző sík a gúla csúcsától számítva minden oldalélet 2 : 1 arányban oszt fel. Határozd meg a metszet kerületét és területét!

175*. Egy $ABCD$ térbeli négyszög oldalain felvettek A_1, B_1, C_1 és D_1 pontot úgy, hogy

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{AD_1}{D_1D} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{CB_1}{B_1B}.$$

Bizonyítsd be, hogy az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög parallelogramma!

176*. Bizonyítsd be, hogy a kocka és a sík metszete lehet szabályos hatszög!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

177. Ahhoz, hogy egyenes vonalat húzzunk a terepen, elegendő egy cövek és egy motring fonál. Magyarázd meg, hogyan kell ezt csinálni! A párhuzamos egyenesek mely tulajdonsága igazolja az eljárást?

178. A varrónő kihímezi az inget a gombsorral párhuzamosan a jobb és a bal oldalon. Miért tűnik párhuzamosnak a két oldal hímzése?

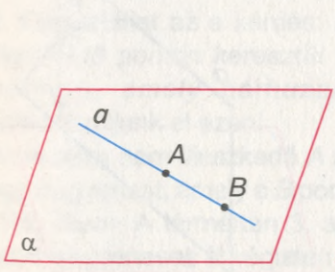


179. Az útszakasz egyik részét a záróvonal két sávra osztja (a vonalon tilos áthajtani). Összeütközhet-e ezen a szakaszon két egymással szemben szabályosan haladó személygépkocsi? Indokold meg a válaszodat!

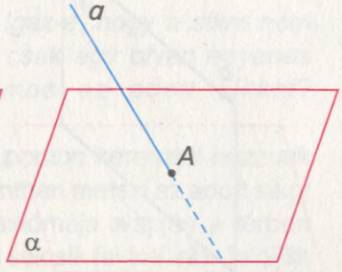
180. Ahhoz, hogy esztétikusan helyezzenek el egy téglalap alakú képet a falon, a vízszintes oldalát a padlóhoz és a plafonhoz igazítják.
Mivel magyarázható ez az eljárás?

5. § AZ EGYENES ÉS A SÍK KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

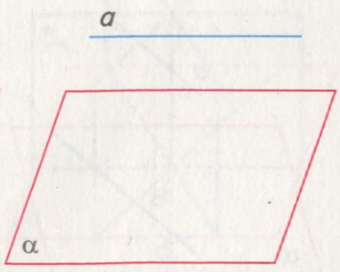
Egy egyenes és egy sík háromféleképpen helyezkedhet el a térben: 1) az egyenesnek és a síknak végtelen sok közös pontja van, tehát az egyenes *illeszkedik* a síkra (112. ábra); 2) az egyenesnek és a síknak egy közös pontja van, vagyis, az egyenes *metszi, (döfi)* a síkot (113. ábra); 3) az egyenesnek és a síknak nincs közös pontja, tehát az egyenes *nem metszi* a síkot (114. ábra).



112. ábra



113. ábra



114. ábra

Az egyenest és a síkot ***párhuzamosnak*** nevezzük, ha nem metszik egymást.

A három kölcsönös helyzetre megfelelően az $a \in \alpha$, $a \times \alpha$, $a \parallel \alpha$ jelöléseket használjuk.

? Hogyan állapítható meg, hogy egy egyenes és egy sík párhuzamos? A választ az alábbi tétel adja meg.

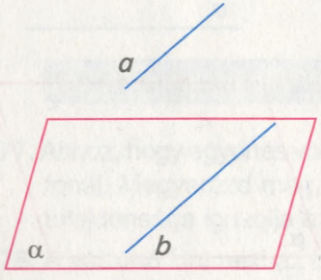
Tétel (az egyenes és a sík párhuzamosságának ismertetőjele).
Ha egy egyenes nem illeszkedik egy síkra és párhuzamos a síkban lévő valamely egyenessel, akkor párhuzamos a síkkal is.

Adott: egy α sík, a síkra nem illeszkedő a egyenes és a síkban lévő b egyenes, $a \parallel b$ (115. ábra).

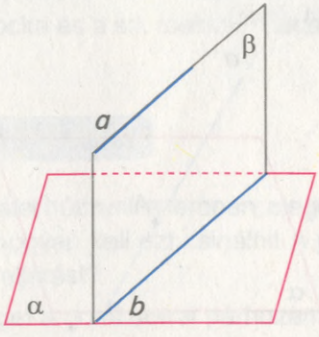
Bizonyítsd be: $a \parallel \alpha$.

Bizonyítás. Fektessünk az a és a b párhuzamos egyenesekre egy β síkot (116. ábra). Az α és a β sík metszete a b egyenes. Tegyük fel, hogy az a egyenes és az α sík nem párhuzamos, és a síkot egy M pontban metszi (117. ábra). Ez a pont illeszkedik az α és a β síkra, és így a b egyenesre is, amely az α és a β sík metsző egyenese. Tehát az a és a b egyenes metsző egyenesek. De ez lehetetlen, mivel ellentmond a feladat $a \parallel b$ feltételének. Tehát a feltételezésünk hamis, az a egyenes nem metszi az α síkot, vagyis $a \parallel \alpha$.

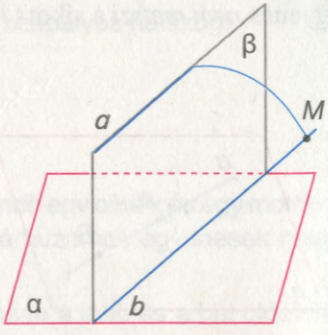
Az indirekt bizonyítás lépései:
1) feltételezzük a bizonyítandó állítás tagadását;
2) helyes következtetéssel valamely axióma, korábban bizonyított állítás, vagy valamelyik feltétellel ellentmondó állításra jutunk;
3) levonjuk a következtetést, hogy a feltételezésünk hibás, ezért az igazolandó állítás igaz.



115. ábra



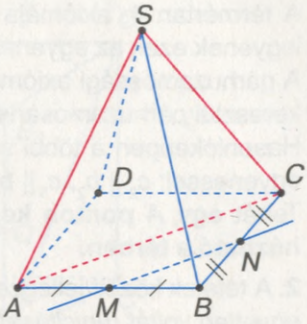
116. ábra



117. ábra

Feladat. Az *SABCD* gúla *SA* és *SC* élein keresztül fektessünk síkot (118. ábra). Párhuzamos-e ez a sík az *AB* és *BC* alapélek felezőpontjaira illeszkedő *MN* egyenessel?

Megoldás. Az *MN* szakasz az *ABC* háromszög középvonala. Mivel $MN \parallel AC$ és az *AC* az *SAC* síkban van, így *MN* párhuzamos az *SAC* síkkal.



118. ábra

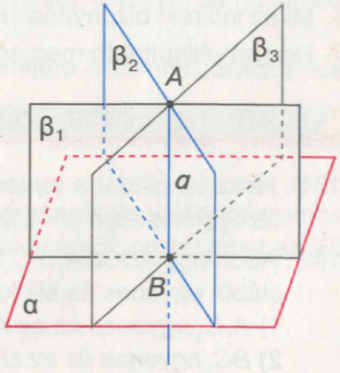
Ahhoz, hogy meghatározzuk, egy sík és egy egyenes párhuzamos:
keressünk a síkban az adott egyenessel párhuzamos egyenest;
vagy az adott egyenes egyik szakasza és a síkban lévő egyenes egyik szakasza a parallelogramma szemben fekvő oldalai (vagy egy trapéz alapjai, esetleg egy háromszög oldala és a vele párhuzamos középvonal).
A sík és az egyenes kölcsönös helyzeteit az 5. táblázatban foglaltuk össze.

5. táblázat

Alakzatok	Kölcsönös helyzetük		Jelölésük
***a* egyenes és α sík**	végtelen sok közös pontjuk van	az egyenes illeszkedik a síkra	$a \in \alpha$
	egy közös pontjuk van	az egyenes metszi a síkot	$a \times \alpha$
	nincs közös pontjuk	az egyenes és a sík párhuzamos	$a \parallel \alpha$

BŐVEBBEN

1. Felmerülhet az a kérdés: *Igaz-e, hogy a síkra nem illeszkedő ponton keresztül csak egy olyan egyenes húzható, amely párhuzamos az adott síkkal?* Gondolkodjunk el ezen!
Az α síkra nem illeszkedő *A* ponton keresztül húzzunk egy *a* egyenest, amely a *B* pontban metszi az adott síkot (119. ábra). A térmértan 3. axiómája alapján a térben adott *a* egyenesen át végtelen sok sík fektethető. Jelöljük ezeket a síkokat $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$.



119. ábra

A térmértan 4. axiómája alapján mindegyik sík egy egyenesben metszi az α síkot, legyenek ezek az egyenesek rendre b_1, b_2, b_3, ...
A párhuzamossági axióma szerint a β_1 síkban csak egy egyenes húzható az A ponton keresztül párhuzamosan a b_1 egyenessel, jelöljük ezt az egyenest c_1 -gyel.
Hasonlóképpen a többi síkban is húzható egy-egy egyenes párhuzamosan a metsző egyenessel: $c_2 \parallel b_2$, $c_3 \parallel b_3$ ... .
Tehát **egy *A* ponton keresztül végtelen sok, az α síkkal párhuzamos egyenes húzható a térben.**

2. A tételek között jellegzetes szerepet töltenek be azok, melyek a fogalom *létezését* és *egyetlen voltát (unicitását)* mondják ki.
A térbeli egyenesek párhuzamosságának tulajdonsága például:
az egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül a térben

az adott egyenessel párhuzamos egyenes húzható, egy *létezés* és csakis egy *unicitás*.

Euklidész *Elemek* című munkájában (i. e. 300-ban) kulcsszerepe van a létezést és unicitást kimondó tételeknek. Az ókori görög matematikusok az alakzatok létezését a szerkesztésükhöz kötötték. Euklidész szerint az alakzat csak a megszerkesztésének pillanatától létezik. Ezért sok fogalom létezését kimondó tétel igazolása szerkesztési szabályokat tartalmaz. Az egyetlen voltát indirekt módon igazolták.

3. Az indirekt bizonyítás alapja a *harmadik lehetőség kizárása*: az *A* állítás vagy az *A állítás tagadása* közül az egyik igaz, a másik hamis, harmadik lehetőség nem létezik.
Ezt a törvényt először Arisztotelész (i. e. 384–322) fogalmazta meg *Metafizika* című művében.

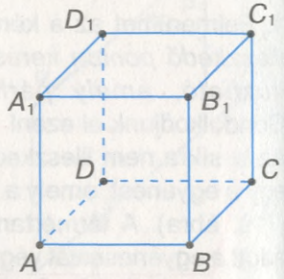
FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Sorold fel az egyenes és a sík kölcsönös helyzeteit! Hogyan jelöljük?
2. Fogalmazd meg a sík és az egyenes párhuzamosságának szabályát!
3. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a sík és az egyenes párhuzamosságának ismertetőjelét!
4. Mi az indirekt bizonyítási módszer?
5. Hogyan állapítható meg egy egyenes és egy sík párhuzamossága?

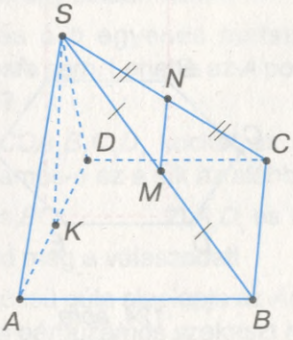
OLDD MEG A FELADATOKAT!

181'. Hozz fel példát a tanteremben látható tárgyak alapján az egyenes és a sík kölcsönös helyzetére!

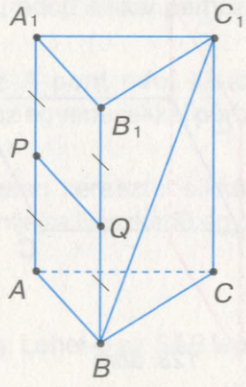
182'. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (120. ábra). Milyen az alábbi egyenes és sík kölcsönös helyzete:
1) A_1C_1 egyenes és az ABC sík;
2) BC_1 egyenes és az $D_1A_1B_1$ sík;
3) AD_1 egyenes és a BCC_1 sík?



120. ábra



121. ábra



122. ábra

183'. Nevezd meg a 121. és a 122. ábrán:
1) az *ABC* síkra illeszkedő egyeneseket;
2) az *ABC* síkot metsző egyeneseket;
3) az *ABC* síkkal párhuzamos egyeneseket!
Jegyezd le a füzetedbe!

184°. Miért nem metszheti egy egyenes a síkot egynél több pontban? Indokold meg a válaszodat!

185°. Az *a* egyenes párhuzamos az α síkkal. Léteznek-e az α síkban az *a* egyenessel nem párhuzamos egyenesek? Húzz meg egy ilyen egyenest!

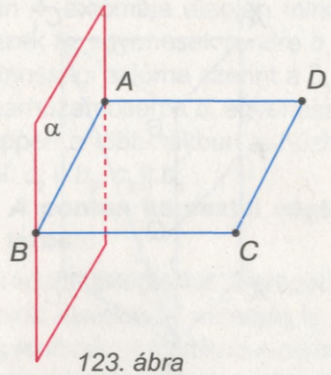
186°. Igaz-e, hogy a síkkal párhuzamos egyenes párhuzamos a síkra illeszkedő bármely egyenessel?

187°. Metszheti-e az *a* egyenes az α síkot, ha a vele párhuzamos egyenesek a síkra illeszkednek?

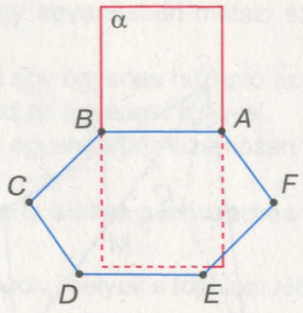
188°. Igaz-e, ha két párhuzamos egyenes közül az egyik párhuzamos egy adott síkkal, akkor a másik egyenes is párhuzamos ezzel a síkkal?

189°. Húzz az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatestben olyan *KP* egyenest, amely:
1) illeszkedik a BCC_1B_1 lap síkjára és a BB_1 él felezőpontjára, valamint párhuzamos az $A_1B_1C_1$ síkkal;
2) illeszkedik az *ABCD* lap síkjára és a *CD* él felezőpontjára, valamint párhuzamos az AA_1D_1 síkkal;
3) illeszkedik az ABB_1A_1 lap síkjára és az A_1B_1 él felezőpontjára, valamint párhuzamos az AA_1D_1 síkkal!

190°. Az *SABCD* gúla alaplapja téglalap. Az oldallap síkjában az alaplappal párhuzamos *EF* egyenest húztak az oldalél felezőpontján keresztül. Milyen hosszú lehet az *EF* szakasz, ha az alapélek hossza:
1) 4 cm és 6 cm;
2) 3 cm és 7 cm;
3) 2 cm és 5 cm?



123. ábra



124. ábra

191°. Adott egy *ABCD* parallelogramma. Az α sík a parallelogramma síkját az:

1) *AB* (123. ábra); 2) *BC*; 3) *CD* egyenesben metszi.

Milyen az α sík és a téglalap többi oldalának kölcsönös helyzete?

192°. Adott egy *ABCDEF* szabályos hatszög. Az α sík a parallelogramma síkját az:

1) *AB* (124. ábra); 2) *CD*; 3) *EF* egyenesben metszi.

Milyen az α sík és a hatszög többi oldalának és átlóinak kölcsönös helyzete?

193°. Az *ABC* háromszög és egy másik háromszög különböző síkokban vannak, de közös az alábbi oldaluk:

1) *AB*; 2) *BC*; 3) *AC*.

Bizonyítsd be, hogy az *ABC* háromszög egyik középvonala párhuzamos a másik háromszög síkjával!

194°. Az α sík párhuzamos az *ABC* háromszög *AB* oldalával és az *AC* és *BC* oldalakat rendre a *K* és *N* pontokban metszi úgy, hogy $BN = NC$.

Bizonyítsd be, hogy $KN \parallel AB$, és határozd meg az *AB* szakasz hosszát, ha:

1) $KN = 9$ cm, $AC = 24$ cm, $KC = 12$ cm;

2) $KN = 8$ cm, $AC = 18$ cm, $KC = 9$ cm;

3) $KN = 11$ cm, $AC = 16$ cm, $KC = 8$ cm!

195. Két egyenes párhuzamos egy adott síkkal. Párhuzamosak-e ezek az egyenesek?

196. Az *a* és *b* párhuzamos egyenesek nem illeszkednek az α síkra. Bizonyítsd be, ha $a \parallel \alpha$, akkor $b \parallel \alpha$!

197. Az *a* egyenes párhuzamos az α síkkal. Igaz-e, hogy bármely egyenes, amely párhuzamos az *a* egyenessel és illeszkedik az α sík egyik pontjára, akkor illeszkedik az α síkra is?

198. Egy α sík a háromszög két oldalát $m : n$ arányában osztja. Milyen a kölcsönös helyzete ennek a síknak és a háromszög harmadik oldalának, ha:

1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 2$, $n = 3$?

Hány különböző esetet kell megvizsgálni?

199. Bizonyítsd be, hogy az adott pontra illeszkedő, adott síkkal párhuzamos összes egyenes egy síkban van!

200. Az a és a b egyenes metszi egymást. Az A pont nem illeszkedik egyik egyenesre sem. Lehet-e az A ponton keresztül az egyenesekkel párhuzamos síkot fektetni?

201. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát az AA_1 és CC_1 éleken keresztül síkkal metszették. Párhuzamos-e ez a sík az alábbi élek felezőpontjaira illeszkedő egyenessel:

1) AB és BC; 2) A_1D_1 és CD?

Indokold meg a válaszodat!

202. Az S csúcsú gúla alaplapja az $ABCDEF$ hatszög. Lehet-e az SAB lapban az alábbi síkokkal párhuzamos szakaszt húzni:

1) ABC; 2) SCD;

3) SCE; 4) SAF?

203. Az A és a B pont egy hasáb szomszédos lapjaira illeszkedik.
Hogyan lehet ezen lapok síkjaiban párhuzamos egyeneseket húzni az A és a B pontokon keresztül?

204. Metszheti-e a háromszög két oldalfelező-pontjára illeszkedő sík a háromszög harmadik oldalát?

205. Adott: 1) négyzet; 2) szabályos hatszög. Az α sík párhuzamos a sokszög egyik oldalával.
Állapítsd meg, milyen lehet az α sík és a többi oldal kölcsönös helyzete?

206*. Bizonyítsd be, hogy végtelen olyan sík van, ami metszi az adott egyenest!

207*. Lehet-e síkot fektetni adott egyenesen át párhuzamosan:

1) egy adott egyenessel;

2) két adott egyenessel?

208*. Adott egy tetszőleges gúla. Bizonyítsd be, hogy a két szomszédos él felezőpontjára illeszkedő egyenes párhuzamos az alaplappal!

209*. Az $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ szabályos hatoldalú hasáb.
Párhuzamos-e az ACC_1 sík:

1) az F csúcsra és a DD_1 él felezőpontjára illeszkedő egyenessel;

2) a D csúcsra és az E_1F_1 él felezőpontjára illeszkedő egyenessel?

210*. Bizonyítsd be, hogy azok az egyenesek, melyek metszik az AB egyenest és párhuzamosak az AB egyenesse! kitérő CD egyenessel, egy síkban vannak!

211*. Bizonyítsd be, hogy a téglatest mind a négy testátlója egy pontban metszik egymást és metszéspontjukban felezik egymást!

212*. Egy négyszög csúcsai különböző síkokban vannak.

Bizonyítsd be, hogy a négyszög két kitérő oldalával párhuzamos sík a másik két oldalt arányos szakaszokra osztja!

213*. Szerkeszd meg annak a két háromszög síkjának metsző egyenesét, melyek egyik csúcsa közös, a közös csúccsal szembeni oldalaik pedig párhuzamosak!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

214. Milyen a kölcsönös helyzete a folyón átívelő hídnak (*a* egyenes), a vízfolyás irányának (*b* egyenes) és a vízfelületnek (α sík)?

215. Szerelésnél a lambéria felső szélét a padló szegőlécéhez igazítják. Párhuzamos-e a lambéria felső része és a padló síkja? Indokold meg a válaszodat!

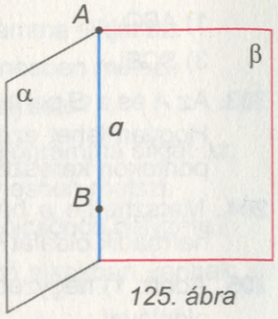
6. § KÉT SÍK KÖLCSÖNÖS HELYZETE A TÉRBEN

Már tudod, hogy két sík vagy metszi egymást vagy nem.

1. EGYMÁST METSZŐ SÍKOK

A térmértan 4. axiómája alapján, ha két síknak van közös pontja, akkor *metszetük* egy egyenes, amely ezen a ponton megy át (125. ábra).

Az egyenes minden pontja mind a két síkban benne van.



125. ábra

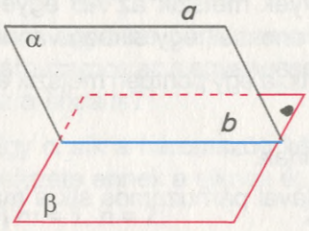
Az egymást metsző α és β síkot így jelöljük: $\alpha \times \beta$.

Tétel (egymást metsző síkokról).
Ha két egymást metsző sík közül az egyik illeszkedik a másik síkkal párhuzamos egyenesre, akkor a metsző egyenes párhuzamos az adott egyenessel.

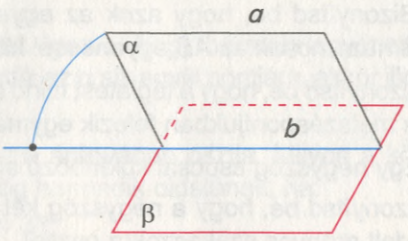
Adott: $\alpha \times \beta$, az *a* egyenes az α síkban van és $a \parallel \beta$, a *b* egyenes az α és a β síkra is illeszkedik.

Bizonyítsd be: $a \parallel b$!

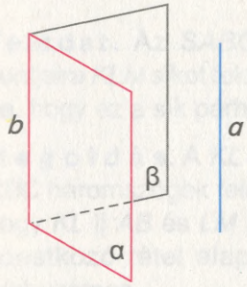
Bizonyítás. A *b* és az *a* egyenes egy közös síkban, az α síkban van. A *b* egyenes nem metszheti az *a* egyenest, mert akkor az *a* egyenes metszené a β síkot (127. ábra), de ez lehetetlen.



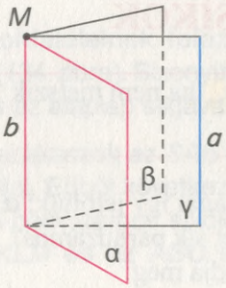
126. ábra



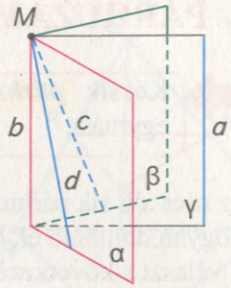
127. ábra



128. ábra



129. ábra



130. ábra

Következmény (egymást metsző síkok tulajdonsága). Ha egy egyenes párhuzamos két egymást metsző sík mindegyikével, akkor párhuzamos a síkok metsző egyenesével is.

Jelöljük az α és β síkok metsző egyenesét *b*-vel. Az *a* egyenes párhuzamos mind a két síkkal: $a \parallel \alpha$ és $a \parallel \beta$ (128. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $a \parallel b$!

Fektessünk egy γ síkot az *a* egyenesen és a *b* egyenes tetszőleges *M* pontján át (129. ábra). Tegyük fel, hogy a γ sík metszi az α és a β síkot rendre a *b* egyenestől különböző *c* és *d* egyenesben (130. ábra).

Az egymást metsző síkok tulajdonsága alapján $a \parallel c$ és $a \parallel d$. Az kaptuk, hogy az *M* pontra két, az *a* egyenessel párhuzamos *c* és *d* egyenes illeszkedik. Ez lehetetlen. Tehát, az *a*, *d* és *b* egyenesek egybeesnek, ami azt jelenti, hogy $a \parallel b$.

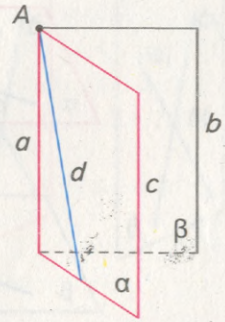
Az egymást metsző síkok eddig felsorolt tulajdonságai a térbeli egyenesek párhuzamosságának ismertetőjelei.

Feladat. Ha két egyenes párhuzamos egy harmadikkal, akkor egymással is párhuzamosak. Bizonyítsd be az egymást metsző síkok tulajdonsága alapján!

Megoldás. Legyen $a \parallel c$ és $b \parallel c$ (131. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $a \parallel b$! Fektessünk α síkot az *a* és *c* egyenesekre.

Mivel $b \parallel c$, ezért $b \parallel \alpha$ (a sík és az egyenes párhuzamossága alapján). A *b* egyenesen és az *a* egyenes tetszőleges *A* pontján át fektessünk egy β síkot. Mivel $c \parallel b$, ezért $c \parallel \beta$ (a sík és az egyenes párhuzamossága alapján). Tehát, a metsző síkok tulajdonságából kiindulva az α és a β sík metsző egyenese párhuzamos az *A* pontra illeszkedő *c* egyenessel. Jelöljük ezt az egyenest *d*-vel. Azt kaptuk, hogy az *A* ponton keresztül két egyenes megy át, az *a* és a *d*, ami párhuzamos a *c* egyenessel. Ez lehetetlen.

Vagyis, az *a* és a *d* egyenes egybeesik, tehát $a \parallel b$.



131. ábra

2. PÁRHUZAMOS SÍKOK

Két sík ***párhuzamos***, ha nem metszik egymást.

Az α és a β sík párhuzamosságát így jelöljük: $\alpha \parallel \beta$.

Hogyan dönthető el, hogy két sík párhuzamos?

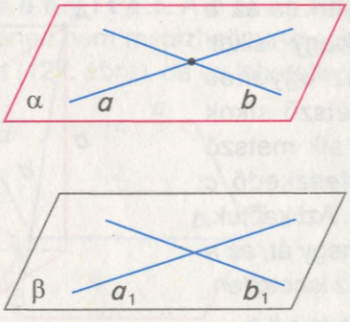
A választ a következő tétel adja meg:

Tétel (a síkok párhuzamosságáról).
Ha egy sík két egymást metsző egyenese megfelelően párhuzamos egy másik sík két egyenesével, akkor ezek a síkok párhuzamosak.

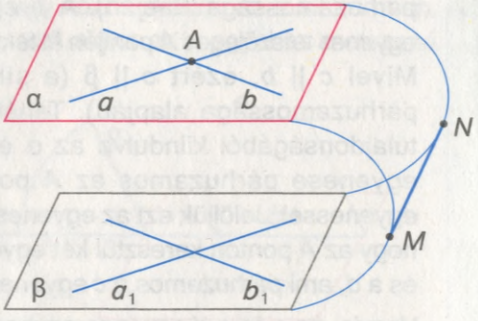
Adott: az α és a β sík, az α síkban egy a és egy b egyenes, $a \times b$, az a_1 és b_1 egyenesek a β síkban, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (132. ábra).

Bizonyítsd be: $\alpha \parallel \beta$!

Bizonyítás. Mivel a és b párhuzamos megfelelően az a_1 és b_1 egyenesekkel, ezért $a \parallel \beta$ és $b \parallel \beta$ (az egyenes és a sík párhuzamossága alapján).
Tegyük fel, hogy az α és β sík nem párhuzamos, hanem metszik egymást egy MN egyenesben (133. ábra).
Az α sík az a egyenesre illeszkedik, párhuzamos a β síkkal és metszi ezt a síkot az MN egyenesben. Ezért az egymást metsző síkok alapján $MN \parallel a$.
Ugyanígy illeszkedik az α sík a b egyenesre, párhuzamos a β síkkal és metszi ezt a síkot az MN egyenesben.
Tehát $MN \parallel b$.
Azt kaptuk, hogy az α síkban az A pontra illeszkedő két egyenes, az a és a b is párhuzamos az MN egyenessel. De ez ellentmond a párhuzamos egyenesek alaptulajdonságának. Tehát az α és β sík nem metszi egymást, vagyis $\alpha \parallel \beta$.



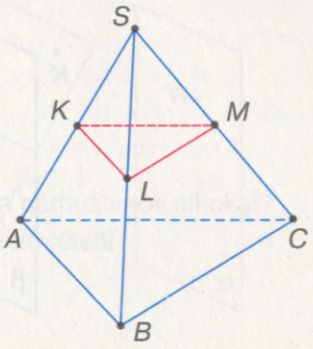
132. ábra



133. ábra

Feladat. Az *SABC* gúla oldaléleinek felezőpontjaira *KLM* síkot fektettünk (134. ábra). Bizonyítsd be, hogy ez a sík párhuzamos az alaplap síkjával!

Megoldás. A *KL* és *LM* szakaszok az *SAB* és *SBC* háromszögek felezőpontjai. Ebből következik, hogy $KL \parallel AB$ és $LM \parallel BC$. A párhuzamos síkokra vonatkozó tétel alapján a *KLM* és az *ABC* sík párhuzamos.



134. ábra

Fogadjuk el bizonyítás nélkül a következő tételt:

Tétel (a síkok párhuzamosságáról).
A síkon kívüli ponton keresztül az adott síkkal párhuzamos sík fektethető, de csak egy.

A síkok kölcsönös helyzetét a 6. táblázatban foglaltuk össze.

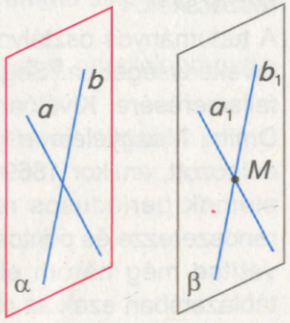
6. táblázat

Alakzatok	Kölcsönös helyzetük		Jelölésük
α és β sík	van közös pontjuk	metszik egymást	$\alpha \times \beta$
	nincs közös pontjuk	párhuzamosak	$\beta \parallel \alpha$

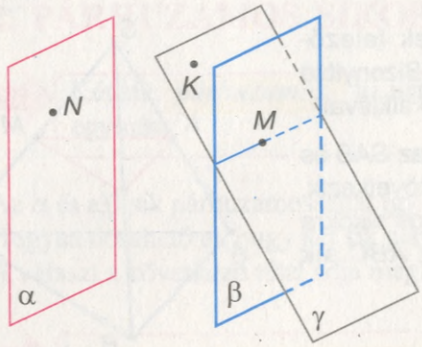
BŐVEBBEN

1. Felmerülhet a következő kérdés: *Hogyan lehet bebizonyítani a párhuzamos egyenesek alaptulajdonságát?*
Legyen α az adott sík, és *M* a rajta kívüli pont.

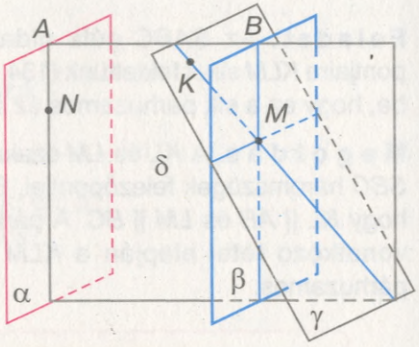
Be kell bizonyítani, hogy:
1) az *M* ponton keresztül lehet az α síkkal párhuzamos egyenest fektetni;
2) a β sík egyetlen.
1) Húzzunk az α síkban egymást metsző *a* és *b* egyenest. A párhuzamos egyenesekről szóló tétel alapján az *M* ponton keresztül húzhatunk az *a* és *b* egyenesekkel megfelelően párhuzamos a_1 és b_1 egyeneseket. A térmértan axiómáinak 2. következménye szerint az a_1 és b_1 egyenesekre sík fektethető. Legyen ez a sík β (135. ábra). A párhuzamos síkok tételéből következik, hogy $\beta \parallel \alpha$.



135. ábra



136. ábra



137. ábra

2) Tegyük fel, hogy az *M* ponton keresztül még egy γ sík fektethető párhuzamosan az α síkkal (136. ábra). Vegyünk fel a γ síkban egy *K* pontot, ami nem illeszkedik a β síkra, és egy *N* pontot az α síkban. Az *M*, *K* és *N* pontra fektessünk egy δ síkot (137. ábra). Ez a sík az α síkot az *NA*, a β síkot az *MB*, a γ síkot pedig az *MK* egyenesben metszi. Az *MB* és az *MK* egyenes nem metszheti az *NA* egyenest, mert nem metszik az α síkot, mivel megfelelően a β és γ síkokban vannak, ezek pedig, mint tudjuk, párhuzamosak az α síkkal. Azt kaptuk, hogy a δ síkban az *M* ponton keresztül két egyenes húzható, az *MB* és az *MK*, ami párhuzamos az *NA* egyenessel, de ez lehetetlen. Tehát a β sík az egyetlen megoldás.

2. A „klasszifikáció" szakkifejezés a latin eredetű, a *classis* – csoport, és *facio* – csinálom szavak összetételéből alakult ki. A *klasszifikáció*, rendszerezés általános értelemben a tárgyak lényeges tulajdonságuk szerinti csoportra bontása, ez a tulajdonság jellemző az adott tárgyakra és megkülönbözteti azokat a többitől. Minden osztály további alosztályokra bontható. Azt a jellegzetes ismertetőjelet, amely alapján az osztályozás történik, a *klasszifikáció alapjának* nevezzük. Más tudományágakban már találkoztál az osztályozással. Például, a zoológiában ilyen a Földet benépesítő élő szervezetek osztályozása, a történelemben a társadalmi-gazdasági alakulatok, a fizikában az elemi részecskék.

A tudományos osztályozás nagy szerepet játszik az emberiség elméleti és gyakorlati tevékenységében. Segít a kutatásban, lehetőséget nyújt a rejtett törvényszerűségek felismerésére. Kiválóan szemlélteti mindezt a kémiai elemek periódusos rendszere. Dmitrij Mengyelejev (1834–1907) híres orosz tudós a *Kémia alapjai* című könyvén dolgozott, amikor 1869-ben felfedezte a természet legalapvetőbb törvényét, a kémiai elemek periódusos rendszerét. Ez nemcsak abban segített a tudósnak, hogy rendszerezze és pontosítsa az addig ismert kémiai elemek tulajdonságát, hanem előre vetítse még három elem létezését. A Mengyelejev nevét viselő kémiai elemek táblázatában ezek az elemek 21., 31. és 32. sorszámot kapták. A galliumot (31. elem) egy francia kémikus, Paul-Émile Lecoq de Boisbaudran fedezte fel 1875-ben, 1879-ben Lars Fredrik Nilson a szkandiumot (21. elem), 1886-ban Clemens Winkler német fizikus pedig a germániumot (a 32. elemet) fedezte fel.

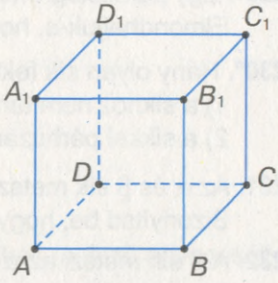
FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Milyen lehet két sík kölcsönös helyzete?
2. Mi a metsző síkok tulajdonsága?
3. Bizonyítsd be a metsző síkokról szóló tételt!
4. Add meg a párhuzamos síkok definícióját! Hogyan jelöljük a párhuzamos síkokat?
5. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a párhuzamos síkokról szóló tételt!
6. Mi a párhuzamos síkok fő tulajdonsága?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

216'. Hozz fel példát a környezetedből két sík kölcsönös helyzetére!

217'. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (138. ábra). Mi az alábbi síkok metsző egyenese:
1) ABB_1 és ABC;
2) A_1D_1D és ABB_1;
3) BCC_1 és CDD_1?
Mely egyenesekkel párhuzamosak a metsző egyenesek?



138. ábra

218'. Mely síkok párhuzamosak a 138. ábrán? Nevezz meg az egyik síkra illeszkedő egymást metsző egyenespárokat és a másik síkban lévő megfelelő egyenespárokat!

219'. Hozz fel példát a környezetedből a párhuzamos síkokról szóló tétel szemléltetésére!

220°. Rajzolj egymást metsző α és β síkot! Húzz az α síkban egy a egyenest! Milyen az a egyenes és a β sík kölcsönös helyzete?

221°. Metszheti-e két sík egymást, ha mind a kettő párhuzamos egy adott egyenessel?

222°. Adott egy ABCD parallelogramma. Az α sík a parallelogramma síkját az 1) AB; 2) BC; 3) CD egyenesben metszi.
Bizonyítsd be, hogy a két sík metsző egyenese párhuzamos a parallelogramma szemben lévő oldalával!

223°. Metszd az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát az alábbi lapokkal párhuzamos síkkal:
1) $ABCD$;
2) AA_1B_1B;
3) CDD_1C_1!

224°. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest.
Bizonyítsd be, hogy az alábbi síkok párhuzamosak:
1) ABC és $A_1B_1C_1$;
2) ABB_1 és DDC_1;
3) B_1C_1C és D_1DA_1!

225°. Ha az egyik síkban lévő egyenes párhuzamos egy másik síkra illeszkedő egyenessel, akkor ezek a síkok párhuzamosak.
Igaz-e ez az állítás?

226°. Ha az egyik síkban lévő két egyenes párhuzamos egy másik síkra illeszkedő két egyenessel, akkor ezek a síkok párhuzamosak.
Igaz-e ez az állítás?

227°. Lehet-e párhuzamos két nem párhuzamos egyenesre illeszkedő sík?

228°. Az a és a b egyenes kitérő. Az A pont az a egyenesen van, a B pont pedig a b egyenesen. Az AB egyenesen felvettek egy tetszőleges C pontot, majd ezen a ponton keresztül két síkot fektettek úgy, hogy az a egyenes az α síkban legyen, a b egyenes pedig a β síkban.
Milyen az α és a β sík kölcsönös helyzete?

229°. Egy parallelogramma két oldala párhuzamos az α síkkal.
Elmondhatjuk-e, hogy az α sík párhuzamos a parallelogramma síkjával?

230°. Hány olyan sík fektethető, amely párhuzamos az adott síkkal és illeszkedik:
1) a síkhoz nem tartozó pontra;
2) a síkkal párhuzamos egyenesre?

231. Az α és β sík metszi egymást.
Bizonyítsd be, hogy bármely γ sík metszi legalább az egyik síkot (α vagy β)!

232. A β sík metszi az α síkkal párhuzamos egyenest.
Bizonyítsd be, hogy az α és a β sík metszi egymást!

233. Az α és a β sík párhuzamos.
Az A pont az α síkban van.
Bizonyítsd be, hogy az összes olyan egyenes, amely illeszkedik az A pontra és párhuzamos a β síkkal, benne van az α síkban!

234. Ha az α sík párhuzamos β-val és a β sík párhuzamos a γ-val, akkor az α sík párhuzamos a γ síkkal.
Bizonyítsd be!

235. Az α és a β sík párhuzamos a γ síkkal.
Metszheti-e egymást az α és a β sík?

236. A γ sík az α és a β síkot párhuzamos egyenesekben metszi.
Párhuzamos-e az α és a β sík?

237. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka.
Bizonyítsd be, hogy az alábbi síkok párhuzamosak:
1) ACB_1 és A_1C_1D;
2) B_1D_1C és BDA_1!

238. Adva van két kitérő egyenes.
Bizonyítsd be, hogy csak egy olyan párhuzamos síkpár létezik, melyekre az adott egyenesek külön-külön illeszkednek!

239. Hogyan lehet kitérő egyenesekre párhuzamos síkokat fektetni?

240. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasáb alaplapja szabályos hatszög. Párhuzamosak-e az alábbi pontokra illeszkedő síkok:

1) A, A_1, C_1 és D, D_1, F_1;
2) A, A_1, B és C, C_1, F;
3) A, B_1, C és D, E_1, F;
4) A, A_1, D és C, C_1 és az AB él középpontja?

241. Az A, B, C és D pontok nem egy síkra illeszkednek. Az AB, BC, AC, AD, CD, és BD szakaszok felezőpontjai rendre a K, L, M, N, E és F pont.

Párhuzamosak-e az alábbi síkok:

1) BCD és KMN; 2) ABD és LME; 3) ACD és KLF?

242*. Adott két egymást metsző sík. Fektethető-e sík úgy, hogy az adott síkokat párhuzamos egyenesekben metssze?

Hány ilyen sík fektethető az adott:

1) pontra;
2) a síkokkal párhuzamos egyenesre;
3) az egyik síkkal párhuzamos egyenesre;
4) a síkokat metsző egyenesre;
5) az egyik síkban lévő egyenesre?

243*. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockában szerkeszd meg az alábbi síkok metsző egyenesét:

1) AB_1D_1 és A_1BD;
2) A_1BC és B_1BD;
3) A_1D_1C és AB_1D.

244*. Két háromszög közös csúcsa egy adott síkon kívül van, míg a vele szemben lévő oldalak a síkban. Szerkeszd meg a háromszögek síkjainak metsző egyenesét!

Hány eset lehetséges?

245*. Az a egyenesre, ami két párhuzamos sík egyikére illeszkedik, további síkokat fektettek, amelyek az a_1, a_2, a_3, ... egyenesekben metszik a második síkot. Milyen az egyenesek kölcsönös helyzete? A válaszodat indokold meg!

246*. Hány kölcsönösen párhuzamos síkpár fektethető két párhuzamos egyenesre?

247*. Bizonyítsd be, hogy az adott pontra illeszkedő, adott síkkal párhuzamos összes egyenes egy síkban van!

248*. Minden egyenes, amely a sík egyik pontjára illeszkedik és párhuzamos a síkkal párhuzamos egyenessel, illeszkedik a síkra.

Bizonyítsd be!

249*. Párhuzamos-e:

1) egy hasáb két oldallapja;
2) egy hasáb három oldallapja?

250*. Egy egyenes hasáb alaplapja szabályos ötszög.
Bizonyítsd be, hogy a hasáb egyik oldalélére és az alaplap egyik átlójára illeszkedő sík párhuzamos valamelyik oldallappal!

251*. Vizsgáld meg három sík kölcsönös helyzetét, ha:
1) közülük kettő párhuzamos;
2) páronként metszik egymást!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

252. Hogyan szemléltethetjük két sík kölcsönös helyzetét egy füzettel?

253. Egy polcot teleraktunk könyvekkel úgy, hogy a kötetek hézagmentesen érintik egymást. Milyen a könyvek kölcsönös helyzete?
Milyen lesz a könyvek kölcsönös helyzete, ha néhányat leveszünk a polcról?

254. Leellenőrizhető-e egy szoba plafonjának és padlójának párhuzamossága:
1) ezekre a síkokra illeszkedő két-két egyenessel;
2) ezekre a síkokra illeszkedő három-három egyenessel;
3) ezekre a síkokra illeszkedő négy-négy egyenessel?
Ha igen, akkor milyen módszerrel?
Ajánlj saját módszert a plafon és a padló párhuzamosságának leellenőrzésére!

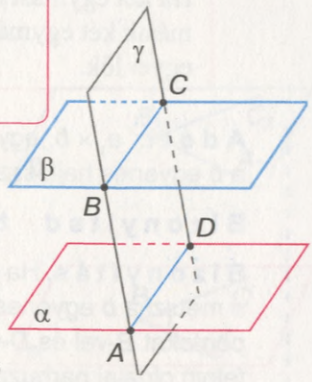
255. Ahhoz, hogy eldöntsék, nem deformálódott-e a faajtó használat közben, a bezárt ajtó kerületén bejelölnek néhány ellenőrző pontot.
Ha ezekben a pontokban az ajtó felületének és az ajtófélfa síkjainak kölcsönös helyzete nem azonos (az egyik helyen homorú, a másik pontban domború), akkor az ajtó eldeformálódott.
Hány ellenőrző pont szükséges?
Mivel magyarázható a módszer helyessége?



7. § A PÁRHUZAMOS SÍKOK TULAJDONSÁGAI

A párhuzamos síkok főbb tulajdonságai az őket metsző harmadik síkhoz köthetők. Ezt a síkot *szelő síknak* nevezzük.

Tétel
(két párhuzamos síkról és az őket metsző síkról).
Ha két párhuzamos síkot metszünk egy harmadik síkkal, akkor a metsző egyenesek párhuzamosak.

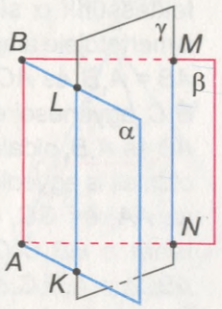


139. ábra

Adott: $\alpha \parallel \beta$,
γ – a metsző sík,
AD – az α és a β sík metsző egyenese,
BC – a β és a γ sík metsző egyenese (139. ábra).

Bizonyítsd be: $AD \parallel BC$.

Bizonyítás. A feltétel alapján az AD és BC egyenes a γ síkban van. Ez a két egyenes nem metszheti egymást, mivel akkor az α és a β síknak is metszenie kellene egymást, de ez ellentmond ennek a feltételnek. Vagyis, $AD \parallel BC$.

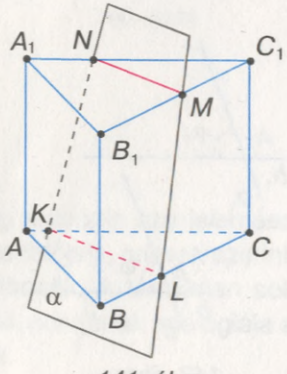


140. ábra

? Igaz-e ennek a tételnek a megfordítása? Nem. Ha két síkot metszünk egy harmadik síkkal és a metsző egyenesek párhuzamosak, abból még nem következik, hogy a síkok is párhuzamosak (140. ábra).

Feladat. Bizonyítsd be, hogy egy szelő sík a hasáb alaplapjainak síkjait párhuzamos egyenesekben metszi!

Megoldás. Legyen az adott hasáb $ABCA_1B_1C_1$, az ABC és $A_1B_1C_1$ alapokat (141. ábra) az α sík a KL és MN egyenesekben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $KL \parallel MN$!
Mivel a hasáb oldallapjai téglalapok, ezért $AB \parallel A_1B_1$ és $BC \parallel B_1C_1$, ezért a síkok párhuzamosságának ismertetőjele alapján a hasáb alapjai, az ABC és $A_1B_1C_1$ síkok is párhuzamosak. A párhuzamos síkok metszése egy harmadik síkkal tételből következik, hogy az alapokat metsző KL és MN párhuzamos egyenesek párhuzamosak az α síkkal.



141. ábra

Jegyezd meg, hogy:
- **a szabályos hasábok alapjai párhuzamosak;**
- **a derékszögű parallelepipedon szemben fekvő lapjai párhuzamosak;**
- **a soklapok párhuzamos lapjait a szelő sík párhuzamos egyenesekben metszi!**

Tétel (az egymást metsző egyenesek hajlásszögeik egyenlőségéről).
Ha két egymást metsző egyenes megfelelően párhuzamos másik két egymást metsző egyenessel, akkor hajlásszögeik egyenlők.

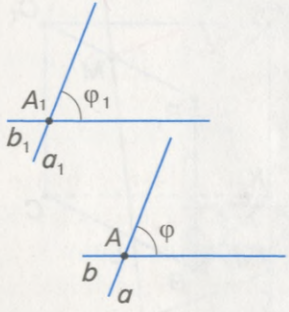
Adott: $a_1 \times b_1$ egy A pontban, $a_1 \times b_1$ egy A_1 pontban, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, φ az a és a b egyenes hajlásszöge, φ_1 az a_1 és a b_1 egyenes hajlásszöge (142. ábra).

Bizonyítsd be: $\varphi = \varphi_1$.

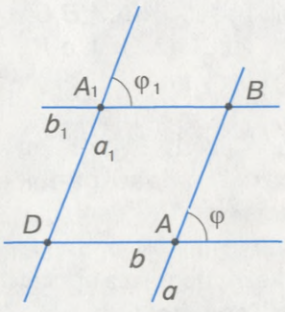
Bizonyítás. Ha az a, b, a_1 és b_1 egyenesek egy síkra illeszkednek, akkor az a metszi a b egyenest és a b pedig az a_1-t (143. ábra). Jelöljük ezeket a metszéspontokat B-vel és D-vel. Az ABA_1D négyszög parallelogramma, mivel a szemben fekvő oldalai párhuzamosak. Ezért $\varphi = \varphi_1$.

Az a, b, a_1 és b_1 nem egy síkra illeszkednek (144. ábra). Az a és b egyenesre fektessünk α síkot, az a_1 és b_1 egyenesre egy β síkot. A párhuzamos síkok ismertetőjele alapján az $\alpha \parallel \beta$. Mérjünk ezekre az egyenesekre azonos hosszúságú $AB = A_1B_1$ és $AC = A_1C_1$ szakaszokat, majd húzzuk meg az AA_1, BB_1, CC_1, BC és B_1C_1 egyeneseket. Az ABA_1B_1 négyszög parallelogramma, mivel a szemben fekvő AB és A_1B_1 oldalai egyenlő hosszúságúak és párhuzamosak. Ezért az AA_1 és BB_1 oldalak is egyenlők és párhuzamosak. Hasonlóképpen egyenlők és párhuzamosak az AA_1 és CC_1 szakaszok is. Ebből következik, hogy $BB_1 = CC_1$, $BB_1 \parallel CC_1$, tehát a BB_1C_1C négyszög parallelogramma. Vagyis $BC = B_1C_1$, és így az $ABC\Delta = A_1B_1C_1\Delta$ a megfelelő három oldal egyenlősége miatt. Ebből következik a megfelelő szögek egyenlősége $BAC\angle = B_1A_1C_1\angle$.

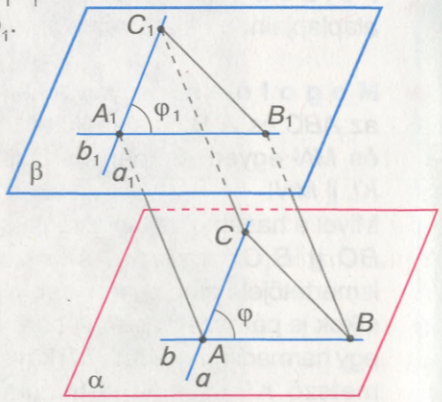
Mivel $BAC\angle = \varphi$, $B_1A_1C_1\angle = \varphi_1$ ezért $\varphi = \varphi_1$.



142. ábra



143. ábra



144. ábra

1. következmény (merőleges egyenesek ismertetőjele).

Két egymásra merőleges egyenessel megfelelően párhuzamos másik két egyenes is merőleges.

Az állítás egyenesen következik az előbb bizonyított tételből, ha $\varphi = 90°$.

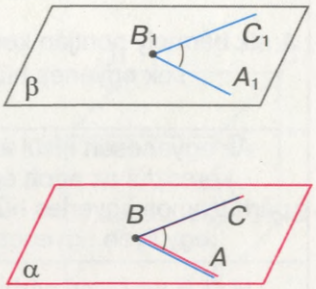
2. következmény. A kitérő egyenesek hajlásszöge nem függ a velük párhuzamos egymást metsző egyenesek kiválasztásától.
Az állítás egyenesen következik az előbb bizonyított tételből.

3. következmény (az egyirányú és párhuzamos szárú szögekről, egyállású szögekről).

Az egyállású szögek egyenlő fokmértékűek (145. ábra).

Valóban, ezen szögek szárai olyan egymást metsző egyenesekre illeszkednek, melyek metszéspontja a szög csúcsa.

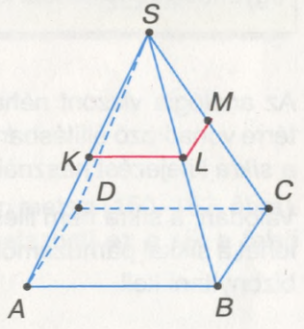
Az egymást metsző egyenesek hajlásszögéről szóló tétel alapján $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$.



145. ábra

Feladat. A *KL* és az *LM* egy szabályos *SABCD* négyoldalú gúla *SAB* és *SBC* oldallapjainak a középvonalai (146. ábra). Mekkora a *KLM* szög?

Megoldás. Mivel a *KL* és az *LM* az *SAB* és *SBC* háromszögek középvonalai, ezért $KL \parallel AB$ és $LM \parallel BC$. A *KLM* és *ABC* szögek szárai egyirányúak, mivel az *SB* egyenestől egy oldalra eső félsíkokban vannak. Ezért az egyállású szögek tulajdonsága alapján $KLM\angle = ABC\angle$.
A feltétel alapján a gúla szabályos,
ezért $ABC\angle = 90°$.
Tehát, $KLM\angle = 90°$.



146. ábra

BŐVEBBEN

A matematikusok gyakran hivatkoznak *analógiákra*. A görög *analógia* szó jelentése hasonló, a jelenségek vagy tárgyak valamely tulajdonsága, ismertetőjele, arányai szerinti hasonlóságra utal, miközben ezek a tárgyak teljesen különbözők. A térmértan sok kérdését a síkmértan hasonló kérdései alapján vizsgálják. A sík pontjának analógiája a térben az egyenes, a síkra illeszkedő egyenesé a térben a sík.

A 7. táblázatban a síkra illeszkedő pont és egyenes, illetve a térben található egyenes és sík kölcsönös helyzetének analógiáira hozunk fel példákat.

7. táblázat

A síkon	A térben
Ha két egyenesnek van közös pontja, akkor ez a két egyenes ebben a pontban metszi egymást.	Ha két síknak van közös egyenese, akkor ez a két sík ebben az egyenesben metszi egymást.
A sík bármely pontján keresztül végtelen sok egyenes húzható.	A tér bármely egyenesén keresztül végtelen sok sík fektethető.
Az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül az adott egyenessel párhuzamos egyenes húzható, de csak egy ilyen egyenes létezik.	A síkot nem metsző egyenesen keresztül az adott síkkal párhuzamos sík fektethető, de csak egy ilyen sík létezik.
Ha két egyenes párhuzamos egy harmadik egyenessel, akkor ezek az egyenesek egymással is párhuzamosak.	Ha két sík párhuzamos egy harmadik síkkal, akkor ezek a síkok egymással is párhuzamosak.

Az analógia viszont néha hibás következtetésre is vezethet. Például, ha a harmadik térre vonatkozó állításban *a síkot nem metsző egyenes* kifejezés helyett *nem illeszkedik a síkra* kifejezést használunk, akkor hibás ítéletet kapunk.

Valóban, a síkra nem illeszkedő egyenes metszheti is a síkot, és ilyen egyenesre nem lehet a síkkal párhuzamos síkot fektetni. Ezért az analógia alapján kimondott állításokat bizonyítani kell.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

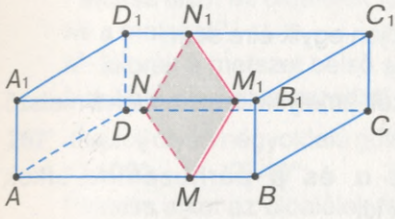
1. Magyarázd meg, mit nevezünk két párhuzamos sík szelő síkjának!
2. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a párhuzamos síkokat szelő síkról szóló tételt!
3. Folgalmazd meg az egymást metsző egyenesek hajlásszögéről szóló tételt! Bizonyítsd be!
4. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a merőleges egyenesek a térben?
5. Magyarázd meg, mitől nem függ a kitérő egyenesek hajlásszöge!
6. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek az egyállású szögek?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

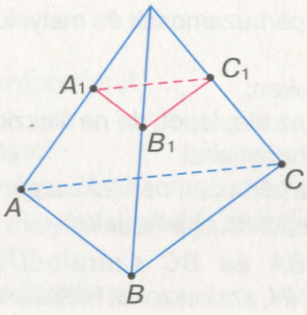
256'. Nevezd meg a 147–149. ábrákon az ABC és $A_1B_1C_1$ párhuzamos síkok és a szelő sík metsző egyeneseit! Milyen a metsző egyenesek kölcsönös helyzete? Hány metsző síkja van a párhuzamos síkoknak az ábrán?

257'. Hozz fel példát párhuzamos síkokat metsző síkra a tanterem berendezése alapján!

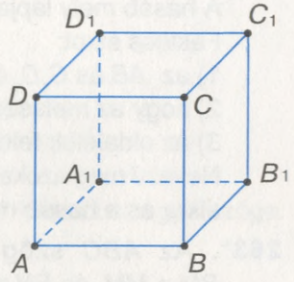
258'. Igaz-e az $ABC\angle = A_1B_1C_1\angle$ egyenlőség a 147–149. ábrák alapján, ha az $ABC\angle$ és az $A_1B_1C_1\angle$ sík párhuzamos? Indokold meg a válaszodat!



147. ábra



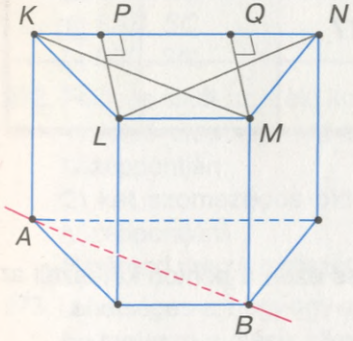
148. ábra



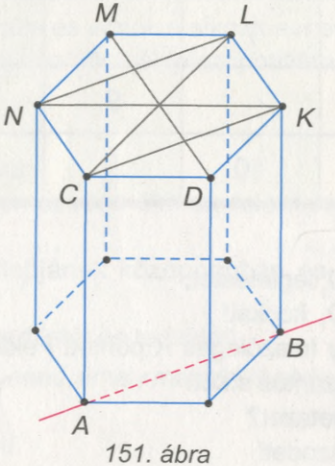
149. ábra

259'. Hozz fel példát környezetedből:
1) merőleges egyenesekre;
2) párhuzamos és egyirányú szárú szögekre!

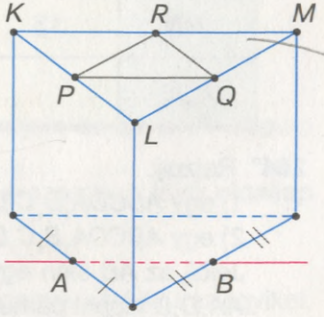
260°. A szelő sík egy hasáb alsó alaplapját az AB egyenesben metszi (150–152. ábra). A rajzon megjelölt egyenesek közül melyikben nem metszheti ez a sík a felső alaplapot? Indokold meg a válaszodat!



150. ábra



151. ábra



152. ábra

261°. Rajzolj egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatestet!
Rajzold meg azt a síkot, ami metszi az alábbi párhuzamos síkokat:
1) ABC és $A_1B_1C_1$;
2) ADD_1 és BCC_1;
3) ABB_1 és C_1CD.
Metszi-e ez a sík a többi párhuzamos síkpárt?
Nevezd meg a párhuzamos síkok és a szelő sík metsző egyeneseit!
Milyen ezeknek az egyeneseknek a kölcsönös helyzete?
Jegyezd le a füzetedbe!

262°. Rajzolj egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasábot, melynek az alaplapja trapéz. A trapéz alapjai AB és CD.
A hasáb mely lapjai párhuzamosak és melyek nem?
Fektess síkot:
1) az AB és C_1D_1 éleken;
2) hogy az metssze az alaplapot, de ne illeszkedjen egyik élre sem;
3) az oldalélek felezőpontjaira!
Nevezd meg azokat a párhuzamos szakaszpárokat, amelyek illeszkednek a metsző síkra és a hasáb megfelelő oldallapjaira!

263°. Az ABC szög BA és BC száraiból az α és β párhuzamos síkok $BM = MM_1$ és $BN = NN_1$ szakaszokat metszenek ki.
Töltsd ki a 8. táblázatot!

8. táblázat

BM	5			10		13
BM_1		7	12		3	
BN	12		5			21
BN_1		7		18	5	
MN	13		9	17		20
M_1N_1		10			4	

264°. Rajzolj:
1) egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatestet;
2) egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát!
Jelölj az AB élen egy tetszőleges K pontot! Fektess ezen a ponton keresztül az AA_1D_1D lappal párhuzamos síkot!
Milyen négyszög a metszet?
Indokold meg a válaszodat!

265°. Rajzolj:
1) egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ szabályos hasábot;
2) egy $ABCA_1B_1C_1$ szabályos hasábot!
Jelölj a hasáb AA_1 élén egy tetszőleges A_2 pontot és fektess a ponton keresztül az alsó alappal párhuzamos síkot!
Milyen síkidom a metszet?
Jelöld a metszet csúcsait A_2 -vel, B_2 -vel... !
Nevezd meg az egyállású szögeket!
Mekkorák ezek a szögek?

266°. Rajzolj háromoldalú gúlát, melynek alaplapja egyenlőszárú háromszög és:
1) a szárszöge 110°;
2) az alapon fekvő szöge 50°;
3) a szárszöge 30°!
Fektess síkot az oldalélek felezőpontjára!
Mi a metszet?
Mekkorák a metszet belső szögei?
Indokold meg a válaszodat!

267°. Rajzolj olyan négyoldalú gúlát, melynek alaplapja rombusz! A rombusz egyik szöge:
1) 100°; 2) 40°; 3) 60°.
Fektess síkot az oldalélek felezőpontjára!
Mi a metszet?
Mekkorák a metszet belső szögei?
Indokold meg a válaszodat!

268. Egy parallelogramma két oldala párhuzamos az α síkkal.
Igaz-e, hogy a parallelogramma síkja párhuzamos az α síkkal?

269. Egy trapéz egyik szára és átlója párhuzamos az α síkkal.
Párhuzamos-e az α sík és a trapéz síkja?

270. Egy háromszög két oldala párhuzamos az α síkkal.
Bizonyítsd be, hogy a háromszög harmadik oldala is párhuzamos az α síkkal!

271. Szerkeszd meg az *SABC* gúla és annak a síknak a metszetét, amely párhuzamos az adott lappal és illeszkedik az adott él felezőpontjára:
1) *SAB, SC*;
2) *SBC, SA*!

272. Fektess síkot az *a* élű kocka:
1) felső alaplapja két szomszédos élének felezőpontjain és az alsó alaplap középpontján;
2) két szomszédos oldallapjának középpontján és a szemben lévő oldallap középpontján!
Határozd meg a metszet kerületét és területét!

273. Lehetséges-e, hogy egy egyenes, amely metszi két párhuzamos sík közül az egyiket, ne metssze a másik síkot!
Indokold meg a válaszodat!

274. Bizonyítsd be, hogy a párhuzamos síkok azonos hosszúságú szakaszokat metszenek ki a párhuzamos egyenesekből!

275. Metszhetnek-e ki párhuzamos síkok egyenlő hosszúságú szakaszokat nem párhuzamos egyenesekből?
Indokold meg a válaszodat!

276. Adva van két párhuzamos sík. Az egyik sík A és B pontján keresztül párhuzamos egyeneseket húztak, melyek a másik síkot rendre egy C és egy D pontban metszik. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög parallelogramma!

277. A BAC szög AB szárát az α és β párhuzamos síkok megfelelően az M és M_1 pontban, illetve az AC oldalt az N és N_1 pontban metszik.
Határozd meg az MN szakasz hosszát, ha:
1) $AM = 12$ cm, $AM_1 = 18$ cm, $M_1N_1 = 54$ cm;
2 $AM = 24$ cm, $AM_1 = 18$ cm, $M_1N_1 = 54$ cm.

278. Az AA_1, BB_1 és CC_1 szakasz nem egy síkban van és közös a felezőpontjuk. Bizonyítsd, be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ síkok párhuzamosak!
Mekkorák az $A_1B_1C_1$ háromszög belső szögei, ha:
1) $A\angle = 30°$, $B\angle = 60°$, $C\angle = 90°$;
2) $A\angle = 50°$, $B\angle = 60°$, $C\angle = 70°$?

279. A D pont nem illeszkedik az ABC háromszög síkjára. Az M, N és P pontok a DA, DB és DC szakasz felezőpontjai.
Bizonyítsd be, hogy az ABC és MNP síkok párhuzamosak!
Mekkorák az ABC háromszög belső szögei, ha:
1) $M\angle = 120°$, $N\angle = 25°$, $P\angle = 35°$;
2) $M\angle = 40°$, $N\angle = 40°$, $P\angle = 80°$?

280*. Bizonyítsd be, hogyha három egyenes párhuzamos síkokat metsz, akkor a metszéspontok minden síkon egy olyan háromszög csúcsai:

1) melyek egybevágók, ha ezek az egyenesek párhuzamosak;

2) melyek hasonlók, ha az egyenesek egy pontban metszik egymást!

281*. Bizonyítsd be, hogy azoknak a szakaszoknak a felezőpontjai, melyek végpontjai párhuzamos síkokra illeszkednek, egy síkban vannak!

282*. Az $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ olyan hasáb, melynek alapja szabályos hatszög.
Párhuzamos-e az AD_1 egyenes és a BCC_1 sík?
Indokold meg a válaszodat!

283*. Húzd meg az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockában az alábbi síkokat:
1) A_1BD és B_1CD_1;
2) AB_1D_1 és BDC_1!
Bizonyítsd be, hogy ez a sík az AC_1 (a második esetben az A_1C) szakaszt három egyenlő részre osztja!

284*. Adott két párhuzamos sík és rajtuk kívül egy O pont.
Az O ponton keresztül három egyenest húztak, melyek az adott síkokat rendre az A, B, C és A_1, B_1, C_1 pontokban metszik. $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.
Határozd meg: 1) A_1B_1; 2) az $A_1B_1C_1\Delta$ területét!

285*. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek úgy helyezkednek el a térben, hogy a megfelelő szögeik párhuzamos és egyirányú szárúak. A BE és a CD szakasz az ABC háromszög magassága, a C_1D_1 szakasz pedig az $A_1B_1C_1$ háromszögé.
Határozd meg az alábbi egyenesek hajlásszögét:
1) AC és B_1C_1; 2) AC és A_1B_1;
3) CD és A_1B_1; 4) AC és C_1D_1;
5) BE és B_1C_1; 6) BE és C_1D_1!

286*. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek úgy helyezkednek el a térben, hogy a megfelelő szögeik szárai párhuzamosak, de ellentétes irányúak. A BE és a CD szakasz az $ABC\Delta$ magasságai, a C_1D_1 szakasz pedig az $A_1B_1C_1\Delta$ magassága.
Határozd meg az alábbi egyenesek hajlásszögét:
1) AC és B_1C_1; 2) AC és A_1B_1;
3) CD és A_1B_1; 4) AC és C_1D_1;
5) BE és B_1C_1; 6) BE és C_1D_1!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

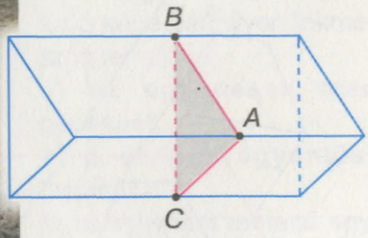
287. Miért húzható ki egyszerre egy komód minden fiókja?

288. Magyarázd meg, hogyan kell egy szekrény falán kijelölni a polcok helyét!

289. Hogyan kell egy derékszögű vonalzóval leellenőrizni, jól állították-e be az ajtót? Min alapul ez a módszer?

290. Egy 2,8 méter mély háromszög keresztmetszetű csatornán a zsilip szabályos háromszög alakú.
Ahhoz, hogy kiszámítsák, mekkora nyomást bír ki a zsilip, ismerni kell a háromszög területét. Számítsd ki az ABC háromszög területét, ha az függőlegesen helyezkedik el (153. ábra)!

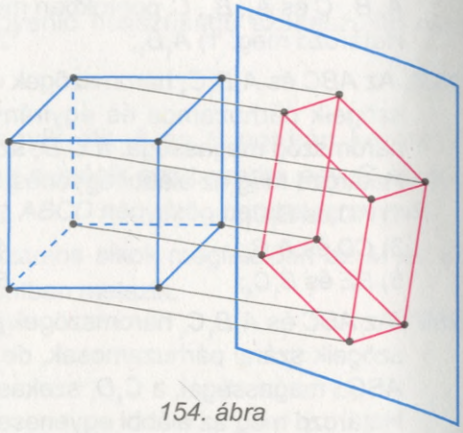




153. ábra

8. § PÁRHUZAMOS VETÍTÉS

Már tudod, hogy a testek tulajdonságait maketteken vagy a testek síkbeli ábrázolásán tanulmányozzuk. A 154. ábrán egy napsugarakkal megvilágított kocka élváza látható, melyet egy vetítővászon (fal, papírlap) elé állítottak. A kocka árnyékot vet a vetítővászonra, ami gyakorlatilag a kocka síkon történő ábrázolása. Ha a nap sugarait párhuzamosaknak tekintjük, akkor azt is elmondhatjuk, hogy a kocka képét *párhuzamos vetítéssel* megkaptuk egy másik felületen.

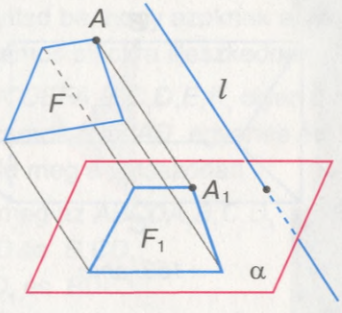


154. ábra

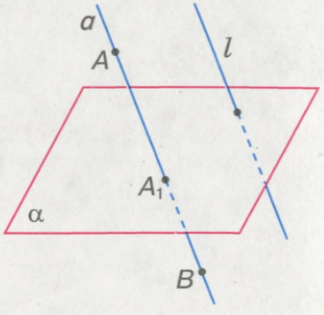
Figyeld meg a 155. ábrát! Az l egyenes metszi az α síkot. Az F test A pontján keresztül húzzunk az l egyenessel párhuzamos egyenest, amely az α síkot egy A_1 pontban metszi. Ez a pont az A pont α síkra vetített *képe*. Az F test minden pontjának képét megrajzolhatjuk ezzel a módszerrel. Az így kapott F_1 alakzat az F test α síkra vetített képe lesz. A vetített testet (jelen esetben az F test) *eredeti testnek* nevezzük. A kapott alakzatot pedig a test *párhuzamos vetületének*. Az l egyenes határozza meg a *vetítés irányát*. A vele párhuzamos egyenesek a *vetítő egyenesek*, az α sík pedig a *képsík*.

Mi a képe a vetítő egyenessel párhuzamos egyenesnek? Egy pont, mert az egyenes minden pontjának képe a képsíkon a metszéspont lesz (156. ábra).

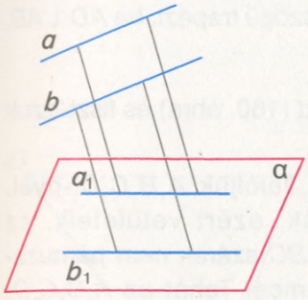
A párhuzamos vetítésnél azok a szakaszok és egyenesek, amelyek nincsenek külön kiemelve, nem párhuzamosak a vetítő egyenesekkel.



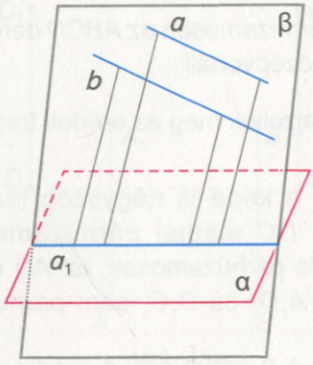
155. ábra



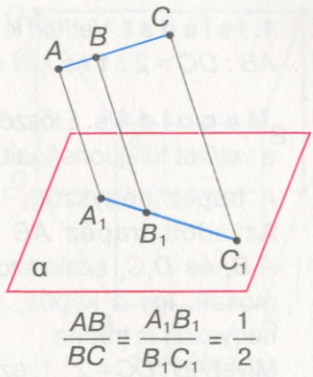
156. ábra



157. ábra



158. ábra



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{1}{2}$$

159. ábra

Megadjuk a párhuzamos vetítés néhány tulajdonságát.

1. A pont képe pont.

2. Az egyenes képe egyenes.

3. Párhuzamos egyenesek képei párhuzamos egyenesek (157. ábra)**, vagy illeszkedő egyenesek, ha az adott egyenesek a vetítő egyenessel párhuzamos síkban vannak** (158. ábra)**.**

4. Egy egyenesre vagy párhuzamos egyenesekre illeszkedő szakaszok és képeik aránya egyenlő (159. ábra)**.**

A felsorolt tulajdonságokból következik, hogy a párhuzamos vetítés az alakzatok egyes tulajdonságait megtartja, egyeseket viszont nem (lásd a 9. táblázatot).

9. táblázat

Azok a tulajdonságok, melyeket a párhuzamos vetítés MEGTART	Azok a tulajdonságok, melyeket a párhuzamos vetítés NEM TART MEG
1) **Az alakzat osztályozását** (a pont képe pont, az egyenes képe egyenes, a háromszög képe háromszög, stb.); 2) **a pont és az egyenes kölcsönös helyzetét;** 3) **a pontok sorrendjét** (a szakasz belső pontjának a vetülete a belső pont); 4) **az egyenesek párhuzamosságát;** 5) **egy egyenes vagy párhuzamos egyenesekre illeszkedő szakaszok egyenlőségét (arányosságát)**	1) **A szakasz hossza**; 2) **a szög fokmértéke** (a derékszög képe bármilyen fokmértékű szög lehet); 3) **az egyenesek merőlegességét;** 4) **a szögek egyenlőségét (arányát);** 5) **az egymást metsző egyenesekre illeszkedő szakaszok egyenlőségét (arányosságát)**

1. feladat. Vetítsd le párhuzamosan az $ABCD$ derékszögű trapézt, ha $AD \perp AB$, $AB : DC = 2 : 1$ és MN a középvonal!

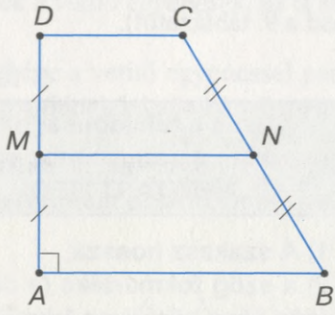
Megoldás. Először rajzoljuk meg az eredeti trapézt (160. ábra) és tisztázzuk a vetület tulajdonságait.

A trapéz négyszög, így a képe is négyszög lesz. Jelöljük $A_1B_1C_1D_1$-gyel. Az adott trapéz AB és DC alapjai párhuzamosak, ezért vetületeik, az A_1B_1 és D_1C_1 szakaszok is párhuzamosak; az AD és BC szárak nem párhuzamosak, így a képük, az A_1D_1 és B_1C_1 sem párhuzamos. Tehát az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög is trapéz.

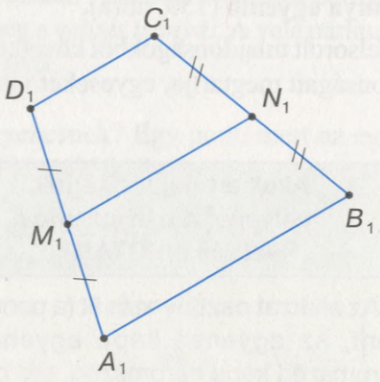
Mivel $AB : DC = 2 : 1$, ezért $A_1B_1 : D_1C_1 = 2 : 1$, mert a párhuzamos vetítés megtartja a párhuzamos egyenesekre illeszkedő szakaszok arányát. Az adatok alapján $AD \perp AB$. Mivel a párhuzamos vetítés nem tartja meg a merőlegességet, így a $D_1A_1B_1 \angle$ nem biztos, hogy derékszög. Vagyis a derékszögű trapéz képe nem derékszögű trapéz is lehet (161. ábra).

Az M és az N pont rendre az AD és a BC oldal felezőpontja. Mivel a párhuzamos vetítés megtartja a pont és az egyenes kölcsönös helyzetét, a pontok sorrendjét, a szakaszok egyenlőségét, ezért a szárak felezőpontjainak M_1 és N_1 képe az $A_1B_1C_1D_1$ trapéz szárainak, azaz az A_1D_1 és B_1C_1 szakasznak a felezőpontja.

Az $A_1B_1C_1D_1$ trapéz az $ABCD$ trapéz képe.



160. ábra

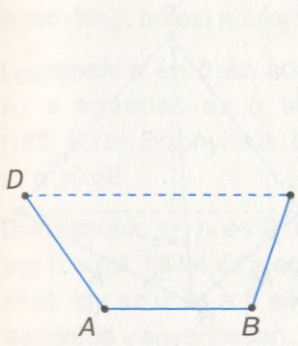


161. ábra

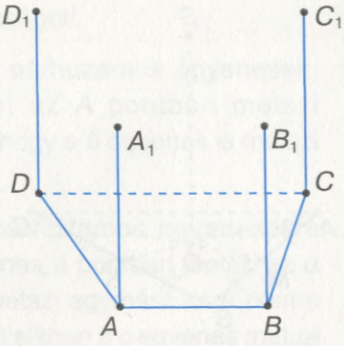
Ahhoz, hogy megrajzoljuk egy síkmértani alakzat párhuzamosan vetített képét, először rajzoljuk meg az eredeti alakzatot. Majd az eredeti alakzat tulajdonságai közül emeljük ki azokat,

– melyeket a párhuzamos vetítés megtart (ezeket kell figyelembe venni a rajzolásnál);

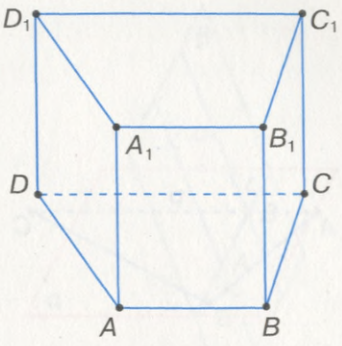
– majd azokat a tulajdonságokat, melyeket nem tart meg (ezeket nem kell figyelembe venni).



162. ábra



163. ábra



164. ábra

? Hogyan kell egy hasábot ábrázolni párhuzamos vetítéssel? Ehhez először tisztázzuk, mi lesz a lapok képe, majd mindegyiket le kell rajzolni. Vegyünk egy példát.

2. feladat. Rajzolj le egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasábot, melynek az alaplapja egyenlőszárú trapéz!

Megoldás. A hasáb ábrázolásának három lépése van:
1) lerajzoljuk valamelyik alapot;
2) meghúzzuk az oldaléleket;
3) megrajzoljuk a másik alapot.

1. Az adott hasáb alapja egyenlőszárú trapéz. A párhuzamos oldalak képei párhuzamos szakaszok, a nem párhuzamosoké nem párhuzamosak, emellett nem feltétlenül egyenlők. Ezért az alaplap képe tetszőleges $ABCD$ trapéz (162. ábra).

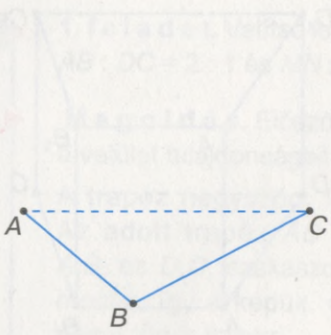
2. Az egyenes hasáb oldallapjai téglalapok, ezért vetített képük parallelogramma. Ebből következik, hogy az élek képei párhuzamosak és egyenlők. Meghúzzuk ezeket a szakaszokat a füzet szélével párhuzamosan (163. ábra).

3. Kössük össze a szakaszok végpontjait, így megkapjuk a hasáb felső alaplapját. A rajz készítésénél figyelembe vettük, hogy a hasáb alaplapjai párhuzamos síkokra illeszkedő és egybevágó sokszögek. Ezért az alaplapok képei egybevágó sokszögek, melyek megfelelő oldalai párhuzamosak (164. ábra). Tehát az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ a keresett hasáb.

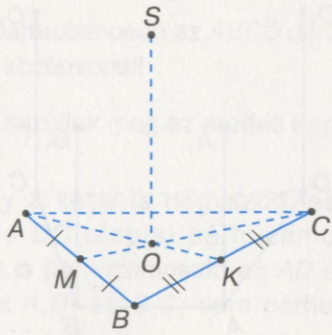
Jegyezd meg, hogy a testek ábrázolásakor a látható szakaszokat folytonos vonallal, a nem látható szakaszokat szaggatott vonallal ábrázoljuk.

3. feladat. Ábrázold az $SABC$ szabályos háromoldalú gúlát!

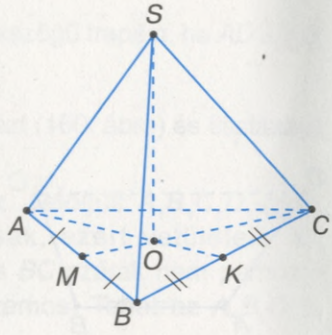
Megoldás. A rajzot három lépésben készítjük el:
1) megrajzoljuk az alaplapot;
2) megállapítjuk a gúla magasságának és a csúcsának a helyzetét;
3) meghúzzuk az oldaléleket.



165. ábra



166. ábra



167. ábra

1. A gúla alaplapja szabályos háromszög, melynek a képe tetszőleges *ABC* háromszög (165. ábra), mivel a párhuzamos vetítés nem tartja meg sem a szögek nagyságát, sem a szakaszok egyenlőségét.

2. A gúla csúcsa illeszkedik a magasságára. A magasság talppontja az alaplap súlyvonalainak metszéspontja. Húzzunk ezen a ponton keresztül egy egyenest a füzet függőleges szélével párhuzamosan. Majd ezen az egyenes vegyünk fel egy tetszőleges *S* pontot.
Így megkaptuk a gúla csúcsának a képét (166. ábra).

3. Összekötve a csúcsot az alaplap csúcsaival, megkapjuk a gúla oldaléleinek ábrázolását. Figyelembe kell venni, hogy a szabályos gúla oldallapjai egyenlőszárú háromszögek, de a párhuzamos vetítés nem tartja meg a szakaszok egyenlőségét. Ezért az oldalélek képei tetszőleges hosszúságú szakaszok, melyek a gúla csúcsát kötik össze az alaplap csúcsaival (167. ábra).
Az *SABC* a keresett gúla.

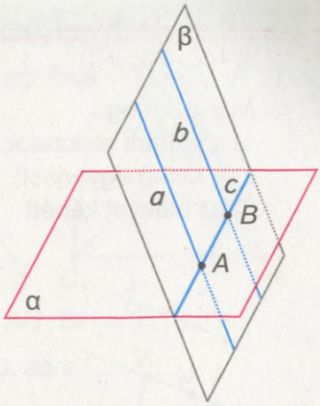
Jegyezd meg:
– a gúla talppontjának helyzete a gúla tulajdonságaitól függ;
– a szabályos gúla talppontja az alaplap középpontja;
– a gúla magasságát a füzetlap függőleges szélével párhuzamosan húzzuk meg;
– a gúla csúcsát a magasság megrajzolása után jelöljük ki.

BŐVEBBEN

1. A testek síkbeli ábrázolása párhuzamos vetítés esetében a párhuzamos egyenesek alábbi tulajdonságain alapszik: **ha két párhuzamos egyenes közül az egyik metszi az adott síkot, akkor a másik is metszi ezt a síkot.**

Bizonyítsuk be ezt a tulajdonságot!

Legyenek *a* és *b* az adott párhuzamos egyenesek. Az *a* egyenes az α síkot az *A* pontban metszi (168. ábra). Bizonyítsuk, be hogy a *b* egyenes is metszi az α síkot!



168. ábra

Fektessünk az *a* és a *b* párhuzamos egyenesekre egy β síkot. Mivel az *a* egyenes *A* pontban metszi az α síkot, így az α és a β sík metszi egymást az *A* pontra illeszkedő *c* egyenesben. A β síkban a *c* egyenes metszi az *a* egyenest, így metszi a vele párhuzamos *b* egyenest is. Legyen a *b* és a *c* egyenes metszéspontja a *B* pont. A *B* pont illeszkedik az α és a β sík metsző egyenesére, ezért az α síkban van. Azt kaptuk, hogy a *b* egyenes és az α sík közös pontja a *B* pont. Több közös pontjuk nem lehet, mert akkor a *b* egyenes egybeesne a *c* egyenessel. Tehát a *b* egyenes metszi az α síkot.

2. A testek síkbeli ábrázolásának elméletét sok tekintetben továbbfejlesztette Nyikolaj Csetveruhin (1891–1974) orosz mértanász. Ő alapozta meg a mértani testek szemléletes ábrázolásának az *axonometriában* alkalmazott módszereknél egyszerűbb lehetőségeit. A tudós eredményei lehetővé tették a testek ábrázolásának oktatását az iskolai mértanban.



Ny. F. Csetveruhin

FŐBB TUDNIVALÓK

1. Mi a párhuzamos vetítés; képsík; vetítő egyenes?

2. Sorold fel a párhuzamos vetítés tulajdonságait!

3. Az alakzatok mely tulajdonságait tartja meg a párhuzamos vetítés?

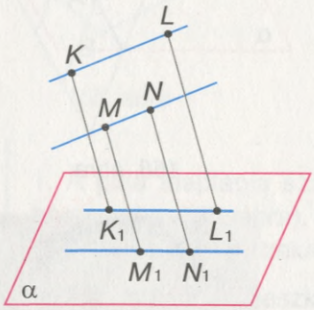
4. Nevezd meg az alakzatok olyan tulajdonságait, melyeket a párhuzamos vetítés nem tart meg!

5. Mi lehet egy háromszög; egy parallelogramma; egy téglalap; egy trapéz képe a párhuzamos vetítésnél?

6. Magyarázd el, hogyan kell ábrázolni egy hasábot; egy gúlát!

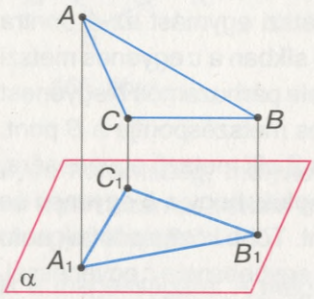
OLDD MEG A FELADATOKAT!

291'. A 169–171. ábrákon az eredeti alakzat és párhuzamosan vetített képe látható. Nevezd meg:
1) a vetített alakzatot;
2) a vetítő egyenest;
3) az alakzat képét!

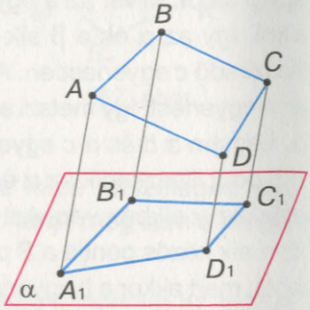


$KL \parallel MN$

169. ábra



170. ábra



171. ábra

292'. Lehet-e egy háromszög képe négyszög?

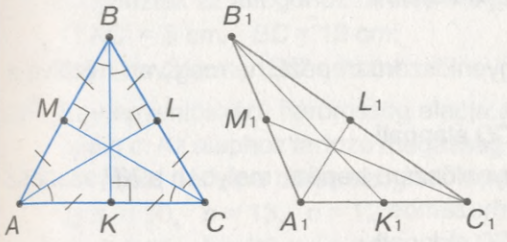
293'. Lehet-e egy négyszög képe háromszög?

294'. Az AB és BC szakasz egy egyenes része. A B pont az A és a C pont között van. Mekkora az adott szakaszok képeinek aránya, ha a vetületeik aránya:
1) $AB : BC = 3 : 4$;
2) $AB : BC = 7 : 1$;
3) $AB : BC = 4 : 9$?

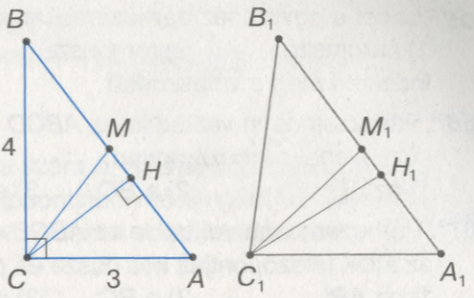
295'. Mérd fel az AO félegyenesre az alábbi szakaszokat:
1) $AB = 2$ cm és $BC = 3$ cm;
2) $AB = 2$ cm és $BC = 1$ cm;
3) $AB = 3$ cm és $BC = 1{,}5$ cm!
Mennyi a vetületeik aránya?

296'. Az AB és CD szakaszok párhuzamos szakaszokon vannak. Mennyi a vetületeik aránya, ha:
1) $AB : CD = 3 : 4$;
2) $AB : CD = 7 : 1$;
3) $AB : CD = 4 : 9$?

297'. A B pont az A és C pont között van.
1) Lehet-e a C pont képe az A és B pont képei között?
2) Lehet-e az A pont képe a B és C pont képei között?
3) Melyik pont képe esik a másik két pont képe közzé?



172. ábra



$AM = MB$ $AH : BH = 9 : 16$

173. ábra

298°. A 172. és a 173. ábrán egy ABC háromszög és a párhuzamosan vetített $A_1B_1C_1$. képe látható.
Nevezd meg az ABC háromszög azon tulajdonságait, melyeket a párhuzamos vetítés
1) megtartott; 2) nem tartott meg!

Jegyezd meg, hogy a derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság a befogók négyzeteinek arányában osztja (173. ábra).

299°. Vetítsd le párhuzamosan az ABC egyenlőszárú háromszöget, melyben meg vannak húzva:
1) a szárakhoz tartozó súlyvonalak;
2) az alaphoz tartozó magasság;
3) a szárszög szögfelezője!

300°. Az ABC derékszögű háromszögben a C szög a derékszög. Rajzold meg ennek a háromszögnek a párhuzamos vetített képét, ha ábrázolták:
1) a súlyvonalakat;
2) a középvonalakat;
3) az átfogóhoz tartozó magasságot!

301°. Meg vannak rajzolva az ABC derékszögű háromszög befogóinak oldalfelező merőlegesei. Ábrázold a háromszög párhuzamosan vetített képét, ha a háromszög derékszöge:
1) az A szög; 2) a B szög; 3) a C szög!

302°. Lehet-e egy parallelogramma párhuzamosan vetített képe:
1) négyzet; 2) rombusz; 3) trapéz?

303°. Lehet-e egy négyzet párhuzamosan vetített képe:
1) négyzet; 2) rombusz; 3) trapéz?

304°. Párhuzamosan vetítsd le azt az $ABCD$ téglalapot, melyben szakaszokkal kötötték össze:
1) a hosszabbik oldal felezőpontját a szemben lévő oldal csúcsaival;
2) a szemben fekvő oldalak felezőpontjait;
3) a szomszédos oldalak felezőpontjait!

305°. Lehet-e egy trapéz párhuzamosan vetített képe:
1) háromszög; 2) rombusz; 3) trapéz?
Indokold meg a válaszodat!

306°. Párhuzamosan vetítsd le az $ABCD$ egyenlőszárú trapézt, ha meg van rajzolva a középvonal párhuzamosan:
1) az AB; 2) a BC; 3) a CD alappal!

307°. Párhuzamosan vetítsd le az $ABCD$ egyenlőszárú trapézt, melyben a KP szakasz az átlók felezőpontjait köti össze és párhuzamos:
1) az AB; 2) a BC; 3) a CD alappal!

308°. Ábrázold egy szabályos:
1) háromszög;
2) négyszög;
3) hatszög párhuzamosan vetített képét!
Hogyan kell megszerkeszteni a sokszögek középpontjának képét?

309°. Ábrázolj egy szabályos:
1) háromoldalú hasábot; 2) négyoldalú hasábot;
3) hatoldalú hasábot!

310°. Ábrázolj egy szabályos:
1) háromoldalú gúlát; 2) négyoldalú gúlát;
3) hatoldalú gúlát!

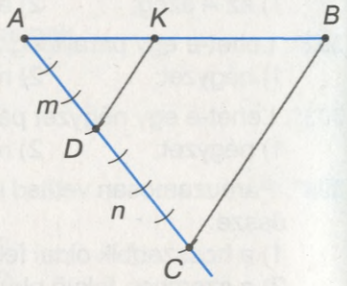
311. Egy párhuzamos vetítésnél valamely alakzat képe egy szakasz. Mi lehetett az eredeti alakzat?

312. Bizonyítsd be, hogy a szakasz felezőpontjának a képe megegyezik a szakasz képének a felezőpontjával!

313. Párhuzamosan vetítsd le az AB szakaszt, ha a K pont az adott arányban osztja a szakaszt:
1) 1 : 3; 2) 3 : 5;
3) 3 : 1,5; 4) 2 : 0,5!

Ahhoz, hogy az AB szakaszt a megadott $m : n$ arányban tudjuk felosztani (174. ábra)**, az alábbi műveleteket kell elvégezni:**

1) húzz meg egy segéd félegyenest, melynek kezdőpontja A;
2) mérj fel az A ponttól m darab egyenlő hosszúságú szakaszt. Az utolsó szakasz végpontját jelöld D-vel;
3) mérj fel a D ponttól n ugyanilyen hosszúságú szakaszt, és az utolsó szakasz végpontját jelöld C-vel;
4) húzd meg a CB egyenest;
5) húzz a D ponton keresztül a CB egyenessel párhuzamos egyenest! Ez az egyenes az AB szakaszt a keresett K pontban metszi.



174. ábra

314. Ábrázold az ABC derékszögű háromszög párhuzamosan vetített képét, melyben meghúzták az átfogóhoz tartozó magasságot, a befogók hossza pedig:
1) $AC = 5$ cm, $BC = 12$ cm;
2) $AC = 24$ cm, $BC = 1$ cm!

315. Egy egyenlőszárú háromszög alapja a, a szára b, az alaphoz tartozó magassága pedig c. Az alaphoz tartozó magasság talppontjából merőlegest húztak a szárakra. Ábrázold ennek a háromszögnek a párhuzamosan vetített képét, ha:
1) $a = 10$, $b = 13$, $c = 12$;
2) $a = 14$, $b = 25$, $c = 24$!

316. Egy egyenlőszárú háromszög alapja a, a szára b. Megjelölték a háromszög köré írt és beírt körének középpontját. Ábrázold ennek a háromszögnek a párhuzamosan vetített képét, ha:
1) $a = 6$, $b = 8$;
2) $a = 10$, $b = 13$!

317. Ábrázold az $ABCD$ téglalap párhuzamosan vetített képét, ha adott az átlóhoz tartozó magasság és:
1) $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm;
2) $AB = 5$ cm, $BC = 10$ cm!

318. Párhuzamosan vetítsd le azt a rombuszt, melynek hegyesszöge 60° és meghúzták a magasságát: 1) a hegyesszög csúcsából; 2) a tompaszög csúcsából!

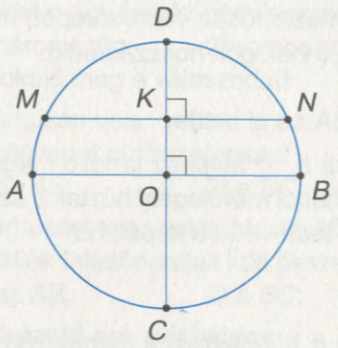
319. Egy rombusz oldala a, átlói d_1 és d_2. A rombusz magassága illeszkedik az átlók metszéspontjára. Ábrázold a rombusz párhuzamosan vetített képét, ha:
1) $a = 25$ cm, $d_1 = 30$ cm, $d_2 = 40$ cm;
2) $a = 169$ cm, $d_1 = 130$ cm, $d_2 = 312$ cm!

320. Ábrázold az $ABCD$ trapéz párhuzamosan vetített képét, ha a tompaszögek szögfelezőinek metszéspontja az alapra illeszkedik és az egyik szögfelező párhuzamos 1) az AB; 2) a BC; 3) a CD oldallal!

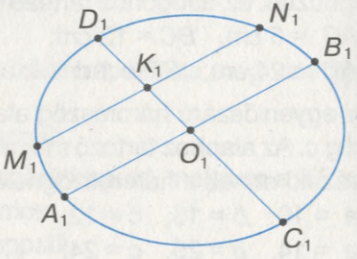
321. Ábrázold annak az egyenlőszárú trapéznak a párhuzamosan vetített képét, melyben a tompaszögből meghúzták a magasságot, az alapjainak hossza pedig:
1) 12 cm és 24 cm; 2) 8 cm és 14 cm!

322. Ábrázold azt az egyenes hasábot, melynek az alapja egy ABC derékszögű háromszög, a háromszög befogóinak hossza pedig:
1) $AC = 5$ cm, $BC = 12$ cm;
2) $AC = 24$ cm, $BC = 1$ cm!
Szerkeszd meg a hasábnak és annak a síknak a metszetét, amely a C_1 pontra és az alaplap átfogójához tartozó CH magasságra illeszkedik!

323. Ábrázold azt az egyenes hasábot, melynek az alapja egy rombusz, a rombusz hegyesszöge pedig 60°! Szerkeszd meg a hasábnak és annak a síknak a metszetét, amely párhuzamos az egyik oldaléllel, és az alaplapot a rombusz:
1) hegyesszögének a csúcsából;
2) tompaszögének a csúcsából húzott magasságban metszi!



175. ábra



176. ábra

324. Ábrázold azt a gúlát, melynek alaplapja egyenlőszárú háromszög, a háromszög szára b, alapja a, ha:
1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$!
Szerkeszd meg a gúlának és annak a síknak a metszetét, amelyet a gúla csúcsán, az alap egyik csúcsán és az alapba írt körvonal középpontján fektettek le!

325. Ábrázold azt a gúlát, melynek alaplapja egyenlőszárú trapéz, a trapéz alapjainak hossza pedig:
1) $AB = 12$ cm, $CD = 24$ cm;
2) $AC = 8$ cm, $BD = 14$ cm!
Szerkeszd meg a gúlának és annak a síknak a metszetét, amely a gúla csúcsára és az alaplap tompaszögéből húzott magasságára illeszkedik!

326*. Meghúzták az ABC háromszög B csúcsának szögfelezőjét. Ismeretes, hogy $AB : BC = m : n$. Párhuzamosan vetítsd le ezt a háromszöget, ha:
1) $m = 2$, $n = 3$;
2) $m = 5$, $n = 4$!

327*. Ábrázold annak a derékszögű háromszögnek a párhuzamosan vetített képét, melynek befogói a és b, átfogója c, ismertek beírt és körülírt körének középpontjai, ha:
1) $a : b : c = 3 : 4 : 5$;
2) $a : b : c = 8 : 15 : 17$!

328*. Egy derékszögű háromszög oldalaira négyzeteket rajzoltak. Ábrázold ennek a háromszögnek a párhuzamos vetületét, ha a háromszög:
1) egyenlőszárú; 2) egyik szöge 30°!

329*. Rajzold meg annak a tompaszögű háromszögnek a párhuzamosan vetített képét, melynek tompaszöge 1) 120° 2) 150°!
Melyik pont lesz a háromszögbe írt körvonal középpontjának képe?
A körülírt körvonalának képe?

330*. Az $ABCD$ négyzetet úgy szerkesztették meg, hogy a CD oldala egy egyenlőszárú trapéz egyik alapja, a BC oldala pedig a trapéz magassága lett.
Rajzold meg a trapéz párhuzamosan vetített képét!

331*. Egy szabályos háromszöget úgy rajzoltak meg, hogy az egyik oldala egy derékszögű trapéz kisebbik alapja, a magassága pedig a trapéz magassága lett. A trapéz hegyesszöge 30°.
Rajzold meg a trapéz párhuzamos vetületét!

332*. Ábrázold egy körvonal két egymásra merőleges átmérőjének párhuzamosan vetített képét!

Megoldás.

1. Rajzoljuk meg az eredeti alakzatot, egy O középpontú körvonalat, melynek AB és CD átmérője merőleges, vagyis $AB \perp CD$ (175. ábra). Húzzuk meg az AB átmérővel párhuzamos MN húrt! Mivel $AB \perp CD$, ezért $MN \perp CD$, az átmérőre merőleges húr tulajdonsága alapján $MK = KN$.

2. A körvonal vetülete O_1 középpontú ellipszis (176. ábra). Az AB átmérő képe az ellipszis tetszőleges A_1B_1 húrja. Az MN húr képe az A_1B_1 húrral párhuzamos M_1N_1 húr. A K pont az MN húr felezőpontja, ezért a vetített képe a K_1 pont az ellipszis M_1N_1 húrjának felezőpontja. Az ellipszis keresett C_1D_1 húrja az O_1 és K_1 pontokra illeszkedik.

333*. Rajzold meg annak a négyzetnek a párhuzamosan vetített képét, amely:
1) egy körvonalba van írva;
2) egy körvonal köré van írva!
Kétféleképpen oldd meg a feladatot!

334*. Rajzold meg:
1) egy körvonalba írt;
2) egy körvonal köré írt szabályos háromszög párhuzamos vetületét!

335*. Rajzold meg:
1) egy körvonalba írt;
2) egy körvonal köré írt szabályos hatszög párhuzamosan vetített képét!

336*. Párhuzamosan vetítsd le azt a téglalapot, melynek egyik oldala a és beírt körének sugara R, ha:
1) $a = 3$; $R = 2{,}5$;
2) $a = 12$; $R = 6{,}5$!

337*. Ábrázolj egy szabályos háromoldalú hasábot! Fektess metsző síkot úgy, hogy a metszet szabályos hatszög legyen!

338*. Ábrázolj egy szabályos hatoldalú hasábot! Fektess metsző síkot úgy, hogy egy szabályos háromoldalú gúlát kapjunk!

339*. Ábrázold azt a téglatestet, melynek alapélei:
1) $AB = 5$ cm; $BC = 12$ cm;
2) $AB = 24$ cm; $BC = 1$ cm!
Fektess metsző síkot az alaplap csúcsából az átlóra húzott magasságon és a felső fedőlap középpontján át! Az alsó alaplap középpontján keresztül fektess a megrajzolt metsző síkkal párhuzamos síkot! Mi a második metsző sík és a felső alaplap metszete?

340*. Ábrázold azt a szabályos háromoldalú gúlát, mely minden lapjának köré írt köre azonos sugarú!

341*. Ábrázold azt a háromoldalú gúlát, melynek az alaplapja körbe írt tompaszögű háromszög, a háromszög tompaszöge pedig:
1) 120°; 2) 150°!
A gúla magasságának talppontja a körülírt körvonal középpontja!

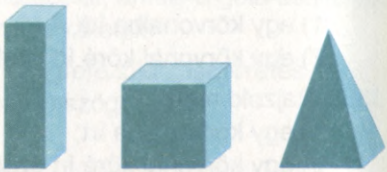
342*. Ábrázold azt a háromoldalú gúlát, melynek az alaplapja körbe írt háromszög, a háromszög két szöge pedig:
1) 30° és 60°; 2) 40° és 50°!
A gúla magassága az adott körvonal középpontja.

343*. Ábrázolj egy kockát!
Fektess síkot úgy, hogy a kimetszett test olyan szabályos:
1) hasáb legyen, melynek alaplapja maximális;
2) gúla legyen, melynek magassága maximális!

344*. Ábrázolj egy szabályos négyoldalú gúlát!
Fektess síkot úgy, hogy a kimetszett test olyan
1) téglatest legyen, melynek alaplapja maximális;
2) kocka legyen, melynek oldaléle maximális!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

345. Milyen sokszög lehet egy építmény árnyéka, ha az építmény:
1) téglatest;
2) kocka;
3) szabályos négyoldalú gúla?





ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Milyen egyeneseket nevezünk párhuzamosaknak? Kitérőknek?
2. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a térbeli párhuzamos egyenesek tulajdonságait és ismertetőjeleit!
3. Hogyan határozzuk meg a pont és az egyenes távolságát; két párhuzamos egyenes távolságát?
4. Milyen lehet egy egyenes és egy sík kölcsönös helyzete?
5. Sorold fel két sík kölcsönös helyzeteit!
6. Nevezd meg az egymást metsző síkok tulajdonságait! Bizonyítsd be azokat!
7. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a párhuzamos síkok tulajdonságait és ismertetőjeleit!
8. Mi a párhuzamos vetítés? Milyen tulajdonságai vannak?
9. Hogyan kell megrajzolni egy háromszög; parallelogramma; trapéz párhuzamosan vetített képét?
10. Hogyan lehet ábrázolni egy egyenes hasábot; gúlát?

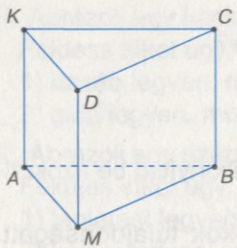
TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

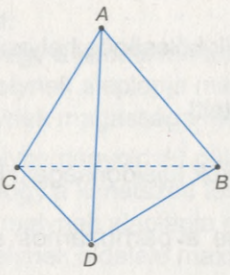
№ 1

1° 1. Mely rajzon nem kitérő az AB és CD egyenes?

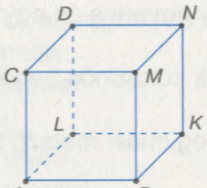
A.



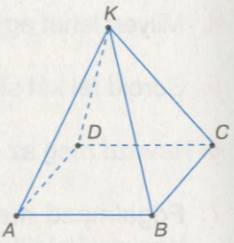
B.



C.



D.



2° Az a egyenes nem illeszkedik az $ABCD$ négyzet síkjára és párhuzamos az AB oldallal. Melyik állítás igaz?

A. $a \parallel CD$. **B.** $a \perp CD$. **C.** $a \parallel AC$. **D.** $a \parallel BD$.

3° Adva van: $\alpha \parallel \beta$, $MN \in \alpha$, $M_1N_1 \in \beta$, $MM_1 \parallel NN_1$, $MN = 10$ cm. Mekkora az M_1N_1 szakasz hossza?

A. 5 cm. **B.** 10 cm. **C.** 15 cm. **D.** 20 cm.

4 Az ABC háromszög AB oldala az α síkban van, a C pont nem illeszkedik erre a síkra. Jelölj a háromszög AC és BC oldalán egy K és egy N pontot úgy, hogy $AK : AC = 2 : 3$, $BN : NC = 2 : 1$. Milyen a KN egyenes és az α sík kölcsönös helyzete?

A. A KN egyenes nem illeszkedik az α síkra. **C.** $KN \parallel \alpha$.
B. $KN \times \alpha$. **D.** Nem lehet meghatározni.

5* Az $\alpha \parallel \beta$. A 10 cm oldalhosszúságú $ABCD$ rombusz az α síkban van. A csúcsokon át párhuzamos egyeneseket húztak, melyek a β síkot rendre az A_1, B_1, C_1 és D_1 pontokban metszik. Határozd meg az A_1, B_1, C_1 négyszög átlóit, ha az $ABCD$ rombusz nagyobbik átlója 16 cm!

A. 5 cm és 10 cm. **C.** 10 cm és 16 cm.
B. 8 cm és 10 cm. **D.** 12 cm és 16 cm.

TESZTFELADATOK

№ 2

1° A C pont az AB szakasz, a D pont az AC szakasz felezőpontja. Milyen sorrendben helyezkednek el az AB szakasz párhuzamos vetületén az A, B, C és D pontok képei?

A. A, B, C, D. **B.** A, C, B, D. **C.** A, D, C, B. **D.** A, C, D, B.

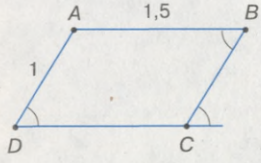
2° Az ABC háromszög párhuzamosan vetített képe az $A_1B_1C_1$ általános háromszög. Mi az ABC háromszög C csúcsából húzott súlyvonalának a képe?

A. Az A_1B_1 oldalhoz tartozó súlyvonal. **B.** Az A_1B_1 oldalhoz tartozó magasság.

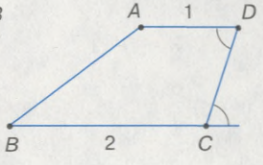
C. A C_1 szög szögfelezője. **D.** Az A_1C_1 oldalhoz tartozó súlyvonal.

3° Meg kell rajzolni az $ABCD$ trapéz párhuzamos vetítését, melynek AD alapja másfélszerese a kisebbik alapnak. Melyik ábrázolás helyes?

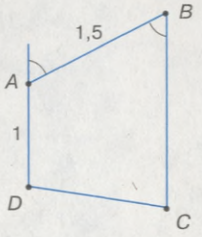
A.



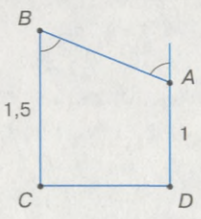
B.



C.



D.



4 Az alábbi szögnagyságok közül melyek nem lehetnek egy húrnégyszög párhuzamos vetületének belső szögei?

A. 80°, 90°, 90°, 100°. **B.** 90°, 90°, 90°, 90°.

C. 45°, 45°, 135°, 135°. **D.** 62°, 62°, 118°, 118°.

5* Egy $SABC$ szabályos háromoldalú gúla ábrázolásán jelölték a gúla magasságára és az SA oldalélre illeszkedő metsző síkot. Melyik élt metszi a sík és milyen arányban?

A. SB, 1 : 1. **B.** BC, 2 : 1. **C.** AB, 1 : 2. **D.** BC, 1 : 1.

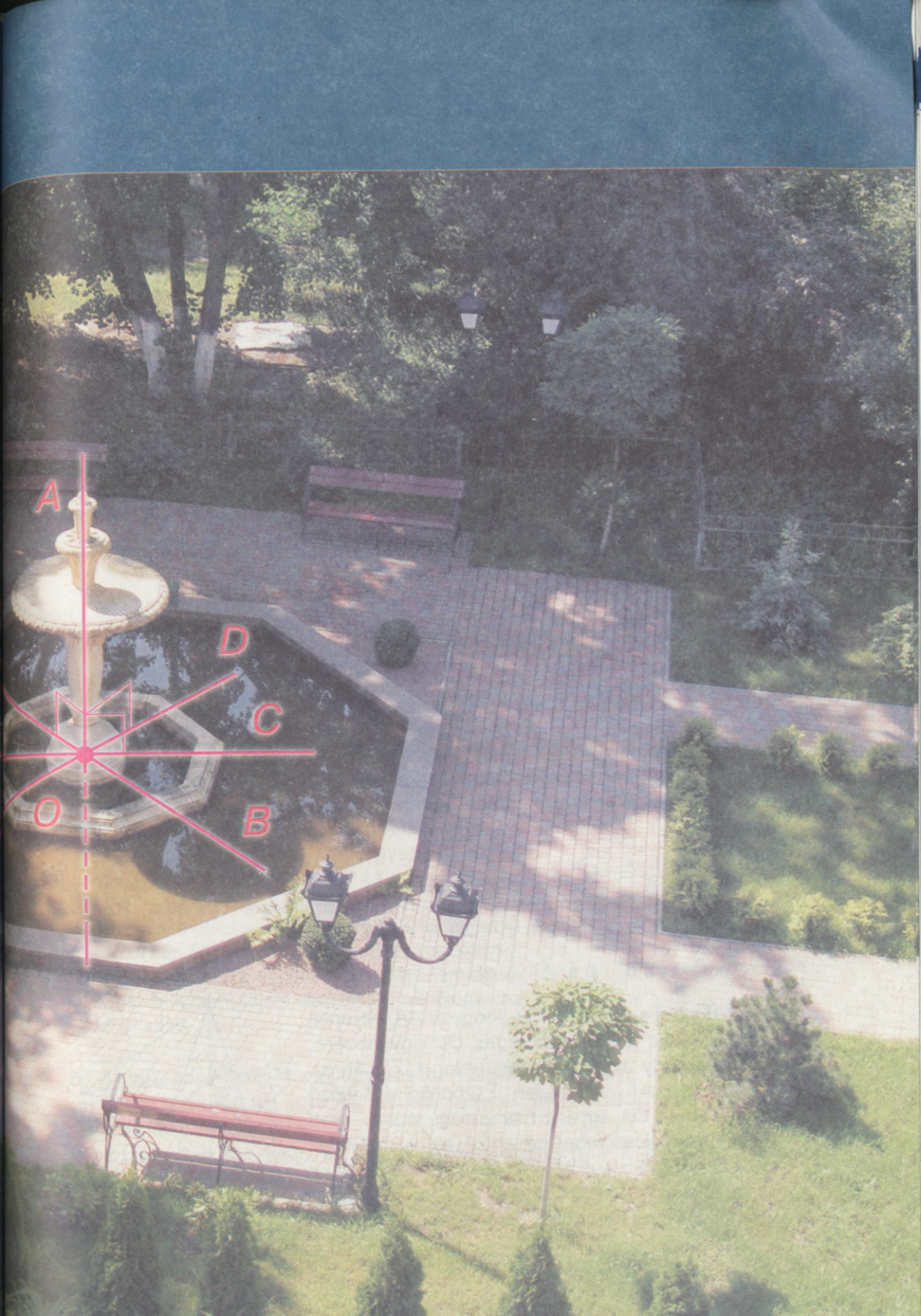
3. FEJEZET

EGYENESEK ÉS SÍKOK MERŐLEGESSÉGE A TÉRBEN



Ebben a fejezetben megtudod:

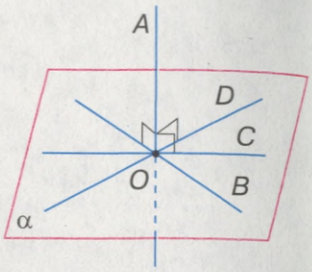
- melyek a síkra merőleges egyenesek, mik azok tulajdonságai és ismertetőjelei;
- hogyan kell megállapítani és megindokolni az egyenes és a sík kölcsönös helyzetét;
- milyen az egyenesek és a síkok merőlegessége és párhuzamossága közötti viszony;
- mi a távolság és a szögek fokmértéke a térben, hogyan kell azokat kiszámítani;
- mi az ortogonális vetítés és hogyan alkalmazzuk a térbeli testek ábrázolásánál;
- hogyan kell alkalmazni a megszerzett ismereteket a gyakorlatban és a feladatok megoldásánál.


A
D
C
O
B

9. § AZ EGYENES ÉS A SÍK MERŐLEGESSÉGE

Már tudod, ha egy egyenes nem illeszkedik a síkra és nem párhuzamos vele, akkor metszi azt. Ha egy egyenes metszi a síkot, akkor lehet merőleges is rá.

Figyeld meg a 177. ábrát! Az AO egyenes az O pontban metszi az α síkot, az OB, OC és OD egyenesek az α síkban vannak és illeszkednek az O metszéspontra. Az AO egyenes merőleges mindegyik egyenesre. Ezt úgy is szokták mondani, hogy az OA egyenes merőleges az α síkra.



177. ábra

Jelölése: $AO \perp \alpha$ vagy $\alpha \perp AO$.

Fogalmazd meg a síkra merőleges egyenes definícióját, és hasonlítsd össze a tankönyvben található meghatározással!

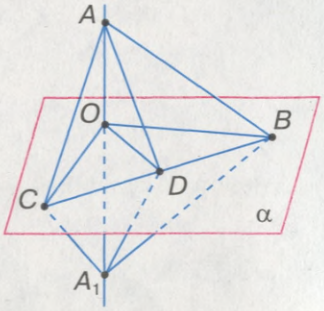
Egy egyenes ***merőleges a síkra***, ha metszi a síkot és merőleges a sík összes olyan egyenesére, amely illeszkedik a metszéspontra.

Tétel (az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele).
Ha egy egyenes merőleges a sík két olyan egyenesére, amely illeszkedik a metszéspontra, akkor az egyenes merőleges a síkra.

Adott: az egyenes, ami az O pontban metszi az α síkot (178. ábra). Az OB és OC egyenes az α síkban va, $AA_1 \perp OB$, $AA_1 \perp OC$.

Bizonyítsd be: $AA_1 \perp \alpha$!

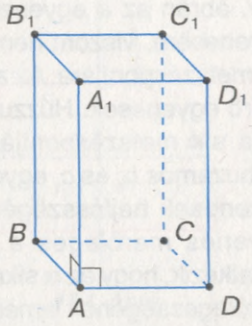
Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy az AA_1 egyenes merőleges az α sík tetszőleges OD egyenesére, amely átmegy az O metszésponton (178. ábra). Mérjünk fel az AA_1 egyenesen az O ponttól különböző irányba OA és OA_1 egyenlő hosszúságú szakaszokat! Húzzunk egy tetszőleges egyenest, amely metszi az OB, OD és OC egyenest a B, D és C pontban. Kössük össze ezeket a pontokat az A és az A_1 pontokkal! Vizsgáljunk meg három pár háromszöget!



178. ábra

1. Az $ABA_1\Delta$ és az $ACA_1\Delta$ egyenlőszárú háromszögek, mivel az a feltételből következik, hogy OC és OB a magasság és a szerkesztés miatt egyben a súlyvonal is ($OA = OA_1$).
Ebből következik, hogy $AB = A_1B$ és $AC = A_1C$.
2. Az $ABC\Delta = A_1BC\Delta$ három oldaluk alapján. A háromszög megfelelő oldalai $AB = A_1B$ és $AC = A_1C$, az előbbi bizonyítás alapján a BC pedig közös oldal. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy $ABD\angle = A_1BD\angle$.
3. $ABD\Delta = A_1BD\Delta$ két oldaluk (BD közös oldal, $AB = A_1B$) és a köztük lévő szög ($ABD\angle = A_1BD\angle$) alapján. A háromszögek egybevágóságából következik, hogy $AD = A_1D$.
Vagyis az $AA_1D\Delta$ egyenlőszárú, ezért az OD súlyvonal egyben magasság is, tehát $AA_1 \perp OD$. A meghatározás alapján AA_1 merőleges az α síkra.

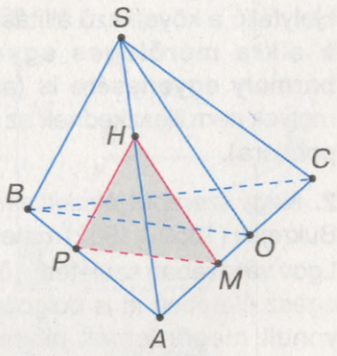
? Miért merőleges az AA_1 oldalél az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű parallelepipedon alaplapjára (179. ábra)? Mivel az AA_1 merőleges az AB és az AD alapélre, ezért az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele alapján merőleges az $ABCD$ síkra is.



179. ábra

Feladat. Fektess metsző síkot az $SABC$ szabályos gúla AC élének M pontjára merőlegesen erre az élre!

Megoldás. Húzzuk meg az ABC háromszög BO súlyvonalát (180. ábra)! Mivel az ABC háromszög egyenlő oldalú, ezért $BO \perp AC$. Húzzuk meg az $MP \parallel BO$ egyenest, ekkor $MP \perp AC$. Az SAC háromszög egyenlőszárú, ezért az SO súlyvonal egyben magasság is. Húzzuk meg az $MH \parallel SO$ egyenest, ekkor $MH \perp AC$. Kössük össze a P és a H pontot! Az $MHP\Delta$ a keresett metszett. Valóban, az AC egyenes metszi az MHP síkot és merőleges a sík MH és MP egyenesére, melyek illeszkednek erre a pontra. Az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele alapján AC merőleges az MHP síkra.



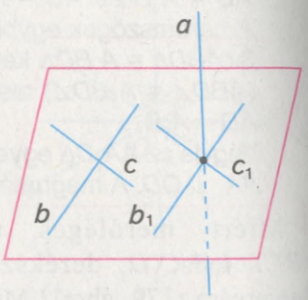
180. ábra

1. Ahhoz, hogy igazold, egy egyenes merőleges egy síkra:
a) keress a síkban két egymást metsző egyenest, melyek illeszkednek az egyenes és a sík metszéspontjára;
b) bizonyítsd be, hogy az adott egyenes merőleges a kijelölt egyenesek mindegyikére!
2. Jegyezd meg, ha egy egyenes merőleges a síkra, akkor merőleges a sík minden egyenesére, amely áthalad a metszésponton!

Az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét alkalmazzák a gyakorlatban is. Ahhoz, hogy leellenőrizzék, a falak metsző egyenese merőleges-e a padló síkjára, megnézik, derékszöget zár-e be ez az egyenes a padló két egyenesével, melyek metszik ezt az egyenest.

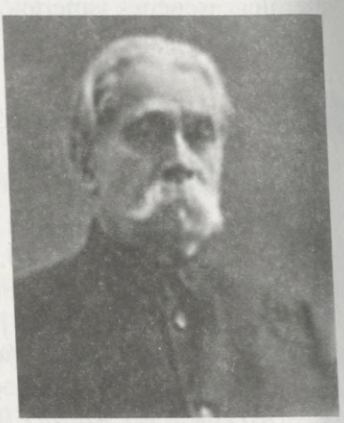
BŐVEBBEN

1. Felmerülhet a kérdés: *féltétlenül szükséges-e, hogy a jellemzésben szereplő két egyenes illeszkedjen az egyenes és a sík metszéspontjára*? Nem feltétlenül. A 181. ábrán az a egyenes merőleges az α sík b és c egyenesére, viszont nem illeszkedik az egyenes és a sík metszéspontjára. Az a és a b, az a és a c egyenesek kitérő egyenesek. Húzzunk az α síkban az a egyenes és a sík metszéspontján át a b és a c egyenessel párhuzamos b_1 és c_1 egyenest: $b_1 \parallel b$ és $c_1 \parallel c$. A kitérő egyenesek hajlásszögének definíciója alapján az a egyenes merőleges a b_1 és c_1 egyenesre, ebből következik, hogy az α síkra is. Ezért a sík és az egyenes merőlegességének ismertetőjelét így általánosíthatjuk: **ha egy egyenes merőleges egy sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges a síkra is.**



181. ábra

Helytálló a következő állítás is:
a síkra merőleges egyenes merőleges a sík bármely egyenesére is (azokra az egyenesekre is, melyek nem illeszkednek az egyenes és a sík metszéspontjára).


B. J. Bukrejev

2. Nagy szerepet játszott a mértan fejlődésében Borisz Bukrejev (1859 – 1962) matematikus, aki Kurszk megye Lgov városában született. 1878-ban felvették a Kijevi Egyetem matematika karára, majd egész életében itt is dolgozott, Ukrajna több tudós nemzedékét nevelte fel. 1959-ben vonult megérdemelt pihenésre. Tudományos érdeklődése kiterjedt az ábrázoló geometriára, a differenciális geometriára, a felületek elméletére és a Lobacsevszkij-féle geometria szerkesztési feladataira is.

FŐBB TUDNIVALÓK

1. Add meg a síkra merőleges egyenes definícióját!
2. Fogalmazd meg és bizonyítsd be az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét!
3. Hogyan bizonyítható, hogy egy egyenes merőleges a síkra?

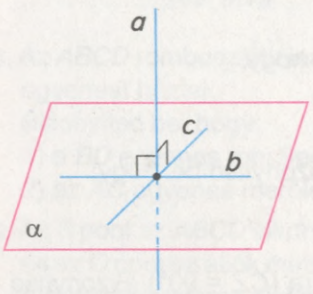
OLDD MEG A FELADATOKAT!

346'. Az a egyenes merőleges az α sík b és c egyenesére (182. ábra). Következik-e ebből, hogy $a \perp \alpha$?

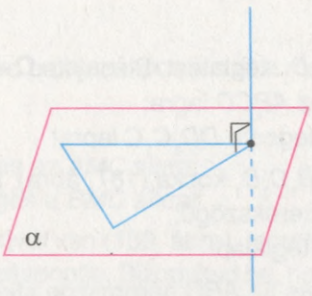
347'. Egy egyenes merőleges a háromszög két oldalára (183. ábra). Állíthatjuk-e, hogy ez az egyenes merőleges a háromszög síkjára?

348'. $a \perp \alpha$ (184. ábra). Merőleges-e az a egyenes az α síkra illeszkedő b egyenesre?

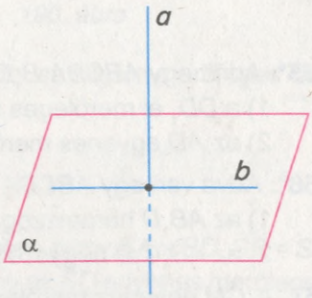
349°. Az a egyenes merőleges az α sík b egyenesére (184. ábra). Lehet-e, hogy az a egyenes ne legyen merőleges az α síkra?
Indokold meg a válaszodat!



182. ábra



183. ábra

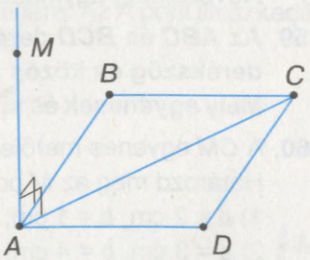


184. ábra

350°. Az $ABCD$ téglalap A csúcsára illeszkedő AM egyenes merőleges az AB és AC egyenesekre (185. ábra). Bizonyítsd be, hogy $AM \perp AD$!

351°. Az ABC háromszög A csúcsán át húztak az AB és AC egyenesre merőleges AK egyenest.
Bizonyítsd be, hogy az AK egyenes merőleges az ABC háromszög A csúcsából húzott súlyvonalára, magasságára és szögfelezőjére!

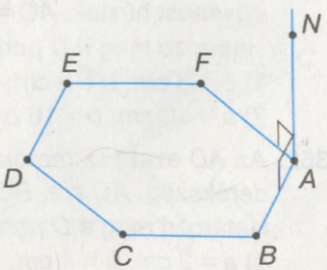
352°. A BM egyenes merőleges az ABC háromszög síkjára. Az AC oldalon felvettünk egy tetszőleges K pontot!
Milyen fajtájú a KBM háromszög?
Indokold meg a válaszodat!



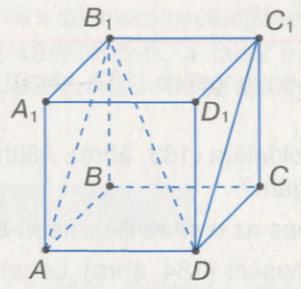
185. ábra

353°. Az $ABCDEF$ hatszög síkjára nem illeszkedő N ponton át az AB és AF egyenesekre merőleges AN egyenest húztak (186. ábra).
Bizonyítsd be, hogy:
1) $AN \perp AC$; 2) $AN \perp AD$; 3) $AN \perp AE$!

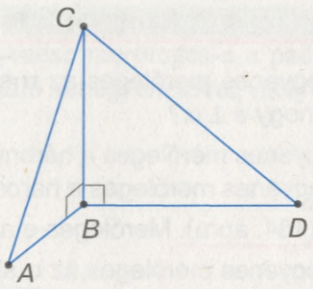
354°. Milyen a kölcsönös helyzete a körlapnak és annak az egyenesnek, mely merőleges a körlap két átmérőjére?
Indokold meg a válaszodat!



186. ábra



187. ábra



188. ábra

355°. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest. Bizonyítsd be, hogy:
1) a DD_1 él merőleges az $ABCD$ lapra;
2) az AD egyenes merőleges a DD_1C_1C lapra!

356°. Adva van egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (187. ábra). Bizonyítsd be, hogy:
1) az AB_1D háromszög derékszögű;
2) az AB_1C_1D négyszög téglalap!

357. A CM egyenes merőleges az ABC háromszög síkjára ($C\angle = 90°$). Bizonyítsd be, hogy:
1) a BC egyenes merőleges az AC és a CM egyenesre fektetett síkra;
2) az AC egyenes merőleges a BC és a CM egyenesre fektetett síkra!

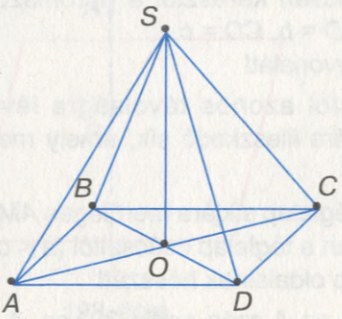
358. A CD egyenes merőleges az ABC derékszögű háromszög BC oldalára ($C\angle = 90°$). Nevezz meg egymásra merőleges egyenest és síkot!

359. **Az *ABC* és *BCD* derékszögű háromszög különböző síkokban van, a *B* szög derékszög és közös a *BC* befogójuk** (188. ábra).
Mely egyenesek és síkok merőlegesek egymásra? Indokold meg a válaszodat!

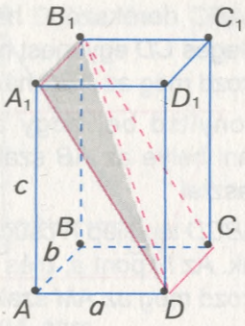
360. A CM egyenes merőleges az a oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet síkjára, $CM = b$. Határozd meg az M pont és a négyzet csúcsai közötti távolságot, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 1$ cm;
2) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm!

361. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsán át a háromszög síkjára merőleges CD egyenest húztak. $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$.
Határozd meg a D pont és az átfogó M felezőpontja távolságát, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm;
2) $a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 24$ cm!

362. Az AD szakasz merőleges az ABC derékszögű háromszög síkjára, a C csúcs a derékszög. $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.
Határozd meg a D pont távolságát a B és a C csúcstól, ha:
1) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 12$ cm;
2) $a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 15$ cm!



189. ábra



190. ábra

363. Az *ABCD* rombusz átlóinak *O* metszéspontján át a rombusz síkjára merőleges *OM* egyenest húztak.
Bizonyítsd be, hogy:
1) a *BD* egyenes merőleges az *AMC* síkra;
2) az *AC* egyenes merőleges a *BMD* síkra!

364. Az *S* pont az *ABCD* síkon kívül van (189. ábra). Ismeretes, hogy $SA = SC$, $SB = SD$ és az *O* pont az átlók metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy az *SO* egyenes merőleges a parallelogramma síkjára!

365. Az *ABCD* parallelogramma méretei *a*, *b* és *c* (190. ábra). Határozd meg az A_1B_1D háromszög és az A_1B_1CD négyszög területét, ha:
1) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 16$ cm;
2) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm!

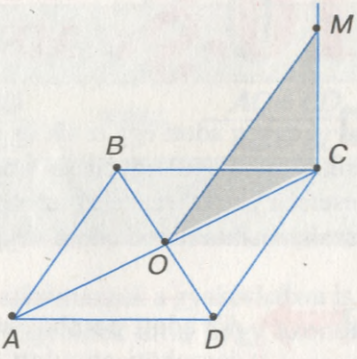
366. Az *OM* egyenes merőleges az *O* középpontú körvonal síkjára. Az *A* pont illeszkedik a körvonalra. Határozd meg az *AM* szakasz hosszát, ha:
1) $OA = 6$ cm, $OMA\angle = 30°$;
2) $OA = 4$ cm, a körlap területe 25π cm^2!

367. Az *SABC* gúla minden éle egyenlő hosszúságú. A *D* pont az *AB* él felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy az *AB* egyenes merőleges a *DSC* síkra!

368. Az *SABC* gúla minden éle egyenlő hosszúságú. Az *SA* él tetszőleges *D* pontjára fektess az alábbi élre merőleges síkot:
1) *AB*; 2) *BC*!

369. **Bizonyítsd be, hogy az α síkra nem illeszkedő ponton át nem lehet két olyan egyenest húzni, melyek merőlegesek a síkra!**

370°. Az *O* pont az *ABCD* négyzet átlóinak metszéspontja, a *CM* egyenes a négyzet síkjára merőleges egyenes (191. ábra).
Bizonyítsd be, hogy a *BD* egyenes merőleges az *OMC* síkra!



191. ábra

371*. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsán keresztül a háromszög síkjára merőleges CD egyenest húztak. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$.
Határozd meg az ABC háromszög CM súlyvonalát!

372*. Bizonyítsd be, hogy az A és B ponttól azonos távolságra lévő pontok mértani helye az AB szakasz felezőpontjára illeszkedő sík, amely merőleges a szakaszra!

373*. Az $ABCD$ téglalap A csúcsán keresztül a téglalap síkjára merőleges AM egyenest húztak. Az M pont a, b és c egységnyire van a téglalap csúcsaitól ($a < c$, $b < c$).
Határozd meg az AM szakasz és a téglalap oldalainak hosszát!

374*. Az ABC háromszög C szöge derékszög, az A szög pedig 30°-os. A C ponton keresztül a háromszög síkjára merőleges CM egyenest húztak. $AC = 18$ cm, $CM = 12$ cm. Határozd meg az M pont és az AB egyenes távolságát!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

375. Tekintsük egy szoba padlóját és ajtóját különböző síkok modelljének, az ajtófélfát egy egyenesnek. Szemléltesd ezeken a modelleken az egyenes és a sík merőlegességének definícióját!

376. Hogyan állapítható meg merőónnal, hogy egy oszlop merőleges a talajra?

377. Az esztergályos egy derékszögű háromszöggel ellenőrizte le, hogy a fúrófej tengelye merőleges-e arra az asztallapra, melyre az alkatrészt erősítette (192. ábra).
Hogy végezte el a mérést az esztergályos?

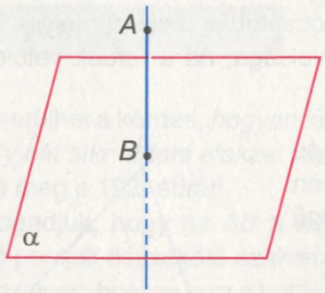


192. ábra

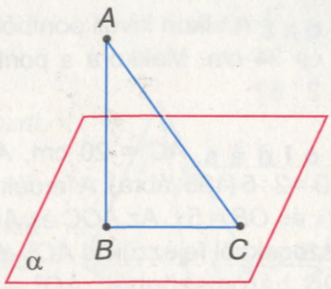
10. §. A SÍKRA BOCSÁTOTT MERŐLEGES ÉS FERDE

Legyen adott egy α sík és egy rajta kívüli A pont. Húzzunk az A ponton keresztül a síkra merőleges egyenest, amely a síkot egy B pontban metszi (193. ábra). Ebben az esetben az AB szakaszt az A pontból az α síkra bocsátott *merőlegesnek* nevezzük, a szakasz síkra illeszkedő B végpontját pedig a *merőleges talppontjának*.

Az adott pontból húzott ***merőlegesnek*** nevezzük azt a szakaszt, ami összeköti az adott pontot a sík egyik pontjával és illeszkedik a síkra merőleges egyenesre.



193. ábra



194. ábra

Legyen AB az α síkra bocsátott merőleges és C a sík B pontjától különböző pont (194. ábra). Az AC szakaszt a síkra bocsátott *ferdének* nevezik, a C pontot pedig a *ferde talppontjának*. A merőleges és a ferde talppontjait összekötő BC szakaszt az AC *ferde* α síkra eső *vetületének* nevezzük.

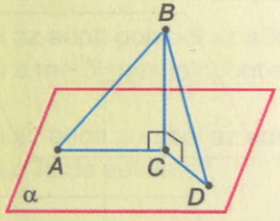
? Van-e összefüggés a merőleges és a ferde hossza, a ferde és a vetülete között? A választ az alábbi tétel adja meg.

Tétel (a ferde és a merőleges tulajdonságairól).
Ha a síkra nem illeszkedő pontból egy merőlegest és egy ferdét bocsátunk a síkra, akkor:
1) a merőleges rövidebb bármelyik ferdénél;
2) az egyenlő hosszúságú ferdék vetületei egyenlők, és fordítva: azok a ferdék, melyek vetületei azonos hosszúságúak, egyenlők;
3) két ferde közül az a hosszabb, melynek a vetülete hosszabb.

Bizonyítsátok be a tételt önállóan a derékszögű háromszögek tulajdonságai alapján!

Az előbbi tétel állításait a 10. táblázatban foglaltuk össze.

10. táblázat



$BC < AB$, $BC < BD$			
Ha	$\frac{AB = BD}{AC = CD}$,	akkor	$\frac{AC = CD}{AB = BD}$
Ha	$AC > CD$,	akkor	$AB > BD$

A merőleges és a ferde tulajdonságait kimondó tételt alkalmazzák a gyakorlatban is. Például, egy rádióállomás adótornyának szerelésekor ügyelnek arra, hogy azonos hosszúságú sodronnyal feszítsék ki. A sodronyok alsó végpontjait a toronytól azonos távolságra rögzítik (egy körvonal mentén). Ez a módszer biztosítja a torony stabilitását.

Feladat. A síkon kívüli pontból két ferdét bocsátottak a síkra, melyek hossza 20 cm és 34 cm. Mekkora a pont és a sík távolsága, ha a ferdék vetületeinek aránya 2 : 5?

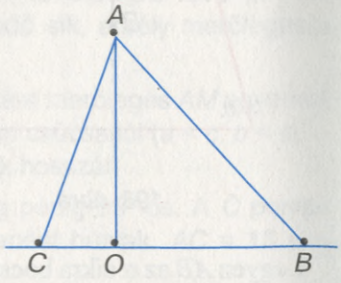
Megoldás. $AC = 20$ cm, $AB = 34$ cm és $CO : OB = 2 : 5$ (195. ábra). A ferdék vetülete legyen $CO = 2x$ és $OB = 5x$. Az AOC és AOB derékszögű háromszögekből fejezzük ki AO^2 -t!

Az AOC háromszögből: $AO^2 = AC^2 - CO^2 = 20^2 - (2x)^2 = 400 - 4x^2$,

az AOB háromszögből viszont: $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 34^2 - (5x)^2 = 1156 - 25x^2$.

A $400 - 4x^2 = 1156 - 25x^2$ egyenletet kaptuk.

Ebből: $21x^2 = 756$, $x^2 = 36$.



195. ábra

Tehát $AO = \sqrt{400 - 4x^2} = \sqrt{400 - 4 \cdot 36} = \sqrt{256} = 16$ (cm).

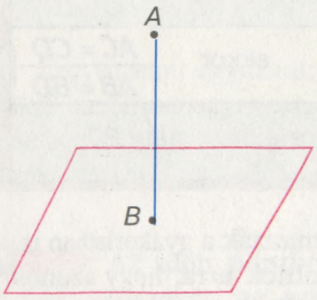
Ha egy feladatban a síkon kívüli pontból két ferdét bocsátanak a síkra, akkor a megoldáshoz derékszögű háromszögeket kell keresni, melyek közös befogója a pontból a síkra bocsátott merőleges.

Figyeld meg a 196–198. ábrákat! A rajzokon egy AB szakasz látható, melynek hossza egyenlő a pont és a sík távolságával (196. ábra); az egyenes és a vele párhuzamos sík távolságával (197. ábra); két párhuzamos sík távolságával (198. ábra).

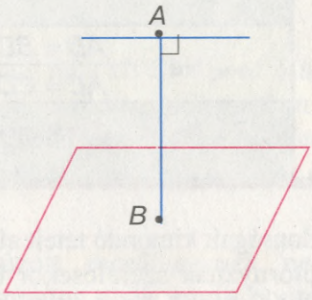
A pont és a sík távolsága a pontból a síkra bocsátott merőleges hossza.

Az egyenes és a sík távolsága az egyenes bármely pontjából a síkra bocsátott merőleges hossza.

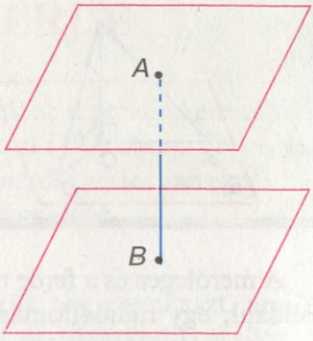
Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík bármely pontjából a másik síkra bocsátott merőleges hossza.



196. ábra



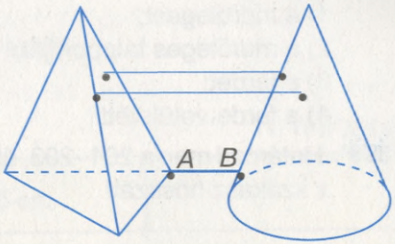
197. ábra



198. ábra

BŐVEBBEN

1. Felmerülhet a kérdés, *hogyan kell meghatározni bármely két síkmértani alakzat távolságát.*
Figyeld meg a 192. ábrát!
Ha elfogadjuk, hogy az *AB* a legrövidebb a két alakzat pontjait összekötő szakaszok közül, akkor az *AB* szakasz hossza lesz a két alakzat távolsága.



199. ábra

2. Az iskolai mértan tökéletesítésében kimagasló eredményeket ért el Ivan Teszlenko (1908–1994) ukrán matematikus-professzor, a pedagógia tudományok doktora, a dnyipropetrovszki megyei Domotkany falu szülötte.
Munkáiban a tudós az elemi mértan előadásának egyik lehetséges felépítésével foglalkozott, amely egyesítette a tartalom szemléltetését és absztrakcióját, elősegítette a mértanban alkalmazott módszerek könnyebb megértését, a térmértani és a síkmértani feladatok megoldásának egyéni módszereit.
A mai napig nem veszített értékéből a *Mértan. Tankönyv a 9–10. osztály számára* és *Mértan. Jegyzet a pedagógiai főiskolák fizika-matematika szakos hallgatói számára* című munkája.



I. F. Teszlenko

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Mi az adott pontból az adott síkra bocsátott merőleges?
   Mi a merőleges talppontja?

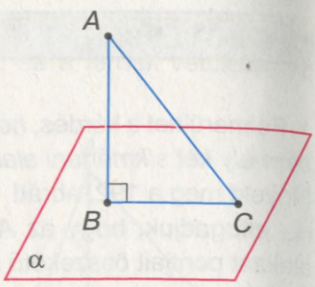
2. Mi az adott pontból az adott síkra bocsátott ferde?
   Mi a ferde vetülete?

3. Fogalmazd meg a merőleges és a ferde tulajdonságait!

4. Mit értünk a pont és a sík távolságán?
   Az egyenes és a sík távolságán?
   Két párhuzamos sík távolságán?

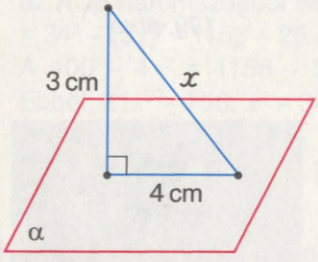
OLDD MEG A FELADATOKAT!

378'. Határozd meg a 200. ábra alapján:
1) a merőlegest;
2) a merőleges talppontját;
3) a ferdét;
4) a ferde vetületét!

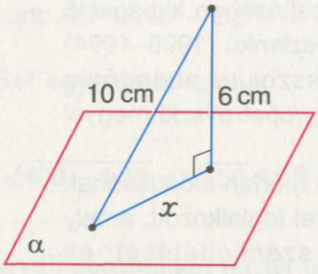


200. ábra

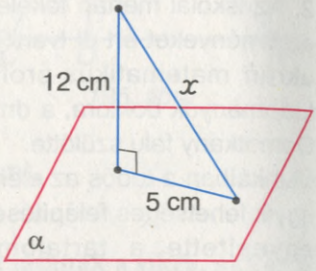
379'. Határozd meg a 201–203. ábra alapján az ismeretlen x szakasz hosszát!



201. ábra



202. ábra

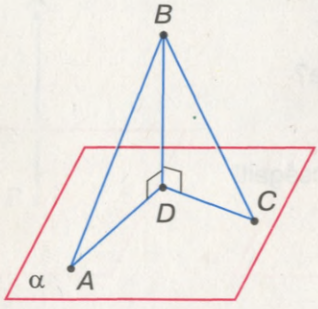


203. ábra

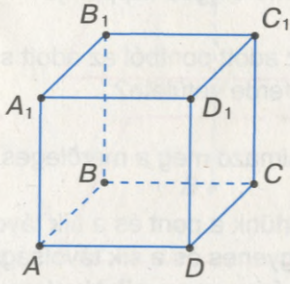
380'. A 204. ábrán az AD és DC szakasz az AB és BC ferde vetülete.
1) $AD < DC$. Melyik igaz az alábbi egyenlőtlenségek közül?
a) $AB = BC$; b) $AB > BC$; c) $AB < BC$?
2) $AB = BC$. Hasonlítsd össze a vetületeket!

381°. Adva van egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (205. ábra). Mekkora az alábbi térelemek távolsága:
1) az A pont és a DD_1C_1C lap;
2) az A_1D_1 és az $ABCD$ lap;
3) az AA_1D_1D és a BB_1C_1C lap?

382°. Húzz az O pontból egy OM merőlegest és egy OK ferdét az α síkra! Határozd meg:
1) az OK szakasz hosszát, ha $OM = 12$ cm, $MK = 16$ cm;
2) az OM merőleges hosszát, ha $MK = 12$ cm, $OK = 15$ cm;
3) az MK ferde vetületét, ha $OM = 9$ cm, $OK = 15$ cm!



204. ábra



205. ábra

A síkra húzott ferdét és vetületét tartalmazó feladatok megoldását derékszögű háromszögek megoldására vezetjük vissza, melynek oldalai a ferde, a vetülete és a merőleges.

383°. *AB* egy merőleges, *AC* egy ferde, *BC* a ferde vetülete.
Töltsd ki a 11. táblázatot!

11. táblázat

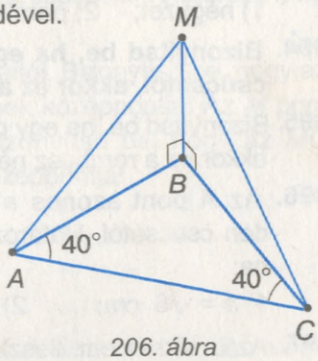
AB	24 cm	15 cm	
BC	7 cm		24*a*
AC		25 cm	26*a*

384°. A síkon kívüli pontból egy merőlegest és egy ferdét húztak a síkra. A ferde hossza *a* és α szöget zár be a merőlegessel. Határozd meg a merőleges és a ferde vetületének hosszát, ha:
1) $a = 10$ cm, $\alpha = 60°$; 2) $a = 12$ cm, $\alpha = 45°$; 3) $a = 8$ cm, $\alpha = 30°$!

385°. A síkon kívüli pontból egy merőlegest és egy ferdét húztak a síkra. A merőleges hossza *a* és α szöget zár be a ferdével. Határozd meg a ferde és vetületének hosszát, ha:
1) $a = 6$ cm, $\alpha = 60°$; 2) $a = 5$ cm, $\alpha = 45°$;
3) $a = 14$ cm, $\alpha = 30°$!

386°. Hány egyenlő hosszúságú ferde húzható a síkra egy adott pontból? Mi a ferdék talppontjainak mértani helye?

387°. Az *OM* szakasz merőleges az *ABCD* négyzet síkjára, az *O* pont az átlók metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy az *M* pont azonos távolságra van a négyzet csúcsaitól!

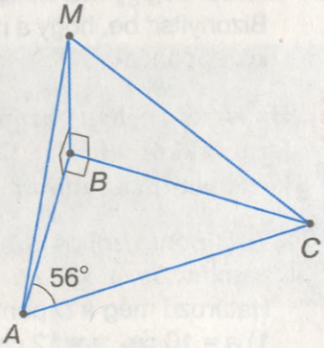


206. ábra

388°. ***AK* az *ABC* derékszögű háromszög síkjára bocsátott merőleges (*C*∠ = 90°).**
Hasonlítsd össze a *KC* és *KB* ferdék hosszát!
Indokold meg a válaszodat!

389°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egy *a* élű kocka.
Határozd meg:
1) az AA_1 egyenes és a BB_1D_1D lap távolságát;
2) az *AD* egyenes és az A_1B_1CD lap távolságát!

390. Hasonlítsd össze az *MA* és *MC* ferdék hosszát:
1) a 206. ábra adatai alapján;
2) a 207. ábra adatai alapján!



207. ábra

391. A síkra nem illeszkedő pontból egy merőlegest és egy ferdét húztak a síkra. Határozd meg a merőleges és a ferde hajlásszögét, ha:
1) a merőleges hossza egyenlő a ferde vetületének hosszával;
2) a ferde vetületének hossza egyenlő a ferde felével;
3) a merőleges hossza egyenlő a ferde felével!

392. ***AB* egy merőleges, *AC* egy ferde, *BC* a ferde vetülete, α a merőleges és a ferde hajlásszöge.**

Töltsd ki a 12. táblázatot!

12. táblázat

AB			5 cm	6 cm	7 cm	14 cm
BC		4 cm				14 cm
AC	6 cm	8 cm		12 cm		
α	30°		45°		60°	

393. Az *M* pontból négy egyenlő hosszúságú *MA*, *MB*, *MC* és *MD* ferdét bocsátottak egy síkra. Lehet-e az *ABCD* négyszög:
1) négyzet; 2) parallelogramma; 3) téglalap?

394. **Bizonyítsd be, ha egy pont azonos távolságra van egy négyszög minden csúcsától, akkor ez a négyszög téglalap. Két esetet vizsgálj meg!**

395. Bizonyítsd be, ha egy pont azonos távolságra van egy rombusz minden csúcsától, akkor ez a rombusz négyzet!

396. Az *A* pont azonos *a* távolságra van egy egyenlő *a* oldalú háromszög minden csúcsától. Határozd meg az *A* pont és a háromszög síkjának a távolságát, ha:
1) $a = \sqrt{6}$ cm; 2) $a = 3$ cm!

397. Az α síkra nem illeszkedő *M* pontból három egyenlő hosszúságú *MA*, *MB*, *MC* ferdét és egy *MO* merőlegest húztak a síkra.
Bizonyítsd be, hogy a merőleges *O* talppontja az *ABC* háromszög köré írt körvonal középpontja!

Ha ismert néhány azonos pontból az adott síkra bocsátott egyenlő hosszúságú ferde, akkor a ferdék talppontjai egy olyan körvonalra illeszkednek, melynek a középpontja az adott pontból húzott merőleges talppontja.

398. A *D* pont azonos *a* távolságra van egy derékszögű háromszög csúcsaitól. A háromszög átfogója *b*.
Határozd meg a *D* pont távolságát a háromszög síkjától, ha:
1) $a = 10$ cm, $b = 12$ cm;
2) $a = 20$ cm, $b = 24$ cm!

399. A síkon kívüli pontból egy 6 cm-es merőlegest és egy 9 cm hosszúságú ferdét húztak a síkra.
Határozd meg a merőleges ferdére eső vetületét!

400. Az A pontból az α síkra két ferdét bocsátottak, melyek hossza 10 cm és 17 cm. A ferdék vetületeinek aránya 2 : 5. Határozd meg:
1) a ferdék vetületeit;
2) az A pont és az α sík távolságát!

401. A síkon kívüli pontból két ferdét bocsátottak a síkra. Határozd meg a ferdék hosszát, ha:
1) a különbségük 6 cm, a vetületeik hossza pedig 15 cm és 27 cm;
2) a ferdék aránya 5 : 8, a vetületeik hossza pedig 7 cm és 32 cm!

402*. A síkon kívüli pontból két egyenlő hosszúságú ferdét bocsátottak a síkra. Határozd meg a ferdék és vetületeik hajlásszögét, ha a ferdék 60°-os szöget zárnak be, a vetületek hajlásszöge pedig derékszög!

403*. A síkon kívüli pontból három egyenlő hosszúságú ferdét bocsátottak a síkra. A ferdék hossza 74 cm, a talppontjaik távolsága pedig 15 cm, 21 cm és 24 cm. Határozd meg a pont távolságát a háromszög síkjától!

404*. Az $ABCD$ egyenlőszárú trapéz AD és BC alapja, valamint a magassága rendre 24 cm, 10 cm és 17 cm. Az M pont 85 cm-re van a trapéz csúcsaitól. Határozd meg az M pont távolságát a trapéz síkjától!

405*. Az M pont azonos távolságra van egy sokszög csúcsaitól. Bizonyítsd be, hogy az MO merőleges O talppontja a sokszög köré írt körének középpontja! Az M pont azonos távolságra van egy sokszög csúcsaitól. Bizonyítsd be, hogy az MO merőleges O talppontja a sokszög köré írt körének középpontja!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

406. Egy oszlopot három acélsodronnyal kötöttek ki. A sodronyok alsó vége 20 méterre van az oszloptól, a felső vége pedig 32 m magasan van az oszlophoz erősítve. Mekkora a drót hossza?

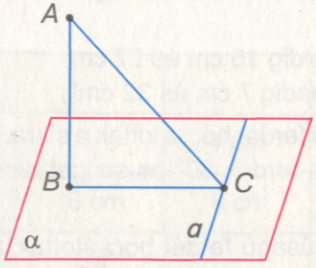
407. Egy boltíves félhenger alakú pincében (208. ábra) két oszlopot kell felállítani úgy, hogy egyenlő távolságra legyenek a plafontól és a legközelebbi faltól, a köztük lévő távolság pedig 2 m legyen. Határozd meg az oszlop magasságát, ha a pince szélessége 4,6 m!



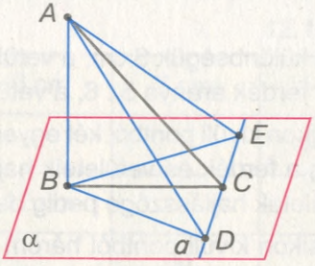
208. ábra

11. § A HÁROM MERŐLEGES TÉTELE

Legyen AB az α síkra húzott merőleges, AC erre a síkra bocsátott ferde, BC a ferde vetülete, az α síkban lévő a egyenes pedig a ferde C talppontjára illeszkedik (209. ábra).



209. ábra



210. ábra

Helytálló az alábbi megállapítás.

Tétel (a három merőlegesről).
Ha egy síkban a ferde talppontjára illeszkedő egyenes merőleges a ferde vetületére, akkor merőleges a ferdére is.

Adott: $AB \perp \alpha$ (210. ábra),
AC – ferde,
BC – a ferde vetülete,
$C \in a$, $a \perp BC$.

Bizonyítsd be: $a \perp AC$!

Bizonyítás. Mérjünk fel az a egyenesre két tetszőleges, viszont egyenlő hosszúságú CD és CE szakaszt, és kössük össze az A és a B pontot a D és az E ponttal!
Azt kapjuk, hogy:
$BD = BE$, mint a DE egyenesre bocsátott egyenlő vetületű CD és CE ferdék;
$AD = AE$, mint az α síkra bocsátott ferdék, melyek BD és BE vetületei egyenlők.
Ebből következik, hogy az ADE háromszög egyenlőszárú, ezért az AC súlyvonal merőleges a DE alapra.

Miért kapta nevét ez a tétel a három merőlegesről?
A tétel az alábbi három merőleges közötti összefüggést mondja ki:
$AB \perp \alpha$, $a \perp BC$, $a \perp AC$.

Igaz a tétel megfordítása is.

Tétel (a három merőleges tételének megfordítása).
Ha egy síkban a ferde talppontjára illeszkedő egyenes merőleges a ferdére, akkor merőleges a ferde vetületére is.

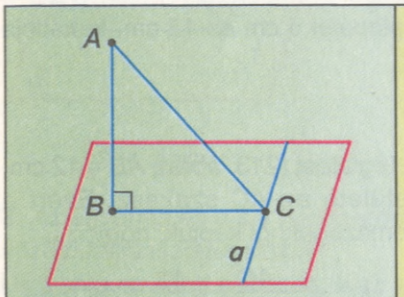
Adott: $AB \perp \alpha$ (210. ábra), AC – ferde, BC – a ferde vetülete, $C \in a$, $a \perp AC$.

Bizonyítsd be: $a \perp BC$!

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előbbi tétel pótszerkesztését! Mérjünk fel az a egyenesre két tetszőleges, viszont egyenlő hosszúságú CD és CE szakaszt, kössük össze az A és a B pontot a D és az E ponttal! Azt kapjuk, hogy $AD = AE$, mint a DE egyenesre bocsátott olyan ferdék, melyek CD és CE vetületei egyenlők, $BD = BE$, mint az egyenlő AD és AE ferde vetületei. Ezért a BDE háromszög egyenlőszárú, következésképpen a BC súlyvonal merőleges a DE alapra.

A három merőleges tételét és annak megfordítását a 13. táblázatban foglaltuk össze.

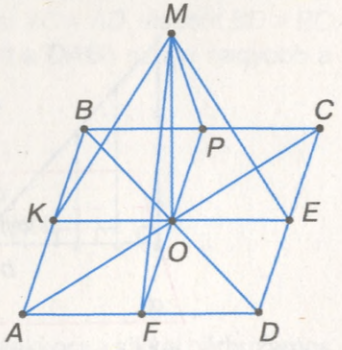
13. táblázat



Ha $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, akkor $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$

Feladat. Az M pont egy rombusz minden oldalától 10 cm-re van, a rombusz síkjától pedig 8 cm-re.
Határozd meg a rombuszba írt körvonal sugarát!

Megoldás. Legyen az adott rombusz $ABCD$ (211. ábra),
$MK = MP = ME = MF = 10$ cm, $MO = 8$ cm.
A pont és az egyenes távolságának definíciójából következik, hogy $MK \perp AB$, $MP \perp BC$, $ME \perp CD$, $MF \perp AD$.
A három merőleges tétele alapján $OK \perp AB$, $OP \perp BC$, $OE \perp CD$, $OF \perp AD$.



211. ábra

Mivel az M pont azonos távolságra van a rombusz oldalaitól, így az OK, OP, OE és OF szakaszok is egyenlők, mert az egyenlő hosszúságú ferdék vetületei egyenlők. Ebből következik, hogy az O pont az MO merőleges talppontja és egyben a rombuszba írt körvonal középpontja. Az MOK derékszögű háromszög alapján határozzuk meg ennek a körvonalnak a sugarát:

$$R = OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

A három merőleges tételével kapcsolatban meg kell jegyezned: ha egy A pont azonos távolságra van egy sokszög minden oldalától, akkor az ebből a pontból a sokszög síkjára húzott merőleges talppontja is azonos távolságra lesz a sokszög minden oldalától, vagyis a magasság talppontja a sokszögbe írt körvonal középpontja.

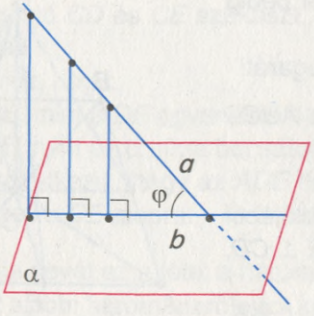
Határozzuk meg az egyenes és a sík hajlásszögét! Legyen adott egy α sík és ezt a síkot metsző, de a síkra nem merőleges a egyenes (212. ábra). Az a egyenes pontjaiból húzott merőlegesek talppontjai egy b egyenesre illeszkednek. Ezt az egyenest az a egyenes α síkra eső *merőleges vetületének* nevezzük. *Az egyenes és a sík hajlásszögének* az egyenes és a síkra eső vetületének a hajlásszögét fogadjuk el. A 212. ábrán ez a φ szög.

Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a hajlásszögük 90°, ha pedig az egyenes párhuzamos a síkkal, akkor a hajlásszögük 0°.

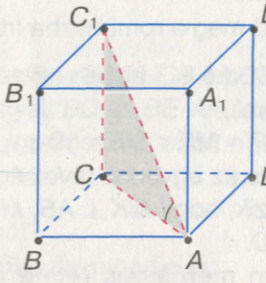
Feladat. Egy derékszögű parallelepipedon alapélei 5 cm és 12 cm, testátlója pedig 60°-os szöget zár be az alaplap síkjával.
Mekkora a testátló?

Megoldás. Legyen $ABCDA_1B_1C_1D_1$ az adott téglatest (213. ábra), $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Az AC_1 átló $ABCD$ lapra eső vetülete az AC szakasz. Ezért a $CAC_1\angle = 60°$. Az ABC és ACC_1 derékszögű háromszögekből kapjuk, hogy:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)}, \quad AC_1 = \frac{AC}{\cos 60°} = \frac{13}{\frac{1}{2}} = 26 \text{ (cm)}.$$



212. ábra



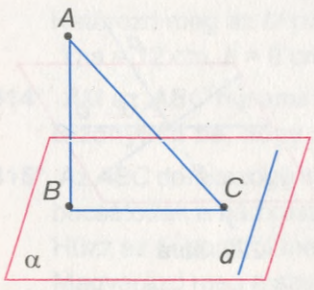
213. ábra

Azokat a feladatokat, melyekben az egyenes és sík hajlásszöge is adott, gyakran derékszögű háromszögek megoldására lehet visszavezetni, ahol az egyik hegyesszög az adott szög, az oldalak pedig a merőleges, a ferde és a ferde vetülete.

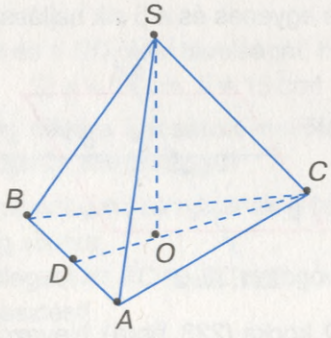
BŐVEBBEN

1. A három merőleges tétele általánosítható, ha alkalmazzuk a kitérő egyenesek meghatározását. Ez abban az esetben is igaz, ha a sík *a* egyenese nem illeszkedik az *AC* ferde talppontjára (214. ábra). Az ilyen általánosítás kiszélesíti a tétel alkalmazási lehetőségeit.

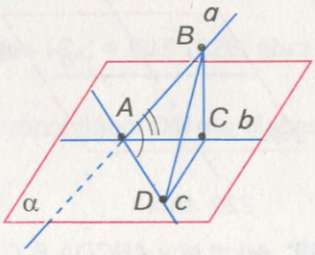
Nézzük a következő példát! A háromoldalú gúla *SO* magasságának *O* talppontja az alaplap *CD* magasságára illeszkedik, de csak akkor, ha az *SC* oldalél merőleges az *AB* alapélre (215. ábra). Ez az állítás a három merőleges tételének egy másik megfogalmazása: *SO* és *SC* a síkra bocsátott merőleges és ferde, *AB* a sík egyik egyenese.



214. ábra



215. ábra



216. ábra

2. *Az egyenes és a sík hajlásszöge a legkisebb az egyenes és a sík összes egyenese közötti hajlásszögek közül.*

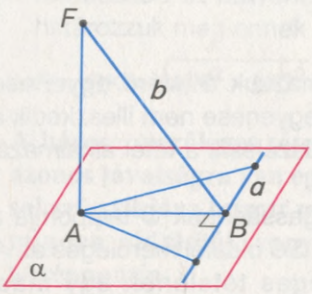
Legyen *a* az adott egyenes, *b* az *a* egyenes α síkra eső vetülete, *c* az α sík tetszőleges egyenese (216. ábra). Az *a* egyenes tetszőleges *B* pontjából *BC* merőlegest bocsátottak a *b* egyenesre. Mérjük fel a *c* egyenesre az *AD* = *AC* szakaszokat és kössük össze a *D* és *C* pontokat. Az *ABC* és *ABD* háromszög *AB* oldala közös, *AC* = *AD*, viszont *BD* > *BC* (a három merőleges tételének megfordítása alapján). Ezért a *DAB*Δ szöge nagyobb a *CAB*Δ szögénél.

FONTOSABB TUDNIVALÓK

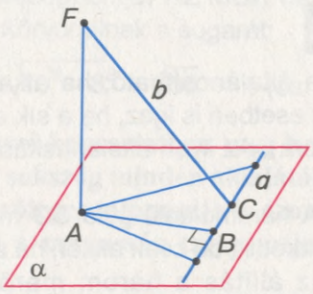
1. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a három merőleges tételét!
2. Mi az egyenes vetülete?
3. Fogalmazd meg, mi az egyenes és a sík hajlásszöge!
4. Mekkora a síkra merőleges egyenes és sík hajlásszöge? Mekkora a síkkal párhuzamos egyenes és a sík hajlásszöge?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

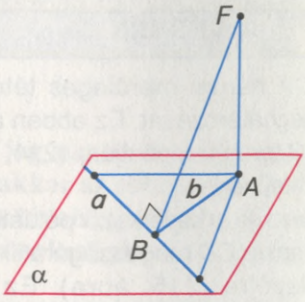
408'. A 217–219. ábrán $AF \perp \alpha$. Állapítsd meg minden ábrán az *a* és *b* egyenes kölcsönös helyzetét!



217. ábra

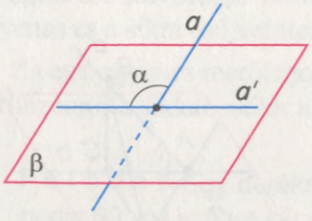


218. ábra

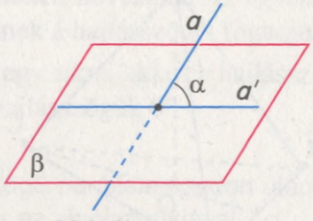


219. ábra

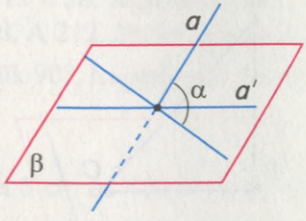
409'. A 220–222. ábrán az *a'* egyenes az *a* egyenes β síkra eső vetülete. Melyik ábra szemlélteti azt, hogy az *a* egyenes és a β sík hajlásszöge α?



220. ábra



221. ábra

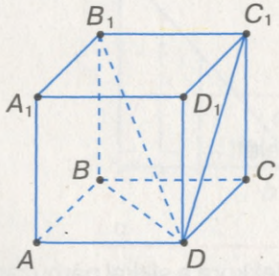


222. ábra

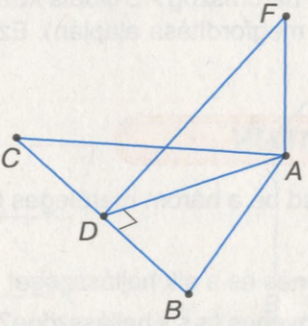
410'. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (223. ábra). Nevezd meg:
1) a DD_1C_1C lap DC_1 átlójának és az *ABCD* alaplapnak a hajlásszögét;
2) a B_1D testátló és az *ABCD* alaplap hajlásszögét;
3) a B_1D testátló és a DD_1C_1C lap hajlásszögét!

411°. *AF* az *ABC* háromszög síkjára bocsátott merőleges, *AD* a háromszög magassága (224. ábra). Bizonyítsd be, hogy $DF \perp BC$!

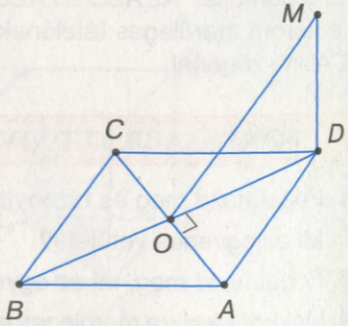
412°. *DM* merőleges egy adott négyzet síkjára (225. ábra). Bizonyítsd be, hogy $OM \perp AC$!



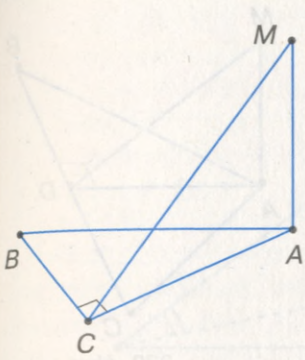
223. ábra



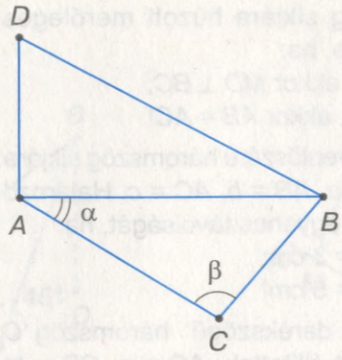
224. ábra



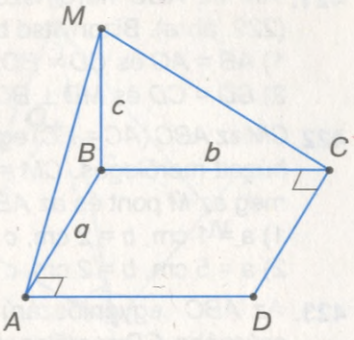
225. ábra



226. ábra



227. ábra



228. ábra

413°. *OM* az *ABCD* négyzet síkjára húzott merőleges, az *O* pont az átlók metszéspontja. $AB = a$, $OM = b$.
Határozd meg az *M* pont és a *CD* oldal távolságát, ha:
1) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm; 2) $a = 16$ cm, $b = 15$ cm!

414°. *AM* az *ABC* háromszög síkjára bocsátott merőleges ($C\angle = 90°$) (226. ábra). Bizonyítsd be, hogy a *BMC*Δ derékszögű!

415°. Az *ABC* derékszögű háromszög *AB* átfogójának *O* felezőpontjából *OM* merőlegest bocsátottak a háromszög síkjára.
Húzz az *M* pontból merőlegest az *AC* és *BC* befogóra!
Magyarázd meg a szerkesztést!

416°. Az *ABC* háromszög *CAB* szögének fokmértéke α, az *ACB* szögnek β (227. ábra). *AD* az *ABC* háromszög síkjára bocsátott merőleges. Bizonyítsd be, hogy $DB \perp BC$, ha:
1) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$ cm; 2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ cm!

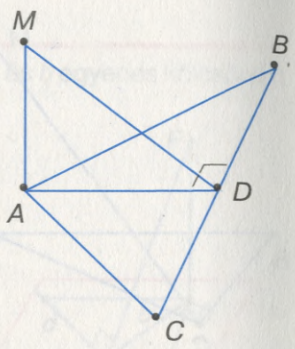
417°. A *B* pontból *BM* merőlegest bocsátottak az *ABCD* téglalap síkjára (228. ábra). $AB = a$, $BC = b$, $BM = c$.
Határozd meg az *M* pont távolságát a *CD* és az *AD* oldaltól, ha:
1) $a = 5$ cm, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm;
2) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 24$ cm!

418°. *AM* az *ABC* egyenlőszárú háromszög síkjára bocsátott merőleges ($AB = AC$). Bizonyítsd be, hogy az *MB* és *MC* ferdék azonos szöget zárnak be az adott háromszög síkjával!

419°. Egy adott pont *h* távolságra van a síktól. Mekkora a síkkal:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°-os szöget bezáró ferde hossza?

420°. Egy ferde hossza *a*.
Mekkora a ferde vetülete, ha a ferde és a sík hajlásszöge:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°?

421. AM az ABC háromszög síkjára húzott merőleges (229. ábra). Bizonyítsd be, ha:
1) $AB = AC$ és $CD = BD$, akkor $MD \perp BC$;
2) $BD = CD$ és $MD \perp BC$, akkor $AB = AC$!



229. ábra

422. CM az ABC ($AC = BC$) egyenlőszárú háromszög síkjára húzott merőleges. $CM = a$, $AB = b$, $AC = c$. Határozd meg az M pont és az AB egyenes távolságát, ha:
1) $a = 1$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm;
2) $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 5$ cm!

423. Az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög C csúcsába CD merőlegest állítottak. $AC = a$, $CD = b$. Határozd meg a D pont és a háromszög AB átfogójának távolságát, ha:
1) $a = 6\sqrt{2}$ cm, $b = 8$ cm; 2) $a = 12\sqrt{2}$ cm, $b = 5$ cm!

424. **Bizonyítsd be, ha létezik olyan pont, amely egy parallelogramma minden oldalától azonos távolságra van, akkor ez a parallelogramma rombusz! Vizsgálj meg két esetet!**

425. Az F pont azonos távolságra van egy sokszög minden oldalától.
Bizonyítsd be, hogy a sokszög síkjára bocsátott FO merőleges O talppontja a sokszögbe írt körvonal középpontja!

426. Az M pont azonos a távolságra van egy rombusz oldalaitól és b távolságra a rombusz síkjától. Határozd meg a rombuszba írt körvonal sugarát, ha:
1) $a = 25$ cm, $b = 7$ cm; 2) $a = 16$ cm, $b = 12$ cm!

427. Egy rombusz átlói 12 cm és 16 cm. A rombusz síkján kívüli M pont a rombusz oldalaitól 8 cm-re van.
Milyen távolságra van az M pont a rombusz síkjától?

428. Egy szabályos háromszög kerülete 144 cm. Az M pont a háromszög oldalaitól 19 cm-re van.
Határozd meg az M pont távolságát a háromszög síkjától!

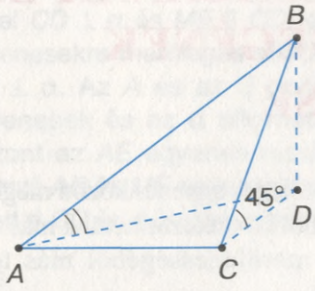
429. AM az $ABCD$ téglalap síkjára bocsátott merőleges.
Mekkora az AM szakasz hossza, ha $MB = 15$ cm, $MC = 24$ cm és $MD = 20$ cm?

430. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest három mérete 1 cm, 2 cm és 8 cm. Határozd meg az A_1BD háromszög területét!

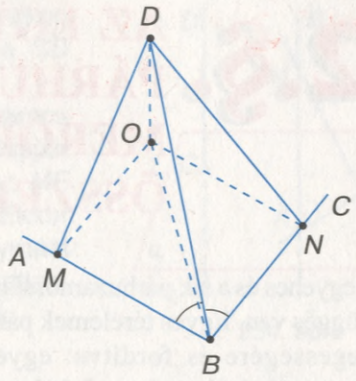
431. Mekkora szöget kell bezárnia a ferdének a síkkal, hogy a ferde síkra eső vetülete kétszer kisebb legyen a ferdénél?

432. **Egy síktól a egységre lévő pontból két ferdét húztak a síkra 30°-os szögben. Határozd meg a ferdék talppontjainak a távolságát, ha a vetületeik hajlásszöge 120°!**

433. A síktól a egységre lévő pontból két ferdét húztak a síkra, melyek 30°-os és 45°-os szöget zárnak be a síkkal, egymással pedig derékszöget.
Határozd meg a ferdék talppontjai közötti távolságot, ha: 1) $a = 4$ cm; 2) $a = 6$ cm!



230. ábra



231. ábra

434*. Az *ABCD* rombusz átlói 30 cm és 40 cm. A rombusz *A* csúcsából *AM* merőlegest bocsátottak annak síkjára.
Határozd meg az *M* pont és a szemben lévő oldal távolságát, ha *AM* = 10 cm!

435*. Az *M* pont 27 cm-re van egy egyenlőszárú trapéz oldalaitól. Határozd meg az *M* pont és a trapéz síkjának távolságát, ha a trapéz alapjai 16 cm és 30 cm!

436*. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög egyik befogója illeszkedik az α síkra, a másik 45°-os szöget zár be vele (230. ábra).
Határozd meg az átfogó és az α sík hajlásszögét!

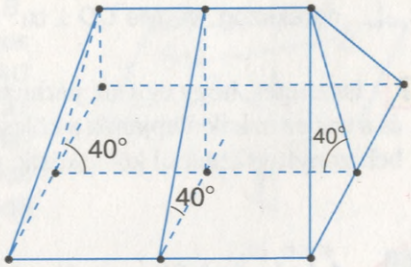
437*. A *BD* ferde azonos szöget zár be az *ABC* háromszög oldalaival (231. ábra).
Bizonyítsd be, hogy a ferdének a háromszög síkjára eső vetülete az *ABC* szög szögfelezőjére illeszkedik!

438*. Az *ABC* háromszögben *AC* = 6 cm, *AB* = *BC* = 5 cm. A háromszögbe írt körvonal *O* középpontjából a háromszög síkjára *OK* merőlegest állítottak, *OK* = 2 cm. Határozd meg a *K* pont távolságát a háromszög oldalaitól!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

439. Egy épület sátortetejének hossza 12,5 m, szélessége 7,2 m, meredeksége 40° (232. ábra).
Hány négyzetméter cserép kell az épület befedéséhez, ha 6%-ot számolunk a veszteségre?





232. ábra

12. §. AZ EGYENES ÉS A SÍK PÁRHUZAMOSSÁGÁNAK ÉS MERŐLEGESSÉGÉNEK ÖSSZEFÜGGÉSE

Az egyenes és a sík párhuzamossága és a síkra merőleges egyenes között meghatározott összefüggés van. Egyes térelemek párhuzamosságából következtethetünk más térelemek merőlegességére és fordítva: egyes térelemek merőlegességéből más térelemek párhuzamosságáról vonhatunk le következtetéseket.

Ezt a térbeli összefüggést mondja ki a következő tétel.

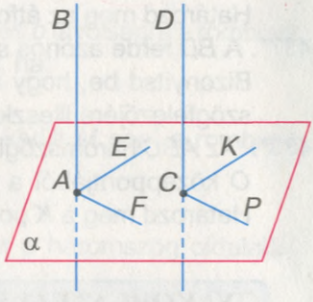
Tétel
(a párhuzamos egyenesekre merőleges síkról).
Ha egy sík merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre, akkor merőleges a másikra is.

Adott: $AB \parallel CD$, $\alpha \perp AB$, (233. ábra).

Bizonyítsd be: $\alpha \perp CD$.

Bizonyítás. Húzzunk az α sík tetszőleges A pontján át egy AE és AF egyenest, a C pontján keresztül pedig egy CK és CP egyenest párhuzamosan az AE és AF egyenessel!

Ekkor $BAE\angle = DCK\angle$, $BAF\angle = DCP\angle$ mint párhuzamos és egyirányú szárú, azaz egyállású szögek. Mivel $AB \perp \alpha$, ezért a BAE és BAF szög derékszög. De akkor a DCK és DCP szög is derékszög. Vagyis $CD \perp \alpha$.



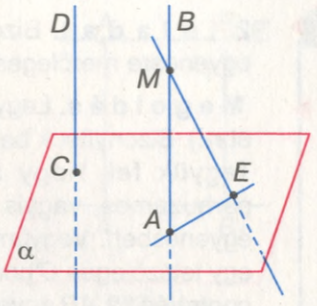
233. ábra

? Ismeretes, hogy egy sík párhuzamos a trapéz egyik alapjával. Milyen ennek a síknak és a trapéz másik alapjának a kölcsönös helyzete? Merőleges a másik alapra. Ez az előbb bebizonyított tételből következik, mivel a trapéz alapjai párhuzamosak!

1. feladat. Bizonyítsd be, hogy az egy síkra merőleges egyenesek párhuzamosak!

Megoldás. Legyen az AB és CD egyenes merőleges az α síkra (234. ábra). Tegyük fel, hogy az AB és CD egyenes nem párhuzamos. Vegyünk fel az AB

egyenesen egy tetszőleges M pontot az α síkon kívül. Húzzunk az M ponton keresztül a CD egyenessel párhuzamos ME egyenest.
Mivel $CD \perp \alpha$ és $ME \parallel CD$, ezért a párhuzamos egyenesekre merőleges síkról szóló tétel alapján $ME \perp \alpha$. Az A és az E pont az AB és az ME egyenesek és az α sík metszéspontjai. Ekkor viszont az AE egyenes merőleges az egymást metsző AB és ME egyenesekre. De ez lehetetlen. Ezért a CD és AB egyenesek párhuzamosak.

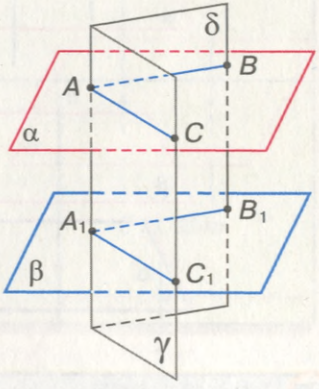


234. ábra

1. Ahhoz, hogy megállapítsuk, merőleges-e az adott egyenes az adott síkra, le kell ellenőrizni, hogy ez a sík merőleges-e egy másik, az adott egyenessel párhuzamos egyenesre.
2. Ahhoz, hogy igazoljuk két egyenes párhuzamosságát, elegendő olyan síkot keresni, ami merőleges mind a két egyenesre.

Tétel
(a párhuzamos síkokra merőleges egyenesről).
Ha egy egyenes merőleges két párhuzamos sík közül az egyikre, akkor merőleges a másik síkra is.

Adott: $\alpha \parallel \beta$ (235. ábra), $AA_1 \perp \alpha$.
Bizonyítsd be: $AA_1 \perp \beta$.
Bizonyítás. Fektessünk az AA_1 egyenesre két tetszőleges γ és δ síkot. A párhuzamos síkokat metsző síkról szóló tétel alapján ezek a síkok az α és a β síkokat párhuzamos egyenesekben metszik: az első az AC és A_1C_1 párhuzamos egyenesekben, a másik az AB és A_1B_1 párhuzamos egyenesekben. Mivel AA_1 merőleges az α síkra, így merőleges az AB és AC egyenesekre is. Ezért merőleges ezekkel az egyenesekkel párhuzamos A_1B_1 és A_1C_1 egyenesekre is. Ebből következik, hogy az AA_1 egyenes merőleges az A_1B_1 és A_1C_1 egyenesekre illeszkedő β síkra is.

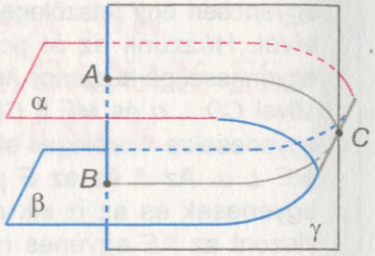


235. ábra

? Miért merőleges a gúla magassága az alaplappal párhuzamos metszet síkjára? Mivel a gúla magassága merőleges az alaplapra, így a párhuzamos síkokra merőleges egyenesről szóló tétel alapján a magasság merőleges a metsző síkra is.

2. feladat. Bizonyítsd be, hogy az egy egyenesre merőleges síkok párhuzamosak!

Megoldás. Legyen $\alpha \perp AB$, $\beta \perp AB$ (236. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $\alpha \parallel \beta$!



236. ábra

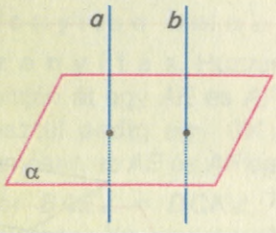
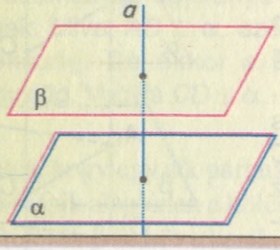
Tegyük fel, hogy az α és a β sík nem párhuzamos, vagyis metszik egymást egy c egyenesben. Vegyünk fel ezen az egyenesen egy tetszőleges C pontot, majd fektessünk a C pontra és az AB egyenesre egy γ síkot. A γ sík az α és a β síkot megfelelően az AC és BC egyenesben metszi. Mivel $AB \perp \alpha$, ezért $AB \perp AC$, és mivel $AB \perp \beta$, így $AB \perp BC$. Azt kaptuk, hogy a γ síkban két olyan AC és BC egyenes van, ami illeszkedik a C pontra és merőleges az AB egyenesre, ami lehetetlen. Tehát az a feltételezés, hogy az α és a β sík metszi egymást, nem helytálló. Vagyis $\alpha \parallel \beta$.

1. Ahhoz, hogy megállapítsuk, egy egyenes merőleges a síkra, elegendő igazolni, hogy ez az egyenes merőleges az adott síkkal párhuzamos síkra.

2. Ahhoz, hogy igazoljuk két sík párhuzamosságát, elegendő bebizonyítani, hogy a két sík merőleges egy egyenesre.

A bebizonyított tételeket és megoldott feladatokat a14. táblázatban foglaltuk össze.

14. táblázat

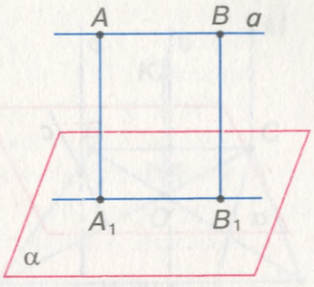
	Ha $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, akkor $\alpha \perp b$
	Ha $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$, akkor $a \parallel b$
	Ha $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, akkor $a \perp \alpha$
	Ha $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, akkor $\alpha \parallel \beta$

BŐVEBBEN

1. Megmutatjuk, hogy egy egyenes és a vele párhuzamos sík távolsága nem függ az adott egyenesre illeszkedő pont kiválasztásától, az egyenes minden pontja azonos távolságra van a vele párhuzamos síktól. Legyen $a \parallel \alpha$ (237. ábra). Húzzunk az a egyenes két tetszőleges A és B pontjából az α síkra merőleges AA_1 és BB_1 egyenest!

Bizonyítsuk be, hogy $AA_1 = BB_1$! Mivel $AA_1 \perp \alpha$ és $BB_1 \perp \alpha$, ezért $AA_1 \parallel BB_1$ (a 12. §. 1. feladata). Fektessünk az AA_1 és BB_1 egyenesre síkot! Ez a sík az AB egyenessel párhuzamos A_1B_1 egyenesben metszi az α síkot. Ezért az ABB_1A_1 négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak. Vagyis ez a négyszög parallelogramma, ami azt jelenti, hogy $AA_1 = BB_1$.

Bizonyítsd be, hogy a párhuzamos síkok távolsága nem függ az egyik síkra illeszkedő pont kiválasztásától!



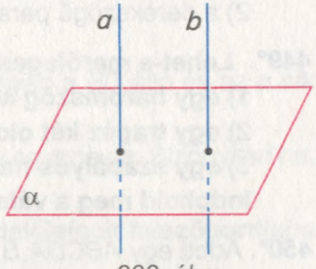
237. ábra

2. A mértan fejlődéséhez nagymértékben hozzájárult az odesszai származású ismert matematikus Pavel Uriszon (1898–1924). A tudós élete tragikus hirtelenséggel, fiatalon ért véget 26 éves korában, ám így is számos felfedezést tett a topológiában (a mértan egyik fejezete). Bebizonyította a konkáv mértan azon figyelemre méltó tételét, hogy adott középszélességű testek közül a gömb az, melynek a térfogata maximális.


P. Sz. Uriszon

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Bizonyítsd be, ha egy sík merőleges a két párhuzamos egyenes egyikére, akkor merőleges a másik egyenesre is!
2. Bizonyítsd be, ha két egyenes merőleges egy síkra, akkor ez a két egyenes párhuzamos!
3. Bizonyítsd be, ha egy egyenes merőleges a két párhuzamos sík egyikére, akkor merőleges a másik síkra is!
4. Bizonyítsd be, ha két sík merőleges egy egyenesre, akkor ez a két sík párhuzamos!



238. ábra

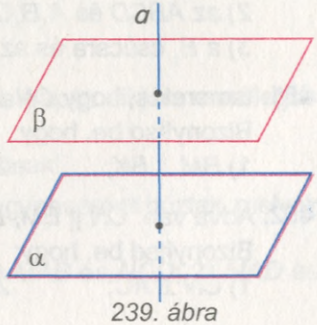
OLDD MEG A FELADATOKAT!

440'. Az a és a b egyenes párhuzamos (238. ábra). Az a egyenes merőleges az α síkra. Elmondhatjuk-e, hogy a b egyenes merőleges az α síkra?

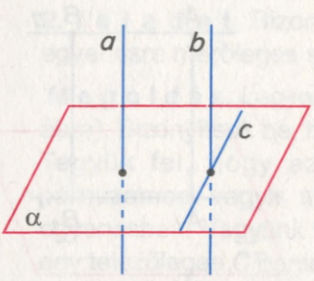
441'. Az a és a b egyenes merőleges az α síkra (238. ábra). Milyen az a és a b egyenes kölcsönös helyzete?

442'. Az α és a β sík párhuzamos (239. ábra). Az a egyenes merőleges a β síkra. Elmondhatjuk-e, hogy az a egyenes merőleges az α síkra?

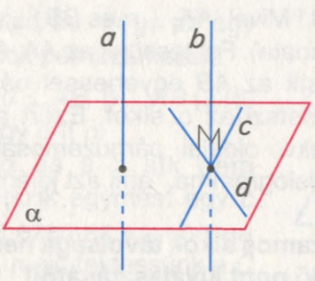
443'. Az α és β sík merőleges az a egyenesre (239. ábra). Magyarázd meg, miért párhuzamos az α és β sík?



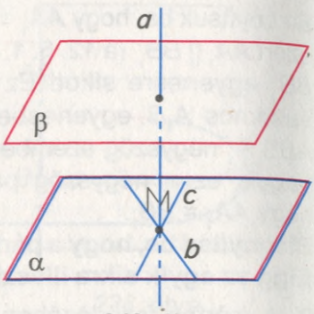
239. ábra



240. ábra



241. ábra



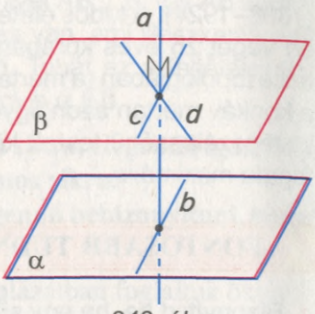
242. ábra

444°. Adott: $a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (240. ábra).
Magyarázd meg, miért $b \perp c$!

445°. Adott: $a \parallel b$, $b \perp c$ és $b \perp d$ (241. ábra).
Bizonyítsd be, hogy $a \perp \alpha$!

446°. Adott: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp b$ és $a \perp c$ (242. ábra).
Bizonyítsd be, hogy $a \perp \beta$!

447°. Adott: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp c$ és $a \perp d$ (243. ábra).
Bizonyítsd be, hogy $a \perp b$!



243. ábra

448°. Egy téglatest oldaléleinek felezőpontjait síkkal metszettük. Bizonyítsd be, hogy:

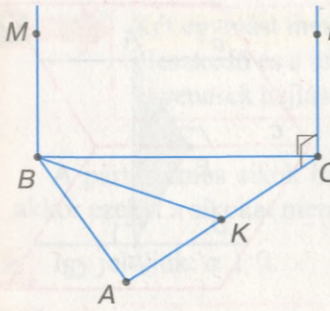
1) a metsző sík párhuzamos a téglatest alaplapjával;
2) a derékszögű parallelepipedon oldalélei merőlegesek a metszetre!

449°. Lehet-e merőleges egy adott síkra:
1) egy háromszög két oldala;
2) egy trapéz két oldala;
3) egy szabályos hatszög két oldala?
Indokold meg a válaszodat!

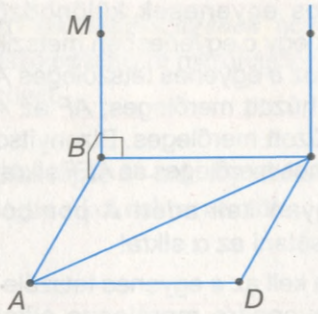
450°. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Merőleges-e az $ABCD$ alaplapra:
1) a DC és D_1C_1 élek felezőpontjaira illeszkedő egyenes;
2) az $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ lapok középpontjaira illeszkedő egyenes;
3) a B_1 csúcsra és az AB él felezőpontjára illeszkedő egyenes?

451. Ismeretes, hogy $CN \perp BC$, $CN \perp AC$, $CN \parallel BM$ (244. ábra).
Bizonyítsd be, hogy:
1) $BM \perp BK$; 2) $BM \perp AB$!

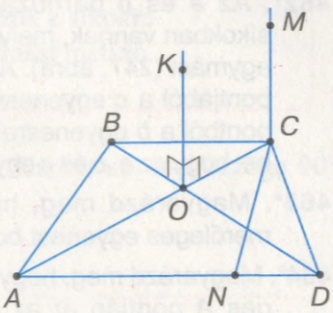
452. Adva van: $CN \parallel BM$, $BM \perp BC$, $BM \perp AB$ (245. ábra).
Bizonyítsd be, hogy:
1) $CN \perp AC$; 2) $CN \perp CD$!



244. ábra



245. ábra



246. ábra

453. Adott: $OK \perp AC$, $OK \perp BD$, $OK \parallel CM$ (246. ábra).
Bizonyítsd be, hogy:
1) $CM \perp BC$; 2) $CM \perp CN$!

454. Az $ABCD$ rombusz A csúcsán és átlóinak O metszéspontján át párhuzamos AM és ON egyeneseket húztak úgy, hogy $AM \perp AB$ és $AM \perp AD$.
Bizonyítsd be, hogy:
1) $ON \perp BD$; 2) $ON \perp AC$!

455. Az AB szakasz párhuzamos az α síkkal. Az A pontból AD merőlegest húztak az α síkra. A B pontból az AD szakasszal párhuzamos egyenest húztak, amely a C pontban metszi az α síkot! Milyen az $ABCD$ négyszög fajtája? Indokold meg a válaszodat!

456. Az A és B pontból egy AD és BC merőlegest húztak az α síkra.
Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap, ha:
1) $AD = BC$;
2) az AB és DC egyenesek párhuzamosak!

457. Az $ABCD$ rombusz AC átlója merőleges az α síkra. Milyen a BD átló és az α sík kölcsönös helyzete? Indokold meg a válaszodat!

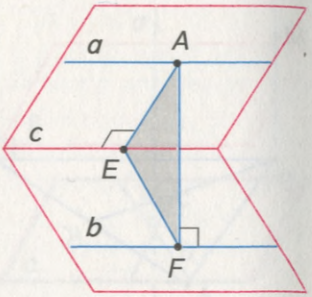
458. Az α sík és a rajta kívül fekvő b egyenes merőleges az a egyenesre. Bizonyítsd be, hogy a $b \parallel \alpha$!

459. Ábrázold egy szabályos háromoldalú gúla és az oldaléleinek felezőpontjaira illeszkedő sík metszetét!
Bizonyítsd be, hogy:
1) a metszet párhuzamos a gúla alaplapjával;
2) a gúla magassága merőleges a metsző síkra!

460. Az $ABCD$ trapéz A és C csúcsán keresztül ($AD \parallel BC$) a trapéz síkjára merőleges AM és CN egyeneseket húztak.
Bizonyítsd be, hogy a DAM és a BCN síkok párhuzamosak!

461. Az $ABCD$ rombusz A és C csúcsán keresztül AM és CN egyeneseket húztak, melyek merőlegesek a rombusz síkjára.
Bizonyítsd be a következő síkok párhuzamosságát: 1) MAB és NCD; 2) MAD és NCB!

462*. Az a és b párhuzamos egyenesek különböző síkokban vannak, melyek egy c egyenesben metszik egymást (247. ábra). AE az a egyenes tetszőleges A pontjából a c egyenesre húzott merőleges; AF az A pontból a b egyenesre húzott merőleges. Bizonyítsd be, hogy az a, b és c egyenes merőleges az AEF síkra!



247. ábra

463*. Magyarázd meg, hogyan kell adott A pontból merőleges egyenest bocsátani az α síkra!

464*. Magyarázd meg, hogyan kell az a egyenes tetszőleges A pontján át az egyenesre merőleges síkot fektetni!

465*. Bizonyítsd be, hogy a síkot nem metsző szakasz felezőpontja olyan messze van a síktól, mint a szakasz végpontjai síktól mért távolságának számtani közepe!

466*. Bizonyítsd be, hogy két párhuzamos sík távolsága nem függ az egyik síkban felvett ponttól!

467*. Az egy féltérben lévő A és B pontból AD és BC merőlegest húztak a síkra. Határozd meg az $ABCD$ négyszög szögeit, ha $AD = 21$ cm, $BC = 15$ cm, $DC = 6$ cm!

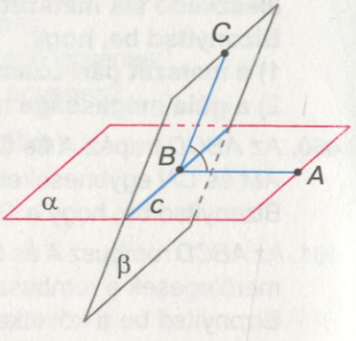
GYAKORLATI ALKALMAZÁS

468. Hogyan ellenőrizhetjük le a plafon és a padló párhuzamosságát? Hány szöget kell megmérni ehhez?

469. Ajánlj olyan módszert a síkok párhuzamosságának ellenőrzésére, melyben a párhuzamos síkok távolságának meghatározását alkalmazzuk!

13. § MERŐLEGES SÍKOK

Először fogalmazzuk meg, mi a síkok hajlásszöge. Legyen az α és a β sík metszete egy c egyenes (248. ábra). Húzzunk ezekben a síkokban a c egyenes tetszőleges B pontján át a c egyenesre merőleges AB és BC egyenest! Ebben az esetben az α és a β sík hajlásszöge egyenlő az AB és BC egyenesek hajlásszögével.



248. ábra

Írjuk le: $(\alpha\beta)\angle = ABC\angle$.

Függ-e az ABC szög fokmértéke a c egyenes pontjának kiválasztásától? Nem, mert egyállású szögeket kapunk és az ilyen szögek egyenlők.

Két egymást metsző ***sík hajlásszögének*** nevezzük a síkokra illeszkedő és a metsző egyenesre merőleges egymást metsző egyenesek hajlásszögét.

A párhuzamos síkok hajlásszögét 0°-nak fogadták el. Ha két sík hajlásszöge 90°, akkor ezeket a síkokat merőleges síkoknak nevezzük.

Így jelöljük: $\alpha \perp \beta$.

Két sík ***merőleges***, ha hajlásszögük 90°.

Tétel (a síkok merőlegességének ismertetőjeléről).
Ha egy sík illeszkedik egy másik síkra merőleges egyenesre, akkor ezek a síkok merőlegesek.

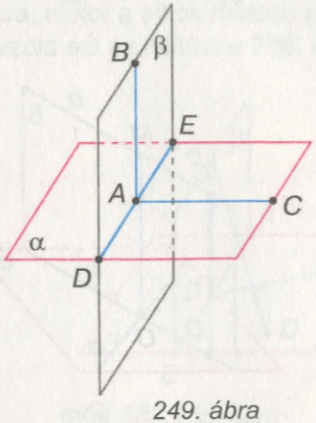
Adott: α és β sík (249. ábra), AB a β sík egyik egyenese, $AB \perp \alpha$.

Bizonyítsd be: $\beta \perp \alpha$!

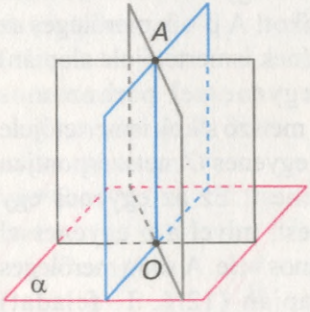
Bizonyítás. Az A pont az α és β sík közös pontja. Ezért ez a két sík egy DE egyenesben metszi egymást, amely illeszkedik az A pontra. Húzzunk az α síkban a DE egyenesre merőleges AC egyenest! Mivel $AB \perp \alpha$, az AC és DE egyenes pedig az α síkban van, ezért $AB \perp AC$ és $AB \perp DE$. Ezenkívül $AC \perp DE$.
Tehát $(\alpha\beta)\angle = CAB\angle = 90°$, vagyis $\beta \perp \alpha$.

Hány síkot lehet fektetni az adott α síkon kívüli A ponton keresztül merőlegesen az adott síkra? Végtelen sokat. Húzzunk az α síkra merőleges AO egyenest, $AO \perp \alpha$ (250. ábra). A meghatározás szerint az AO egyenesre illeszkedő bármelyik sík merőleges az adott α síkra.

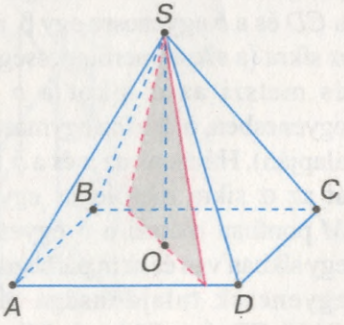
A síkok merőlegességének ismertetőjele alapján a gúla magasságára illeszkedő sík merőleges a gúla alaplapjára (251. ábra).



249. ábra



250. ábra



251. ábra

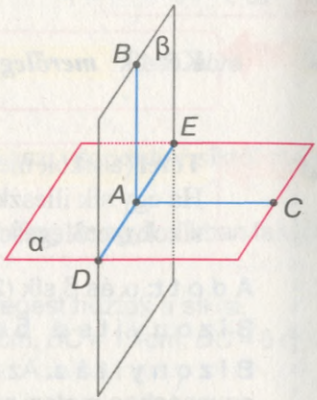
Ha falat, kerítést vagy más létesítményt építenek, akkor az oszlopokat függőlegesen állítják fel, így biztosítva a falak vagy kerítések függőlegességét.

Tétel (a merőleges síkok tulajdonságáról).
Ha két sík merőleges, akkor az egyik sík bármely egyenese, amely merőleges a metsző egyenesre, merőleges a másik síkra is.

Adott: az α sík merőleges a β síkra, $\alpha \perp \beta$ (252. ábra), az AB egyenes illeszkedik a β síkra, $AB \perp DE$.

Bizonyítsd be: $AB \perp \alpha$!

Bizonyítás. Húzzunk az α síkban a síkok DE metsző egyenesére merőleges AC egyenest. Ebben az esetben az AC és az AB egyenes is merőleges a DE egyenesre. Ezért az AC és AB egyenesek hajlásszöge egyenlő az α és a β sík hajlásszögével. Mivel $\alpha \perp \beta$, ezért a $CAB\angle = 90°$, és $AB \perp AC$. Tehát az AB egyenes merőleges az egymást metsző DE és AC egyenesre. Az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjele alapján $AB \perp \alpha$.

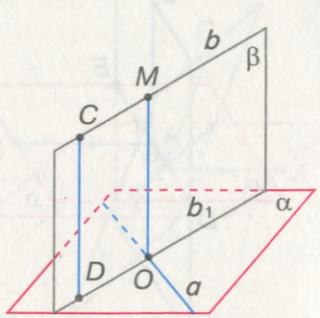


252. ábra

Ahhoz, hogy igazoljuk két sík merőlegességét, az egyik síkban meg kell keresni egy olyan egyenest, amely merőleges a másik síkra vagy a síkok metsző egyenesére.

Fogalmazzuk meg, mi két kitérő egyenes távolsága. Már tudod, hogy a párhuzamos egyenesek távolságát az egyenesek közös merőlegesének hossza határozza meg. Megmutatjuk, hogy a kitérő egyeneseknek is van közös merőlegesük.

Legyen a és b két kitérő egyenes (253. ábra). Fektessünk az a egyenesre a b egyenessel párhuzamos α síkot! Húzzunk a b egyenes tetszőleges C pontjából az α síkra merőleges CD egyenest, és fektessünk a CD és a b egyenesre egy β síkot! A β sík merőleges az α síkra (a síkok merőlegességének ismertetőjele alapján) és metszi az α síkot a b egyenessel párhuzamos egyenesben, $b_1 \parallel b$ (az egymást metsző síkok ismertetőjele alapján). Húzzunk az a és a b_1 egyenes O metszéspontján át az α síkra merőleges egyenest! Ez az egyenes egy M pontban metszi a b egyenest, mivel a b egyenessel egy síkban van és nem párhuzamos vele. A síkra merőleges egyenesek tulajdonsága alapján (12.§. 1. feladat) $OM \parallel CD$, így $OM \perp b$. Mivel $OM \perp \alpha$, ezért $OM \perp a$.



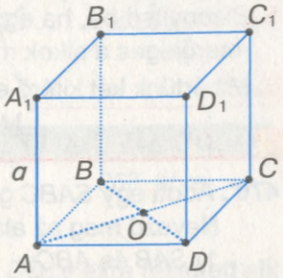
253. ábra

Tehát az OM egyenes merőleges az a és b kitérő egyenesek mindegyikére. Az OM szakasz az a és a b egyenes közös merőlegese.

Két kitérő egyenes távolságát a közös merőlegesük hosszának nevezzük.

Feladat. Adott egy a élű $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (254. ábra). Határozd meg az AA_1 és BD kitérő egyenesek távolságát!

Megoldás. A kocka minden lapja négyzet. Ezért az AA_1 él merőleges az alaplapra, így az AO egyenesre is. $AO \perp BD$, mivel a négyzet átlói merőlegesek. Ebből következik, hogy az AA_1 és BD kitérő egyenesek távolsága egyenlő a közös merőlegesük, az AO szakasz hosszával.



254. ábra

Azt kapjuk, hogy $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, tehát $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

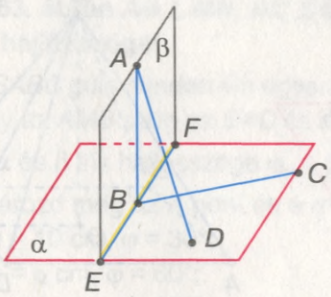
BŐVEBBEN

Feladatok megoldásánál gyakran alkalmazzák a síkok merőlegességének ismertetőjeléről szóló tétel következményeit.

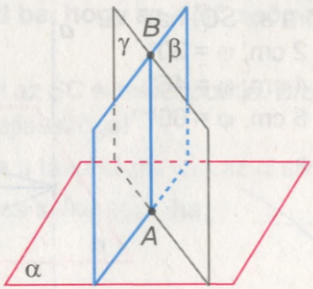
1. következmény. Ha az α és β sík merőleges, az α síkra merőleges egyenesnek és a β síknak pedig van közös pontja, akkor ez az egyenes illeszkedik a β síkra.

Tegyük fel, hogy $AD \perp \alpha$ és nincs benne a β síkban (255. ábra). Húzzunk a β síkban egy $AB \perp EF$ egyenest, ahol EF az α és β sík metsző egyenese. A merőleges egyenesek tulajdonsága alapján $AB \perp \alpha$. Így két olyan egyenest kaptunk (AB és AD), amelyek merőlegesek az α síkra és metszik egymást. De ez ellent mond a 12.§. 1. feladatának. Ezért az AD egyenes a β síkban van.

2. következmény. Ha két egymást metsző sík mindegyike merőleges egy harmadik síkra, akkor a síkok metsző egyenese is merőleges erre a síkra.
Igazold ezt az állítást a 256. ábra alapján!



255. ábra



256. ábra

FONTOSABB TUDNIVALÓK

1. Fogalmazd meg, mi két kitérő egyenes hajlásszöge!
2. Mekkora két párhuzamos sík hajlásszöge?
3. Milyen síkokat nevezünk merőlegeseknek?
4. Fogalmazd meg és bizonyítsd be két sík merőlegességének ismertetőjelét!
5. Bizonyítsd be, ha egy egyenes illeszkedik két egymásra merőleges sík egyikére és merőleges a síkok metsző egyenesére, akkor merőleges a másik síkra is!
6. Mit értünk két kitérő egyenes távolságán?

OLDD MEG A FELADATOKAT!

470'. Adott egy *SABC* gúla (257. ábra).
Nevezd meg az alábbi síkok hajlásszögét:
1) *SAB* és *ABC*; 2) *SAC* és *ABC*!

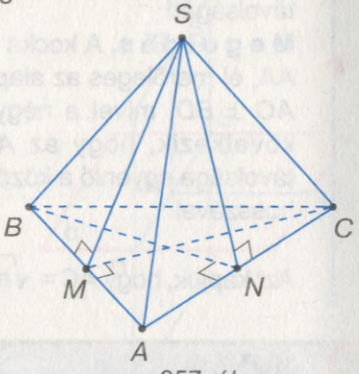
471'. Az a egyenes az α síkban van és $a \perp \beta$ (258. ábra). Kiderül-e ebből, hogy $\alpha \perp \beta$?

472'. $\alpha \perp \beta$ (258. ábra). Az a egyenes illeszkedik az α síkra és $a \perp c$.
Állíthatjuk-e, hogy $a \perp \beta$?

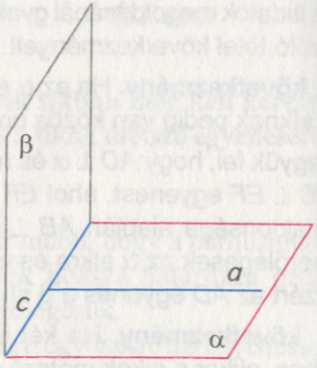
473'. A 259. ábrán $a \perp \alpha$ és a b egyenes az α síkban van. Hogyan nevezzük az a és a b egyeneseket? Az AB, AC, AD szakaszok közül melyiknek a hossza egyenlő az a és a b egyenes távolságával?

474°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egy kocka. Határozd meg az:
1) $ABCD$ alaplap és az A_1B_1CD metszet hajlásszögét;
2) a CC_1D_1D oldallap és az AA_1C_1C metszet hajlásszögét;
3) az AA_1C_1C és BB_1D_1D metszetek hajlásszögét!

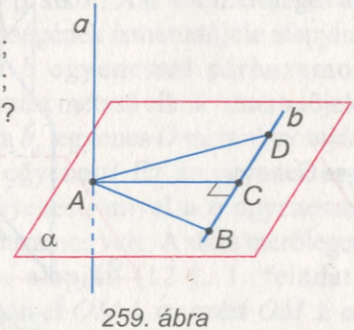
475°. *SABCD* egy négyoldalú gúla (260. ábra), *SO* a gúla magassága, φ az *ABCD* oldallap és az *SCD* sík hajlásszöge, $SM = a$.
Mekkora az *SO*, ha:
1) $a = 2$ cm, $\varphi = 30°$;
2) $a = 4$ cm, $\varphi = 45°$;
3) $a = 6$ cm, $\varphi = 60°$?



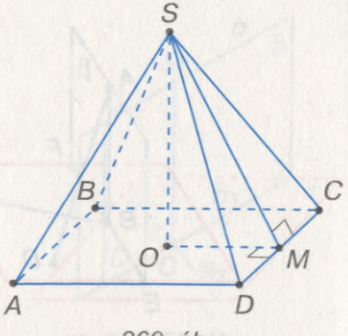
257. ábra



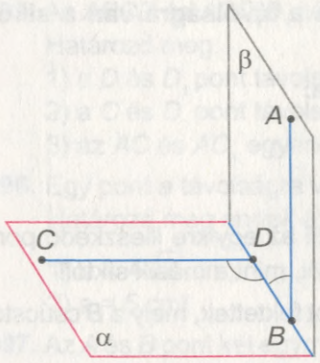
258. ábra



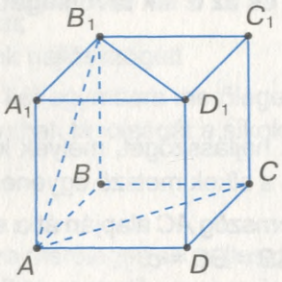
259. ábra



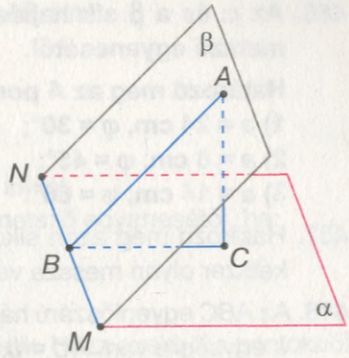
260. ábra



261. ábra



262. ábra



263. ábra

476°. Ábrázold az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest és a BB_1, valamint DD_1 élekre fektetett sík metszetét! Igazold, hogy a metszet merőleges az alaplapra!

477°. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, melynek éle a. Fektess síkot:
1) az AA_1 élre merőlegesen az ABC_1D_1 lapra;
2) a CC_1 élre merőlegesen a BB_1D_1D lapra!
Határozd meg a metszet területét!

478°. Hány síkot lehet fektetni adott ponton át adott síkra merőlegesen?

479°. Két egymásra merőleges sík egyikére illeszkedő egyenes merőleges a metsző egyenesre. Milyen ennek az egyenesnek és a másik síknak a kölcsönös helyzete? Indokold meg a válaszodat!

480°. Adva van: $ABD\angle = CDB\angle$, $AB \perp \alpha$ (261. ábra).
Bizonyítsd be, hogy 1) $CD \perp \beta$; 2) $\alpha \perp \beta$!

481°. CD merőleges az ABC derékszögű háromszög síkjára ($C\angle = 90°$). Bizonyítsd be, hogy a BCD és az ACD síkok egymásra merőlegesek!

482°. Adva van egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, melynek éle a (262. ábra). Határozd meg az alábbi egyenesek távolságát:
1) AA_1 és BC; 2) CC_1 és AB_1; 3) AC és B_1D_1!

483. A 263. ábrán $AB \perp MN$, $AC \perp \alpha$. Bizonyítsd be, hogy az ABC szög az α és a β sík hajlásszöge!

484. Az $SABC$ gúla minden éle egyenlő. Az M pont az SC él felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy az AMB szög az SAC és az SBC sík hajlásszöge!

485. Az α és β sík hajlásszöge φ. A β sík A pontja a távolságra van az α síktól.
Határozd meg az A pont és a metsző egyenes távolságát, ha:
1) $a = 10$ cm, $\varphi = 30°$;
2) $a = 6$ cm, $\varphi = 60°$;
3) $a = 4$ cm, $\varphi = 45°$!

486. **Az α és a β sík hajlásszöge φ. A β sík A pontja a távolságra van a síkok metsző egyenesétől.**

Határozd meg az A pont és az α sík távolságát, ha:

1) $a = 24$ cm, $\varphi = 30°$;

2) $a = 8$ cm, $\varphi = 45°$;

3) $a = 14$ cm, $\varphi = 60°$!

487. Határozd meg azon síkok hajlásszögét, melyek közül az egyikre illeszkedő pont kétszer olyan messze van a síkok metsző egyenesétől, mint a másik síktól!

488. Az ABC egyenlőszárú háromszög AC alapján át α síkot fektettek, mely a B csúcstól a egységre van. $AC = b$, $AB = BC = c$.

Határozd meg az α sík és a háromszög síkjának hajlásszögét, ha:

1) $a = 4$ cm, $b = 12$ cm, $c = 10$ cm;

2) $a = 8$ cm, $b = 24$ cm, $c = 20$ cm!

489. Az ABC derékszögű háromszög AC befogóján át ($C\angle = 90°$) α síkot fektettek, amely a háromszög síkjával φ szöget zár be. $AB = c$, $AC = b$.

Határozd meg a B csúcs és az α sík távolságát, ha:

1) $c = 20$ cm, $b = 16$ cm, $\varphi = 30°$;

2) $c = 10$ cm, $b = 8$ cm, $\varphi = 45°$;

3) $c = 13$ cm, $b = 5$ cm, $\varphi = 60°$!

490. Fektess síkot a gúla magasságán és egyik oldalélén keresztül! Bizonyítsd be, hogy a metszet merőleges az alaplapra!

491. Ábrázold az $SABCD$ szabályos négyoldalú gúla és az SD, illetve SC élek M és N felezőpontjaira fektetett sík metszetét, amely merőleges az alaplapra! Magyarázd meg a szerkesztést!

492. A CM egyenes merőleges az $ABCD$ téglalap síkjára.

Bizonyítsd be az alábbi síkok merőlegességét:

1) BCM és DCM;

2) ADM és DCM!

493. Az M pont nem illeszkedik az $ABCD$ négyzet síkjára és azonos távolságra van a négyzet csúcsaitól.

Bizonyítsd be az alábbi síkok merőlegességét:

1) AMC és ABC;

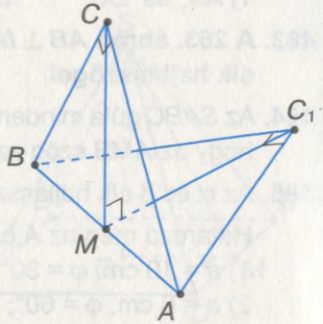
2) AMC és BMD!

494. **Két egyenlőszárú derékszögű háromszög síkja egymásra merőleges, az $AB = a$ átfogója pedig közös (264. ábra). Határozd meg a derékszögek csúcsainak távolságát, ha:**

1) $a = 10$ cm;

2) $a = 18$ cm;

3) $a = 22$ cm!



264. ábra

495. Az $ABCD$ és ABC_1D_1 négyzetek síkjai merőlegesek. $AB = a$.
Határozd meg:
1) a D és D_1 pont távolságát;
2) a C és D_1 pont távolságát;
3) az AC és AC_1 egyenesek hajlásszögét!

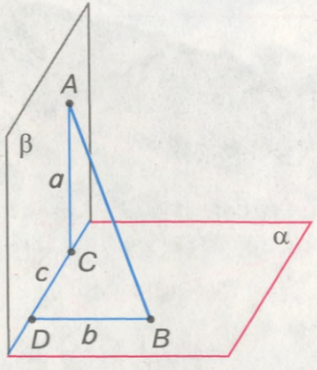
496. Egy pont a távolságra van két egymásra merőleges síktól.
Határozd meg ennek a pontnak távolságát a síkok metsző egyenesétől, ha:
1) $a = 4\sqrt{2}$ cm;
2) $a = 5$ cm!

497. Az A és B pont két egymásra merőleges síkra illeszkedik. Húzz ezekből a pontokból AC és BD merőlegest a síkok metsző egyenesére (265. ábra). $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$.
Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha:
1) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 12$cm;
2) $a = 24$ cm, $b = 8$ cm, $c = 6$ cm!

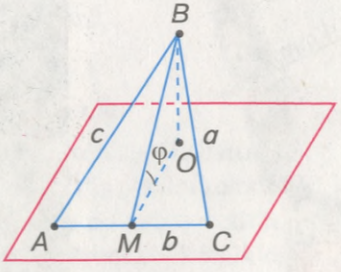
498. Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka, melynek éle a.
Határozd meg az alábbi egyenesek távolságát:
1) BB_1 és AC;
2) AA_1 és B_1D!

499. A CM egyenes merőleges az ABC derékszögű háromszög síkjára ($C\angle = 90°$), melynek befogói a és b.
Határozd meg a CM és az AB egyenes távolságát, ha:
1) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm;
2) $a = 12$ cm, $b = 16$ cm!

500*. Az ABC háromszögben $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (266. ábra). Fektess síkot a háromszög AC oldalára úgy, hogy az φ szöget zárjon be a háromszög síkjával!
Határozd meg a B csúcs távolságát ettől a síktól, ha:
1) $a = 25$ cm, $b = 36$ cm, $c = 29$ cm, $\varphi = 30°$;
2) $a = 25$ cm, $b = 12$ cm, $c = 17$ cm, $\varphi = 60°$!



265. ábra



266. ábra

501*. Egy szabályos gúla magassága az alapél felével egyenlő.
Határozd meg az alaplap és az oldallap hajlásszögét, ha az alaplap:
1) háromszög; 2) négyzet; 3) hatszög!

502*. Az A pont a és b egységre van két egymást metsző síktól. Határozd meg az A pont távolságát a metsző egyenestől, ha a síkok hajlásszöge:
1) 90°; 2) 60°; 3) 30°!

503*. Egy a hosszúságú szakasz két végpontja különböző síkokra illeszkedik. A szakasz az egyik síkkal 45°-os szöget zár be, a másikkal 30°-osat.
Határozd meg a metsző egyenes azon szakaszának hosszát, melyet az adott pontokból húzott merőlegesek talppontjai határolnak!

504*. Egy szakasz két végpontja egymásra merőleges síkokra illeszkedik és a síkok metsző egyenesétől 7 cm-re, illetve 24 cm-re van.
Határozd meg a szakasz és a síkok metsző egyenesének távolságát!

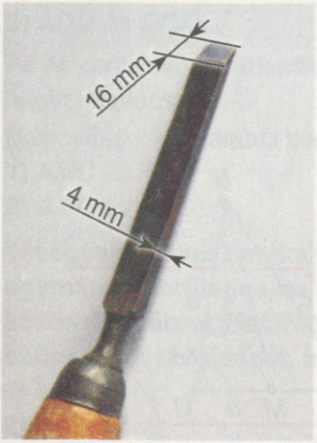
505*. Egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest alapélei 6 cm és 8 cm.
Határozd meg az AA_1 él és a B_1D átló távolságát!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

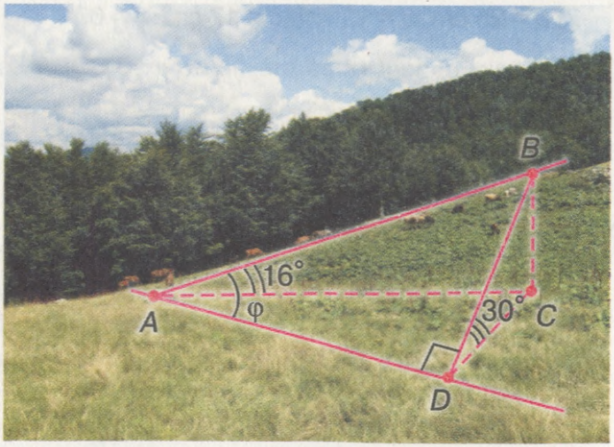
506. Határozd meg a véső élének meredekségét a 267. ábra adatai alapján!

507. Egy síkfelület függőlegességét (fal, párkány, stb.) mérőónnal (egy zsinegre felkötött nehezékkel) lehet leellenőrizni.
Magyarázd meg, hogyan történik az ellenőrzés! Min alapszik az eljárás?

508. Két sík hajlásszögét néha az emelkedő meredekségének is szokták nevezni.
Egy hegy legmeredekebb része 30°-os (268. ábra).
A hegy lábához viszonyítva milyen szög alatt kell megépíteni az AB egyenes útszakaszt, hogy az 16°-os szöget zárjon be a látóhatárral?



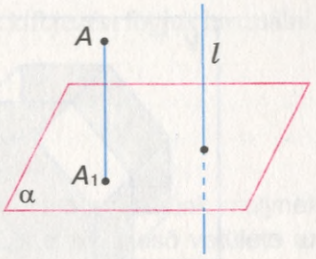
267. ábra



268. ábra

14. § ORTOGONÁLIS VETÍTÉS

Már tudod, hogyan kell ábrázolni a testeket a síkon párhuzamos vetítéssel. Nézzük a párhuzamos vetítés egy másik fajtáját! Legyen egy párhuzamos vetítés képsíkja az α, a vetítő egyenes pedig l (269. ábra). Ha az l vetítő egyenes merőleges az α síkra, akkor az ilyen párhuzamos vetítést *ortogonális*, *derékszögű* vetítésnek nevezzük. Az ortogonális vetítésnél a vetítő egyenes merőleges a képsíkra.



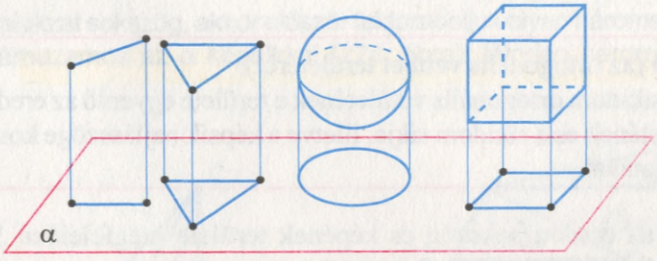
269. ábra

A párhuzamos vetítésnél az A pont képe a pontból húzott merőleges A_1 talppontja.

Az F test képének azt az F_1 alakzatot nevezzük, melynek minden pontja az F test összes pontjának képe.

Az ortogonális vetítés rendelkezik a párhuzamos vetítés minden tulajdonságával, mivel annak részesete.

A 270. ábrán néhány test és ortogonális vetülete látható.



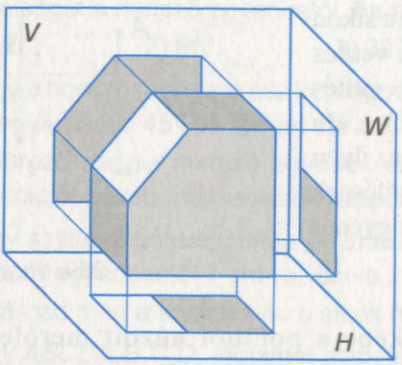
270. ábra

? Lehet-e a háromszög ortogonális vetülete egy szakasz?

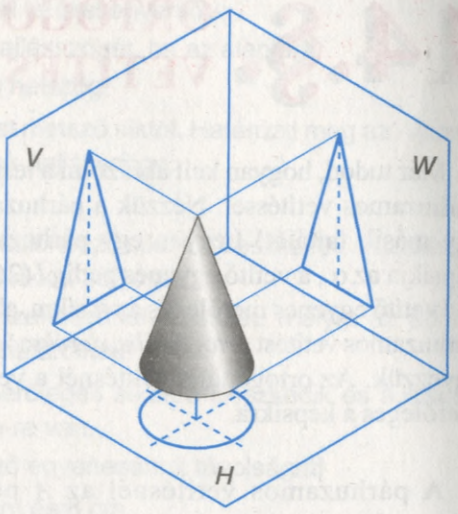
Igen, ha a háromszög síkja merőleges a képsíkra!

Az ortogonális vetítést a műszaki rajzoknál alkalmazzák.

Ez az ábrázolás két vagy három merőleges síkra is történhet. Ha három síkra vetítünk, akkor ezeket a síkokat elölnézetnek (V), felülnézetnek (H) és oldalnézetnek (W) is szokták nevezni. A test legjellegzetesebb pontjait (általában a csúcsait) vetítjük először le a képsíkra, majd ezeket a pontokat egyenesekkel vagy görbékkel kötjük össze. A kapott alakzatok lesznek a test V, H és W síkokra eső vetületei. (271. ábra).



271. ábra



272. ábra

A 272. ábrán egy olyan kúp vetülete látható, melynek alapja párhuzamos a H síkkal. Ebben az esetben a kúp vetülete erre a síkra elölnézetből egy körlap, oldalnézetből viszont egyenlőszárú háromszög.

A továbbiakban csak síkidomok ortogonális vetítésével fogunk foglalkozni. Ezért hasznos lesz megjegyezni azt a tételt, amely a síkidom területe és az ortogonális vetületének területei közötti összefüggést vizsgálja!

Tétel (az ortogonális vetület területéről).
Egy síkidom ortogonális vetületének a területe egyenlő az eredeti síkidom területének és a síkidom síkja, illetve a képsík hajlásszöge koszinuszának szorzatával.

Vagyis, ha az eredeti sokszög és képének területe megfelelően S és S_m, a síkok hajlásszöge pedig φ, akkor $S_m = S \cdot \cos \varphi$.

? Lehet-e egy síkidom vetületének területe nagyobb, mint az eredeti sokszög területe? Nem lehet. Mivel $0 \leq \cos \varphi \leq 1$, ezért az $S_m = S \cdot \cos \varphi$ képletből következik, hogy $S_m \leq S$.

Feladat. Határozd meg a sokszög területét, ha ortogonális vetületének a területe 15 cm², a sokszög síkjának és a képsíknak a hajlásszöge pedig 60°!

Megoldás.

Az $S_m = S \cdot \cos \varphi$ képletből $S = \dfrac{S_m}{\cos \varphi} = \dfrac{15}{\cos 60°} = \dfrac{15}{\frac{1}{2}} = 30$ (cm²).

Az $S_m = S \cdot \cos\varphi$ képletből $S = \frac{S_m}{\cos\varphi}$ és $\cos\varphi = \frac{S_m}{S}$.

Ezekkel a képletekkel kiszámíthatjuk az eredeti sokszög területét, a vetület területét, továbbá a sokszög síkja és a képsík hajlásszögét.

A továbbiakban az ortogonális vetület helyett csak a vetület kifejezést fogjuk használni.

BŐVEBBEN

1. Bizonyítsd be az ortogonális vetület területéről szóló tételt!

Vizsgáljuk meg előbb azt az esetet, amikor egy olyan ABC háromszöget vetítünk, melynek AB oldala párhuzamos az α képsíkkal (273. ábra). Az $ABC\Delta$ α síkra eső vetülete az $A_1B_1C_1\Delta$. Fektessünk az AB oldalra az α képsíkkal párhuzamos β síkot: $\beta \parallel \alpha$. Az $ABC\Delta$ β síkra eső vetülete az $ABC_2\Delta$, amely egybevágó az $A_1B_1C_1\Delta$-gel. Húzzuk meg az ABC háromszög CM magasságát és kössük össze az M és C_2 pontot!

A három merőleges tételéből következik, hogy C_2M az $ABC_2\Delta$ magassága. Ezért $CMC_2\angle = \varphi$ szög a β sík és az $ABC\Delta$ síkja közötti hajlásszöggel egyenlő, tehát az α sík és az $ABC\Delta$ síkja közötti hajlásszöggel is, mivel $\beta \parallel \alpha$.

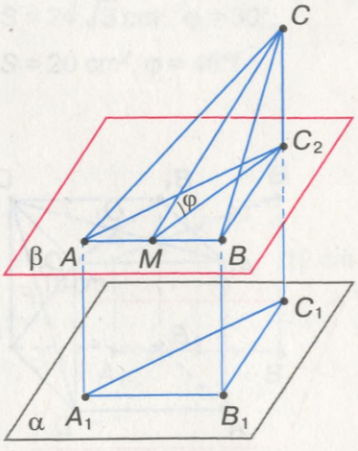
Azt kaptuk, hogy $C_2M = CM \cdot \cos\varphi$, $S_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CM$, $S_{ABC_2\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot CM_2$.

Ebből $S_{ABC_2\Delta} = S_{ABC\Delta} \cdot \cos\varphi$.

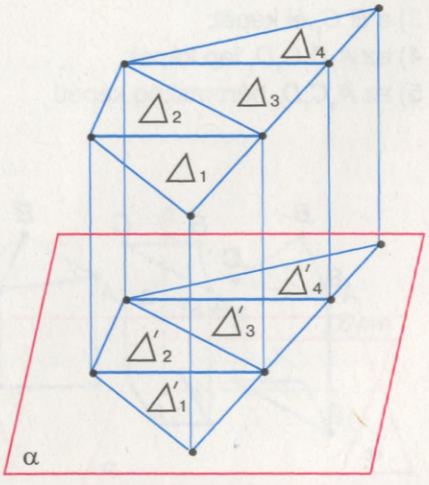
Mivel az $ABC_2\Delta = A_1B_1C_1\Delta$, ezért területeik egyenlők.

Azt kaptuk, hogy $S_{A_1B_1C_1\Delta} = S_{ABC\Delta} \cdot \cos\varphi$.

Ha a vetítendő alakzat sokszög, akkor először feldaraboljuk olyan háromszögekre, melyek egyik oldala párhuzamos az α képsíkkal (274. ábra). Minden háromszögre felírható:



273. ábra



274. ábra

$S_{\Delta'} = S_{\Delta} \cdot \cos \varphi$. Az összes egyenlőséget tagonként adjuk össze. Ekkor az egyenlőség bal oldalán a vetület területét kapjuk, a jobb oldalon pedig az eredeti sokszög területét és cos φ szorzatát:

$$S_m = S \cdot \cos \varphi.$$

2. A kölcsönösen merőleges síkokra eső merőleges (ortogonális) vetítést, azaz a háromdimenziós testek kétdimenziós megjelenítését Gaspard Monge, francia mértantudós dolgozta ki a XVIII. század végén. Ezért ezt a módszert gyakran Monge módszerének is hívják. Monge nevéhez fűződik az ábrázoló geometria tudományának megalapozása.



Gaspard Monge

FONTOSABB TUDNIVALÓK

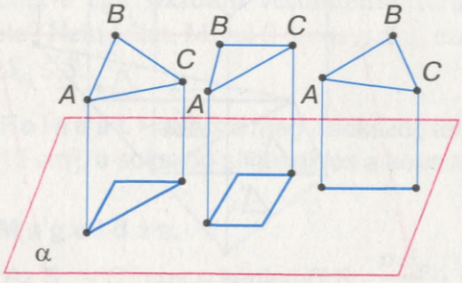
1. Mi a merőleges vagy ortogonális vetítés?
2. Mi a különbség az ortogonális és párhuzamos vetítés között?
3. Fogalmazd meg az ortogonális vetület területéről szóló tételt!

OLDD MEG A FELADATOKAT!

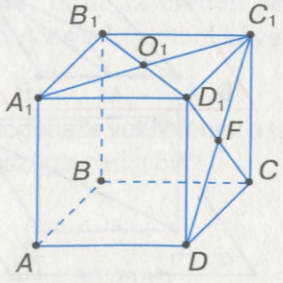
509'. A 275. ábra melyik rajzán látható az ABC háromszög α síkra eső ortogonális vetülete?

510'. Vetítsd le az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát az $ABCD$ lap síkjára (276. ábra)! Nevezd meg:

1) a DD_1C_1C lap átlói metszéspontjának képét;
2) az $A_1B_1C_1D_1$ lap átlói metszéspontjának képét;
3) a B_1C_1 él képét;
4) az $A_1B_1C_1D_1$ lap képét;
5) az $A_1C_1D_1$ háromszög képét!



275. ábra



276. ábra

511'. Lehet-e egy körvonal ortogonális vetülete:
1) körvonal;
2) szakasz;
3) ellipszis?

512°. Az AB szakasz A végpontja illeszkedik az a síkra, a B végpontja pedig b egységre van az α síktól.
Határozd meg:
1) az AB szakasz α síkra eső vetületét;
2) a szakasz felezőpontjának és az α sík távolságát!

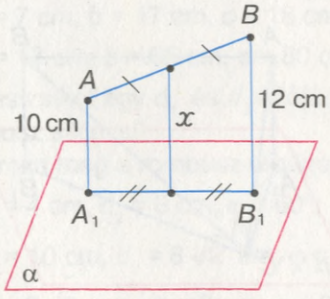
513°. Az AB szakasz A végpontja illeszkedik az α síkra, a szakasz felezőpontja a egységre van az α síktól.
Határozd meg az α sík és a B pont távolságát, ha:
1) $a = 7$ cm; 2) $a = 5$ cm; 3) $a = 11$ cm!

514°. A 277. és a 278, ábrán az A_1B_1 szakasz az AB szakasz α síkra eső ortogonális vetülete. Határozd meg a rajz alapján az ismeretlen x értékét!

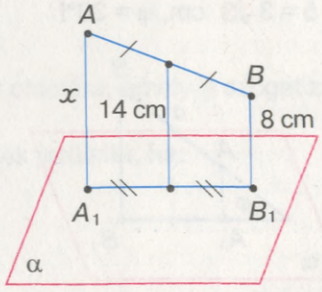
515°. Lehet-e egy szakasz ortogonális vetülete:
1) rövidebb az eredeti szakasznál;
2) egyenlő hosszúságú az eredeti szakasszal;
3) hosszabb az eredeti szakasznál?

516°. Egy egyenlőszárú háromszög $AC = a$ oldala illeszkedik az α síkra, a B csúcs és az α sík távolsága pedig b.
Határozd meg az AB és BC oldal α síkra eső vetületét, ha:
1) $a = 20$ cm, $b = 12$ cm;
2) $a = 25$ cm, $b = 15$ cm!

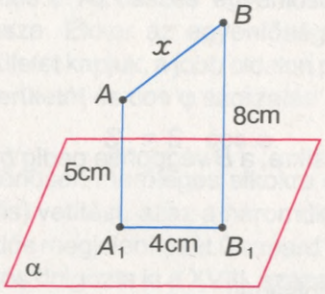
517°. Egy háromszög területe S, a képsík és a háromszög síkja φ szöget zár be.
Határozd meg a háromszög vetületének területét, ha:
1) $S = 36$ cm^2, $\varphi = 60°$;
2) $S = 24\sqrt{3}$ cm^2, $\varphi = 30°$;
3) $S = 20$ cm^2, $\varphi = 45°$!



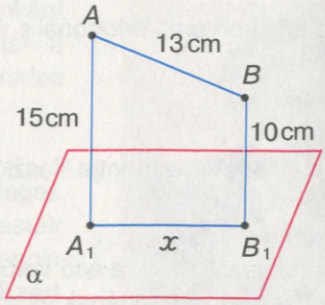
277. ábra



278. ábra



279. ábra



280. ábra

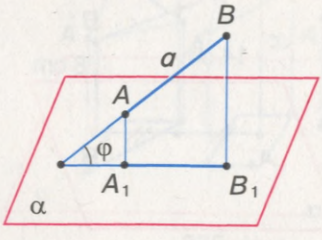
518. **A 279. és a 280. ábrán az A_1B_1 szakasz az AB szakasz α síkra eső vetülete. Határozd meg a rajz alapján az ismeretlen x értékét!**

519. Az AB szakasz metszi az α síkot.
Határozd meg a szakasz felezőpontja és az α sík távolságát, ha az A és a B pont az α síktól:
1) 10 cm-re, illetve 6 cm-re van;
2) 14 cm-re, illetve 8 cm-re van!

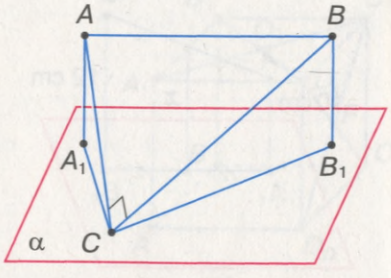
520. Az AB szakasz metszi az α síkot.
Határozd meg az AB szakasz α síkra eső vetületét, ha:
1) $AB = 26$ cm, $AA_1 = 8$ cm, $BB_1 = 2$ cm;
2) $AB = 20$ cm, $AA_1 = 10$ cm, $BB_1 = 6$ cm!

521. Az $AB = a$ szakasz nem illeszkedik az α síkra, az AB egyenes és az α sík hajlásszöge φ (281. ábra).
Határozd meg az AB szakasz α síkra eső vetületét, ha:
1) $a = 12$ cm, $\varphi = 60°$;
2) $a = 8$ cm, $\varphi = 30°$;
3) $a = 16$ cm, $\varphi = 45°$!

522. Az $AB = a$ szakasz nem illeszkedik az α síkra, $A_1B_1 = b$ az AB szakasz α síkra eső vetülete, φ az AB egyenes és az α sík hajlásszöge.
Határozd meg az AB szakasz hosszát, ha:
1) $b = 4$ cm, $\varphi = 60°$;
2) $b = 2\sqrt{2}$ cm, $\varphi = 45°$;
3) $b = 3\sqrt{3}$ cm, $\varphi = 30°$!



281. ábra



282. ábra

523. Fektess az ABC derékszögű háromszög C derékszög csúcsán át α síkot, amely a háromszög átfogójától a távolságra van (282. ábra)! A háromszög befogói b és c. Határozd meg az átfogó és a befogók α síkra eső vetületeit, ha:

1) $b = 15$ cm, $c = 20$ cm, $a = 12$ cm;

2) $b = 10$ cm, $c = 24$ cm, $a = 6$ cm!

524. Egy háromszög területe S, vetületének területe pedig S_1.
Határozd meg a háromszög síkja és a képsík hajlásszögét, ha:

1) $S = 36$ cm^2, $S_1 = 18$ cm^2;

2) $S = 24$ cm^2, $S_1 = 12\sqrt{2}$ cm^2;

3) $S = 28$ cm^2, $S_1 = 14\sqrt{3}$ cm^2!

525. ***S* egy sokszög területe, S_1 a sokszög ortogonális vetületének a területe, φ a sokszög síkjának és a képsíknak a hajlásszöge. Töltsd ki a 15. táblázatot!**

15. táblázat

S	128 cm^2	$64\sqrt{3}$ cm^2		$32\sqrt{2}$ cm^2	96 cm^2
S_1	64 cm^2		24 cm^2		48 cm^2
φ		30°	60°	45°	

526. Az ABC háromszög α síkra eső $A_1B_1C_1$ vetülete olyan egyenlőszárú derékszögű háromszög, melynek átfogója a. Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszög síkjai φ szöget zárnak be.
Határozd meg az ABC háromszög területét, ha:

1) $a = 8$ cm, $\varphi = 45°$;

2) $a = 6$ cm, $\varphi = 30°$!

527. Az a, b, c oldalú ABC háromszög α síkra eső vetülete $A_1B_1C_1$. A háromszögek síkjai φ szöget zárnak be.
Határozd meg az $A_1B_1C_1$ háromszög területét, ha:

1) $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm, $\varphi = 60°$;

2) $a = 7$ cm, $b = 17$ cm, $c = 18$ cm, $\varphi = 45°$;

3) $a = 17$ cm, $b = 65$ cm, $c = 80$ cm, $\varphi = 30°$!

528. Fektess síkot egy d_1 és d_2 átlójú rombusz egyik oldalára, amely φ szöget zár be a rombusz síkjával!
Határozd meg a rombusz α síkra eső vetületének területét, ha:

1) $d_1 = 4$ cm, $d_2 = 6$ cm, $\varphi = 60°$;

2) $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 8\sqrt{2}$ cm, $\varphi = 45°$;

3) $d_1 = 9\sqrt{3}$ cm, $d_2 = 8$ cm, $\varphi = 30°$!

529. Egy négyszög területe S. A négyszög α síkra eső vetülete olyan rombusz, melynek átlói d_1 és d_2.
Határozd meg a négyszög síkja és a rombusz síkja közötti hajlásszöget, ha:
1) $S = 96\ \text{cm}^2$, $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 12$ cm;
2) $S = 60\ \text{cm}^2$, $d_1 = 6$ cm, $d_2 = 10\sqrt{2}$ cm;
3) $S = 20\ \text{cm}^2$, $d_1 = 5\sqrt{3}$ cm, $d_2 = 4$ cm!

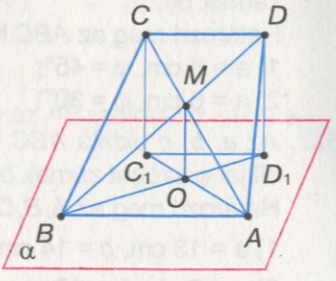
530. Egy derékszögű háromszög átfogója a, hegyesszöge α. A háromszög síkja és a képének síkja φ szöget zár be.
Határozd meg a háromszög vetületének területét:
1) $a = 4$ cm, $\alpha = 60°$, $\varphi = 30°$;
2) $a = 6$ cm, $\alpha = 45°$, $\varphi = 60°$;
3) $a = 8$ cm, $\alpha = 30°$, $\varphi = 45°$!

531*. A síkot nem metsző szakasz végpontjai a és b távolságra vannak a síktól. Az M pont a szakaszt $m : n$ arányban osztja.
Határozd meg az M pont és a sík távolságát, ha:
1) $a = 10$ cm, $b = 25$ cm, $m : n = 2 : 3$;
2) $a = 4$ cm, $b = 20$ cm, $m : n = 3 : 5$!

532*. Egy rombusz oldala a, hegyesszöge 60°. A rombusz egyik oldalára fektess síkot. A rombusz másik oldalának vetülete legyen b hosszúságú.
Határozd meg az átlók vetületét!

533*. Az $ABCD$ parallelogramma AD oldalán át α síkot fektettünk. $AD = 10$ cm, $AB = 15$ cm, az AC és BD átlók vetületei pedig megfelelően 13,5 cm és 10,5 cm.
Határozd meg a parallelogramma átlóit!

534*. Az $ABCD$ trapéz AB alapján át α síkot fektettünk (283. ábra). Az alapok aránya $m : n$ (m az AB oldalnak felel meg).
Határozd meg:
1) az átlók M metszéspontja és az α sík távolságát, ha a CD alap az α síktól a egységre van;
2) a CD alap és az α sík távolságát, ha az átlók metszéspontja b egységre van az α síktól!



283. ábra

535*. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogóján át α síkot fektettek, amely 30°-os szöget zár be a háromszög befogójával.
Határozd meg az α sík és a háromszög síkjának hajlásszögét!

536*. Egy négyszög átlói kölcsönösen merőlegesek, hosszuk pedig d_1 és d_2. A négyszög vetülete olyan rombusz, melynek oldala a és hegyesszöge α.
Határozd meg a négyszög síkjának és a rombusz síkjának a hajlásszögét, ha:
1) $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 9$ cm, $a = 6$ cm, $\alpha = 30°$;
2) $d_1 = 16$ cm, $d_2 = 8$ cm, $a = 8$ cm, $\alpha = 60°$!

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

537. A villanyoszloptól a lakóházig két drótot kell kihúzni (284. ábra). Az villanyoszlopon a drótot 9 m magasan kell rögzíteni, a ház falán 4 m magasan.

Mennyi drótot kell felhasználni, ha az oszlop 20 méterre van a háztól és 6%-ot rá kell hagyni a vezeték kilengésére?

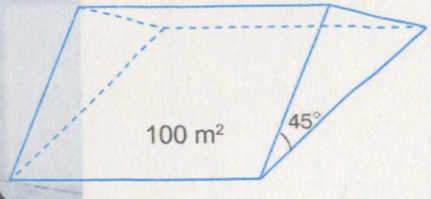
538. Egy épület sátortetőjének hajlásszöge 45°, az alap területe 100 m^2 (285. ábra).

Határozd meg, hány négyzetméter cserép kell a tető befedéséhez, ha 6%-ot számolunk a hulladékra!



284. ábra





285. ábra

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK

1. Fogalmazd meg, mi a síkra merőleges egyenes!
2. Fogalmazd meg és bizonyítsd be az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét!
3. Fogalmazd meg a merőleges és a ferde tulajdonságát!
4. Fogalmazd meg a három merőleges tételét!
5. Definiáld az egyenes és a sík hajlásszögét!
6. Bizonyítsd be, ha egy sík merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, akkor merőleges a másik egyenesre is!
7. Bizonyítsd be, ha egy egyenes merőleges két párhuzamos sík egyikére, akkor merőleges a másik síkra is!
8. Definiáld a síkok hajlásszögét!
   Mely síkok merőlegesek?
9. Fogalmazd meg és bizonyítsd be a síkok merőlegességének ismertetőjelét!
10. Mi az ortogonális vetület?

TESZTFELADATOK

Figyelmesen olvasd el a kérdéseket, és jelöld ki a helyes választ! A teszt kitöltésére 10–15 perc áll rendelkezésedre.

№ 1

1° A CD egyenes merőleges az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) AC oldalára. Nevezd meg az alábbi egyenesek és síkok közül azokat, amelyek merőlegesek egymásra!

A. CD egyenes és ABC sík. **B.** BC egyenes és ACD sík.
C. AB egyenes és BCD sík. **D.** AC egyenes és BCD sík.

2° A síkon kívüli pontból a síkra egy merőlegest és egy ferdét húztak, melyek hossza 12 cm és 15 cm. Határozd meg a ferde vetületét!

A. 8 cm. **B.** 81 cm. **C.** 9 cm. **D.** 3 cm.

3° Egy pont 8 cm-re van egy síktól. Határozd meg az ebből a pontból húzott ferde hosszát, ha az 30°-os szöget zár be a síkkal!

A. 4 cm. **B.** 16 cm. **C.** 12 cm. **D.** 24 cm.

4 A CM egyenes merőleges az $ABCD$ négyzet síkjára. A négyzet oldala 2 cm, $CM = 1$ cm. Határozd meg az M pont és a négyzet A csúcsának távolságát!

A. 3 cm. **B.** 9 cm. **C.** $2\sqrt{2}$ cm. **D.** 5 cm.

5* Az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög C derékszögének csúcsába a háromszög síkjára CM merőlegest állítottak. Határozd meg az M pont és az AB átfogó távolságát, ha $AC = 2$ cm, $CM = 1$ cm!

A. 3 cm. **B.** $\sqrt{3}$ cm. **C.** 4 cm. **D.** 1 cm.

TESZTFELADATOK

№ 2

1° Az AB egyenes párhuzamos az α síkkal. Az A pontból az α síkra AD merőlegest bocsátottak. A B ponton át az AD egyenessel párhuzamos egyenest húztak, amely a C pontban metszi az α síkot. Milyen fajtájú az $ABCD$ négyszög?

A. Tetszőleges négyszög. **B.** Trapéz. **C.** Rombusz. **D.** Téglalap.

2° Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka. Határozd meg az $ABCD$ alaplap és az A_1B_1CD metszet területét!

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 30°.

3° Az $ABCD$ és ABC_1D_1 négyzet síkjai kölcsönösen merőlegesek. Határozd meg a D és a D_1 pont távolságát, ha $AB = 9$ cm!

A. $9\sqrt{2}$ cm. **B.** 9 cm. **C.** 8 cm. **D.** $8\sqrt{2}$ cm.

4 A CM egyenes merőleges az ABC derékszögű háromszög síkjára ($C\angle = 90°$). Határozd meg a CM és az AB egyenes távolságát, a háromszög befogói 6 cm és 8 cm!

A. 4,8 cm. **B.** 7 cm. **C.** 5,8 cm. **D.** 10 cm.

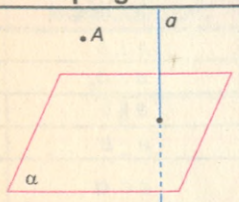
5* Két egyenlőszárú derékszögű háromszögnek közös az átfogója. A háromszögek síkjai kölcsönösen merőlegesek.
Határozd meg a háromszögek derékszögei csúcsának távolságát, ha az átfogó $12\sqrt{2}$ cm!

A. 10 cm. **B.** 12 cm. **C.** 24 cm. **D.** $6\sqrt{2}$ cm.

BEVEZETÉS A TÉRMÉRTANBA

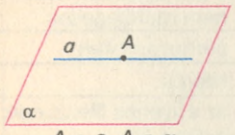
FŐBB FOGALMAK

Alapfogalmak

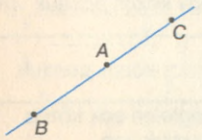


A pont, a egyenes, α sík

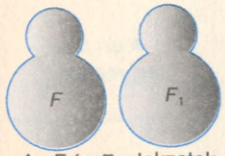
Alaprelációk



$A \in a$, $A \in \alpha$, az a egyenes illeszkedik az α síkra

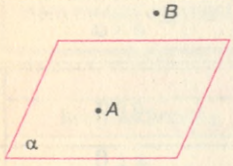


Az A pont a B és C pont között van

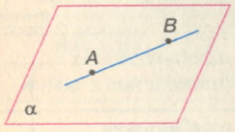


Az F és F_1 alakzatok egybevágók, egymásra téve fedik egymást

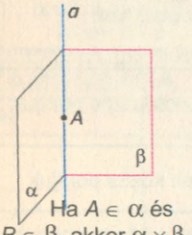
A térmértan axiómái és azok következményei



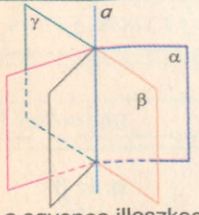
$A \in \alpha$, $B \notin \alpha$



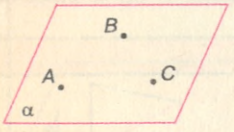
Ha $A \in \alpha$ és $B \in \alpha$, akkor AB illeszkedik az α síkra



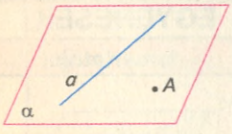
Ha $A \in \alpha$ és $B \in \beta$, akkor $\alpha \times \beta$



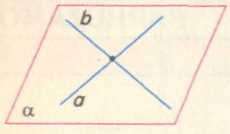
Az a egyenes illeszkedik az α, β, γ... síkra



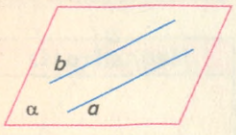
Az ABC sík egyetlen



$A \notin \alpha$
Az α sík egyetlen



$a \times b$
Az α sík egyetlen

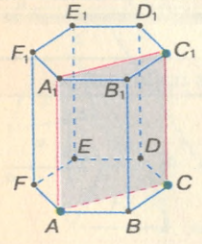


$a \parallel b$
Az α sík egyetlen

SOKLAPOK ÉS METSZETEIK

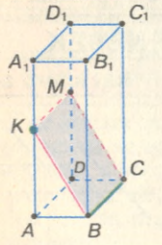
Egyenes hasáb

n-oldalú



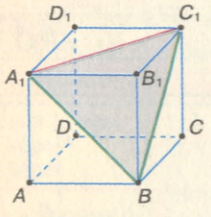
Alaplap – n-szög, oldallapok – téglalapok, az ACC_1 sík – C és C_1 pontokra fektetett metsző sík ACC_1A_1 – metszet

Derékszögű parallelepipedon, téglatest



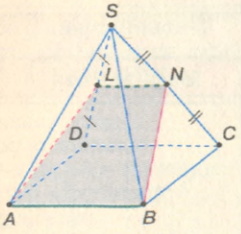
Alaplap – téglalap, oldallapok – téglalapok, a CBK sík – a CB egyenesre és K pontra fektetett metsző sík, $CBKM$ – metszet

Kocka



Alaplap – négyzet, oldallapok – négyzetek, az A_1BC_1 sík – a BC_1 és BA_1 egyenesekre fektetett metsző sík, BC_1A_1 – metszet

Gúla



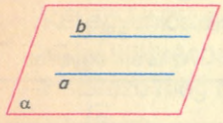
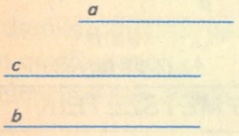
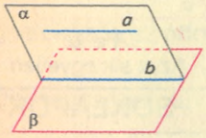
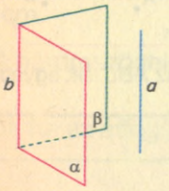
Alaplap – n-szög, oldallapok – háromszögek, az ABN sík – az AB és LN párhuzamos egyenesekre fektetett metsző sík, $ABNL$ – metszet

AZ EGYENES ÉS A SÍK PÁRHUZAMOSSÁGA

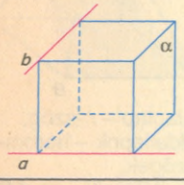
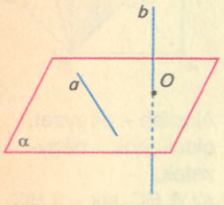
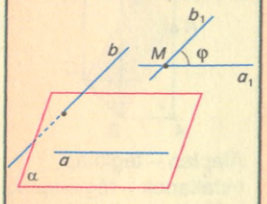
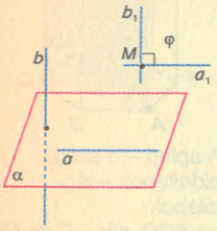
AZ EGYENES ÉS A SÍK KÖLCSÖNÖS HELYZETE

Alakzat	Kölcsönös helyzet		Jelölés
a és b egyenes	egy közös pontjuk van	merőlegesek	$a \perp b$
		nem merőlegesek	$a \times b$
	nincs közös pontjuk	párhuzamosak	$a \parallel b$
		kitérők	$a \cdot\!\!\!\!\!\!\cdot\; b$
Az a egyenes és α sík	végtelen sok közös pontjuk van	az egyenes illeszkedik a síkra	$a \in \alpha$
	egy közös pontjuk van	az egyenes merőleges a síkra	$a \perp \alpha$
		az egyenes nem merőleges a síkra	$a \times \alpha$
	nincs közös pontjuk	az egyenes párhuzamos a síkkal	$a \parallel \alpha$
α és β sík	van közös pontjuk	merőlegesek	$\alpha \perp \beta$
		nem merőlegesek	$\alpha \times \beta$
	nincs közös pontjuk	párhuzamosak	$\alpha \parallel \beta$

PÁRHUZAMOS EGYENESEK

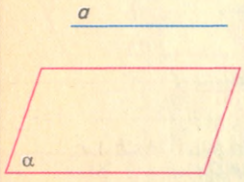
Meghatározás	Ismertetőjel		
			
$a \parallel b$, ha az a és b egyenes egy síkban van és nincs közös pontjuk	Ha $a \parallel b$ és $a \parallel c$, akkor $b \parallel c$	Ha $\alpha \times \beta$ és metszetük egy b egyenes, a illeszkedik az α síkra és $a \parallel \beta$, akkor $b \parallel a$	Ha $\alpha \times \beta$ és metszetük egy b egyenes, $a \parallel \alpha$ és $a \parallel \beta$, akkor $a \parallel b$.

KITÉRŐ EGYENESEK

Meghatározás	Ismertetőjel	Két kitérő egyenes hajlásszöge	
			
$a \cdot\!\!\!\!\!\!\cdot\; b$, ha a és b különböző síkokban van, vagy ha a és b nem metszi egymást és nem párhuzamosak	Ha az a egyenes az α síkra illeszkedik, $b \times \alpha$, $O \notin a$, akkor $a \cdot\!\!\!\!\!\!\cdot\; b$	$a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $\varphi < 90°$	$a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $\varphi = 90°$

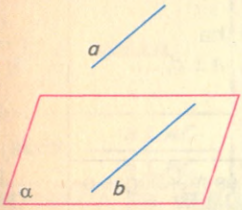
AZ EGYENES ÉS A SÍK PÁRHUZAMOSSÁGA

Meghatározás



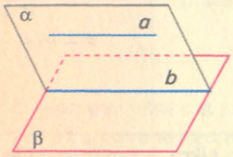
$a \parallel \alpha$, ha a és α nem metszi egymást

Ismertetőjel

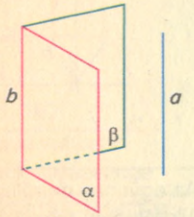


Ha a nem illeszkedik az α síkra, a b egyenes az α sík egyik egyenese és $a \parallel b$, akkor $a \parallel \alpha$

EGYMÁST METSZŐ SÍKOK TULAJDONSÁGAI



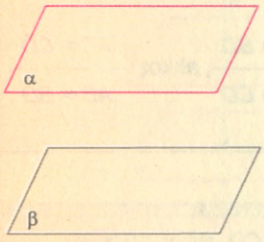
Ha $\alpha \times \beta$ és metszetük egy b egyenes, az a egyenes illeszkedik az α síkra és $a \parallel \beta$, akkor $b \parallel a$



Ha $\alpha \times \beta$ és metszetük egy b egyenes, $a \parallel \alpha$ és $a \parallel \beta$, akkor $a \parallel b$

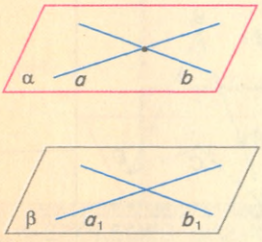
SÍKOK PÁRHUZAMOSSÁGA

Meghatározás



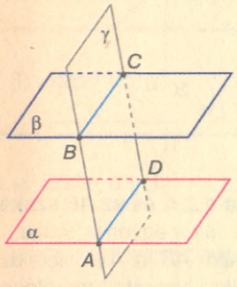
$\alpha \parallel \beta$, ha α és β nem metszi egymást

Ismertetőjel



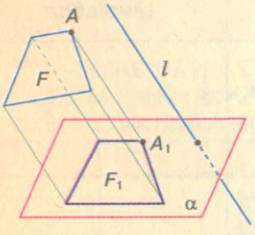
Ha a és b egyenes az α síkban van, $a \times b$, a_1 és b_1 a β sík két egyenese, $a \parallel a_1$ és $b \parallel b_1$, akkor $\alpha \parallel \beta$

Tulajdonság



Ha $\alpha \parallel \beta$, γ egy metsző sík, AD az α és γ sík metszete, BC a β és γ sík metszete, akkor $AD \parallel BC$

PÁRHUZAMOS VETÍTÉS



F – az eredeti alakzat,
α – vetítősík,
l – vetítő egyenes,
F_1 – az F vetülete

Azok a tulajdonságok, melyeket a párhuzamos vetítés MEGTART

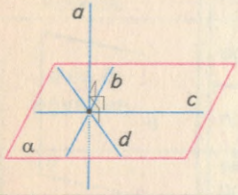
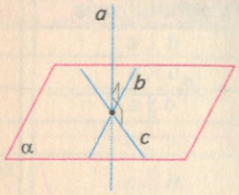
1) Az alakzat osztályozását (a pont képe pont, az egyenes képe egyenes, a háromszög képe háromszög, stb.);
2) a pont és az egyenes kölcsönös helyzetét;
3) a pontok sorrendjét az egyenesen (a szakasz belső pontjának a képe a vetület belső pontja);
4) az egyenesek párhuzamosságát;
5) egy egyenes vagy párhuzamos egyenesekre illeszkedő szakaszok egyenlőségét (arányosságát)

Azok a tulajdonságok, melyeket a párhuzamos vetítés NEM TART MEG

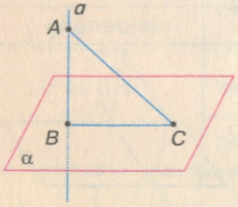
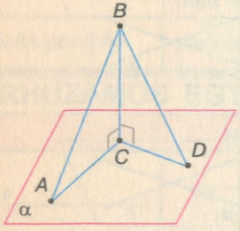
1) A szakasz hosszát;
2) a szög fokmértékét (a derékszög képe bármilyen fokmértékű szög lehet);
3) az egyenesek merőlegességét;
4) a szögek egyenlőségét (arányát);
5) az egymást metsző egyenesekre illeszkedő szakaszok egyenlőségét (arányosságát)

AZ EGYENES ÉS A SÍK MERŐLEGESSÉGE

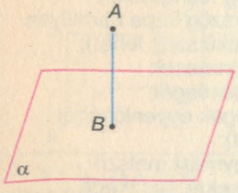
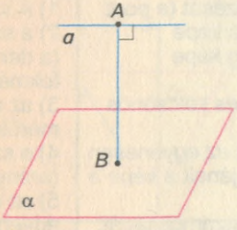
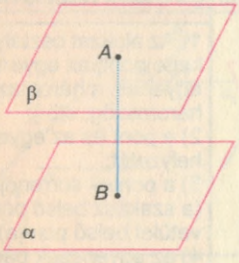
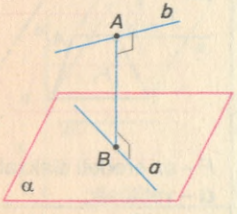
AZ EGYENES ÉS A SÍK MERŐLEGESSÉGE

Meghatározás		Ismertetőjel
	$a \perp \alpha$, ha $a \perp b$, $a \perp c$, $a \perp d$, ...	
Az egyenes merőleges a síkra, ha metszi a síkot és merőleges a sík minden, a metszéspontra illeszkedő egyenesére		Ha $a \perp b$, és $a \perp c$, akkor $a \perp \alpha$

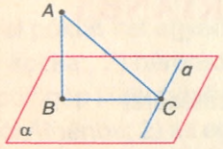
SÍKRA BOCSÁTOTT MERŐLEGES ÉS FERDE

Meghatározás	Ismertetőjel	
		$BC < AB$, $BC < BD$
		Ha $\frac{AB = BD}{AC = CD}$, akkor $\frac{AC = CD}{AB = BD}$
Ha $a \perp \alpha$ és az AB szakasz az a egyenes része, akkor AB az A pontból az α síkra bocsátott merőleges, AC ferde, BC az α, síkra eső vetülete		Ha $AC > CD$, akkor $AB > BD$

TÁVOLSÁG – AZ *AB* MERŐLEGES HOSSZA

a pont és a sík távolsága	az egyenes és a vele párhuzamos sík távolsága	párhuzamos egyenesek távolsága	kitérő egyenesek távolsága
			
$A \perp \alpha$	$AB \perp \alpha$, A pont az a egyenes tetszőleges pontja	$AB \perp \alpha$, A pont a β sík tetszőleges pontja	AB az a és a b egyenes közös merőlegese

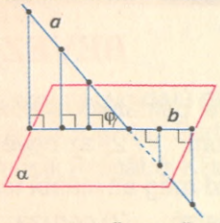
A HÁROM MERŐLEGES TÉTELE



$AB \perp \alpha$

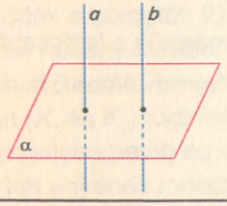
Ha $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, akkor $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$

AZ EGYENES ÉS A SÍK HAJLÁSSZÖGE



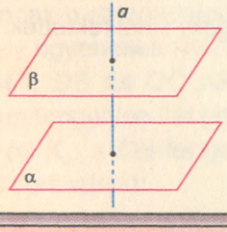
b – az a egyenes α síkra eső vetülete
φ – az a egyenes és az α sík hajlásszöge

A SÍKOK PÁRHUZAMOSSÁGA ÉS MERŐLEGESSÉGE KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉS



Ha $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, akkor $\alpha \perp b$

Ha $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, akkor $a \parallel b$

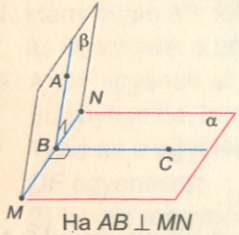


Ha $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, akkor $a \perp \alpha$

Ha $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, akkor $\alpha \parallel \beta$

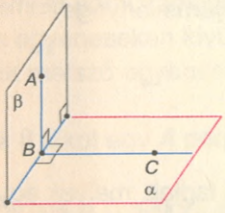
MERŐLEGES SÍKOK

Két sík hajlásszöge



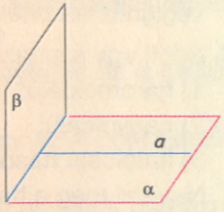
Ha $AB \perp MN$ és $CB \perp MN$, akkor az $ABC\angle$ az α és β sík hajlásszöge

Merőleges síkok



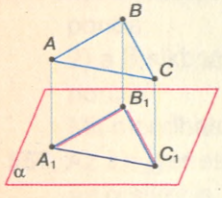
Ha $ABC\angle = 90°$, akkor $\alpha \perp \beta$

A merőlegesség ismertetőjele

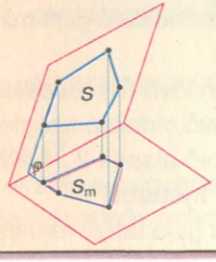


Ha a az α sík egyenese és $a \perp \beta$, akkor $\alpha \perp \beta$

ORTOGONÁLIS VETÍTÉS



Ha a vetítő egyenes merőleges a képsíkra, akkor az ilyen vetítés ortogonális



Ha S és S_m egy síkidom és ortogonális vetületének területe és φ síkjaik hajlásszöge, akkor

$S_m = S \cdot \cos \varphi$

OLDD MEG A FELADATOKAT!

BEVEZETÉS A TÉRMÉRTANBA

539. Hozz fel példát környezetből:
1) a pont; 2) az egyenes; 3) a sík szemléltetésére!

540. Nevezd meg az alábbi tárgyak három méretét:
1) vonalzó; 2) ceruza; 3) fonal!
Milyen alakja van ezeknek a tárgyaknak? Melyik méretük a legnagyobb?

541. Nevezd meg az alábbi tárgyak három méretét:
1) könyv; 2) füzet; 3) papírlap!
Milyen alakja van ezeknek a tárgyaknak? Melyik méretük a legkisebb?

542. Egy síkra illeszkednek-e egy háromoldalú gúla három élének felezőpontjai, ha ezeknek az éleknek:
1) van közös csúcsuk; 2) nincs közös csúcsuk?
Indokold meg a válaszodat!

543. Egy négyoldalú gúla három oldalélének felezőpontjára síkot fektettek. Illeszkedik-e erre a síkra:
1) a negyedik oldalél felezőpontja;
2) az alapél felezőpontja;
3) a gúla csúcsa?
Indokold meg a válaszodat!

544. Mivel magyarázható, hogy a nyitott ajtó mozog, a bezárt pedig nem?

545. Ahhoz, hogy az ács megállapítsa, simára van-e gyalulva egy deszka vagy egy léc, végignéz a szélén. Mi az eljárás lényege?

546. Adott egy szabályos:
1) háromoldalú;
2) négyoldalú;
3) hatoldalú hasáb.
Nevezd meg a hasáb azon lapjait, melyek egybevágóak!

547. Egy kocka szemben fekvő éleire síkot fektettek. Hány ilyen sík létezik? Milyen sokszögek a metszetek? Milyen az arány a metszetek területe és a kocka oldallapjának a területe között?

548. Egy szabályos háromoldalú gúla minden éle a hosszúságú. Fektess metsző síkot a gúla oldalélén és:
1) a vele szemben lévő élre bocsátott súlyvonal talppontján át;
2) a szemben fekvő oldallap szögfelezőjén át;
3) a szemben fekvő alapélt 2 : 1 arányban osztó ponton át!
Milyen sokszög a metszet?
Mi a metszet és a gúla lapjai területeinek aránya?

PÁRHUZAMOS EGYENESEK ÉS SÍKOK A TÉRBEN

549. Hozz fel példát két egyenes kölcsönös helyzetére
1) egy kocka; 2) háromoldalú egyenes hasáb; 3) egy négyoldalú gúla példáján!

550. Két repülőgép különböző magasságon repül: 1) az egyik Kijevből Párizsba, a másik Oslóból Athénba; 2) az egyik Kijevből Prágába, a másik Prágából Kijevbe. Milyen a repülőgépek útvonalainak kölcsönös helyzete?

551. Egy labdarúgó-mérkőzésen a bíró büntetőt ítélt meg a szabálytalankodó csapat ellen az ellenfél kapujától 11 m-re. Ábrázold egyenesekkel a labda és a kapus mozgását, ha:
1) belőtték a büntetőt; 2) a kapus védett!
Ábrázolj néhány további lehetőséget!

552. Az *MA*, *MB* és *MC* tengelyeket szorosan átkötötték cérnával. Az *MA* tengelyen két ponton (K_1 és K_4) rögzítették a cérnát, az *MB* tengelyen is két ponton (K_2 és K_5), az *MC* tengelyen pedig egyen (K_3). Készíts rajzot és tisztázd:
1) ha két egyenes metszi egymást, akkor melyik pontban;
2) vannak-e az egyenesek között párhuzamosak;
3) mely egyenesek kitérők!

553. Az *MA*, *DB* és *OC* párhuzamos tengelyeket szorosan átkötötték cérnával. Minden tengelyen két ponton rögzítették a cérnát: az *MA* tengelyen ezek a pontok a K_1 és K_4, a *DB* tengelyen a K_3 és K_6, az *OC* tengelyen a K_2 és K_5. Készíts rajzot és tisztázd:
1) ha két egyenes metszi egymást, akkor melyik pontban;
2) vannak-e az egyenesek között párhuzamosak;
3) mely egyenesek kitérők?

554. Hány olyan sík fektethető, amely párhuzamos két adott párhuzamos egyenessel és illeszkedik a párhuzamos egyeneseken kívüli pontra?

555. A *DF* egyenes az α és β sík metsző egyenese. Az *a* egyenes az α síkban van. Bizonyítsd be, hogy:
1) ha az *a* egyenes metszi a β síkot egy *A* pontban, akkor az *A* pont illeszkedik a *DF* egyenesre;
2) ha az *a* egyenes párhuzamos a β síkkal, akkor az *a* egyenes párhuzamos a *DF* egyenessel!

556. Az α és β sík metszi egymást. Az *A* pont az α sík egyik pontja, a *B* pont a β sík egyik pontja. Ábrázold:
1) az α síkban azt az *a* egyenest, amely párhuzamos a β síkkal és illeszkedik az *A* pontra;
2) a β síkban azt a *b* egyenest, amely párhuzamos az α síkkal és illeszkedik a *B* pontra!
Mit mondhatunk az ábrázolt egyenesekről?

557. Az *a* egyenes párhuzamos az α síkkal. A *b* és a *c* egyenes metszi az *a* egyenest és az α síkot is. Tisztázd a *b* és *c* egyenes kölcsönös helyzetét!

558. Az a egyenes illeszkedik az α síkra. A β sík metszi az α síkot. Vizsgáld meg az a egyenes és a β sík kölcsönös helyzetét!

559. Az a és a b egyenes megfelelően az α és a β sík egy-egy egyenese. Vizsgáld az a és a b egyenes kölcsönös helyzetét!

560. Milyen az egyenes és a sík kölcsönös helyzete, ha az egyenes illeszkedik egy síkkal párhuzamos síkra?

561. Mit mondhatunk el azon egyenesek kölcsönös helyzetéről, melyek párhuzamos síkokban vannak?

562. Lehet-e minden esetben egy egyenesen át az adott síkkal párhuzamos síkot fektetni?

563. Hány párhuzamos síkpár fektethető:
1) egymást metsző egyenesekre; 2) párhuzamos egyenesekre;
3) kitérő egyenesekre?

564. Mi a képe párhuzamos vetítésnél két egyenesnek, melyek:
1) metszik egymást; 2) párhuzamosak; 3) kitérők?
Vizsgáld meg az eredeti egyenesek és vetületeik kölcsönös helyzetének összes lehetőségét!

565. Milyen feltétel mellett lesz egy szakasz párhuzamosan vetített képe:
1) a szakasszal azonos hosszúságú szakasz; 2) a szakasznál rövidebb szakasz;
3) a szakasznál hosszabb szakasz?

566. A háromszögek oldalainak, szögeinek, súlyvonalainak, szögfelezőinek, magasságainak, középvonalainak mely tulajdonságait tartja meg a párhuzamos vetítés? Melyeket nem?

567. A trapéz, a parallelogramma, a téglalap, a rombusz, a négyzet mely tulajdonságait tartja meg a párhuzamos vetítés? Melyeket nem?

568. A szabályos sokszögek mely tulajdonságait tartja meg a párhuzamos vetítés? Melyeket nem? Vizsgáld meg az általad ismert szabályos sokszögeket!

569. Ábrázold egy derékszögű háromszög párhuzamos vetületét, ha a háromszög egyik hegyesszöge 60°, és meg van húzva ennek a szögnek és mellékszögének a szögfelezője!

570. Az $ABCD$ négyzet BC oldalának M felezőpontjából merőlegest húztak a:
1) BD; 2) AC; 3) DM egyenesre.
Ábrázold az $ABCD$ négyzet párhuzamos vetületét!

571. Ábrázolj egy kockát! Fektess síkot úgy, hogy a metszet:
1) háromszög; 2) négyzet; 3) téglalap;
4) parallelogramma; 5) ötszög; 6) hatszög legyen!

572. Ábrázolj egy szabályos négyoldalú gúlát! A gúla oldaléle egyenlő az alapélével. Lehet-e síkot fektetni úgy, hogy a metszet:
1) háromszög; 2) négyzet; 3) téglalap;
4) parallelogramma; 5) ötszög; 6) hatszög legyen?

573. Ábrázolj szabályos háromoldalú hasábot, melynek oldaléle a, alapéle b! Határozd meg annak a metszetnek a kerületét és a területét, melyet az alsó alaplap egyik oldalára és a felső alaplap egyik csúcsára fektettek, ha:
1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; 2) $a = 24$ cm, $b = 18$ cm;
3) $a = 2b$; 4) $a : b = 3 : 2$!

EGYENESEK ÉS SÍKOK MERŐLEGESSÉGE A TÉRBEN

574. Az $ABCD$ téglalap átlóinak O metszéspontjába a téglalap síkjára OM merőlegest állítottak. $AB = a$, $AD = b$, $MCO\angle = \alpha$. Határozd meg az OM merőleges hosszát, ha:
1) $a = 16$ cm, $b = 12$ cm, $\alpha = 60°$; 2) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $\alpha = 30°$!

575. Egy derékszögű háromszög AC és BC befogója 8 cm, illetve 12 cm. A kisebbik befogó O középpontjába a háromszög síkjára OF merőlegest húztak, melynek hossza 3 cm. Határozd meg az F pont és a háromszög csúcsainak távolságát!

576. Egy trapéz átlóinak O metszéspontjába a trapéz síkjára OF merőlegest állítottak. Az F pontot összekötötték a trapéz csúcsaival.
1) Lehet-e minden meghúzott ferde azonos hosszúságú?
2) Lehet-e a meghúzott ferdék között azonos hosszúságú?

577. Az α sík AB és CD szakaszát O metszéspontjuk felezi. A síkon kívül felvettek egy M pontot úgy, hogy $MA = MB$ és $MC = MD$. Bizonyítsd be, hogy az OM egyenes merőleges az α síkra!

578. Az A pontból egy merőlegest és egy ferdét bocsátottak az α síkra. A ferde a egységgel hosszabb a merőlegesnél és az α síkra eső vetülete b. Határozd meg a ferde hosszát, ha:
1) $a = 2$ cm, $b = 8$ cm; 2) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm!

579. Az M pontból az α síkra egy $MO = 4$ cm merőlegest húztak és MA, MD, MC ferdéket bocsátottak, melyek a merőlegessel rendre 30°-os, 45°-os és 60°-os szöget zárnak be! Határozd meg a ferdék hosszát!

580. Egy síkon kívüli pontból két ferdét húztak, melyek hossza a. A ferdék hajlásszöge 60°, vetületeik derékszöget zárnak be. Határozd meg:
1) a pont és a sík távolságát;
2) a ferdék talppontjainak a távolságát!

581. Egy rombusz oldala a, hegyesszöge α. A rombusz átlóinak O metszéspontjába a rombusz síkjára $OF = b$ merőlegest bocsátottak. Határozd meg az F pont távolságát a rombusz oldalaitól, ha:
1) $a = 12$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 30°$; 2) $a = 16$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 60°$!

582. Egy egyenlő oldalú háromszög kerülete P. Az M pont a háromszög minden oldalától b egységre van. Milyen messze van az M pont a háromszög síkjától, ha:
1) $P = 18$ cm, $b = 13$ cm; 2) $P = 9\sqrt{3}$ cm, $b = 3$ cm.

583. Az α sík a és b párhuzamos egyenesei 28 cm-re vannak egymástól. A c egyenes nem illeszkedik az α síkra, párhuzamos az a egyenessel és tőle 17 cm-re van: A c egyenes és az α sík távolsága 15 cm. Határozd meg a b és a c egyenes távolságát!

584. Egy ferde és egy derékszög szárainak hajlásszöge 60°. Határozd meg a ferde és a derékszög síkjának hajlásszögét!

585. Az ABC derékszögű háromszög befogói a és b, az F pont a háromszög minden csúcsától c egységre van. Határozd meg az FA, FB, FC egyenesek és a háromszög síkjának hajlásszögét, ha:

1) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm;
2) $a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 10\sqrt{2}$ cm!

586. Az ABC derékszögű háromszög ($C\angle = 90°$) BC befogójára α síkot fektettek. $BC = a$, $AC = b$, az A pont és az α sík távolsága c. Határozd meg az átfogó és az α sík hajlásszögét, ha:

1) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 26$ cm;
2) $a = 12$ cm, $b = 16$ cm, $c = 10$ cm!

587. Bizonyítsd be, hogy az α sík és a rajta kívül fekvő a egyenes párhuzamos, ha a sík és az egyenes is merőleges egy b egyenesre!

588. Az ABC háromszög BC oldalán át a háromszög síkjával φ szöget bezáró síkot fektettek. Határozd meg az A pont távolságát az α síktól, ha:

1) $A\angle = 90°$, $\varphi = 30°$, $AB = 20$ cm, $AC = 15$ cm;
2) $AB = 7$ cm, $AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm, $\varphi = 60°$!

589. Egy rombusz egyik oldalán át α síkot fektettek, amely 4 cm-re van a szemben lévő oldaltól. Határozd meg a rombusz α síkra eső vetületének oldalait, ha az átlók vetületei 2 cm és 8 cm!

590. Bizonyítsd be, hogy egy parallelogramma szemben lévő csúcsai α síktól való távolságának összege egyenlő!

591. Az $ABCD$ parallelogramma három csúcsa $AA_1 = 17$ cm, $BB_1 = 22$ cm és $CC_1 = 12$ cm távolságra van az α síktól. Határozd meg a negyedik csúcs és az α sík távolságát!

592. Egy derékszögű háromszög derékszögének A csúcsán át síkot fektettek a BC átfogóval párhuzamosan. Az ABC háromszögnek erre a síkra eső ortogonális vetülete az $A_1B_1C_1$ háromszög, melyben $A_1B_1 = 3$ cm, $A_1C_1 = 24$ cm, a hajlásszögük pedig 120°. Határozd meg az ABC háromszög átfogója és az $A_1B_1C_1$ háromszög síkja közötti hajlásszöget!

593. Egy sokszög területe 112 cm^2, ortogonális vetületének területe pedig 56 cm^2. Határozd meg a sokszög síkja és a vetület síkja közötti hajlásszöget!

594. Határozd meg egy rombusz α síkra eső ortogonális vetületének területét, ha a rombusz síkja és a képsíkja 60°-os szöget zár be, a rombusz átlói pedig:

1) 12 cm és 18 cm; 2) 48 cm és 50 cm!

A síkmértan ismétlése

1. 4 cm, $4\sqrt{3}$ cm (21. ábra). **2.** $\frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ (24. ábra). **3.** $ABD\Delta = CBD\Delta$ (két oldal és az általuk közbezárt szög alapján) (27. ábra). **4.** 1) 27 cm, 36 cm; 2) 26 cm, 30 cm. **5.** 1) ≈23°; 3) ≈28°. **7.** 1) 7 cm; 2) 72°. **8.** 1) 24 cm; 2) 27 cm. **9.** 1) 24 cm. **10.** *Útmutatás:* húzz a trapéz tompaszögének csúcsából az átlóval párhuzamos egyenest! **11.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 48 cm. **12.** 2) 10 cm, 10 cm. **14.** 2) 12 cm. **15.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy $MAD\Delta \sim MCB\Delta$ (két szög alapján)! **17.** *Útmutatás:* húzz a trapéz tompaszögének csúcsából a szárával párhuzamos egyenest és igazold, hogy a kapott háromszög derékszögű! **18.** *Útmutatás:* rajzolj a parallelogrammához egy ABC háromszöget! **19.** *Útmutatás:* bizonyítsd be, hogy $ABD\Delta \sim ACB\Delta$ (két szög alapján)! **32.** *Útmutatás:* először rajzold meg az R sugarú körvonalat és húzd meg az a húrt. Az egyenlőszárú háromszög köré írt körének középpontja illeszkedik a háromszög alapjához tartozó magasságra. **34.** 1) 10; 2) 5. **35.** 1) $\sqrt{85}$ cm; 2) $3\sqrt{2}$ cm. **36.** *Útmutatás:* a koordináta-rendszert úgy vedd fel, hogy az $ABC\Delta$ ($C\angle = 90°$) csúcsai az $A(0; b)$, $B(a; 0)$, $C(0; 0)$ pontok legyenek. **39.** *Útmutatás:* a koordináta-rendszert úgy vedd fel, hogy az $ABCD$ trapéz csúcsai az $A(0;0)$, $B(c; b)$, $C(a; b)$, $D(d; 0)$ pontok legyenek. A trapéz alapjai az AD és BC oldal. **40.** 40°, 60°, 80°. **41.** 1) 10 cm, 20 cm; 2) 12 cm, 24 cm. **42.** 1) $\sqrt{\frac{mS}{n}}$, $\sqrt{\frac{nS}{m}}$; 2) $\frac{mP}{2(m+n)}, \frac{nP}{2(m+n)}$. **43.** 7 cm, 15 cm, 21 cm, 23 cm. **44.** 1) 6 cm, 15 cm; 2) 8 cm. **45.** 1) 2 cm, 8 cm; 2) 8 cm, 18 cm. **46.** 35 m. **47.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy $ABC\Delta \sim A_1BC_1\Delta$ (két szög alapján). **48.** ≈3,2 km. **49.** ≈53, 6 m.

1. fejezet

1. §

62. Nem. **63.** 1) Igen; 2) igen. **73.** 2) Négy. **76.** 1) Három; 2) hat; 3) $\frac{n(n-1)}{2}$. **79.** *Útmutatás:* az igazolásnál alkalmazd azt az állítást, hogy az egymást metsző egyenesek egy síkot határoznak meg.

2. §

85. 1) Igen; 2) nem; 3) nem. **86.** 1) Nem; 2) nem mindig; 3) nem; 4) igen. **89.** 1) Háromszög; 2) négyszög; 3) hatszög. **90.** 1) 5 lap, 9 él, 6 csúcs. **91.** 1) $2n$; 2) $n + 1$. **92.** 1) $3n$; 2) $2n$. **93.** 1) $n + 2$; 2) $n + 1$. **95.** Nem. **101.** 11.

2. fejezet

3. §

115. 1) 60°; 2) 60°; 3) 70°; 4) 20°. **116.** 3 cm, vagy 4 cm vagy 5 cm; 2) 5 cm vagy 2 cm; 3) 8 cm. **118.** 1) Metszik egymást vagy kitérők; 2) metszik egymást vagy kitérők; 3) metszik egymást vagy kitérők. **121.** 1) Nem; 2) nem. **122.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **123.** 1) Például AA_1 és AD, AA_1 és AB; 2) például AA_1 és BC, AA_1 és CD. **124.** 1) 4 cm, 6 cm, 9 cm, $2\sqrt{13}$ cm, $3\sqrt{13}$ cm, $\sqrt{97}$ cm; 2) 5 cm, $5\sqrt{2}$ cm; 3) 5 cm, 12 cm, 13 cm, $12\sqrt{2}$ cm. **126.** 1) $\frac{168}{13}$ cm; 2) $4\sqrt{2}$ cm. *Útmutatás*: két esetet vizsgálj! **127.** Ha $A \notin a$, akkor: 1) végtelen sok; 2) egy; 3) végtelen sok. Ha $A \in a$, akkor 1) végtelen sok; 2) egy sem; 3) egy sem. **130.** 1) 12 pár; 2) 24 pár. **131.** 1) 3 pár; 2) 8 pár. **132.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°. **133.** 1) 15; 2) $\frac{168}{13}$. **138.** 1) 3 pár; 2) 15 pár; 3) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$. **140.** 5 cm, vagy $5\sqrt{3}$ cm, vagy 10 cm.

4. §

145. 1) Egyet; 2) egyet. **148.** Egyet. **149.** 1) CC_1; 2) DD_1; 3) C_1D_1; 4) A_1D_1. **151.** 1) Egy; 2) egy; 3) egy. **153.** Igen. 1) 6 cm; 2) 4,5 cm; 3) 16 cm. **154.** Igen. 1) 11 cm; 2) 12 cm; 3) 25 cm. **156.** Nem minden esetben. **160.** 1) Párhuzamosak; 2) párhuzamosak; 3) párhuzamosak; 4) párhuzamosak. **163.** 1) Nem; 2) nem minden esetben. **164.** Nem. **166.** 1) Egyenlő oldalú háromszög. $P = 6$ cm, $S = \sqrt{3}$ cm^2; 2) négyzet. $P = 12$ cm, $S = 9$ cm^2. **168.** 1) Párhuzamosak; 2) párhuzamosak. **169.** Parallelogramma. **174.** 1) $P = \frac{96}{3}$ cm, $S = 16$ cm^2; 2) $P = 4(1 + \sqrt{3})$ cm, $S = 4\sqrt{3}$ cm^2. **178.** *Útmutatás*: alkalmazd az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjelét! **179.** Nem.

5. §

182. 1) Párhuzamosak; 2) metszők; 3) párhuzamosak. **185.** Igen. **186.** Nem. **187.** Nem. **188.** Igen. **190.** 1) 2 cm vagy 3 cm; 2) 1,5 cm vagy 3,5 cm; 3) 1 cm vagy 2,5 cm. **191.** 1) A CD egyenes párhuzamos az α síkkal; az AD és a BC egyenes metszi az α síkot. **193.** *Útmutatás*: alkalmazd a háromszög középvonalának tulajdonságát és az egyenes, illetve a sík párhuzamosságának ismertetőjelét! **194.** 1) 18 cm; 2) 16 cm; 3) 22 cm. **195.** Nem minden esetben. **197.** Igen. **198.** 1) Párhuzamosak vagy a háromszög oldala metszi a síkot. **200.** Igen. **201.** 1) Igen; 2) igen. **202.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen; 4) igen. **204.** Nem. **207.** 1) Igen; 2) nem minden esetben. **209.** 1) Igen.

6. §

217. 1) AB; 2) AA_1; 3) CC_1. **220.** Vagy metszik egymást vagy párhuzamosak. **221.** Igen. **225.** Nem minden esetben. **226.** Nem minden esetben. **227.** Igen, ha az adott egyenesek kitérők. **228.** Metszik egymást. **229.** Lehetetlen. **230.** 1) Egyet; 2) egyet. **235.** Nem.

236. Nem minden esetben. **237.** *Útmutatás*: alkalmazd az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjelét! **240.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **241.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen. **242.** Igen. 1) egyet. 2) végtelen sokat; 4) egyet. **244.** *Útmutatás:* két esetet vizsgálj meg! **245.** Párhuzamosak. **246.** Végtelen sok. **249.** 1) Nem minden esetben; 2) nem. **253.** Párhuzamosak. Lehetséges, hogy nem párhuzamosak.

7. §

263. 1) $BM_1 = 10$, $BN_1 = 24$, $M_1N_1 = 26$; 3) $BM = 6$, $BN_1 = 10$, $M_1N_1 = 18$; 5) $BM = 1{,}5$, $BN = 2{,}5$, $MN = 2$. **264.** 1) Téglalap; 2) négyzet. **265.** 1) Négyzet; 2) egyenlő oldalú háromszög. **266.** Egyenlőszárú háromszög. 1) 35°, 35°, 110°; 2) 50°, 50°, 80°; 3) 75°, 75°, 30°. **267.** Rombusz. 1) 100°,80°, 100°, 80°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **268.** Nem minden esetben. **269.** Igen. **272.** 1) $P = a\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}\right)$, $S = \frac{9a^2}{8}$. **273.** Nem. **275.** Igen. **277.** 1) 36 cm; 2) 72 cm. **278.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 50°, 60°, 70°. **279.** 1) 120°, 25°, 35°; 2) 40°, 40°, 80°. **282.** Igen. **284.** *Útmutatás:* vizsgáld meg a pontok és a párhuzamos síkok kölcsönös helyzetének három esetét! Ha $m > n$, akkor: 1) $\frac{c}{m}(m+n)$ vagy $\frac{c}{m}(m-n)$; 2) $S_{A_1B_1C_1\Delta} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot S_{ABC\Delta}$ vagy $S_{A_1B_1C_1\Delta} = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 \cdot S_{ABC\Delta}$. Ha $m < n$, akkor: 1) $\frac{c}{m}(m+n)$ vagy $\frac{c}{m}(m-n)$; 2) $S_{A_1B_1C_1\Delta} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot S_{ABC\Delta}$ vagy $S_{A_1B_1C_1\Delta} = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 \cdot S_{ABC\Delta}$. Ha $m = n$, akkor 1) $\frac{c}{m}(m+n)$; 2) $S_{A_1B_1C_1\Delta} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot S_{ABC\Delta}$. $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ahol $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. **285.** 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 30°; 5) 30°; 6) 60°. **286.** 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 30°; 5) 30°; 6) 60°.

8. §

292. Nem. **294.** 1) 3 : 4; 2) 7 : 1; 3) 4 : 9. **295.** 1) 2 : 3; 2) 2 : 1; 3) 2 : 1. **296.** 1) 3 : 4; 2) 7 : 1; 3) 4 : 9. **297.** 1) Nem; 2) nem; 3) a B pont. **302.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **303.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **305.** 1) Nem; 2) nem; 3) igen. **311.** Szakasz vagy sokszög. **314.** 1) Az ABC derékszögű háromszög vetülete bármely olyan tetszőleges $A_1B_1C_1$ háromszög, melyben az A_1B_1 oldalt a C_1H_1 magasság 25 : 144 arányban osztja az A_1 csúcstól. **315.** 1) Az AC alapú és BH magasságú ABC egyenlőszárú háromszög vetülete bármely olyan tetszőleges $A_1B_1C_1$ háromszög, melyben a B_1H_1 szakasz súlyvonal és a H_1D_1 szakasz az oldalt 144 : 25 arányban osztja a B_1 csúcstól. **317.** 1) Annak az $ABCD$ téglalapnak a vetülete, melyben BH magasságot bocsátottak a BD átlóra, olyan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogramma, melyben a B_1D_1 átlót a B_1H_1 szakasz 9 : 16 arányban osztja

a B_1 csúcstól. **320.** *Útmutatás:* a párhuzamos vetítés megtartja az egyenesek párhuzamosságát, de nem tartja meg a szögek nagyságát. **321.** 1) Annak az *ABCD* trapéznak, melyben a hosszabb alapra *BH* magasságot bocsátottak, olyan $A_1B_1C_1D_1$ trapézt, melyben a B_1H_1 szakasz a hosszabb A_1D_1 alapot 1 : 3 arányban osztja az A_1 csúcstól. **326.** 1) Annak az *ABC* háromszögnek a vetülete, melyben meghúzták a *BK* szögfelezőt, olyan $A_1B_1C_1$ háromszög, melyben a B_1K_1 szakasz az A_1C_1 oldalt 2 : 3 arányban osztja az A_1 csúcstól. **333.** 1) Egy körbe írt négyzet vetülete olyan parallelogramma, ami egy ellipszisbe van írva és a csúcsai a körvonal két egymásra eső átmérője végpontjainak vetületei. **345.** 1) Téglatest vagy tetszőleges parallelepipedon; 2) szabályos négyoldalú gúla, vagy olyan tetszőleges gúla, melynek alaplapja parallelogramma.

3. fejezet

9. §

346. Igen. **347.** Igen. **348.** Igen. **349.** Igen. **350.** *Útmutatás:* alkalmazd az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét! **351.** *Útmutatás:* alkalmazd az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét! **352.** Derékszögű. **354.** Merőleges. **355.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a kocka minden lapja négyzet! **356.** 1) *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy $AD \perp AB$ és $AD \perp AA_1$!; 2) *útmutatás:* igazold, hogy az AB_1C_1D négyszög minden szöge derékszög! **358.** A *BC* egyenes és az *ACD* sík. **359.** A *BC* egyenes és az *ABD* sík. **360.** 1) $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, 3 cm; 2) 5 cm, 5 cm, $\sqrt{34}$ cm. **361.** 1) 13 cm; 2) 26 cm. **362.** 1) 13 cm, $3\sqrt{17}$ cm; 2) 25 cm, $3\sqrt{41}$ cm. **364.** *Útmutatás:* igazold, hogy *SO* súlyvonal! **365.** 1) 80 cm², 160 cm²; 2) 65 cm², 130 cm². **366.** 1) 12 cm; 2) $\sqrt{41}$ cm. **367.** *Útmutatás:* igazold, hogy az *AB* egyenes merőleges a *DS* és *DC* egyenesre! **370.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy $BD \perp CM$ a négyzet átlóinak tulajdonsága alapján!

371. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$. **373.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **374.** 15 cm.

10. §

378. 1) *AB*; 2) *B*; 3) *AC*; 4) *BC*. **379.** 1) 15 cm; 2) 8 cm; 3) 13 cm. **380.** 1) $AB < BC$; 2) $AD = DC$. **381.** 1) *AD*; 2) AA_1; 3) *DC*. **382.** 1) 20 cm; 2) 9 cm; 3) 12 cm. **383.** 1) 25 cm; 2) 20 cm; 3) 10 cm. **384.** 1) 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm; 2) $6\sqrt{2}$ cm, $6\sqrt{2}$ cm; 3) $4\sqrt{3}$ cm, 4 cm. **385.** 1) 12 cm, $6\sqrt{3}$ cm; 2) $5\sqrt{2}$ cm, 5 cm; 3) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm, $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ cm. **386.** 1) Végtelen sok; 2) körvonal. **387.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy egyenlő hosszúságú ferdék

vetületei egyenlők! **388.** $KB > KC$. **389.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **390.** 1) $MA = MC$; 2) $MC > MA$. **391.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 60°. **392.** 1) 3 cm, $3\sqrt{3}$ cm; 2) $4\sqrt{3}$ cm, 30°; 3) 5 cm, $5\sqrt{2}$ cm; 4) $6\sqrt{3}$ cm, 60°; 5) $7\sqrt{3}$ cm, 14 cm; 6) $14\sqrt{2}$ cm, 45°.**393.** 1) Igen; 2) nem. 3) igen. **396.** 1) 2 cm; 2) $\sqrt{6}$ cm. **397.** *Útmutatás:* először bizonyítsd be, hogy az O pont azonos távolságra van a ferdék talppontjaitól! **398.** 1) 8 cm; 2) 16 cm. **399.** 4 cm. **400.** 1) 6 cm, 15 cm; 2) 8 cm. **401.** 1) 39 cm, 45 cm; 2) 25 cm, 40 cm. **402.** 45°. **403.** 73 cm. **404.** 84 cm. **405.** *Útmutatás:* először bizonyítsd be, hogy az O pont azonos távolságra van a sokszög minden csúcsától! **406.** 37,7 m. **407.** $\approx$ 2,1 m.

11. §

410. 1) $CDC_1\angle$; 2) $BDB_1\angle$; 3) $B_1DC_1\angle$. **411.** *Útmutatás:* alkalmazd a három merőleges tételét! **412.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a négyzet átlói merőlegesek egymásra és alkalmazd a három merőleges tételét! **413.** 1) 10 cm; 2) 17 cm. **416.** *Útmutatás:* igazold, hogy a $B\angle$ derékszög, és alkalmazd a három merőleges tételét! **417.** 1) 13 cm, 20 cm; 2) 25 cm, 26 cm. **418.** *Útmutatás:* először igazold, hogy az ABM és ACM háromszögek egybevágók! **419.** 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$. **420.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$. **422.** 1) 3 cm; 2) 7 cm. **423.** 1) 10 cm; 2) 13 cm. **424.** *Útmutatás:* igazold, hogy az adott pontból a parallelogramma síkjára húzott merőleges talppontja a parallelogramma köré írt körvonal középpontja! **425.** *Útmutatás:* igazold, hogy a merőleges O talppontja azonos távolságra van a sokszög minden oldalától. **426.** 1) 24 cm; 2) $4\sqrt{7}$ cm. **427.** 6,4 cm. **428.** 13 cm. **429.** 7 cm. **430.** 9 cm^2. **431.** 60°. **432.** $3a$. **433.** 1) $4\sqrt{6}$ cm; 2) $6\sqrt{6}$ cm. **434.** 26 cm. **435.** 13 cm. **436.** 30°. **437.** *Útmutatás:* először bizonyítsd be a DBM és DBN háromszögek egybevágóságát, majd az MBO és NBO háromszögek egybevágóságát! **438.** 2,5 cm.

12. §

440. Igen. **441.** Párhuzamosak. **442.** Igen. **449.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen. **450.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **455.** Téglalap. **456.** 1) *Útmutatás:* először igazold, hogy az $ABCD$ olyan parallelogramma, melynek ADC (vagy DCD) szöge derékszög!; 2) *Útmutatás:* először igazold, hogy az ADC és BCD szögek derékszögek! **457.** Az átló párhuzamos a síkkal vagy illeszkedik a síkra. **458.** *Útmutatás:* fektess az a és a b egyenesekre β síkot és igazold, hogy az α és a β sík metsző egyenese párhuzamos a b egyenessel! **459.** 1) *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy a metszősík az oldallapokat az alappal párhuzamos szakaszokban metszi! **460.** *Útmutatás:* igazold, hogy az AM és a CN egyenesek párhuzamosak, és alkalmazd a párhuzamos síkokra merőleges egyenes

tételét! **461.** *Útmutatás:* igazold, hogy az *AM* és a *CN* egyenesek párhuzamosak, és alkalmazd a párhuzamos síkokra merőleges egyenes tételét! **462.** *Útmutatás:* először igazold, hogy az *a* egyenes merőleges az *AEF* síkra, és alkalmazd a párhuzamos egyenesekre merőleges sík tételét! **465.** *Útmutatás:* alkalmazd a trapéz középvonalának tulajdonságát! **467.** 90°, 45°, 135°, 90°.

13. §

470. 1) *SMC∠*; 2) *SNB∠*. **471.** Igen. **472.** Igen. **473.** 1) Kitérők; 2) *AC*. **474.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 90°. **475.** 1) 1 cm; 2) $2\sqrt{2}$ cm; 3) $3\sqrt{3}$ cm. **476.** *Útmutatás:* alkalmazd a síkok merőlegességének ismertetőjelét! **478.** Végtelen sok. **479.** Merőleges a síkra. **480.** 1) *Útmutatás:* alkalmazd a síkok merőlegességének tulajdonságát! 2) *útmutatás:* alkalmazd a síkok merőlegességének ismertetőjelét! **481.** *Útmutatás:* alkalmazd a síkok merőlegességének ismertetőjelét! **482.** 1) *a*; 2) *a*; 3) *a*. **483.** *Útmutatás:* először igazold, hogy a *BC* és *MN* egyenesek merőlegesek! **485.** 1) 20 cm; 2) $4\sqrt{3}$ cm; 3) $4\sqrt{2}$ cm. **486.** 1) 12 cm; 2) $4\sqrt{2}$ cm; 3) $7\sqrt{3}$ cm. **487.** 30°. **488.** 1) 30°; 2) 30°. **489.** 1) 6 cm; 2) $3\sqrt{2}$ cm; 3) $6\sqrt{3}$ cm. **490.** *Útmutatás:* alkalmazd a síkok merőlegességének ismertetőjelét! **491.** *Útmutatás:* húzz az *SAC* és *SBD* síkokban az *N* és *M* pontokból merőlegest a gúla alaplapjára! **493.** *Útmutatás:* igazold, hogy az *MO* merőleges talppontja a négyzet átlóinak metszéspontja, és alkalmazd a síkok merőlegességének ismertetőjelét! **494.** 1) $5\sqrt{2}$ cm; 2) $9\sqrt{2}$ cm; 3) $11\sqrt{2}$ cm. **495.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{3}$; 3) 60°. **496.** 1) 8 cm; 2) $5\sqrt{2}$ cm. **497.** 1) 13 cm; 2) 26 cm. **498.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **499.** 1) 12 cm; 2) 9,6 cm. **500.** 1) 10 cm; 2) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm. **501.** 1) 60°; 2) 45°; 3) 30°. **502.** 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\frac{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}$; 3) $2\sqrt{a^2+ab\sqrt{3}+b^2}$. **503.** $\frac{a}{2}$. **504.** ≈ 6,7 cm. **505.** 4,8 cm. **506.** 14°29′. **508.** ≈ 33°.

14. §

509. Háromszög, szakasz. **511.** 1) Igen; 2) igen; 3) igen. **512.** 1) $\sqrt{a^2-b^2}$; 2) $\frac{b}{2}$. **513.** 1) 14 cm; 2) 10 cm; 3) 22 cm. **514.** 1) 11 cm; 2) 20 cm. **515.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **516.** 1) 16 cm; 2) 20 cm. **517.** 1) 18 cm²; 36 cm²; 3) $10\sqrt{2}$ cm². **518.** 1) 5 cm; 2) 12 cm. **519.** 1) 2 cm; 2) 3 cm. **520.** 1) 24 cm; 2) 12 cm. **521.** 1) 6 cm; 2) $4\sqrt{3}$ cm; 3) $8\sqrt{2}$ cm. **522.** 1) 8 cm; 2) 4 cm; 3) 6 cm. **523.** 1) 9 cm, 16 cm, 25 cm; 2) 8 cm, $6\sqrt{15}$ cm, 26 cm. **524.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **525.** 1) 60°; 2) 96 cm²; 3) 48 cm²; 4) 32 cm²; 5) 60°. **526.** 1) 32 cm²; 2) $4\sqrt{2}$ cm²; 3) $6\sqrt{3}$ cm².

527. 1) 42 cm²; 2) 42 cm²; 3) $144\sqrt{3}$ cm². **528.** 1) 40 cm²; 2) 54 cm²; 3) $18\sqrt{3}$ cm². **529.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **530.** 1) 3 cm²; 2) 4,5 cm²; 3) $4\sqrt{6}$ cm². **531.** 1) 6 cm vagy 9 cm; 2) 6 cm vagy 10 cm. **532.** $b, \sqrt{b^2+2a}$. **533.** 19 cm, 17 cm. **534.** 1) $\frac{am}{m+n}$; 2) $\frac{b(m+n)}{m}$. **535.** 45°. **536.** 1) 60°; 2) 30°. **537.** 21,8 m. **538.** ≈ 300 m².

A tanultak ismétlése

542. 1) Igen. **544.** *Útmutatás:* vedd figyelembe, hogy egy ponton és egy egyenesre csak egy sík fektethető! **547.** 6. Téglalap, $\sqrt{2}$: 1. **548.** 1) Háromszög. $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$. **554.** Végtelen sok. **557.** Vagy metszők vagy párhuzamosak. **558.** Az *a* egyenes vagy a β síkban van, vagy metszi a síkot, vagy párhuzamos a síkkal. **560.** Párhuzamosak. **561.** Vagy párhuzamosak, vagy kitérők. **562.** Igen, ha az egyenes nem metszi a síkot. **563.** 2) Végtelen sok; 3) egyet. **564.** 1) Két egymást metsző egyenes vagy egy egyenes; 2) vagy két párhuzamos egyenes, vagy egy egyenes, vagy két pont. **565.** 1) A képsíkkal párhuzamos szakasz. **573.** 1) 28 cm, $8\sqrt{21}$ cm². **574.** 1) $10\sqrt{3}$ cm; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. **575.** 5 cm, 5 cm, 13 cm. **576.** 1) Nem; 2) lehet, ha a trapéz egyenlőszárú vagy derékszögű. **577.** *Útmutatás:* igazold, hogy az *OM* szakasz az *AMC* háromszög súlyvonala! Ekkor $OM \perp AB$. Hasonlóképpen $OM \perp CD$, majd alkalmazd az egyenes és a sík merőlegességének ismertetőjelét. **578.** 1) 17 cm; 2) 7,5 cm. **579.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm, 8 cm. **580.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) *a*. **581.** 1) 5 cm; 2) 8 cm. **582.** 1) $\sqrt{166}$. **584.** 45°. **587.** *Útmutatás:* fektess az *a* és *b* egyenesre síkot! **588.** 1) 6 cm. **589.** 3 cm, 5 cm. **590.** *Útmutatás:* húzz merőlegest az átlók metszéspontjába a parallelogramma síkjára; mutasd meg, hogy a merőleges hossza egyenlő a szemben fekvő csúcsokba állított merőlegesek hosszainak számtani közepével! **591.** 7 cm. **592.** 6 cm. **593.** 60°. **594.** 1) 54 cm².

Alakzat 6, 28
Alaplap 6, 28
– fogalma 6, 28
Analógia 83
Arány 6, 28
– alapok aránya 6, 28
Axióma 6, 28
– síkmértani axiómák 6 – 7
– térmértani axiómák 29 – 30
Axiometrikus felépítés 28, 53

Csúcs 38
– gúláé 38
– hasábé 38

Egymásra helyezés 6, 28
Egyenesek 6
– kitérők 51
– metszők 50
– merőleges 50
– párhuzamosak 51
– síkkal párhuzamos 66
– síkra merőleges 108
– vetítő 90
Eredet alakzat 90
Ekvivalens állítások 32

Él 38
– oldal- 38
– alap- 38

Ferde 115
– vetülete 115

Gúla 37
– alaplapja 37
– magassága 39
– csúcsa 38
– oldallapja 37
– szabályos 39

Hajlásszög 137
– egyenesé és síké 124
– két síké 137
– két egyenesé 50
– kitérő egyeneseké 52
Hasáb 37
– alaplapja 37
– egyenes 37
– oldallapja 37
– oldaléle 37

Illeszkedik 6, 28
– a síkra 28
Indirekt bizonyítás 66
Ismertetőjel 74
– egyenes és sík merőlegessége 108
– egyenes és sík párhuzamossága 66
– egyenesek párhuzamossága 7, 59
– síkok merőlegessége 137
– síkok párhuzamossága 74

Kép 90
– alakzaté 90
Közte van 6, 28

Lap 37
– sokszögé 37
– szomszédos 38

Metszet 39
– sokszögé 39
Metsző sík 28
– párhuzamos síkoké 81

– sokszögeké 39
Merőleges 114
– a síkra 114
– az egyenesre 50
– és ferde 115

n-szögű hasáb 37
– gúla 37

Oldallap 37
– hasábé 37
– gúláé 37

Pont 6

Távolság 116
– egyenesé és a vele párhuzamos síké 116
– kitérő egyeneseké 139
– párhuzamos egyeneseké 52
– párhuzamos síkoké 116
– ponté és síké 116
– ponté és egyenesé 51
Térmértan 28
Tétel 123
– a három merőlegesről 122
– – – megfordítása 123
– – a merőlegesről és a ferde tulajdonságáról 115
– a metsző síkok tulajdonságáról 72
– az ortogonális vetület területéről 146
– egymást metsző egyenesek hajlásszögének tulajdonságáról 82
– merőleges egyenesek tulajdonságáról 131
– párhuzamos egyenesekre merőleges síkról 130
– párhuzamos síkokat metsző sík tulajdonságáról 81
Tulajdonság 75
– párhuzamos síkoké 75
– egyeneseké 58
– merőleges síkoké 138

Sík 28
Síkok 74
– merőlegesek 137
– metszők 72
– párhuzamosak 74
Síkmértan 6
Soklapok Auler-féle jellemzője 41
Sokszög 37
Sokszög lapjai 37

Vetítés 90
– iránya 90
– ortogonális, derékszögű 145
– párhuzamos 90
Vetület 90
– ortogonális 90
– egyenesé síkra 124
Vetítősík 90

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів
із навчанням угорською мовою

Академічний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української
Перекладач *Юдіт Імріївна Кулін*
Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *З. З. Кулін*
Художнє оформлення, макет *А. М. Віксенко*
Концепції: дизайну, художнього оформлення *Ю. Б. Кузнецов*

Малюнки художників *Е. Авраменка, О. Дядика*
Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, Е. Золотарьова, О. Гордієвич*
Коректор *І. О. Петро*

Формат 70×100/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Друк офс. Умов. друк. арк. 14,3
Обл.-вид. арк. 15,0. Наклад 1735 пр. Вид № 30. Зам. №181П.

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2980 від 19.09.2007
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк ВАТ „Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
e-mail: patent@uzh.ukrtel.net

A tankönyv állapota

Sor-szám	Név	Tanév	A tankönyv állapota		Minősítés
			a tanév kezdetén	a tanév végén	
1					
2					
3					
4					
5					

Hegyesszögek szinusz és koszinusz értékei

α	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\cos\alpha$ $\sin\beta$	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°

Hegyesszögek tangens értékei

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	57°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Kétjegyű természetes számok négyzetei 10-től 99-ig

Tízesek	Egyesek									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

A képlet megnevezése	Képlet	Jelölések
Mellékszögek összege	$\alpha + \beta = 180°$	α, β mellékszögek
A háromszögek belső szögeinek összege	$A\angle + B\angle + C\angle = 180°$	A, B és C a háromszög belső szögei
A négyszögek belső szögeinek összege	$A\angle + B\angle + C\angle + D\angle = 360°$	A, B, C és D a négyszög belső szögei
Az n-szög belső szögeinek összege	$A\angle + B\angle + \ldots + F\angle = 180°(n-2)$	A, B, C, …, F az n-szög belső szögei
Az n-szög kerülete	$P = AB + BC + \ldots + FA$	P – kerület, AB, BC, …, EF az n-szög oldalai
A háromszög középvonalának hossza	$m = \frac{a}{2}$	m – középvonal, a – a középvonallal párhuzamos oldal
A trapéz középvonalának hossza	$n = \frac{a+b}{2}$	n – középvonal, a, b – alapok
A négyzet területe	$S = a^2$	a – oldal
	$S = \frac{1}{2}d^2$	d – átló
A téglalap területe	$S = ab$	a, b – oldalak
A parallelogramma és a rombusz területe	$S = ah$	a – oldal, h – a hozzá tartozó magasság
A rombusz területe (másik képlet)	$S = \frac{1}{2}d_1d_2$	d_1, d_2 – átlók

KÉPLETEI

A képlet megnevezése	Képlet	Jelölések
A háromszög területe	$S = \frac{1}{2}ah$	a – oldal, h – a hozzá tartozó magasság
	$S = mh$	m – középvonal, h – a középvonallal párhuzamos oldalhoz tartozó magasság
	$S = pr$	p – félkerület, r – beírt körének sugara
A trapéz területe	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$	a, b – alapok, h – magasság
	$S = nh$	n – középvonal, h – magasság
Arányosság a derékszögű háromszögben	$h_c^2 = a_c \cdot b_c$	h_c – az átfogóhoz tartozó magasság, a_c, b_c – a befogók átfogóra eső vetülete
	$a^2 = c \cdot a_c$	a – befogó, c – átfogó, a_c – a befogók átfogóra eső vetülete
Pitagorasz tétele	$c^2 = a^2 + b^2$	c – átfogó, a, b – befogók
A derékszögű háromszög oldalai és szögei közötti összefüggés	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin\alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$	c – átfogó, a – az α szöggel szembeni befogó
	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $c = \frac{b}{\cos\alpha}$	c – átfogó, b – az α szög melletti befogó
	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$	a – az α szöggel szembeni oldal, b – az α szög melletti oldal